

Title	CIP法による弾性管内の流れの解析
Author(s)	古田, 展康
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1117
Rights	
Description	Supervisor:松澤 照男, 情報科学研究科, 修士

修士論文

CIP 法による弾性管内の流れの解析

指導教官 松澤照男 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

古田展康
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 松澤研究室

平成 10 年 3 月 17 日

要旨

本研究では、移動する固体のまわりの流れの解析をオイラーの格子を利用して行なう。スキームとしては、CIP 法を利用する。研究の目的は、流体の解析を CIP 法を用いて行なうことにより、物理現象を確認すること。そして、移動する境界の座標を CIP 法で計算することで、振動する管内の流れの解析に応用することである。

目次

1	はじめに	1
2	CIP 法について	3
2.1	1次元 CIP 法	4
2.2	2次元 CIP 法	5
3	基礎方程式	7
3.1	ナビエ・ストークス方程式	7
3.2	ナビエ・ストークス方程式の離散化	7
3.2.1	圧力のポアソン方程式	8
3.2.2	速度の計算	8
4	境界条件	11
4.1	固定した壁境界の扱い	11
4.1.1	速度と圧力	11
4.1.2	流入条件、流出条件	12
4.2	移動する境界	13
4.2.1	移動境界の境界条件の設定	14
5	予備実験	17
5.1	1次元 CIP 法の検証	17
5.2	1次元 CIP 法の拡張	18
5.3	2次元 CIP 法の検証	20
5.4	キャビティー流れ	22

5.4.1	解析手順	22
5.4.2	解析結果	23
5.5	移動境界問題 (1)	25
5.5.1	解析手順	25
5.5.2	解析結果	26
5.6	移動境界問題 (2)	29
5.6.1	解析結果	29
6	実験	33
6.1	計算モデル	33
6.2	境界条件	34
6.2.1	流体と固体の境界の座標の計算	34
6.3	解析結果	35
7	まとめ	39
7.1	CIP 法のメリット	39
7.2	弾性体との相互作用への指標	39
7.3	並列化の指標	40

第 1 章

はじめに

従来から流体の運動方程式を解く手段として、オイラーの手法とラグランジュの手法が用いられている。オイラーの手法では空間中の固定されたメッシュで体積要素を考え、そこをある瞬間に横切る流体の速度や圧力を計算する手法である。これに対し、ラグランジュの手法は、流れ場を固定しないで流体を粒子の集まりとみなして、その運動を追跡する手法である。つまり、オイラーの手法ではメッシュは空間中の格子点に固定されているのに対し、ラグランジュの手法では各接点の運動にしたがってメッシュも移動する。

このような性質の違いから、移動境界問題のような流体領域と固体領域の境界が移動したり、その相互作用を計算する問題では、ラグランジュの手法が用いられる。それは、移動する流体と固体に引きずられてメッシュが変形するラグランジュ的な手法の方が移動境界問題とのマッチングが良いからである。

しかし、ラグランジュの手法で移動境界の問題を解こうとすると、タイムステップごとにメッシュの張り替えが必要となる。さらに流体や固体の大きな変形が生じると、メッシュが潰れてしまい計算精度が低下するという問題がある。

また、オイラーの手法では空間に格子が固定されているので、扱いやすいが、移動する流体と固体の境界の座標を精度良く知ることが難しい。これは、流体と固体の境界の追跡の計算をする際に、移流の計算を行なうが、そこで、数値拡散による精度の低下が生じるためである。

矢部孝ら [1] によって提案された Cubic Interpolated Propagation(CIP 法) は、オイラー系の格子を用いて、燃焼などの密度変化の激しい場所での計算や、表面張力のよう

な物体の表面の位置を精度良く定義しなければならない問題に適用されてきた。密度変化の激しいところでの計算と、物体表面の位置を精度良く定義できるという CIP 法の性質を利用すれば、流体中を固体が移動する際に生じる、物体回りの流れの解析のような計算を、オイラー系の格子を利用して計算できると期待される。

そこで、本研究では、解析モデルとして振動する管内の流れの解析を行なう。この計算では、まっすぐな管の中央部がゆっくりと狭窄し、また元に戻るという振動を繰り返す計算モデルを作成する。この時に、流体領域と固体領域の境界が移動することになるが、この境界の位置の計算に CIP 法を利用し、さらに流体の方程式の移流を解く計算にも CIP 法を適用する。

第 2 章

CIP 法について

CIP 法の重要な特徴は、移流方程式を精度良く解くことである。移流方程式を解く手段としては、一次の風上差分のように単に線形の補間を用いる方法がある。しかし、これでは数値的拡散が生じてしまう。それでは、Lax-Wendroff 法のように 2 次の補間ではどうかということ、格子点間の補間はうまく行なわれるが、不連続な点があると、そこでオーバーシュートするようになり、精度が確保できない。

これに対して、Cubic Interpolated Propagation(CIP 法) は、各格子点上で、その格子点で保持している値と、勾配の 2 つの情報を利用して、格子点間のプロファイルを 3 次関数として保持するという手法である。この 3 次関数による補間は、非常に安定していて精度が良いことが確認されており、圧縮流体、非圧縮流体、あるいは気体と液体と固体に対する統一解法に利用できるのではないかとということで研究が行なわれている。

そこで、本研究では流体の方程式の移流を計算する場面と、移動する境界の位置を計算する場面でこの CIP 法を適用し、振動する管内を流れる流体の流れのシミュレーションを行なう。

2.1 1次元 CIP 法

始めに、1次元の移流方程式を CIP 法で計算するときの手順について考えてみる。移流方程式 (式 2.1) は、波が u という速度で移動している様子を表している。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

そして、式 2.1 を微分すると式 2.2 となる。

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} g \quad (2.2)$$

f の空間微分を $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ とおいた。すると、伝搬速度が u である時には、値 f と勾配 g は、共に u という速度で移流するということが、式 2.1, 2.2 から分かる。この値 f と勾配 g の 2 つの情報を利用することによって、値が移動する前のプロファイルと、値が移動した後のプロファイルを少ない誤差で表現できるようになると考えられる。

ここで、格子点 $i, i-1$ の 2 点間のプロファイルをどのように作成するか考えてみる。格子点 i では、そこでの値 f_i と勾配 g_i の 2 つの情報が保持されている。また、格子点 $i-1$ でも、 f_{i-1}, g_{i-1} が保持されている。つまり、この 2 点間では、4 つの情報が保持されている。

ここで、 i と $i-1$ を結ぶ 3 次関数を次のように定義する。

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.3)$$

$$g(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (2.4)$$

未知変数が a, b, c, d の 4 つとなる。この 4 つの未知変数は、 $f_i, g_i, f_{i-1}, g_{i-1}$ の 4 つの情報から計算できるはずである。

ここで、 $f(0) = d, g(0) = c$ であるので、式 2.3, 2.4 に代入して、

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + g(0)x + f(0) \quad (2.5)$$

$$g(x) = 3ax^2 + 2bx + g(0) \quad (2.6)$$

すると、次の時間 $n+1$ でのプロファイルは、 $u \geq 0$ のときは、 $-u\Delta t$ だけ移動すると考えられるので、

$$f_i^{n+1} = a\xi^3 + b\xi^2 + g_i^n \xi + f_i^n \quad (2.7)$$

$$g_i^{n+1} = 3a\xi^2 + 2b\xi + g_i^n \quad (2.8)$$

ただし、 $\xi = -u\Delta t$ とする。

そして、格子間隔を Δx とすると、 a と b は次のように求められる。

$$a = \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{(-\Delta x)^2} + \frac{2(f_i^n - f_{i-1}^n)}{(-\Delta x)^3} \quad (2.9)$$

$$b = \frac{3(f_{i-1}^n - f_i^n)}{(-\Delta x)^2} - \frac{2g_i^n + g_{i-1}^n}{-\Delta x} \quad (2.10)$$

以上のように各格子点上で、格子点の持つ値 f とそこでの勾配 g の 2 つの情報を保持していれば、格子点と格子点の間の値の 3 次関数の補間式が得られる。これを繰り返すことにより移流方程式の解を求めることになる。

2.2 2次元 CIP 法

次に、2次元の CIP 法について考えてみる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

ここでは、簡単化のために、一定間隔の $\Delta x, \Delta y$ の正方形のグリッドを考える。 $u < 0, v < 0$ という条件の元では、3次の多項式は、 $(i, j), (i, j+1), (i+1, j+1), (i+1, j)$ の4点のグリッド内で $f(x, y)$ の補間が行なわれる。まず、3次関数を次のように置く。

$$F_{i,j}(x, y) = \left[(A1_{i,j}X + A2_{i,j}Y + A3_{i,j}X)X + A4_{i,j}Y + \frac{\partial}{\partial x}(f_{i,j}) \right] X \\ + \left[(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j})Y + \frac{\partial}{\partial y}(f_{i,j}) \right] Y + f_{i,j} \quad (2.12)$$

