Title	繰返し演算子を含むプロセス代数の完全公理化
Author(s)	加藤雅英
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1030
Rights	
Description	小野寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

繰返し演算子を含むプロセス代数の完全公理化

指導教官　小野寛晰教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

加藤雅英

1997 年 2 月 14 日

目 次

第 1 章

序論

1.1 背景

プロセス代数とは、現実世界でのプロセスを、構文論的には形式体系として、意味論的には代数としてモデル化した数学的対象である。

プロセスにはいくつかの異なる見方やとらえ方があり、広い意味でプロセス代数と呼ばれる体系は多数ある。たとえば、CCS(Calculus of Communicating Systems) [4]、CSP(Communicating Sequential Processes) [5]、ACP(Algebra of Communicating Processes) [3] などがよく知られている。これらの言語の構文上の特徴は、次のように代数的にプロセスを表現している点である。まず基本プロセスを表す定数記号およびプロセスを合成するための演算記号の集合 (シグニチャ) を定め、それから構成される代数項としてプロセスを定義する。

構文上で定義されたものに対しての意味は、プロセス間に遷移関係を与えることによって表現している。そして、プロセス間に等価関係を導入することにより、プロセスに対しての意味的な概念を与えている。

ところで、プロセスの研究において、2 つのプロセスが同じふるまいをするかどうかという双模倣という概念は重要なものである。したがって、プロセスの双模倣等価性に対して健全かつ完全な公理を定めることは有効である。

近年の研究で、標準的なプロセス代数に対し新たな演算子を加えるという試みがなされている。1994 年に Bergstra、Bethke と Ponse によって、ACP へ繰返し演算子と入れ子演算子が加えられた [1]。さらに、BPA(Basic Process Algebra) にこの繰返し演算子に関

する公理を加えたものについての完全性が、1994 年に Fokkink と Zantem によって証明されている [2]。

本研究では、1993 年に Christensen により導入された BPP(Basic Parallel Process) に対し、さらに演算子 $\|$ に関する繰返し演算を導入した場合についての公理化の試みを行なった。その結果、新たに加えた繰返し演算に対してのアクション関係を定義することができたが、無限個のアクション関係が必要となることがわかった。また、BPA に加えた繰返し演算子に関する公理と同じように、新たに加えた繰返し演算子に関する公理を定義した場合には健全性を満たさないことが反例を示すことによりわかった。ここに、BPA を BPP の違いすなわち逐次合成と並列合成の違いを知ることができた。

1.2 本論文の構成

本章では、プロセス代数の概略および本研究の背景について述べた。第 2 章では BPA、BPP を定義し、プロセス間の関係である双模倣等価性について述べる。さらに、無限のプロセスを表現する方法について、とくに Kleene のスター演算子について述べる。第 3 章では、 [1]、 [2] の結果について概説する。 [1] では、Kleene のスター演算子を種々のプロセス代数に導入している。 [2] では、BPA に Kleene のスター演算子を導入した体系 BPA*の完全性を示している。第 4 章では、本研究の主題である、$\|$ の繰返しを行なう演算子を導入した BPP についての考察を行なう。はじめに、この演算子の考え方について説明し、そこで生じる問題を指摘する。その結果、考え方の違いにより二通りの公理系とアクション関係が得られるが、このことについて述べる。第 5 章では本研究のまとめを行なう。

第 2 章

BPA と BPP

本章でははじめに、BPA と BPP という二つのプロセス代数の体系について説明する。そこでは、公理およびアクション関係を定義している。つぎに、二つのプロセスの間の関係である双模倣等価性について説明する。この双模倣という概念はプロセスの研究で重要な概念となっている。さらに、無限ふるまいをなすプロセスを表現する方法について説明する。

2.1 BPA

BPA(Basic Process Algebra) は、全てのプロセス代数の基本となる代数的理論である。

BPA の公理は表 2.1のように A1-A5 で与えられる。ここで等号に関する公理 E1-E5 はつねに仮定しておく。

A1	$x + y$	$=$	$y + x$
A2	$(x + y) + z$	$=$	$x + (y + z)$
A3	$x + x$	$=$	x
A4	$(x + y)z$	$=$	$xz + yz$
A5	$(xy)z$	$=$	$x(yz)$

表 2.1: BPA の公理

E1 $x = x$

E2 $x = y$ ならば $y = x$

E3 $x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$

E4 $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ ならば $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

E5 $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ ならば $x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2$

表 2.2: 等号に関する公理

BPA は+と·との二つの二項演算子と定数 $a, b, c, d, \cdots$ を持つ。定数の集合を A とする。記号·は省略される。演算子の結合の強さは · が+よりも強いものとし、混乱の生ずる恐れがないときには () は省略される。

表 2.1で x, y, zという変数が含まれているが、これらには全称限量子がついているものと解釈する。もしも $\mathcal{M}$ が BPA のモデルならば、その領域のおのおのの要素をプロセス (process) と呼ぶ。つまり、変数は BPA の与えられたモデルからの任意のプロセスを表している。

つぎに、BPA に対して直観的な意味を与える。定数 $a, b, c, d, e, \cdots$はアトミックアクション (atomic action) と呼ばれ、もうこれ以上分解することのできないプロセスの基本単位である。

記号·は逐次合成 (sequential composition) と呼ばれ、$x \cdot y$ ははじめ x を実行し次に yを実行するプロセスを表す。

記号+は選択演算子 (alternative composition) と呼ばれ、$x + y$は x を実行するかまたは yを実行する (両方は実行しない) プロセスを表す。

これらの演算子は、表 2.1の BPA の公理により次のことが仮定されている。

- A1(交換律) x と yとの選択は、yと x との選択と同じである
- A2(結合律) x と、yと zとを選択したものとの選択は、zと、x と yとを選択したものとの選択と同じである
- A3(巾等律) x と x との選択は、x を選択したことになる
- A4(右分配律) x と yとの選択につづいて zを実行するのは、x に続いて zを実行するのと、yに続いて zを実行するのとの選択と同じである

- A5(結合律) x につづいて yを実行したものにつづいて zを実行するのと、x につづいて yつづいて zを実行したものを実行するのは同じである

ここで、公理 A4(右分配律) は仮定しているのに、左分配律

$$x(y+z) = xy + xz$$

は仮定していない。左辺は x を実行した後 yを選択して実行することができるが、右辺ではもしも yzを選択した場合には x の選択後に yを選択することができないからである。これを、図 2.1で示す。プロセスを図的に表現する場合には、木を用いて表し実行するプロセスを枝にラベルとして付けておく。

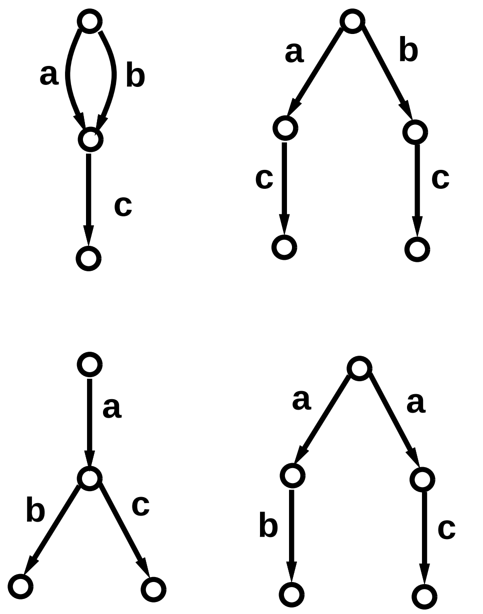

図 2.1: 右分配律と左分配律

つぎに、アクション関係 (action relation) を定義する。これは、BPA の項の集合上で定義されている関係であり、二項関係$\xrightarrow{a}$と、単項関係$\xrightarrow{a}\surd$から成り立っていて、表 2.3のように定義されている。