それぞれの格子点では、その格子が持つ値と x 軸方向の勾配、及び、 y 軸方向の勾配の 3 種類の値が保持されている。よって、 $(i, j), (i, j+1), (i+1, j+1), (i+1, j)$ の4点の値から、 $A1 \sim A8$ までの未知数を決定できる。

$$A1_{i,j} = [-2d_i + \partial_x(f_{i+1,j} + f_{i,j})\Delta x] / \Delta x^3$$

$$A2_{i,j} = [A8_{i,j} - \partial_x d_j \Delta x] / \Delta x^2 \Delta y$$

$$A3_{i,j} = [3d_i - \partial_x(f_{i+1,j} + 2f_{i,j})\Delta x] / \Delta x^2$$

$$A4_{i,j} = [-A8_{i,j} + \partial_x d_j \Delta x + \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y$$

$$A5_{i,j} = [-2d_j + \partial_y(f_{i,j+1} + f_{i,j})\Delta y] / \Delta y^3$$

$$A6_{i,j} = [A8_{i,j} - \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y^2$$

$$\begin{aligned}
A7_{i,j} &= [3d_j - \partial_y(f_{i,j+1} + 2f_{i,j})\Delta y] / \Delta y^2 \\
A8_{i,j} &= f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ただし、 $d_i = f_{i+1,j} - f_{i,j}$ で、 $d_j = f_{i,j+1} - f_{i,j}$ とする。このようにして、 $A1 \sim A8$ を求めることにより、 $(i, j), (i, j+1), (i+1, j+1), (i+1, j)$ の4点の格子を補間する3次の多項式が得られた。

第 3 章

基礎方程式

3.1 ナビエ・ストークス方程式

本研究では、流体の問題を解くための支配方程式として、質量の保存則を記述する連続の式 (式 3.1)、および、運動量の保存則を記述する 2 次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (式 3.2,3.3) を利用する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。

3.2 ナビエ・ストークス方程式の離散化

ナビエ・ストークス方程式の離散化の手法は、MAC 法と同じような手順となる。ただし、移流方程式を CIP 法によって解くために、その手順が MAC 法と異なる。計算格子には、格子の辺で速度を定義し、格子の中心で圧力を定義するという、いわゆる“食い違い格子” (Staggerd grid) を用いた。

3.2.1 圧力のポアソン方程式

連続の式 (式 3.1) をセル中心 (i, j) で中心差分を用いて離散化すると、

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \quad (3.4)$$

次に、式 3.2,3.3を、空間微分を中心差分で、時間微分を前進差分で離散化すると、

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = F_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) \quad (3.5)$$

となる。ここで、

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^n = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta t \left(-\frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} - \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right. \\ \left. + \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{Re\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{Re\Delta y^2} \right)^n \quad (3.6)$$

同様に、 v については、

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) \quad (3.7)$$

$$G_{i,j+\frac{1}{2}}^n = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \left(-\frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\Delta y} - \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right. \\ \left. + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{Re\Delta y^2} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{Re\Delta x^2} \right)^n \quad (3.8)$$

となる。ここで、式 3.5,3.7を連続の式 3.4に代入して、圧力のポアソン方程式 (式 3.9) を得る。

$$\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \right) \quad (3.9)$$

3.2.2 速度の計算

速度の計算では移流方程式の計算に CIP 法を使う。始めに、ナビエ・ストークス方程式 (式 3.2,3.3) を移流項と非移流項に分離する。すると、移流項は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

非移流項は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

非移流項 (式 3.12,3.13) の空間微分を中心差分で、時間微分を前進差分で離散化すると、

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} \\ &= -\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\partial x} \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{3}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \\ &= -\frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\partial y} \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j+\frac{3}{2}}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となり、それぞれのノードにおける速度の中間的な値となる u^*, v^* を得る。また、CIP法の計算には、それぞれの速度の定義された位置での u, v についての x, y 軸方向の勾配を計算する必要がある。たとえば、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ の位置での x 軸方向の勾配、すなわち u^* を求めるためには、ナビエ・ストークス方程式を x 軸方向に空間微分を行ない、その非移流成分から、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_x u_{i+\frac{1}{2},j}^* - \partial_x u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} \\ &= \frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^* - u_{i+\frac{3}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2\Delta x \Delta t} \\ & \quad - \partial_x u_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2\Delta x} - \partial_x v_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\partial_x u^*$ は $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ を省略して表記したものである。このように、前ステップの保持している値 u と勾配 $\partial_x u$ と、現在の速度の中間値 u^* の3種類の値のみを利用することによって $\partial_x u_{i+\frac{1}{2},j}^*$ を求めることができる。

また、(式 3.16) を求めたのと同じ要領で、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial_y u_{i+\frac{1}{2},j}^* - \partial_y u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} \\
&= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^* - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^* - u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{2\Delta y\Delta t} \\
&\quad - \partial_y u_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2\Delta x} - \partial_y v_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{2\Delta y}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial_x v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \partial_x v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \\
&= \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x\Delta t} \\
&\quad - \partial_x u_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} - \partial_x v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta y}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial_y v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \partial_y v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \\
&= \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^* - v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta y\Delta t} \\
&\quad - \partial_y u_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} - \partial_y v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta y}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

が求まる。このようにして求めた、 u^* , v^* および $\partial_x u^*$, $\partial_y u^*$, $\partial_x v^*$, $\partial_y v^*$ から、前章で示した 2 次元の CIP 法により移流を求めることによって、 u^{n+1} , v^{n+1} と $\partial_x u^{n+1}$, $\partial_y u^{n+1}$, $\partial_x v^{n+1}$, $\partial_y v^{n+1}$ を求めることができる。

第 4 章

境界条件

4.1 固定した壁境界の扱い

4.1.1 速度と圧力

移動しない固体表面の境界条件には、基本的に MAC 法と同じ手法による境界条件を設定した。固体表面での境界条件の扱いでは、*free - slip* と *non - slip* 条件があり、そのどちらかを設定する。

- *free - slip* 境界条件

図 4.1 から壁に平行な流速を v 、壁に垂直な流速を u とする。壁面で $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ かつ $u = 0$ が成り立つ時が *free - slip* の境界条件となる。 $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ を差分方程式の境界条件として実現するために、境界の外に仮想的なセルを考え、そのセルでの流速を $u_{i-\frac{3}{2},j}$ としたときに $u_{i-\frac{3}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j}$ とすることによって、 $u_{i-\frac{1}{2},j} = 0$ となり *free - slip* の境界条件を満足させる。

$$\begin{aligned}v_{i-1,i+\frac{1}{2}} &= v_{i,i+\frac{1}{2}} \\v_{i-1,i-\frac{1}{2}} &= v_{i,i-\frac{1}{2}} \\u_{i-\frac{3}{2},j} &= u_{i+\frac{1}{2},j}\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$p_{i-1,j} = p_{i,j}\tag{4.2}$$

- *non - slip* 境界条件

壁面に平行な流れおよび垂直な流れの双方に対して、壁面で $u = 0, v = 0$ が成り立

つような境界条件を *non-slip* 境界条件という。境界部分で $v = 0$ を差分形式の境界条件として実現するために仮想セル内の速度を次のように置くことにより、壁面境界での滑りなしの条件を満足させる。

$$\begin{aligned} v_{i-1, i+\frac{1}{2}} &= -v_{i, i+\frac{1}{2}} \\ v_{i-1, i-\frac{1}{2}} &= -v_{i, i-\frac{1}{2}} \\ u_{i-\frac{3}{2}, j} &= u_{i+\frac{1}{2}, j} \end{aligned} \quad (4.3)$$

さらに、圧力についても境界部分での設定が必要で、仮想セル内での圧力は壁面での運動方程式を解くことにより得られて、

$$p_{i-1, j} = p_{i, j} - \frac{2u_{i+\frac{1}{2}, j}}{Re\Delta x} \quad (4.4)$$

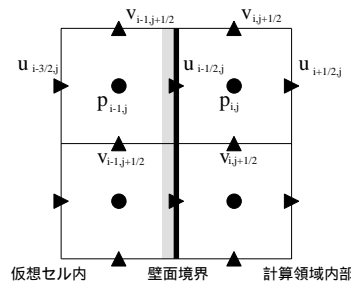


図 4.1: 境界条件

4.1.2 流入条件、流出条件

入口条件では圧力を指定する方法と、流速を指定する方法が考えられるが、本研究では流速を指定した。これには、入口境界上に必要な速度成分を与えればよい。また、ここでの圧力については $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ となるように、入口境界の外側の仮想セルの圧力を内部の入口近傍のセルの圧力と同じにとる。

次に、流出条件は、流速に関しては自由に流出するように指定した。これには、流出口近傍の流速を、仮想セル内の速度として与えた。また、圧力については、仮想セル内の圧力を 0 と規定した。

4.2 移動する境界

流体中を固体壁面が移動する計算を行なう時、その境界での速度や圧力の設定を適切に行なわなければならない。たとえば、図 4.2 の場合を考える。図 4.2(a) では、壁が U という速度で右側に移動している様子を表している。そして、次のステップとなる図 4.2(b) では、壁が格子の辺を通り越した直後の状態を示している。ここで、壁近傍での速度の境界条件について考えてみよう。

(a) では、壁近傍での速度 u に対する境界条件は、 $u_a = U, u_b = U$ と与える。そして、壁が右に移動して (b) となったときに、 $u_b = U, u_c = U$ としても良いのだろうか？ 実際に、 $u_c = U$ と置くことは、計算にとって悪い影響を及ぼす。それは、(a) の段階では $u_c \neq U$ であると考えられるのに、次のステップ (b) でいきなり $u_c = U$ という値を設定してしまうと、速度の不連続な変化を引き起こしてしまうからである。実際の計算上の問題としては、速度の急速な変化により圧力の大きな振動を引き起こすことになる。壁面が格子の辺を通り過ぎるたびに、振動が生じたのでは、本来なら定常な解が得られるような計算でも、安定した解が得られなくなってしまう。