$p \xrightarrow{a} q$は、プロセス p はアクション a を実行することができ、実行した結果 qになることを表す。

$p \xrightarrow{a} \surd$は、プロセス p はアクション a を実行すると成功終了することを表している。すなわち、$\surd$は成功終了を表す。

$$a \in A \qquad a \xrightarrow{a} \surd$$

$$+ \qquad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{x+y \xrightarrow{a} x'} \quad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x+y \xrightarrow{a} y'} \quad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x+y \xrightarrow{a} \surd} \quad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x+y \xrightarrow{a} \surd}$$

$$\cdot \qquad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{x \cdot y \xrightarrow{a} x' \cdot y} \quad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{a} y}$$

表 2.3: BPA の規則

ここで、アクション関係は$\frac{AR_1}{AR_2}$という形をしているが、これは AR_1ならば AR_2を意味している。たとえば、$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x+y \xrightarrow{a} x'}$ は、x はアクション a を実行することができ実行した結果 x'になるならば、$x+y$ はアクション a を実行することができ実行した結果 x'となることを意味する。$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x+y \xrightarrow{a} \surd}$は、$x$ はアクション a を実行すると成功終了するならば、$x+y$はアクション a を実行すると成功終了することを意味する。$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x \cdot y \xrightarrow{a} x' \cdot y}$ は、x はアクション a を実行することができ実行した結果 x'になるならば、$x \cdot y$ はアクション a を実行することができ実行した結果 $x' \cdot y$となることを意味する。$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{a} y}$ は、x はアクション a を実行すると成功終了するならば、$x+y$はアクション a を実行すると yとなることを意味する。

例として、$(a+bb)c$ のアクション関係を図 2.2に示す。この図では、実行可能なアクション関係である $(a+bb)c \xrightarrow{a} c \xrightarrow{c} \surd$と $(a+bb)c \xrightarrow{b} bc \xrightarrow{b} c \xrightarrow{c} \surd$ とを表している。

2.2 BPP

BPP(Basic Parallel Process) は、+と $\|$ の二つの二項演算子を持ち、定数 $a, b, c, e, \cdots$を持つ。定数の集合を A とする。BPP の公理は表 2.4のようになる。

演算子の結合の強さは $\|$ が+よりも強いものとし、混乱の生ずる恐れがないときには () は省略される。

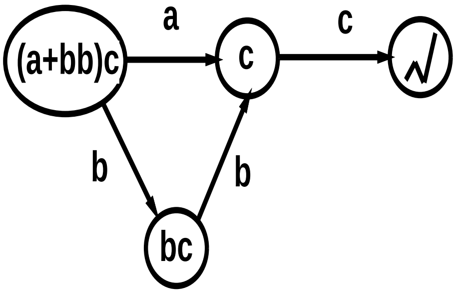

図 2.2: $(a+bb)c$

A1	$x+y$	$=$	$y+x$
A2	$(x+y)+z$	$=$	$x+(y+z)$
A3	$x+x$	$=$	x
A6	$x \parallel y$	$=$	$y \parallel x$
A7	$x \parallel (y \parallel z)$	$=$	$(x \parallel y) \parallel z$

表 2.4: BPP の公理

つぎに、BPA のときと同様に、BPP に対して直観的な意味を与える。定数$a, b, c, d, e, \cdots$ はアトミックアクションを表す。

記号 $\|$ は並列合成 (parallel composition) あるいはマージ (merge) と呼ばれ、$x \| y$は x と yとを並列に実行するプロセスを表す。たとえば、アトミックアクション a、b に対し、$a \| b$ は $ab + ba$ を表す。

表 2.4の BPP の公理により次のことが仮定されている。

- A6(交換律) x と yを並列に実行するのは、yと x を並列に実行するのと同じである
- A7(結合律) x と、yと zを並列に実行するのを並列に実行するのは、x と yを並列に実行するのと、zを並列に実行するのと同じである

ここで、分配律

$$(x + y) \| z = x \| z + y \| z$$

は仮定されていないことに注意する。それは、たとえばアトミックアクション a、b、c に対し、$(a + b) \| c$ は、$c(a + b) + ac + bc$ を表し、$a \| c + b \| c$ は、$ac + ca + bc + cb$ を表しているが、これらは同じでないからである。

つぎに、アクション関係を図 2.5に示す。

$$a \in A \qquad a \xrightarrow{a} \surd$$

$$+ \qquad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{x + y \xrightarrow{a} x'} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x + y \xrightarrow{a} y'} \qquad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x + y \xrightarrow{a} \surd} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x + y \xrightarrow{a} \surd}$$

$$\| \qquad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{x \| y \xrightarrow{a} x' \| y} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x \| y \xrightarrow{a} x \| y'} \qquad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \| y \xrightarrow{a} y} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x \| y \xrightarrow{a} x}$$

表 2.5: BPP の規則

ここで、$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x \| y \xrightarrow{a} x' \| y}$ は、x はアクション a を実行することができ実行した結果がx' になるならば、$x \| y$はアクション a を実行することができ実行した結果 $x' \| y$となることを意味する。$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \| y \xrightarrow{a} y}$ は、x はアクション a を実行すると成功終了するならば、$x \| y$ はアクション a を実行すると yになることを意味する。

2.3 双模倣等価性

定義 2.1 プロセス間の関係 R をつぎの条件を満たすとき双模倣 *(bisimulation)* という。

$R(p,q)$ のとき、任意の $a \in A$ について

1. $p \xrightarrow{a} p'$ ならば $q \xrightarrow{a} q'$ かつ $R(p',q')$ となる q' が存在する
2. $q \xrightarrow{a} q'$ ならば、$p \xrightarrow{a} p'$ かつ $R(p',q')$ となる p' が存在する
3. $p \xrightarrow{a} \surd$ のとき、またそのときのみ $q \xrightarrow{a} \surd$ である

二つのプロセス p と q について、$R(p,q)$ となるような関係 R が存在するとき、二つのプロセス p と q は双模倣等価であるといい、これを $p \leftrightarrows q$ と書く。