このような問題を回避するために、移動する境界の境界条件の設定では、固定した壁面での境界条件とは異なった工夫が必要となる。これは、速度 u だけではなく、速度 v や圧力 p に対しても配慮する必要がある。以下に、その手法について記述する。

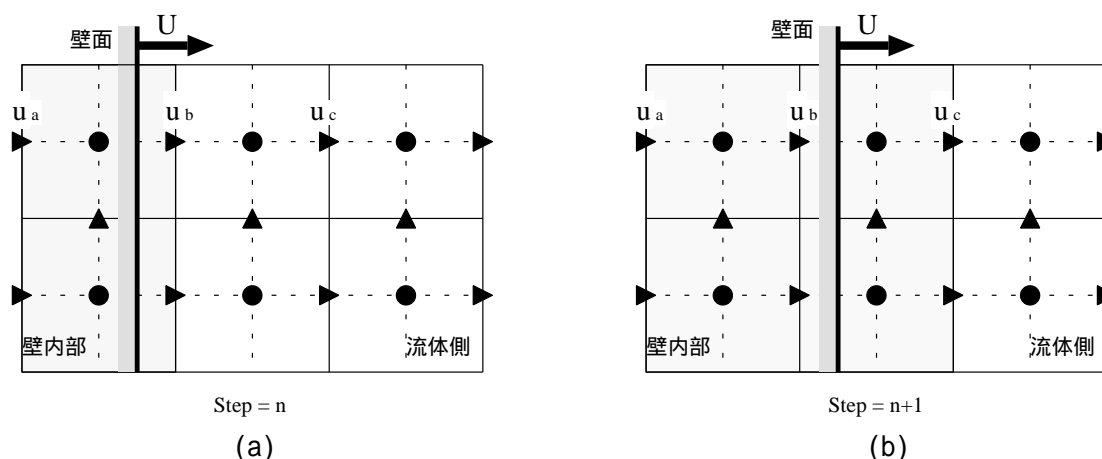


図 4.2: 移動する境界

4.2.1 移動境界の境界条件の設定

図 4.3は、流体領域と固体領域の接している場所を表したものである。右側が流体領域となっている。また、左側の点が沢山打たれた領域が壁内部、つまり仮想セルである。壁は、仮想セル内に位置しており、右側に U という速度で移動している。この壁は *non-slip* の境界条件とする。壁の位置は r, s の 2 つの値を用いて表す。 r は、格子の辺と辺の距離である、 $i - \frac{3}{2}$ と $i - \frac{1}{2}$ の距離を 1 で正規化して、 $0 \sim 1$ までの値として表した時に、辺 $i - \frac{3}{2}$ から壁までの距離を r として示す。また、 s は、格子の中央の点 $i - 1$ と i の距離を 1 で正規化したときの、 $i - 1$ から壁までの距離を s で表すことにする。

まず、 u 方向の境界部分での速度成分の与え方について考える。すると、式 4.5 に示すよ

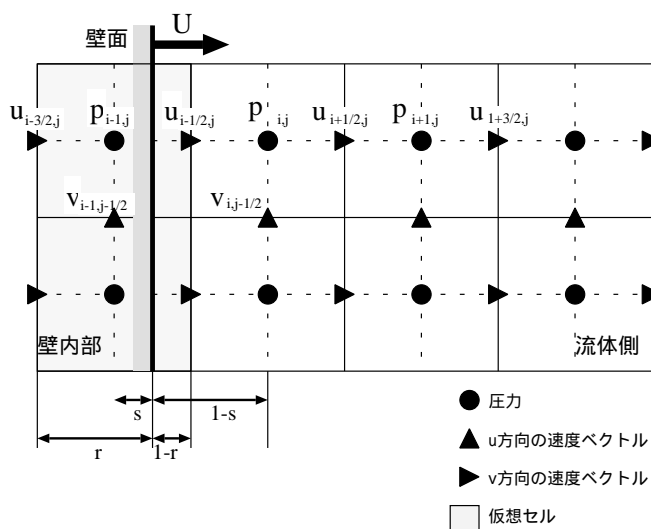


図 4.3: 境界条件

うに、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ での速度は、壁面が $i - \frac{3}{2}$ の地点にあるときには、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ そのものの値を利用している。そして、壁が移動して、 $i - \frac{1}{2}$ の地点に近づくにしたがって、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ の速度は、壁面の移動速度 U に近似してゆくようにする。

$$\begin{aligned}
 u_{i-\frac{3}{2},j} &= U \\
 u_{i-\frac{1}{2},j} &= U \\
 u_{i+\frac{1}{2},j} &= (1-r) \cdot u_{i+\frac{1}{2},j} + r \cdot U \dots \dots (0 \leq r < 1)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

v 方向の速度成分は式 4.6に示したように、壁面が $i, j - \frac{1}{2}$ に接近するにつれて、 $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ の流速は 0 に近づくように設定する。

$$\begin{aligned} v_{i,j-\frac{1}{2}} &= (1-s)v_{i,j-\frac{1}{2}} \\ v_{i-1,j-\frac{1}{2}} &= -2 \cdot s \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}} \dots \dots (0 \leq s < 1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

そして、仮想セル内の圧力 $p_{i-1,j}$ については、

$$p_{i-1,j} = p_{i,j} - \frac{2 \cdot u_{i+\frac{1}{2},j}}{Re\Delta x} \cdot r \quad (4.7)$$

次に、図 4.4は、壁の位置が図 4.3よりも右側に進んだ瞬間を表している。壁面が $i - \frac{1}{2}$ を越えた瞬間に仮想セルの領域が右側に移動する。そして、 r を定義していた範囲が $i - \frac{3}{2} \sim i - \frac{1}{2}$ だったものが $i - \frac{1}{2} \sim i + \frac{1}{2}$ となる。すると、この時の u, v の境界条件は、式 4.8となる。

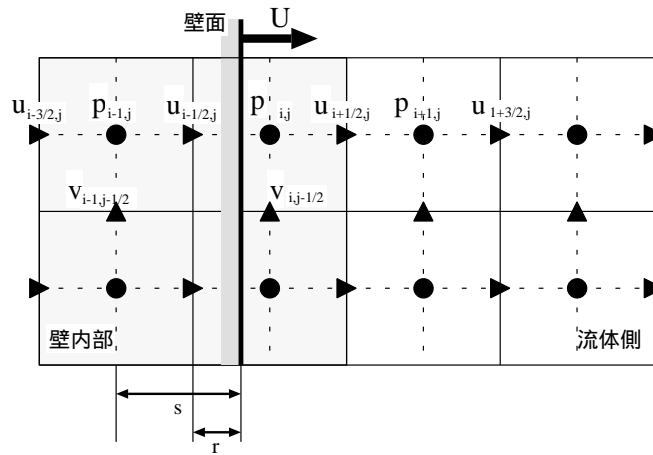


図 4.4: 境界条件

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2},j} &= U \\ u_{i+\frac{1}{2},j} &= U \\ u_{i+\frac{3}{2},j} &= (1-r) \cdot u_{i+\frac{3}{2},j} + r \cdot U \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} &= (1-s)v_{i,j-\frac{1}{2}} \\ v_{i-1,j-\frac{1}{2}} &= -2 \cdot s \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

さらに、壁が右側に進んで i と $i + \frac{1}{2}$ の間に来た時が図 4.5である。図 4.4との違いは s の定義されている領域が $i \sim i + \frac{1}{2}$ の間に変わったことである。

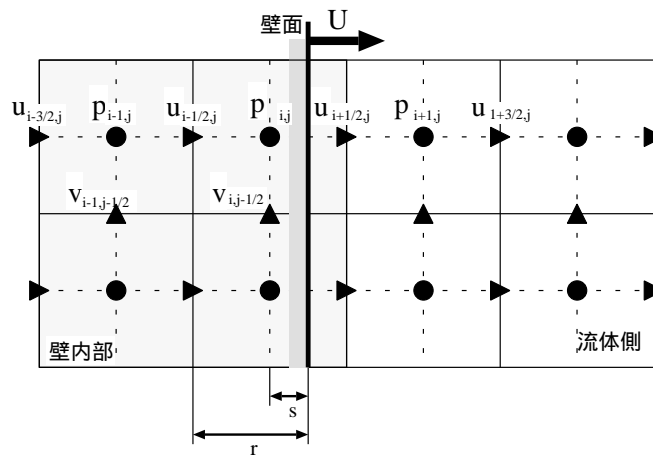


図 4.5: 境界条件

このように壁が移動するに従って、速度を規定する位置が r と s のように互い違いに進行するように指定する。

第 5 章

予備実験

5.1 1次元 CIP 法の検証

CIP 法を用いて、1次元の移流方程式を解く計算を行なう。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

図 5.1(a) は、初期状態として、 $f(x)$ は、1 の値を持つ矩形波が 10 ~ 20 の位置に存在している。この $f(x)$ を右側に速度 $u = 0.05$ で 4200 ステップ移流させた。このとき $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ とした。解析結果は図 5.1(b) である。点線が厳密解で、点の付いた実線が解析解である。この計算を同じ条件のもとで風上差分で計算すると図 5.2 となる。

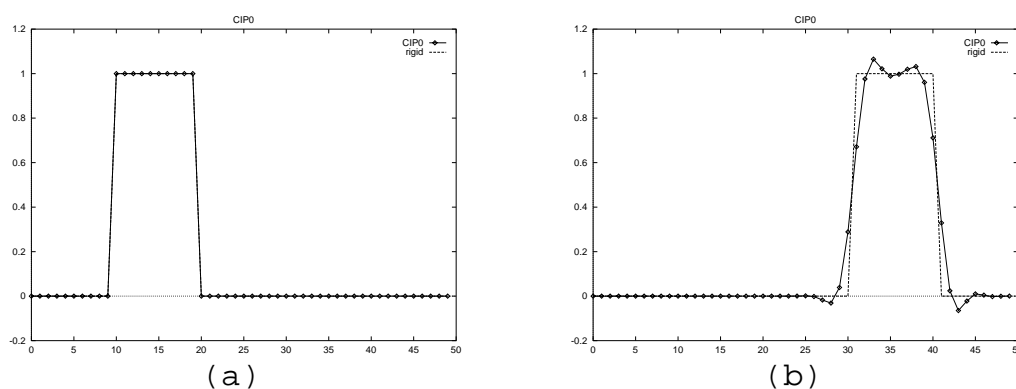


図 5.1: 1次元 CIP 法による移流の解析

数値拡散によって、特異点のある場所がなまっている様子が確認できる。これと比較すると CIP 法を利用して移流方程式を解く時の精度の良さが確認できる。

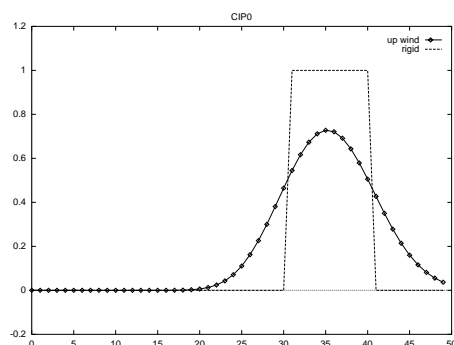


図 5.2: 風上差分による移流の解析

5.2 1次元 CIP 法の拡張

CIP 法の精度の良さは示されたが、図 5.1(b) を見ると、矩形波のエッジのある場所では、オーバーシュートが生じている。これは、特異点での勾配の与え方に問題があるからである。さきほどの手法では、図 5.3 のように勾配が与えられている。特異点で左右の勾配の中間の値をとってしまうことがオーバーシュートの原因となっていた。これを、図 5.4 のようにして、特異点のある場所では、注目する格子の右と左で勾配の値を変えて補間する。そして、特異点のある側 (図 5.4 では $g - left(x)$) では、3 次関数による補間は使わずに、線形補間を行なう。また、特異点ではない場所では、先ほどの CIP 法で補間する。この手法を使って移流の計算を行なうと、図 5.5 のような結果となり、オーバーシュートのない解析結果が得られた。

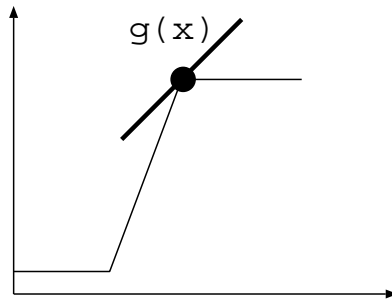


図 5.3: 特異点での勾配

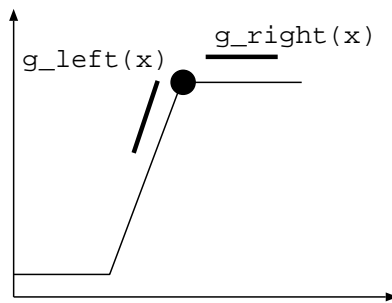


図 5.4: 特異点の左右で勾配を分ける

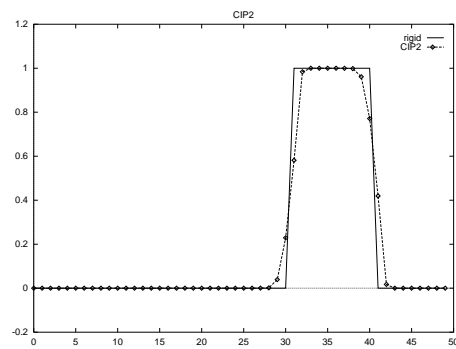


図 5.5: 拡張した CIP 法による移流の解析

5.3 2次元 CIP 法の検証

CIP 法を用いて 2 次元の移流方程式 (式 5.2) を解く。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

始めに、0 の値を持つ x, y 平面上に、1 の値をもつ正方形の領域を定義する (図 5.6)。この状態を初期条件として、 x, y 平面上の全ての格子点に対して x 軸、 y 軸方向にそれぞれ $u = 1, v = 1$ という速度を与える計算をする。これによって正方形の領域を右上に移流させる計算を行なう。図 5.7は、この計算の初期状態を示しており、 x, y 平面の高さ方向 (Z 軸方向) に 1 の初期値が設定されている。図 5.8は、300 ステップ移流させた後の図である。その結果、移流後の立方体は右上に移動し、またその形状は良い形で保たれており、2 次元の CIP 法は数値拡散の少ない手法であることを確認した。

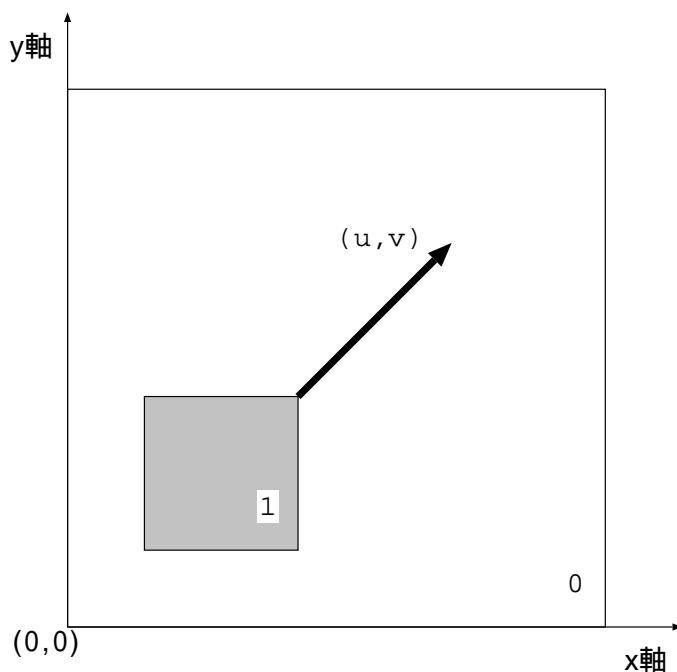


図 5.6: 2次元 CIP 法 初期条件 概略図

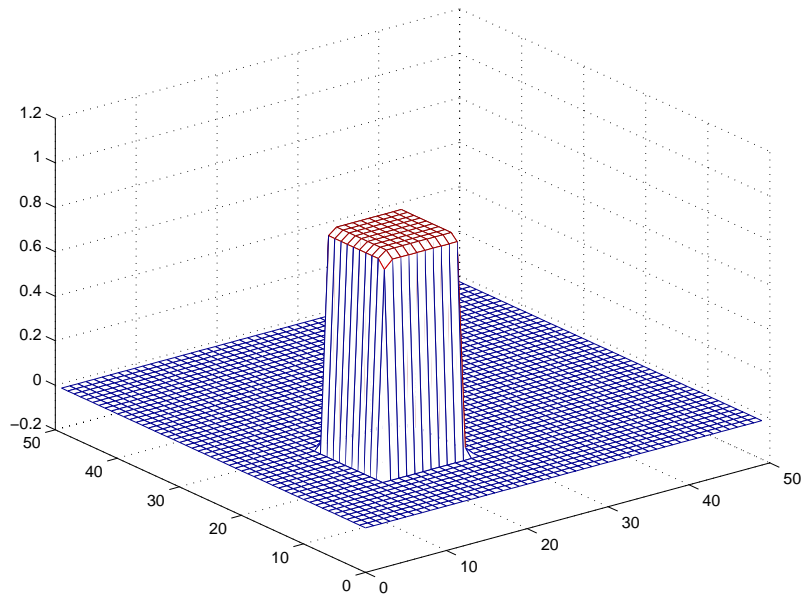


図 5.7: 2次元 CIP 法 初期条件

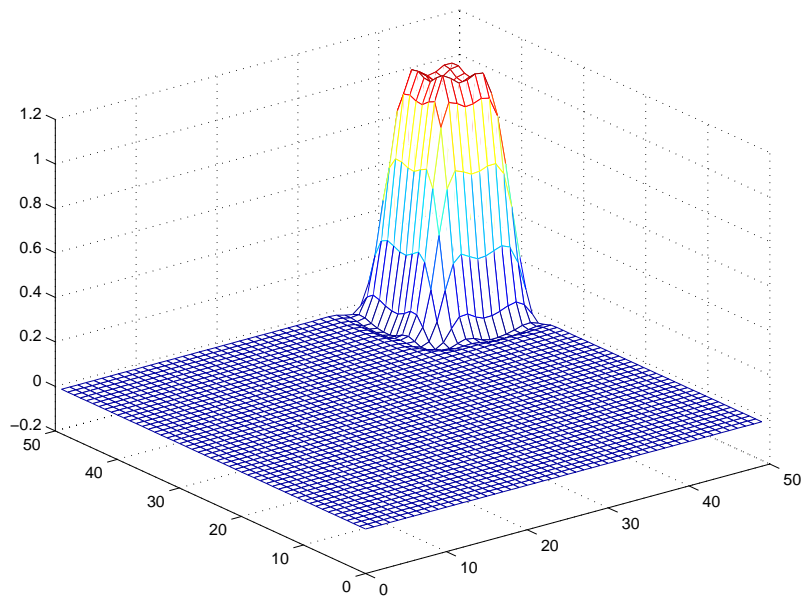


図 5.8: 2次元 CIP 法 300 ステップ後

5.4 キャビティ流れ

ここでは、2次元のナビエ・ストークス方程式を解く際の、移流成分を解く場面で CIP 法の適用について検討する。このための、計算モデルとしては、2次元流れの標準的な検定問題である正方キャビティ流れを取り上げる。図 5.9 に概略図を示す。速度に関する境界条件は、左右、下面に関しては *non-slip* の境界条件で上部の壁には右向き速度があるとする。