双模倣の定義を図で示すと図 2.3のようになる。

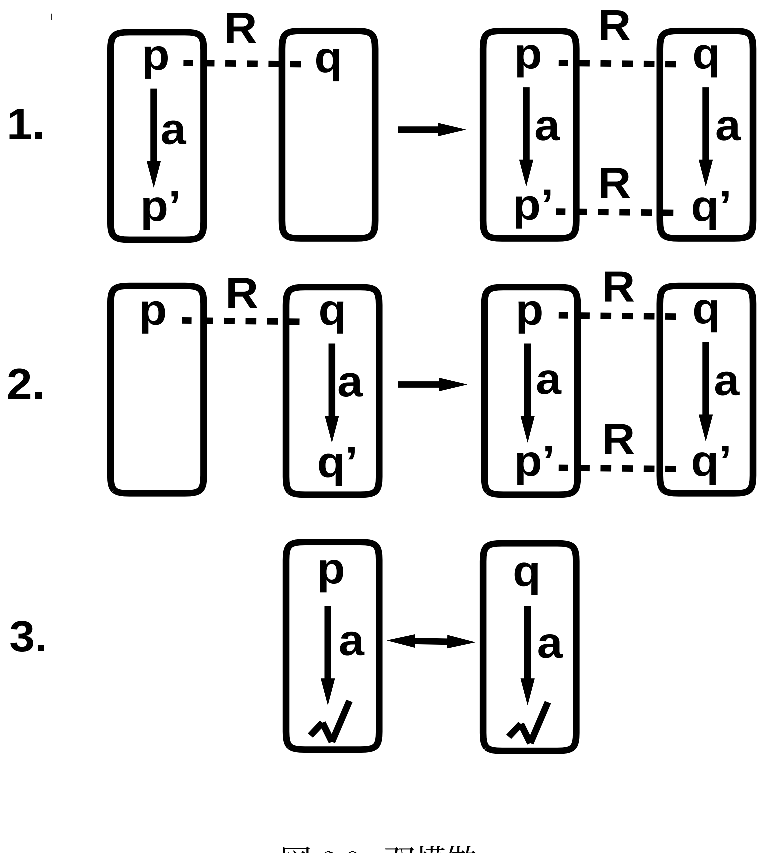

図 2.3: 双模倣

ab と $a(b+b)+ab$ は双模倣等価であるが、$a(b+c)$ と $ab+ac$ は双模倣等価でない。これを図 2.4で示す。

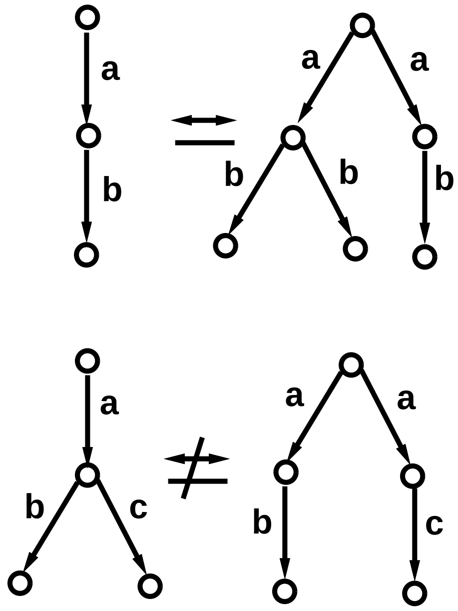

図 2.4: 双模倣等価なプロセス

図 2.4の上の図の場合、双模倣 Rは図 2.5に示すように、

$$R = \{(v_1, v_2), (w_1, w_2), (w_1, w_3), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4)\}$$

と定めればよい。

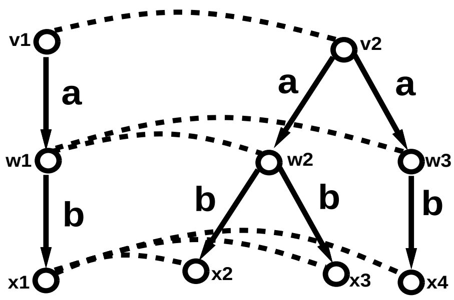

図 2.5: 双模倣

2.4 再帰プロセス

無限のふるまいをするプロセスについての性質を、明らかにし分析することは重要である。通常、このようなプロセスは再帰プロセスと呼ばれ、再帰式を使って定義される。

定義 2.2 BPA 上で再帰式とは

$$X = s(X)$$

の形をした等式をいう。ここで、$s(X)$ は BPA 上の項であり変数 X を含むが、他の変数を含まない。

定義 2.3 BPA 上の再帰仕様 E とは BPA 上の再帰式の集合のことである。これは、変数の集合 V と、おのおのの変数 $X \in V$ について

$$X = s_X(V)$$

の形の等式をもつ。ここで、s_X は BPA 上の項で V からの変数を含む。

たとえば、E={X=Y,Y=Z,Z=aY} のように表現される。

しかし本研究では、一般的な再帰プロセスは考えずに、再帰プロセスのなかでの特別な形のものを扱うことにする。本研究では、再帰式を用いずに Kleene のスター演算子を使うことにより、演算子として再帰を表現することを考える。

Kleene のスター演算子とは、1956 年に Kleene が [6] で、regular events として紹介している二項演算子 *である。Kleene は、regular expressions を定義している。E^* は E を任意有限回繰り返すことを意味し、次のように定義されている。

$$E^*F = F \vee E(E^*F)$$

Kleene は $E \vee F$ を $E + F$、EF を $E \cdot F$ とすることで、代数とも一致させた。

x^*y をプロセス代数に導入すると、

$$x^*y = x \cdot x^*y + y$$

となる。これは、再帰式では、

$$P = x \cdot P + y$$

の解として知られているものである。

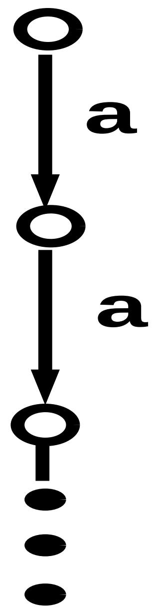

図 2.6: E={X=Y,Y=Z,Z=aY}

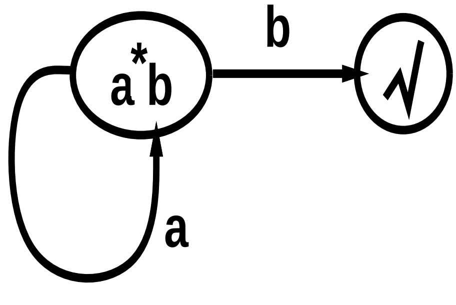

図 2.7: a^*b

第 3 章

Kleene のスター演算子を含む BPA

本章では、[1]、[2] について概説する。まず、1994 年に Bergstra、Bethke そして Ponse によって提案された、プロセス代数に対し、繰返し演算と入れ子演算を導入した場合の公理化について説明する。 [1] では、これらの演算子を BPA の他に PA(Process Algebra) や ACP などに導入しているが、ここでは BPA に導入した場合についてのみ説明することとする。つぎに、繰返し演算を導入した場合の公理化が、双模倣等価に関して完全であるという、Fokkink と Zantema の結果について解説する。

3.1 BKS

第 1 章で述べたように Kleene のスター演算子*は、で BKS(Binary Kleene Star) として次の公理で定義されている [1]。

$$x^*y = x(x^*y) + y$$

この Kleene のスター演算子*を BPA に導入すると、その公理は表 3.2となる。この体系を BPA*と呼ぶ。これは、BPA の公理に対し BKS1-BKS3 を加えたものである。演算子の強さは*は·よりも強いとする。

x^*yは、yが現れるまで x を繰返し実行するプロセスを表す。

演算子*は、表 3.1の BPA*の公理により次のことが仮定されている。

- BKS1　x を yが現れるまで繰返し実行するのは、x につづいて x を yが現れるまで繰返し実行するか、yを実行するのと同じである

- BKS2　x を $y\cdot z$が現れるまで実行するのは、yが現れるまで x を実行し zを実行するのと同じである
- BKS3　x を yの次に yが現れるまで x を実行したあとに zを実行するか zが現れるまで実行するのは、x または yを zが現れるまで実行するのと同じである

アクション関係は表 3.2のように与えられている。

A1	$x+y$	$=$	$y+x$
A2	$(x+y)+z$	$=$	$x+(y+z)$
A3	$x+x$	$=$	x
A4	$(x+y)z$	$=$	$xz+yz$
A5	$(xy)z$	$=$	$x(yz)$
BKS1	$x\cdot(x^*y)+y$	$=$	x^*y
BKS2	$x^*(y\cdot z)$	$=$	$(x^*y)\cdot z$
BKS3	$x^*(y\cdot((x+y)^*z)+z)$	$=$	$(x+y)^*z$

表 3.1: BPA*の公理

$a\in A$	$a \xrightarrow{a} \surd$			
$+$	$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x+y \xrightarrow{a} x'}$	$\dfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x+y \xrightarrow{a} y'}$	$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x+y \xrightarrow{a} \surd}$	$\dfrac{y \xrightarrow{a} \surd}{x+y \xrightarrow{a} \surd}$
$\cdot$	$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x\cdot y \xrightarrow{a} x'\cdot y}$	$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x\cdot y \xrightarrow{a} y}$		
BKS	$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^*y \xrightarrow{a} x'\cdot(x^*y)}$	$\dfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x^*y \xrightarrow{a} y'}$	$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} x^*y}$	$\dfrac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} \surd}$

表 3.2: BPA*の規則

ここで、$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^*y \xrightarrow{a} x'\cdot(x^*y)}$ は、x はアクション a を実行することができ実行した結果が x'

になるならば、x^*yはアクション a を実行することができ実行した結果 $x' \cdot (x^*y)$ となることを意味する。$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} x^*y}$ は、x はアクション a を実行すると成功終了するならば、x^*yはアクション a を実行すると x^*yになることを意味する。この二つの規則、$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^*y \xrightarrow{a} x' \cdot (x^*y)}$ と$\dfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} x^*y}$ は、アクションを実行する前後に同じ状態を含んでいる。つまり、アクション実行前の状態を P としたとき、アクション実行後の状態のなかにその状態 P を含んでいる。

たとえば、$a^*b \xrightarrow{a} a^*b$ となり、アクション a を実行する前後において a^*b という同じものを含む。

さらに、 [1] では、プロセス代数に入れ子演算子$^\#$を導入するということも行なわれている。これは、NO(Nexting Operation) として次の公理により定義されている。

$$x^\# y = x(x^\# y)x + y$$

$x^\# y$は、x か yかを選択するプロセスである。ただし、x を選択した場合には、その x の実行後に再び x を選択することができるが、yを選択した場合には、その yの実行後に x をそれまでに実行した回数分だけ再び行なうものとする。

たとえば、アトミックアクション a、b に対して、$a^\# b$ は図 3.1のように表される。

この演算子の公理を表 3.3にアクション関係を表 3.4に示す。BPA にこの入れ子演算子を導入した体系を BPS$^\#$と呼ぶ。

NO1	$x \cdot (x^\# y) \cdot x + y$	$=$	$x^\# y$
NO2	$(x^\# y)x$	$=$	$x^\# (yx)$
NO3	$(x+y)^\# (x \cdot ((x+y)^\# z) \cdot (x+y) + z)$	$=$	$(x+y)^\# z$

表 3.3: NO の公理

3.2 完全性

次に [2] で示された、BPA*の公理が双模倣等価性に関して完全であるという結果について、その証明を [2] に従い概説しておく。

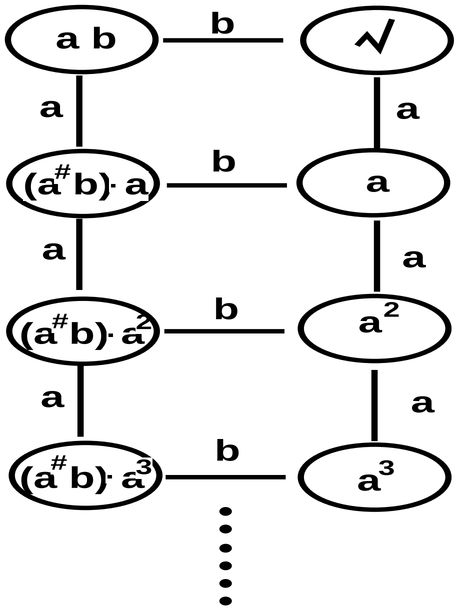

図 3.1: $a^{\#}b$

NO

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\#}y \xrightarrow{a} x' \cdot ((x^{\#}y) \cdot x)} \quad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\#}y \xrightarrow{a} y'}$$

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\#}y \xrightarrow{a} x^{\#}y \cdot x} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\#}y \xrightarrow{a} \surd}$$

表 3.4: NO の規則

BPA*の項は、つぎのように BNF 記法で表現されるように、アトミックアクションと三つの演算子から作られるものとする。$a \in A$

$$p ::= a \mid p + p \mid p \cdot p \mid p^* p$$

BPA*の公理とアクション関係は、前節で示したように表 3.1と表 3.2によって与えられている。

命題 3.1 双模倣等価は演算子+、·、*に関して合同関係である。すなわち、$p \leftrightarrow p', q \leftrightarrow q'$ のとき

1. $p + q \leftrightarrow p' + q'$
2. $pq \leftrightarrow p'q'$
3. $p^*q \leftrightarrow p'^*q'$

が成り立つ。

証明

1.$R = \{(p + q, p' + q') : p \leftrightarrow p' \ , \ q \leftrightarrow q'\}$ が双模倣であることを示せばよい。
$p + q \xrightarrow{a} v$と仮定する。
$p \xrightarrow{a} r, v \equiv r$のとき $p \leftrightarrow p'$なので $p' \xrightarrow{a} r'$となり、$r \leftrightarrow r'$となる。
よって、$p' + q' \xrightarrow{a} r' \ (r, r') \in R$
$q \xrightarrow{a} r, v \equiv r$のとき $q \leftrightarrow q'$なので $q' \xrightarrow{a} r'$となり、$r \leftrightarrow r'$となる。
よって、$p' + q' \xrightarrow{a} r' \ (r, r') \in R$
$p' + q' \xrightarrow{a} v$と仮定したときも同様にして、
$p' \xrightarrow{a} r, v \equiv r$のとき $p \leftrightarrow p'$なので $p \xrightarrow{a} r'$となり、$r \leftrightarrow r'$となる。
よって、$p + q \xrightarrow{a} r' \ (r, r') \in R$
$q' \xrightarrow{a} r, v \equiv r$のとき $q \leftrightarrow q'$なので $q \xrightarrow{a} r'$となり、$r \leftrightarrow r'$となる。
よって、$p + q \xrightarrow{a} r' \ (r, r') \in R$
2.3. の証明は略す。 □

定理 3.2 (健全性)

$$p = q \text{ならば} \ p \leftrightarrow q$$

すなわち BPA*で等しいことが証明できたプロセスは双模倣等価である。

証明 命題 2.1 より双模倣等価は合同関係であるので、BPA*の公理のそれぞれが双模倣であることを示せばよい。ここでは BKS1 の場合のついて示しておく。BKS2、BKS3 についての証明は略す。

$$R = \{(x^*y, x(x^*y)+y), (x,x)\}$$

が双模倣であることを示す。

$x^*y \xrightarrow{a} v$と仮定する。

$x \xrightarrow{a} x', v \equiv x'(x^*y)$ のとき

$$\cfrac{\cfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^*y \xrightarrow{a} x'(x^*y)}}{x^*y + y \xrightarrow{a} x'(x^*y)}$$

より $x^*y + y \xrightarrow{a} x'(x^*y) \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^*y$のとき

$$\cfrac{\cfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} x^*y}}{x^*y + y \xrightarrow{a} x^*y}$$

より $x^*y + y \xrightarrow{a} x^*y \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$y \xrightarrow{a} y', v \equiv y'$のとき

$$\cfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x^*y + y \xrightarrow{a} y'}$$

より $x^*y + y \xrightarrow{a} y' \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv \surd$のとき

$$\cfrac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^*y + y \xrightarrow{a} \surd}$$