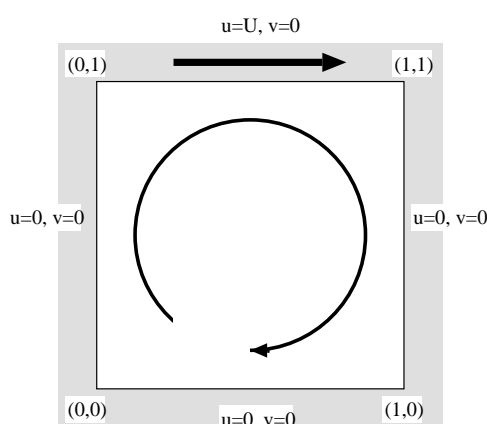


図 5.9: キャビティ流れの概要

5.4.1 解析手順

計算は図 5.10 の手順で行なう。

1. 始めに変数の初期化を行なう
2. 上下左右の 4 辺の境界条件を設定する。
3. 圧力のポアソン方程式を SOR 法による緩和を行ないながら計算する。これには、圧力に対してのポアソン方程式を、前ステップでの圧力 p^n 、速度 u^n, v^n の値を利用して解く。このポアソン方程式の反復計算により、残差が十分に小さくなるまで収束計算を行ない、 p^{n+1} を求める。

4. この圧力 p^{n+1} を使って速度の計算を行なう。そのためには、今求めた圧力 p^{n+1} と、前ステップでの速度 u^n, v^n から、ナビエ・ストークス方程式の非移流項を使って、速度の中間的な値となる u^*, v^* とその勾配 $\partial_x u^*, \partial_y u^*, \partial_x v^*, \partial_y v^*$ を求める。
5. u^*, v^* および $\partial_x u^*, \partial_y u^*, \partial_x v^*, \partial_y v^*$ と u^n, v^n と $\partial_x u^n, \partial_y u^n, \partial_x v^n, \partial_y v^n$ から、CIP 法を使った移流項の計算を行なうことにより、 u^{n+1}, v^{n+1} と $\partial_x u^{n+1}, \partial_y u^{n+1}, \partial_x v^{n+1}, \partial_y v^{n+1}$ が求まる。
6. 以上の計算を繰り返して行なうことによってタイムステップを進めてゆく。

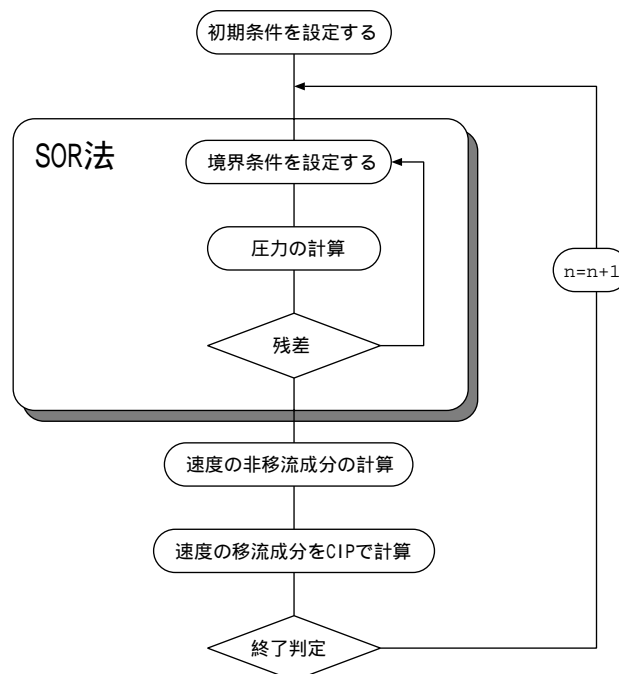


図 5.10: CIP 法を用いた N-S 方程式の計算手順

5.4.2 解析結果

図 5.11 は、 $Re = 100$ で、 $\Delta t = 0.001$ 、 $\Delta x = 0.03$ 、 $\Delta y = 0.03$ という条件で 8000 Step 後の正方キャビティの速度分布の結果である。右上に渦が生じている様子が確認できる。これは、Mac 法などの従来法の解析結果と比べても定性的に良く一致することが確認された。また、図 5.12 の圧力分布についても良く一致することを確認した。

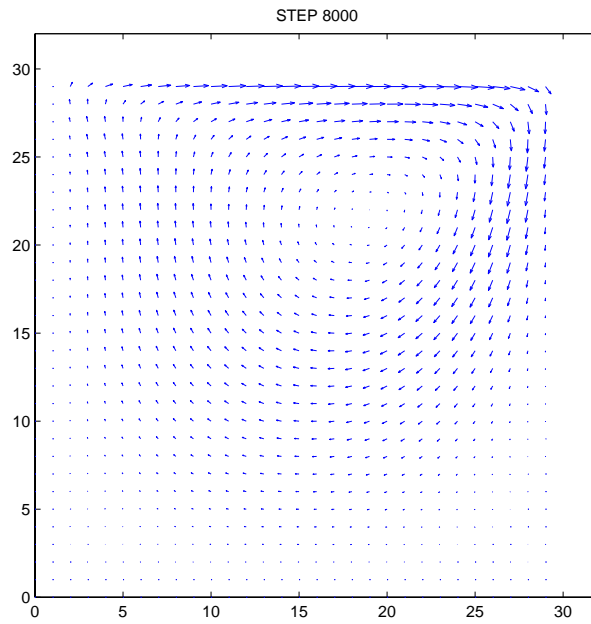


図 5.11: 正方キャビティー流れ 速度分布

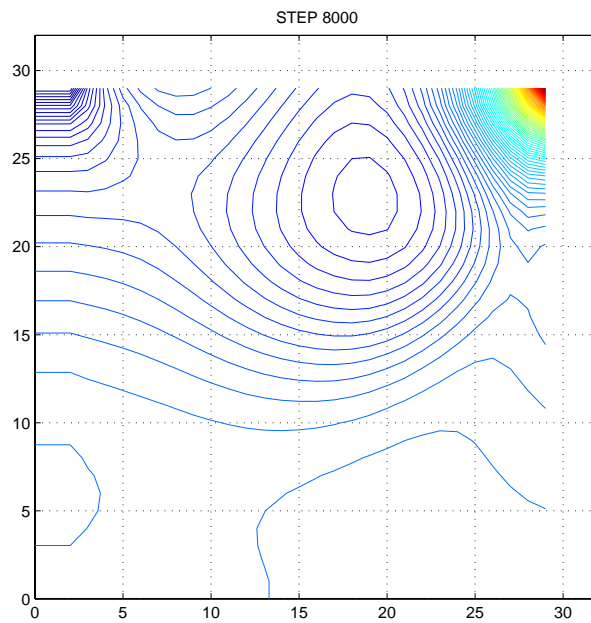


図 5.12: 正方キャビティー流れ 圧力分布

5.5 移動境界問題 (1)

次に、移動境界問題に関する基礎的な検討として、図??のようなモデルの解析を行なう。このモデルでは流体は初期状態では静止している。ここで、固体領域をゆっくりと右向き加速してゆく。そして、 $Re200$ に達した時点で等速にする。このモデルでは移動する固体回りの境界条件の設定が必要になる。そのため、以前の章で説明したように、固体と流体の境界部分での速度と圧力がスムーズに移動するように配慮する必要がある。

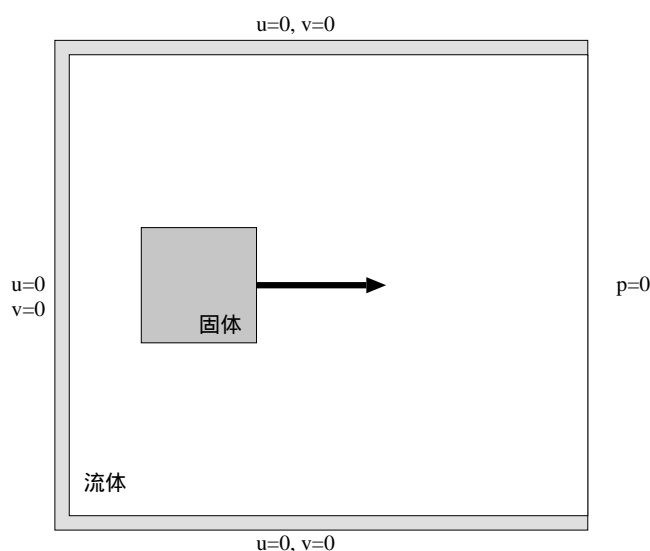


図 5.13: 移動する固体回りの流れのシミュレーション

5.5.1 解析手順

計算手順としては、各タイムステップの始めで固体の位置の計算を行ない、固体回りの境界条件の設定を行なう。この時、固体は上下に移動するので、固体の進行方向の面で、固体の移動速度にあたる速度を境界条件として与える。固体回りの境界条件を設定した後、ナビエ・ストークス方程式を解いて圧力と速度の計算を行なう。この、解析手順をまとめると以下ようになる。

1. 格子上で固体領域を 1, 流体領域を 0 というように定義する。固体の移動する速度が \sin 関数によって与えられるので、CIP 法を使って移流を解くことにより固体の位

置を特定する。

2. 固体と流体の境界面で、固体の位置と速度に応じた境界条件を設定する。また、毎ステップごとに移動する固体領域はノンスリップの境界条件となるために、壁面での流速を打ち消すような速度も壁面内部に与える必要があるため。
3. 圧力についてのポアソン方程式を反復計算させて、圧力を求める。
4. ナビエ・ストークス方程式の非移流項の計算を行ない、 u^*, v^* とその微分を計算する
5. u^*, v^* とその微分から CIP 法をつかって、ナビエ・ストークス方程式の移流項の計算を行ない、速度を求める
6. 1. に戻る

5.5.2 解析結果

解析結果を示す。格子には等間隔の正方格子を用いて 70×50 の格子数とした。格子間隔は $\Delta x, \Delta y = 0.05$ とし、 $\Delta t = 0.001$ のタイムステップで計算を行なった。

図 5.14 ~ 図 5.17 に解析結果を示す。これらの図は、それぞれのタイムステップでの速度分布を表している。ここで、左の図は、流れを外側から眺めた時の流れの速度分布を表している。また、右側の図は、左側の図を相対的に表したもので、固体が静止した視点から見た時の流れの様子を表したものである。つまり、固体の上に乗って、周りの流れを眺めた時に相当する。

図 5.14 では、固体は右側に移動し始めたところである。図 5.15 では、固体の速度が徐々に上がり、固体の後ろ側に双子の渦が生じている。そして、図 5.16, 図 5.17 では、固体後方でカルマン渦の初期の状態が生じている。