より $x^*y + y \xrightarrow{a} \surd \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$x^*y + y \xrightarrow{a} v$と仮定する。’ $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x'(x^*y)$ のとき

$$\cfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^*y \xrightarrow{a} x'(x^*y)}$$

より $x^*y \xrightarrow{a} x'(x^*y) \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^*y$のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} x^*y}$$

より $x^*y \xrightarrow{a} x^*y \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

$y \xrightarrow{a} y', v \equiv y'$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^*y \xrightarrow{a} y'}$$

より $x^*y \xrightarrow{a} y' \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

$y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv \surd$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^*y \xrightarrow{a} \surd}$$

より $x^*y \xrightarrow{a} \surd \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。 □

定理 3.3 (完全性)

$$p \leftrightarrow q \text{ならば} \ p = q$$

双模倣等価なプロセスは全て公理を用いて証明できる。

これよりこの定理の証明の概略を示す。はじめにプロセスをある手続きにしたがって等価変換し標準形にする。そして、双模倣なら同じ標準形を持つことを示す。

標準形にする手続きは項書き換え系により与えられる。その手続きは、どのプロセス項も唯一の標準形に書き換えられるようなものとしたい。また、二つの双模倣なプロセスは同じ標準形を持つようにしたい。

どの項も唯一つの標準形を持つことは一般的に、弱合流性と停止性を示すことにより示される。弱合流性とは、ある二つの項がリダクションによって p' と p''が得られるならば、p' と p''の両方がリデュースされる項 p が存在することであり、停止性とは、有限のリダクションの列が存在することである。

したがって、合流性と停止性がいえるような項書き換え系を定義したい。

それでは、項書き換え系を定義する。

まず、公理 A3 より書き換え規則を

$$x + x \longrightarrow x$$

とする。

公理 A4 は、左辺から右辺へと書き換えるのか右辺から左辺へと書き換えるのかが問題となるが、たとえば、$a \cdot (a+b)^*c + b \cdot (a+b)^*c + c$ は、$(a+b)^*c$ へ書き換えたい。すなわち、

$$a \cdot (a+b)^*c + b \cdot (a+b)^*c + c \longrightarrow (a+b) \cdot (a+b)^*c$$

のような、書き換えを行ないたい。したがって、A4 は書き換え規則としてはつぎのような形にする。

$$xz + yz \longrightarrow (x+y)z$$

公理 A5 は項書き換え系が合流するようにするため、A4 と同じような方向で書き換えることにする。たとえば、$(ab)d + (ac)d$ は、左辺から右辺への書き換えだと A4 の規則も使えるので、$a(bd) + a(cd)$ と $(ab+ac)d$ との二通りに書き換えられる。したがって、A5 の書き換え規則はつぎのようにする。

$$x(yz) \longrightarrow (xy)z$$

ここまでで、A3-A4 を使って書き換え規則の一部を定義してきた。しかし、このまま進めていくと、双模倣であるものが同じ標準形を持つような項書き換え系は存在しないことになる。どうしてかというと、もしも、$y + z \underline{\leftrightarrow} y$ならば$x^*y + z \underline{\leftrightarrow} x^*y$となるが、$x^*y + z$ と x^*yとは同じ標準形を持たないからである。したがって、単なる項書き換え系ではなく条件つき項書き換え系を用いて、$y + z$が yに書き換えられるときは$x^*y + z \longrightarrow x^*y$ という書き換えをおこなうようにしたい。すはわち、

$$x^*y + z \longrightarrow x^*y \quad \text{if} \quad y + z \longrightarrow\!\!\!\!\to y$$

という規則を導入したい。しかしこの規則は、A4 があるので唯一の標準形とならない。たとえば、$a^*(b+ce) + ce + de$ は上の規則により $a^*(b+ce) + de$ となるが一方 A4 により $a^*(b+ce) + (c+d)e$ との二つの異なる標準形を持つこととなる。このような混乱を防ぐために、新しい演算子を導入する。$x \cdot x^*y$のふるまいを、$x^{\oplus}y$で置き換えることを考える。$^{\oplus}$を適切な繰返し演算子と呼ぶ。

この適切な繰返し演算子に対する公理とアクション規則は、表 3.5と表 3.6のように与えられる。これらは、$x^*y \underline{\leftrightarrow} x^{\oplus}y + y$を使うことにより、繰返しの演算子の公理とアクション規則から得ることができる。表 3.5の公理を使って等しいものは全て、表 3.1の公理を使うことにより示せるので、表 3.5は表 3.1が完全なときに限り完全である。

$$
\begin{array}{lrcl}
PI1 & x(x^{\oplus}y+y) & = & x^{\oplus}y \\
PI2 & (x^{\oplus}y)z & = & x^{\oplus}(yz) \\
PI3 & x^{\oplus}(y((x+y)^{\oplus}z+z)+z) & = & x((x+y)^{\oplus}z+z)
\end{array}
$$

表 3.5: 適切な繰返しの公理

$$
\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\oplus}y \xrightarrow{a} x' \cdot (x^{\oplus}y)} \quad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\oplus}y \xrightarrow{a} x^{\oplus}y}
$$

表 3.6: 適切な繰返しのアクション関係

これより、この新しい演算子に対する書き換え規則を定義していく。はじめは公理 PI2 を考える。ここでは左辺から右辺へ書き換えるのか右辺から左辺へと書き換えるのかが問題となる。もしも左辺から右辺へと書き換えたとすると、A4 の書き換え規則も使えるので、たとえば、$(a^{\oplus}b)c+dc$ は、$a^{\oplus}(bc)+dc$ と $(a^{\oplus}b+d)c$ との二通りに書き換えられる。そこで PI2 の書き換え規則はつぎのようにする。

$$x^{\oplus}(yz) \longrightarrow (x^{\oplus}y)z$$

つぎに、公理 PI1 を考える。

$$x(x^{\oplus}y+y) \longrightarrow x^{\oplus}y$$

この書き換え規則は合流性に対して困難な問題を引き起こすので、三つの余分な規則が必要になる。

1. $x(y^{\oplus}z+z)+y(y^{\oplus}z+z)$ は $x(y^{\oplus}z+z)+y^{\oplus}z$ と $(x+y)(y^{\oplus}z+z)$ との二通りに書き換えられる。しかし合流性が成り立つ必要があるため、どちらかを同じようになるような書き換え規則を加えたい。もしも、$(x+y)(y^{\oplus}z+z) \longrightarrow x(y^{\oplus}z+z)+y^{\oplus}z$ を項書き換え系に加えると、たとえば $(ac+bc)((bc)^{\oplus}d+d)$ は $(ac)((bc)^{\oplus}d+d)+(bc)^{\oplus}d$ と $((a+b)c)((bc)^{\oplus}d+d)$ の二通りに書き換えられることになるので好ましくない。したがって、書き換え規則はつぎのようにする。

$$x(y^{\oplus}z+z)+y^{\oplus}z \longrightarrow (x+y)(y^{\oplus}z+z)$$

2. $x(y(y^{\oplus}z+z))$ は $x(y^{\oplus}z)$ と $(xy)(y^{\oplus}z+z)$ との二通りに書き換えられる。これも 1 と同様に合流性が成り立つ必要があるため、どちらかを同じようになるような書き換え規則を加えたい。もしも、$(xy)(y^{\oplus}z+z) \longrightarrow x(y^{\oplus}z)$ を項書き換え系に加えると、A5 のために、たとえば $(a(bc))((bc)^{\oplus}d+d))$ は $a((bc)^{\oplus}d)$ と $((ab)c)((bc)^{\oplus}d+d))$ との二通りに書き換えられることとなるので好ましくない。したがって、書き換え規則はつぎのようにする。