このように、移動境界の問題が解けたことを確認し、結果は物理的に妥当なものとなることを確認した。

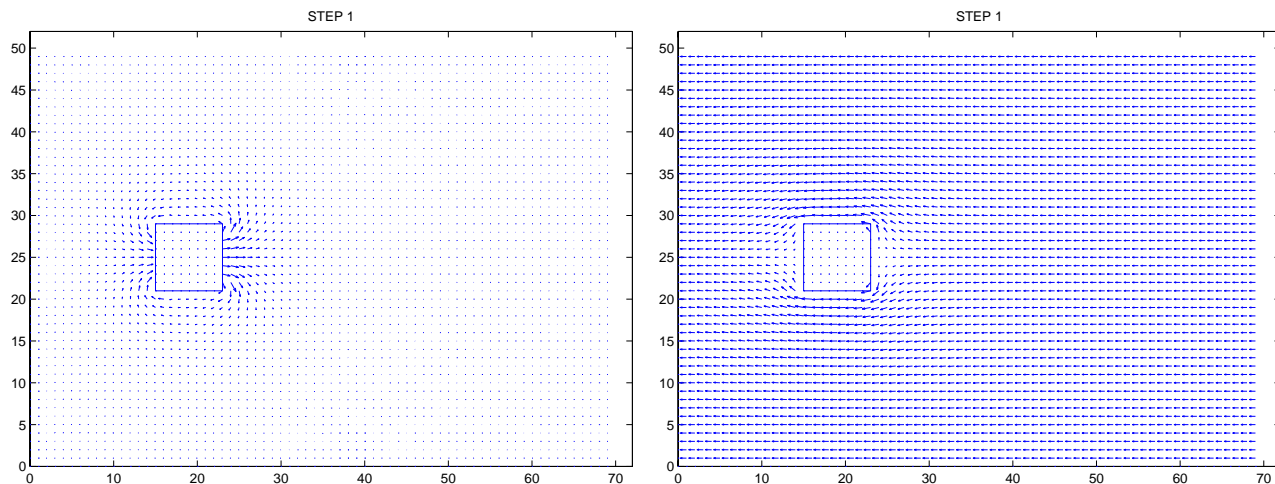


圖 5.14: 解析結果 Step 1

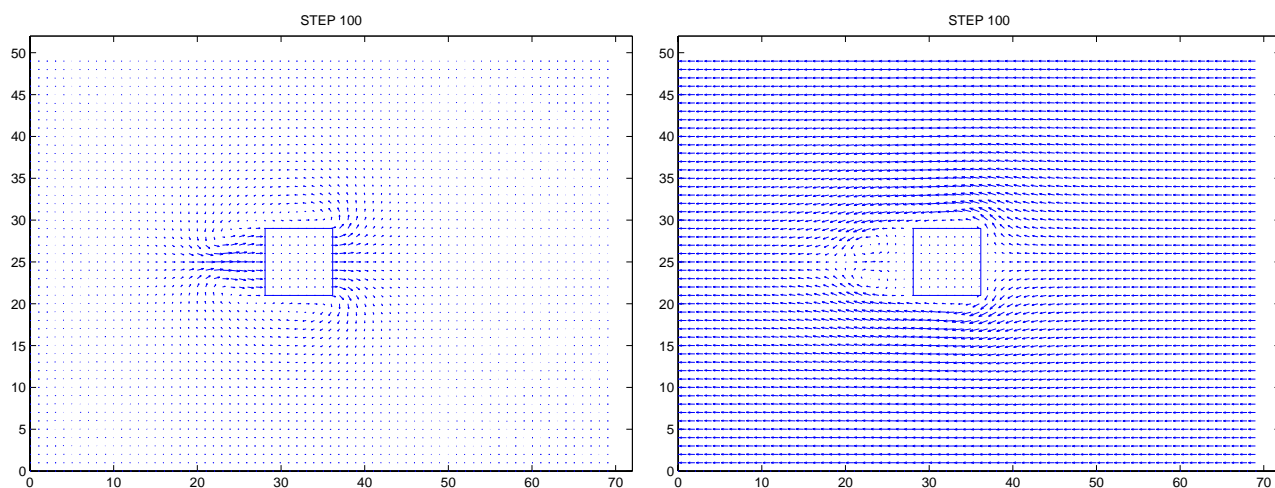


圖 5.15: 解析結果 Step 100

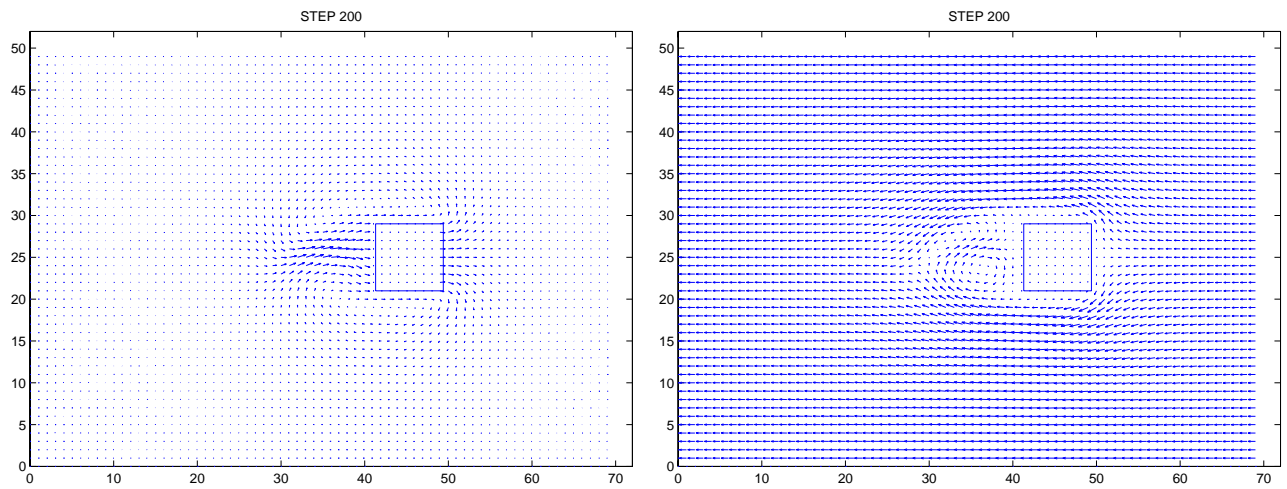


圖 5.16: 解析結果 Step 200

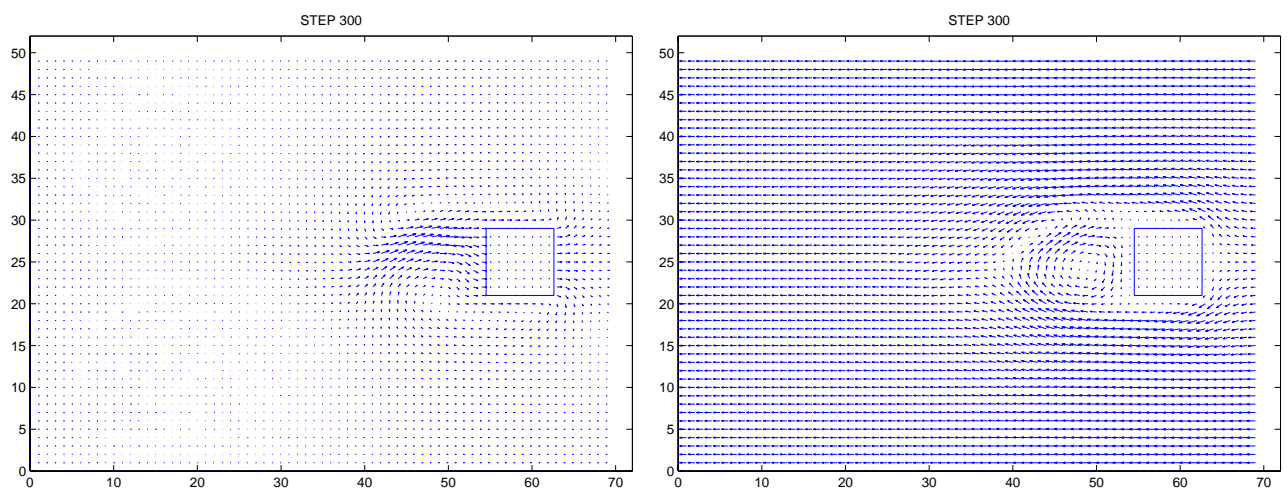


圖 5.17: 解析結果 Step 300

5.6 移動境界問題 (2)

先ほどのモデルでは、一定方向のみの移動について検証した。ここでは、境界の移動する向きが変換する問題に対応できるかどうかのチェックを行なう。

このためのモデルとして、図 5.18 に示したような、流体中を上下にピストン運動する固体によって引き起こされる流れの解析を行なう。このモデルは、流体領域の内部に、正方形の固体領域が置かれている。流体は初期状態では静止している。ここで、固体領域が上下に動き、その際に生じる流れの解析を行なう。

固体領域の動く速度は、 \sin 関数によって決定され、固体の位置が上端と下端では速度は 0 で、その中間で最も速くなる。境界条件は、固体回りが *non-slip*、上下と左の壁面は *non-slip* で、右壁面が自由流出で圧力を 0 に規定した。

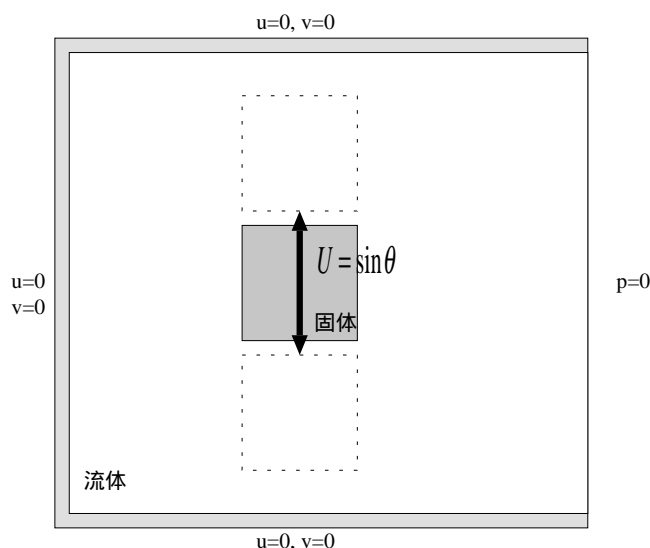


図 5.18: 流体中を上下に振動する固体回りの流れのシミュレーション

5.6.1 解析結果

解析結果を示す。格子には等間隔の正方格子を用いて 70×50 の格子数とした。格子間隔は $\Delta x, \Delta y = 0.05$ とし、 $\Delta t = 0.001$ のタイムステップで計算を行なった。また、固体の移動速度は、固体の移動速度がもっとも速い時の速度を代表速度とし、固体の 1 辺の長さ

を代表長さとして、 $Re100$ となるように設定した。

図 5.20 ~ 図 5.23 に解析結果を示す。これらの図の状態は、図 5.19 に示すように、速度と加速度が (a) ~ (d) のフェーズのときの図である。図 5.20 では、下に向かって固体が加速を始めたところである。進行方向の面で外向きの流れが生じ、その反対側の面では、固体の後ろに流れが流れ込む様子が見られる。図 5.21 は、固体の加速度が 0 となったときのフェーズである。図 5.22 は固体の加速度がマイナスに転じている。すると、進行方向の反対側の面で、渦が徐々に成長してゆく。図 5.23 で、固体が静止しても、この渦はまだ残っている。

このように、固体が加速し、静止するという一連の過程の中で、さまざまな流れが現れる様子が見られた。

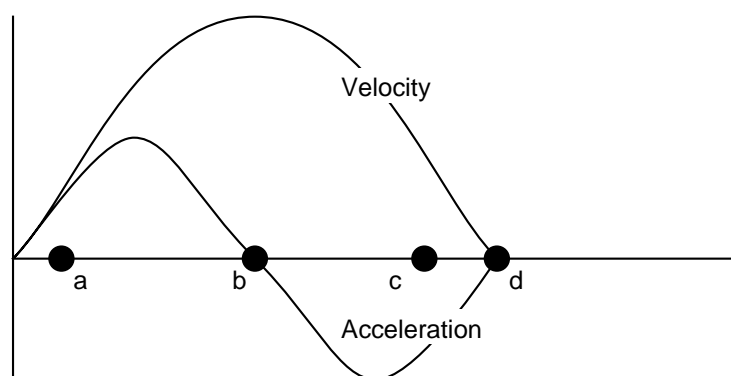


図 5.19: 解のフェーズ

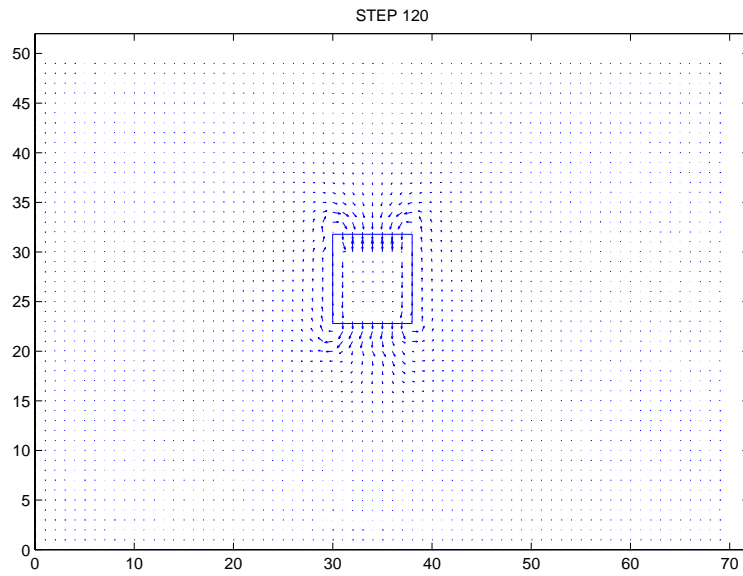


圖 5.20: 解析結果 (a)

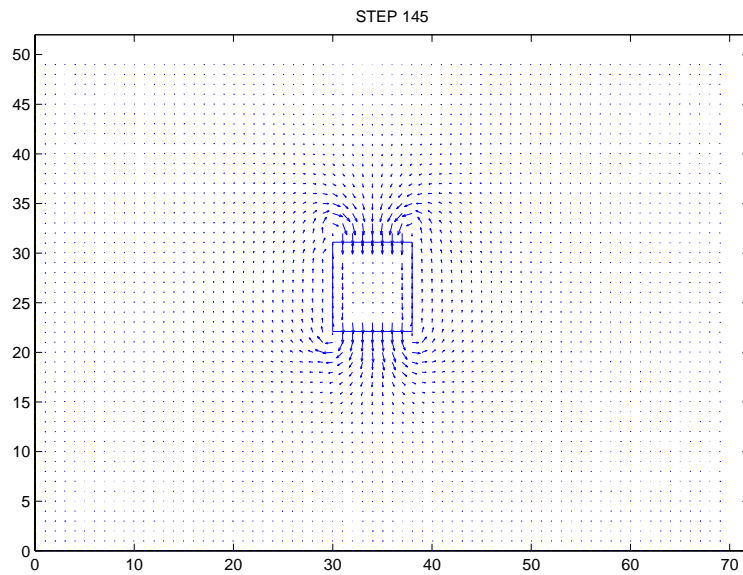


圖 5.21: 解析結果 (b)