$$x(y^{\oplus}z) \longrightarrow (xy)(y^{\oplus}z+z)$$

3. $x^{\oplus}(y(y^{\oplus}z+z))$ は $x^{\oplus}(y^{\oplus}z)$ と $(x^{\oplus}y)(y^{\oplus}z+z)$ との二通りに書き換えられる。しかし合流性が成り立つ必要があるため、どちらかを同じようになるような書き換え規則を加えたい。もしも、$(x^{\oplus}y)(y^{\oplus}z+z) \longrightarrow x^{\oplus}(y^{\oplus}z)$ を項書換え系に加えると、PI2 のために、たとえば、$(a^{\oplus}(bc))((bc)^{\oplus}d+d)$ は二通りに書き換えられることとなるので好ましくない。したがって、書き換え規則はつぎのようにする。

$$x^{\oplus}(y^{\oplus}z) \longrightarrow (x^{\oplus}y)(y^{\oplus}z+z)$$

PI3 は $x^{\oplus}(x'((x+x')^{\oplus}z+z)+z) \longrightarrow x((x+x')^{\oplus}z+z)$ となるが、合流性に問題がある。もしも x と x'が標準形であるが $x+x'$は標準形でないとする。このとき、$x+x'$を書き換えてしまうと、この規則を適応できなくなってしまう。そこで、PI3 については条件つき規則とする。

$$x^{\oplus}(x'(y^{\oplus}z+z)+z) \longrightarrow x(y^{\oplus}z+z) \quad \text{if} \quad x+x' \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow y$$

さらに、$x+y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow y$のとき $x^{\oplus}(y(y^{\oplus}z+z)z)$ は $x^{\oplus}(y^{\oplus}z+z)$ と $x(y^{\oplus}z+z)$ の二つの標準形をもつ。そこでもう一つ条件つき規則

$$x^{\oplus}(y^{\oplus}z+z) \longrightarrow x(y^{\oplus}z+z) \quad \text{if} \quad x+y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow y$$

を加える。

このようにして作った項書き換え系を一度まとめて表 3.7に示しておく。これらの規則は+の交換律と結合律が含まれていないが、この関係については等しいものとして扱う。たとえば、$x(y+x^{\oplus}y)$ という項があったとしよう。このとき、規則を適用するためには、$x(x^{\oplus}y+y)$ となっていなくては本当はいけないのだが、交換律について等しいものは全て同じものとして扱うので、$x(y+x^{\oplus}y) \longrightarrow x^{\oplus}y$と書き換えてもかまわないのである。

1	$x+x$	$\longrightarrow$	x	
2	$xz+yz$	$\longrightarrow$	$(x+y)z$	
3	$x(yz)$	$\longrightarrow$	$(xy)z$	
4	$x^{\oplus}(yz)$	$\longrightarrow$	$(x^{\oplus}y)z$	
5	$x(x^{\oplus}y+y)$	$\longrightarrow$	$x^{\oplus}y$	
6	$x(y^{\oplus}z+z)+y^{\oplus}z$	$\longrightarrow$	$(x+y)(y^{\oplus}z+z)$	
7	$x(y^{\oplus}z)$	$\longrightarrow$	$(xy)(y^{\oplus}y)(y^{\oplus}z+z)$	
8	$x^{\oplus}(x'(y^{\oplus}z+z)+z)$	$\longrightarrow$	$x(y^{\oplus}z+z)$	if$x+x' \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow y$
9	$x^{\oplus}(y^{\oplus}z+z)$	$\longrightarrow$	$x(y^{\oplus}z+z)$	if$x+y \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow y$

表 3.7: rewrite rules for BPA$^{\oplus}$

合流する項書き換え系となるためにこれらの書き換え規則を選んできたが、条件つき項書き換え規則が含まれているので、この性質を導くのは簡単ではない。しかし、双模倣標準形は+に関する交換律と結合律に関して等しいということとしているので、この条件の下では、合流するという性質は完全性定理の証明で必要ない。合流性はたんに停止性の性質と一緒で完全性定理の結果である。

定理 3.4 表 *3.7*の項書き換え系は停止する。

証明は略す。

ここまでで、BPA$^{\oplus}$が標準形となる項書き換え系を定義した。これらの書き換え規則は双模倣等価に関して健全であるので、どの項もその標準形と双模倣等価になっている。したがって、BPA*が完全公理であることを示すためには、二つの標準形が双模倣等価ならば、A1 と A2 によって等しいと証明できるということを示せばよい。

まず、完全性定理の証明を帰納的に行なうためプロセス項へ順序$\leq$を導入しておく。

まず、ノーム (norm) とを定義する。ノーム (norm) とはプロセスが停止するまでのステップの最小数をいう。これは、有用であるが欠点として、$|p| \leq |p+q|$ となることがある。

そこで、L 値を定義する。

$$L(p) = \max\{\ |\ p'\ |\ :\ p' \text{ is a proper substate of } p\}$$

ここで、proper substate とは、p は p' に一回かそれ以上の遷移によって進めることができるということを意味する。ノームは双模倣等価の下で保存されるが、同じように L も保存される。

補助定理 3.5

$$p \underline{\leftrightarrow} q \text{ならば} L(p) = L(q)$$

証明は略す。

上に述べた L はつぎのように帰納的に定義することができる。

$$\begin{array}{rcl} L(a) & = & 0 \\ L(p+q) & = & \max\{L(p), L(q)\} \\ L(pq) & = & \max\{L(p)+|q|, L(q)\} \\ L(p^{\oplus}q) & = & \max\{L(p)+|q|, L(q)\} \end{array}$$

つぎにプロセス項上に g 値を定義する。

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & 0 \\ g(p+q) & = & \max\{g(p)+g(q)\} \\ g(pq) & = & g(q)+1 \\ g(p^{\oplus}q) & = & g(q)+1 \end{array}$$

g は双模倣等価の下で保存され、さらにつぎの補助定理を満たす。

補助定理 3.6

$$p \longrightarrow q \text{ならば} g(p) \geq g(q)$$

証明は略す。

L 値と g 値を完全性を証明するときに帰納法で使う。

完全性を証明する前に三つの定理を示しておく。これらは完全性を証明する際に使う。

補助定理 3.7

$$pr \underline{\leftrightarrow} qr \text{ならば} p \underline{\leftrightarrow} q$$

定義 3.8 もし、$p \overset{a}{\longrightarrow} p'$ かつ $q \overset{a}{\longrightarrow} q'$ かつ $p' \underline{\leftrightarrow} q'$ となる p' と q' が存在するならば、二つのプロセス項 p と q が共通のふるまいを持つという。

補助定理 3.9 二つの項pqと rs が共通のふるまいを持ち $|q| \geq |s|$ であるならば、ある t について $q \underline{\leftrightarrow} ts$ か $q \underline{\leftrightarrow} s$ である。

補助定理 3.10 pqか $p^{\oplus}q$が標準形ならば、qは rs の標準形ではない。

これまではプロセス項は+の交換律と結合律に関しては同じであるものとして扱ってきた。これからは、この等価性を $p \cong q$で表現し p と qは同形という。あきらかに、どのプロセス項 p も、$a_1 + \cdots + a_k + p_1q_1 + \cdots + p_lq_l + r_1^{\oplus}s_1 + \cdots + r_m^{\oplus}s_m$という形をしている。項 a_i、p_iq_iと $r_i^{\oplus}s_i$を p の被加項という。

定理 3.11 二つの標準形 p と qが双模倣なら同じ標準形を持つ。

証明

A. 二つの標準形 $p \equiv rs$ と $q \equiv tu$ が共通のふるまいをもつなら、$s \cong u$ である

B. 二つの標準形 $p \equiv rs$ と $q \equiv t^{\oplus}u$ が共通のふるまいをもつなら、$s \cong t^{\oplus}u + u$ である

C. 二つの標準形 $p \equiv r^{\oplus}s$ と $q \equiv t^{\oplus}u$ が共通のふるまいをもつなら、$r^{\oplus}s \cong t^{\oplus}u$ である

上の三つの定理を証明することにより、p と qは同じ被加項であることがいえる。書き換え規則 1 はこれらの被加項のどの出現も一度であることを示している。よって $p \cong q$

$\square$

系 3.12 BPA*の公理 A1-5 + BKS1-3 は双模倣等価について完全である

第 4 章

$\|$ に関する繰返し演算子を含む BPP

本章では、BPP へ $\|$ に関する繰返し演算を導入することを試みる。まず $\star\|$ を定義し、つぎにアクション規則および公理を定義していく。定義する際に生じる問題についても触れる。

4.1 BPS

二項関係 $\star\|$ をつぎのように定義する。これを BPS(Binary Parallel Star) と呼ぶ。

$$x \star\| y = x \| (x \star\| y) + y$$

たとえば、$x \star\| y$というプロセスは、x と yを並行に実行するようなプロセスを表す。ただし、x は何回でも実行できるが、yは一度しか実行することができない。

ここで、次に示す二つの解釈が存在するという問題が生じる。

- yを実行した時点で実行可能な x の回数が決まる
- yを実行した時点で実行可能な x の回数は決まらない

これより、それぞれの場合についての考察をおこなう。

はじめに、

- yを実行した時点で実行可能な x の回数が決まる

の場合について考える。

このときは、$x^{\bigstar} \parallel y$を

$$y + x \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (\cdots)\cdots)))))$$

のように解釈していることになる。

x を実行する際、実行可能な x は無数に存在しているが、そのうちの一つを選択することにより、

$$x \parallel (x \parallel \cdots (x \parallel (\mathbf{x} \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (\cdots)\cdots)))))$$

つまり、p^nで p を n 回並列合成したもの $p \parallel \cdots \parallel p$ を表すものとすると、

$$x^n \parallel \mathbf{x} \parallel (y + x \parallel (y + x \parallel (\cdots)))$$

というプロセスとなる。この選択された $\mathbf{x}$ を実行した後には、もちろん x も yも実行することができる。さらに yを実行しない限り x は何度でも実行できる。

もしも、yを実行したとすると、

$$x \parallel (x \parallel \cdots (x \parallel (x \parallel \mathbf{y}))\cdots)$$

つまり、

$$x^n \parallel \mathbf{y}$$

というプロセスとなる。つまり、$\mathbf{y}$ を実行した後では、実行可能な x の個数は n に決まってしまうこととなる。もちろん、$\mathbf{y}$ を実行する前に x は実行されてしまっていることもありうる。

このような解釈で、アクション関係を定義すると、表 4.1のようになる。

BPS

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^n \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^n \parallel y'}$$

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^n \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^n}$$

表 4.1: BPS のアクション関係 No.1

このアクション関係は無限個の関係からできていることを注意しておく。たとえば、$\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x \bigstar \| y \xrightarrow{a} x^n \| x' \| (x \bigstar \| y)}$ は、$x \xrightarrow{a} x'$ なるときに、$x \bigstar \| y \xrightarrow{a} x^n \| x' \| (x \bigstar \| y)$ となることができるということを意味しているが、n はこの関係を用いるたびに任意に決めることができるのである。したがって、この変数を含むアクション関係は、n の選び方により無限個の規則となる。

BPS についての公理は 4.2に示される。

BPS1	$x \| (x \bigstar \| y) + y$	$=$	$x \bigstar \| y$

表 4.2: BPS の公理 No.1

表 4.2の他に公理となるものが存在しないかどうか調査したが、適切なものは未だ見つかっていない。

BKS の公理

$$x^*(y \cdot z) = (x^* y) \cdot z$$

や

$$x^*(y \cdot ((x+y)^* z) + z) = (x+y)^* z$$

を利用し、たとえば

$$x \bigstar \| (y \| z) = (x \bigstar \| y) \| z$$

や

$$x \bigstar \| (y \| ((x+y) \bigstar \| z) + z) = (x+y) \bigstar \| z$$

という公理を考えたが、これが成立しないような反例が見つかった。アトミックアクション a、b、c に対し、

$$a \bigstar \| (b \| c) \not\underline{\leftrightarrow} (a \bigstar \| b) \| c$$

$$a \bigstar \| (b \| ((a+b) \bigstar \| c) + c) \not\underline{\leftrightarrow} (a+b) \bigstar \| c$$

表 4.2の公理は双模倣等価性に関して健全になっている。

命題 4.1 双模倣等価は演算子+、$\|$ と $\bigstar \|$ に関して合同関係である。

定理 4.2 (健全性)

$$p = q \text{ならば} p \leftrightarroweq q$$

証明 命題より双模倣等価は合同関係であるので、BPS1 が双模倣であることを示せばよい。

$x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \leftrightarroweq x^{\bigstar} \parallel y$を示すのだが、

$$R = \{(x,x), (x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y, x^{\bigstar} \parallel y)\}$$

が双模倣であることを示せばよい。

1. $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} v$と仮定する。

1.1 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x^k \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^k \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^k \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.2 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x \parallel x^k \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x' \parallel x^{k+1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x' \parallel x^{k+1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.3 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^{\bigstar} \parallel y$のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}$$

より $x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.4 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x \parallel x^k \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.5 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv x \parallel x^{k+1} \parallel y'$ のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1} \parallel y'}$$

より、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1} \parallel y' \equiv v$となる。また$(v,v) \in R$である。

1.6 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv y'$ のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} y'}$$

より、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} y' \equiv v$となる。また$(v,v) \in R$である。

1.7 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x \parallel x^k$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1}}$$

より、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k+1} \equiv v$となる。また$(v,v) \in R$である。

1.8 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv \surd$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} \surd}$$

より、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} \surd \equiv v$となる。また$(v,v) \in R$である。

2.$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} v$と仮定する。

2.1 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x^n \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$k = 0$ のとき

$$\frac{\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

$k \geq 1$ のとき

$$\frac{\dfrac{\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k-1} \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^k \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$となる。また、$(v,v) \in R$である。

2.2 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^k \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$k = 0$ のとき

$$\cfrac{\cfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

$k \geq 1$ のとき

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k-1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{k} \parallel y \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

2.3 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv x^{k} \parallel y'$のとき

$k = 0$ のとき

$$\cfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} y'}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} y' \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

$k \geq$のとき

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k-1} \parallel y'}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel y'}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1} \parallel y'}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{k} \parallel y' \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

2.4 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^{k}$のとき

$k = 0$ のとき

$$\cfrac{y \xrightarrow{a} \surd}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} \surd}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} \surd \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

$k \geq 0$ のとき

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{k-1}}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1}}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x \parallel x^{k-1}}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^k \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。 □

つぎに、

- yを実行した時点で実行可能な x の回数は決まらない

の場合について考える。

この考え方は、二項演算子 $^{\bigstar} \parallel$ を単項演算子のように考えることによって得られる。アクション関係は表 4.3ようになる。

この場合の公理は、表 4.4により与えられる。

この BPS の公理が双模倣等価に関して健全になっているかどうかを考察したい。

はじめに、$x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \underline{\leftrightarrow} x^{\bigstar} \parallel y$を示したい。

$$R = \{(x, x), (x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y, x^{\bigstar} \parallel y)\}$$

が双模倣であること示せばよい。

1.$x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} v$と仮定する。

1.1 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

より $x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

1.2 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x \parallel (x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y))$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel (x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y))}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x \parallel (x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)) \equiv v$となる。また、$(v, v) \in R$である。

1.3 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^{\bigstar} \parallel y$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}$$

BPS

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)} \qquad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}$$

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)} \qquad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)}$$

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} y'} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} \surd}$$

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel y'} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x}$$

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y'}$$

$$\frac{z \xrightarrow{a} z'}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y \parallel z'} \qquad \frac{z \xrightarrow{a} \surd}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y}$$

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y \parallel x' \parallel (x+y)^{\bigstar} \parallel z} \qquad \frac{x \xrightarrow{a} \surd}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y \parallel (x+y)^{\bigstar} \parallel z}$$

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y \parallel y' \parallel (x+y)^{\bigstar} \parallel z} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} \surd}{(x+y)^{\bigstar} \parallel z \xrightarrow{a} y \parallel (x+y)^{\bigstar} \parallel z}$$

表 4.3: BPS のアクション関係 No.2

BPS1	$x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y$	$=$	$x^{\bigstar} \parallel y$
BPS2	$x^{\bigstar} \parallel (y \parallel z)$	$=$	$(x^{\bigstar} \parallel y) \parallel z$
BPS3	$x^{\bigstar} \parallel (y \parallel ((x+y)^{\bigstar} \parallel z) + z)$	$=$	$(x+y)^{\bigstar} \parallel z$

表 4.4: BPS の公理 No.2

より $x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x^\star \parallel y \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.4 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x \parallel (x^\star \parallel y)$ のとき

$$\frac{x \xrightarrow{a} \surd}{x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel (x^\star \parallel y)}$$

より $x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel x^\star \parallel y \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.5 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv x^\star \parallel y'$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x^\star \parallel y'}$$

より $x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel y' \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.6 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv y'$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x^\star \parallel y \xrightarrow{a} y'}$$

より $x^\star \parallel y \xrightarrow{a} y' \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.7 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x$ のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x}$$

$x^\star \parallel y \xrightarrow{a} x \equiv v$ となる。また、$(v,v) \in R$である。

1.8 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv \surd$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x^\star \parallel y \xrightarrow{a} \surd}$$

となる。また、$(v,v) \in R$である。

2. $x^\star \parallel y \xrightarrow{a} v$と仮定する。

2.1 $x \xrightarrow{a} x', v \equiv x' \parallel (x^\star \parallel y)$ のとき

$$\frac{\dfrac{x \xrightarrow{a} x'}{x \parallel (x^\star \parallel y) \xrightarrow{a} x' \parallel (x^\star \parallel y)}}{x \parallel (x^\star \parallel y) + y \xrightarrow{a} x'}$$

より $x \parallel (x^\star \parallel y) + y \xrightarrow{a} x' \parallel (x^\star \parallel y) \equiv v$ また、$(v,v) \in R$である。

2.2 $x \xrightarrow{a} \surd, v \equiv x^\star \parallel y$のとき

$$\cfrac{\cfrac{x \xrightarrow{a} \surd}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} x^{\bigstar} \parallel y \equiv v$ また、$(v, v) \in R$である。

2.3 $y \xrightarrow{a} y', v \equiv y'$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} y'}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} y'}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} y' \equiv v$ また、$(v, v) \in R$である。

2.4 $y \xrightarrow{a} \surd, v \equiv \surd$のとき

$$\frac{y \xrightarrow{a} \surd}{x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} \surd}$$

より $x \parallel (x^{\bigstar} \parallel y) + y \xrightarrow{a} \surd \equiv v$

また、$(v, v) \in R$である。

同様にして、

$$x^{\bigstar} \parallel (y \parallel z) = (x^{\bigstar} \parallel y) \parallel z$$

の場合も、

$$x^{\bigstar} \parallel (y \parallel ((x + y)^{\bigstar} \parallel z) + z) = (x + y)^{\bigstar} \parallel z$$

の場合も健全性を示すことができると思われるが、このアクション規則を適応する際に問題が起こっている。

1.2 の場合を考えてみる。$x \xrightarrow{a} x'$のとき、$v \equiv x \parallel x \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ とすることもできる。この場合、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x \parallel x \parallel x' \parallel (x^{\bigstar} \parallel y)$ とはならない。

ほかにも、$y \xrightarrow{a} \surd$のとき、yを実行した後にも何回でも x を行なうためには、単項繰返し演算を導入し、$x^{\bigstar} \parallel y \xrightarrow{a} x^{\bigstar \parallel}$ のような関係となる必要があるが、ここではそれを記述することができない。

したがって、この定義は妥当なものでないといえる。

第 5 章

結論

本研究の成果としてつぎのことがあげられる。

- $\|$ に関する繰返し演算を定義し、アクション関係および公理を定めた。
- 定めた公理が双模倣等価に関して健全であるといえた。

残された問題としては、どのようにすれば、完全な公理系を構築することができるかということである。BPA での公理系について完全性が示されているので、その公理系を参考に BPP についても公理系を定めたいのだが、${}^{\star}\|$ は無限のアクション関係が必要となることに現れているように、$\|$ と $\cdot$ の本質的な違いが存在する。したがって、このような違いを見究めた上で、BPA の公理系を参考にし BPP に対して適切な公理を導く必要があると思われる。

謝辞

本研究を行なうにあたり、日頃御指導いただいた小野寛晰教授に感謝する。また、御助言や御討論をいただいた石原哉助教授、鹿島亮助手ならびに研究室の諸兄に感謝する。

参考文献

[1] J.A. Bergstra, I. Bethke and A. Ponse, Process Algebra with Iteration and Nesting, The Computer Journal, vol37, 1994.

[2] W. Fokkink and H. Zantema, Basic Process Algebra with Iteration: Completeness of its Equational Axioms, The Computer Journal, vol37, 1994.

[3] J.C.M. Baeten and W.P. Weijland, Process Algebra, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 18, Cambridge University Press, 1990.

[4] R. Milner, Communication and Concurrency, Prentice Hall Internatonal, 1989.

[5] C.A.R. Hoare, Communicating Sequential Process, Prentice Hall International, 1985.

[6] S.C.Kleene, Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata, Automata Studies, Princeton University Press, 1956.

[7] R. Milner, Operational and Algebraic Semantics of Concurrent Processes, Handbook of Theoretical computer Science, Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

[8] 二木厚吉 and 富樫敦, プロセス代数とその応用 1 形式仕様とプロセス代数, bit, vol 23, No. 11, 1991.

[9] 富樫敦, プロセス代数とその応用 2 プロセス代数と等価性 (前編), bit, vol 23, No. 12, 1991.

[10] 富樫敦, プロセス代数とその応用 3 プロセス代数と等価性 (中編), bit, vol 23, No. 13, 1991.

[11] 富樫敦, プロセス代数とその応用 7 ACP: A Common-sense on tiP, bit, vol 24, No. 4, 1992.

[12] 堀田英一, プロセス代数の意味論, 情報処理, vol 37, No. 4, 1996.