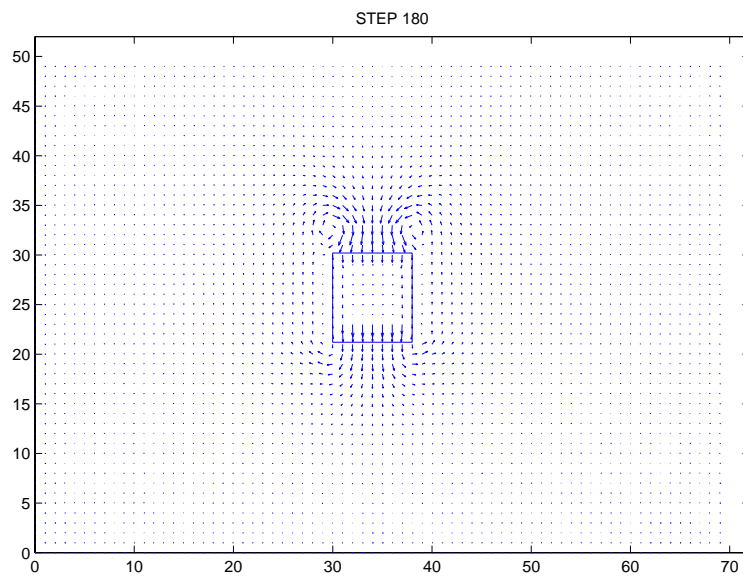


图 5.22: 解析结果 (c)

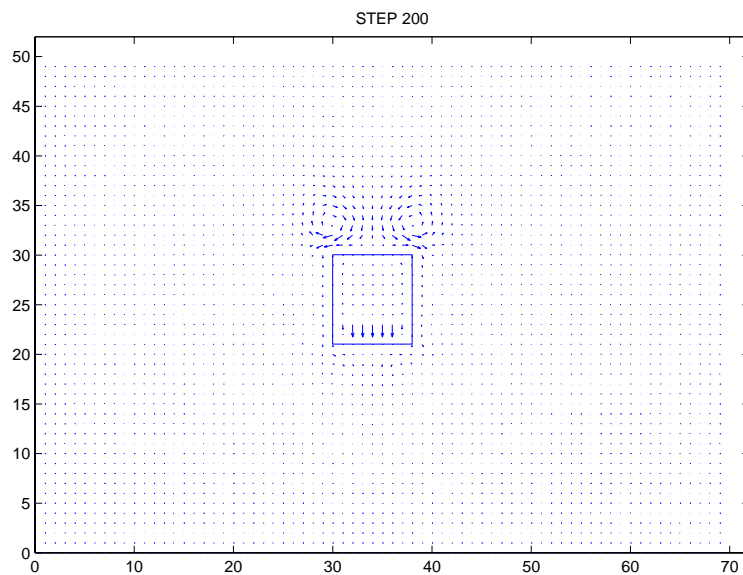


图 5.23: 解析结果 (d)

第 6 章

実験

6.1 計算モデル

計算モデルとしては 2 次元の管の中を流れる流体の計算をする。初期状態ではまっすぐな管の左側から、“ポアソユ流れ” となるように放物型の速度分布をもった流れを与える。しばらくこのまま計算を行ない、管内の流れを定常状態にする。次に、管上面の中央部を除々に狭窄させた時の流れの計算を行なう。

境界条件は、管の壁面は、狭窄部も含めて *non - slip* の境界条件とする。管入口では速度を与え、出口では圧力を 0 として計算する。

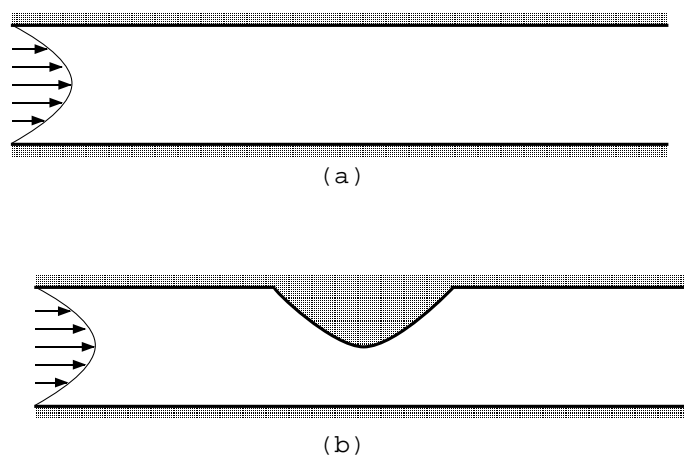


図 6.1: 計算モデル

6.2 境界条件

6.2.1 流体と固体の境界の座標の計算

境界部分が移動する計算を行なう際には、各タイムステップの始めに流体と固体の境界部分の座標が計算されている必要がある。このためには、2次元のCIP法を利用する。その手順については以下に示す。

1. 図 6.2(a) のように初期値を作成する。この図は管の上面の形状を表しており、 x, y 軸は管の座標に対応している。 z 軸方向は、流体領域では0、固体領域では1と密度関数のように設定する。
2. 固体領域を変形させて狭窄を作るためには、図 6.3のような速度成分を固体領域の一部の格子上の点に負荷する。これを2次元のCIP法で移流を解く。
3. これによって、図 6.2(b) に示すような狭窄をつくり出すことができる。そして、固体と流体の中間値である0.5の位置に、固体と流体の境界があるとして、固体、流体の境界の座標が正確に求まる。

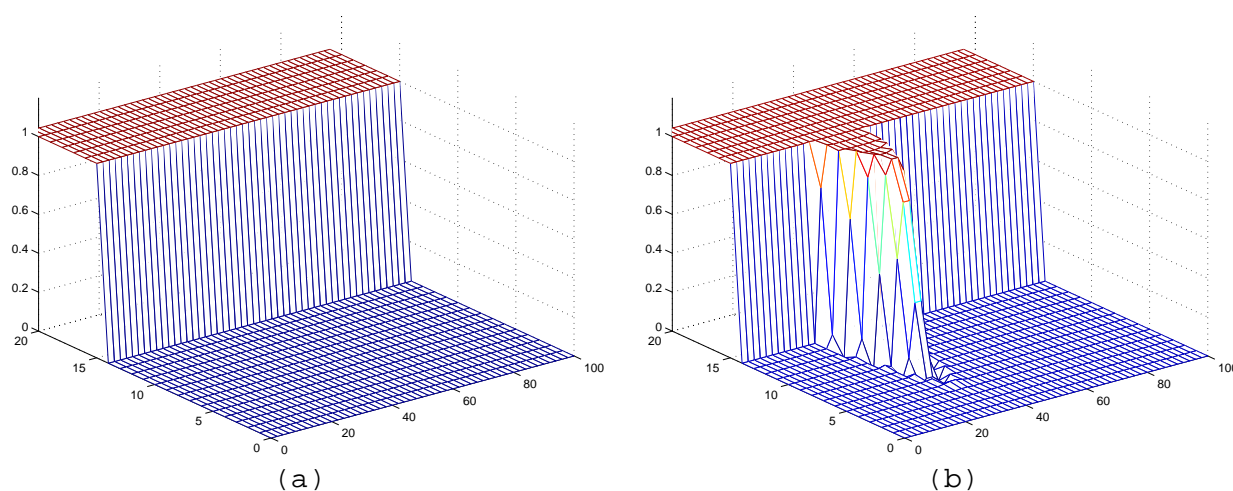


図 6.2: 流体と固体領域の境界

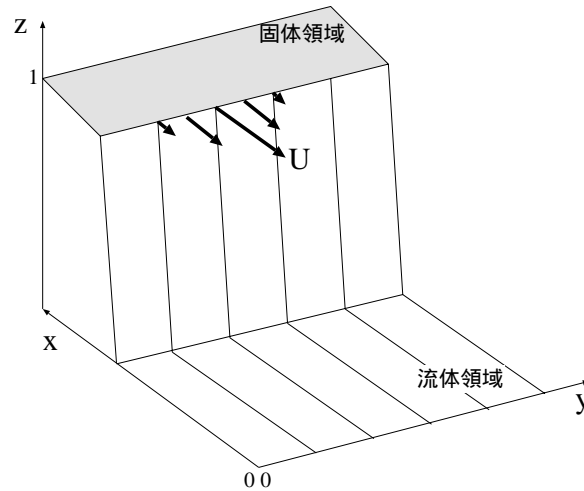


図 6.3: 狭窄部に速度を与える

6.3 解析結果

計算条件は、 20×100 の格子点を利用し、 $\Delta t = 0.001$ 、 $\Delta x, \Delta y = 0.05$ として計算を行った。この計算の初期では管はまっすぐであるが、時間が進むにつれて管の直径は最大で 45% まで狭窄する。狭窄する壁面の最大速度は、流入口での流速の 50% とした。

図 6.4 ~ 6.9 がシミュレーションの結果である。それぞれの図の上段が速度分布を表しており、下段が圧力分布¹を表している。1 → 200 Step までは、壁面を静止させて、管内の流れが定常になるようにした。200 Step ではまだ十分ではないが、ポアズイユ流れが形成されつつある。200 から 1000 Step にかけて狭窄させてゆく。400 Step では壁面の移動により、狭窄部付近で壁に押し出され、下向きに向かう流れがみられる。800 Step あたりが最も壁面の移動速度が速いフェーズとなっている。管入口からの流入と、狭窄によって押し出される流れの和によって、出口からの流出が増えている様子がみられる。1000 Step では、狭窄の度合いが最大に達し、壁面の速度は 0 となっている。狭窄部の後ろ側の領域に、渦が生じている。1200 Step では、いままでとは逆に、狭窄部が上向きに移動し始めている。これにより、狭窄部の右側では、壁に近い位置から逆流が始まっている様子が確認できる。

¹狭窄部の壁面の内部にも圧力のコンターが書かれているがこれは表示技術上の問題で意味はない

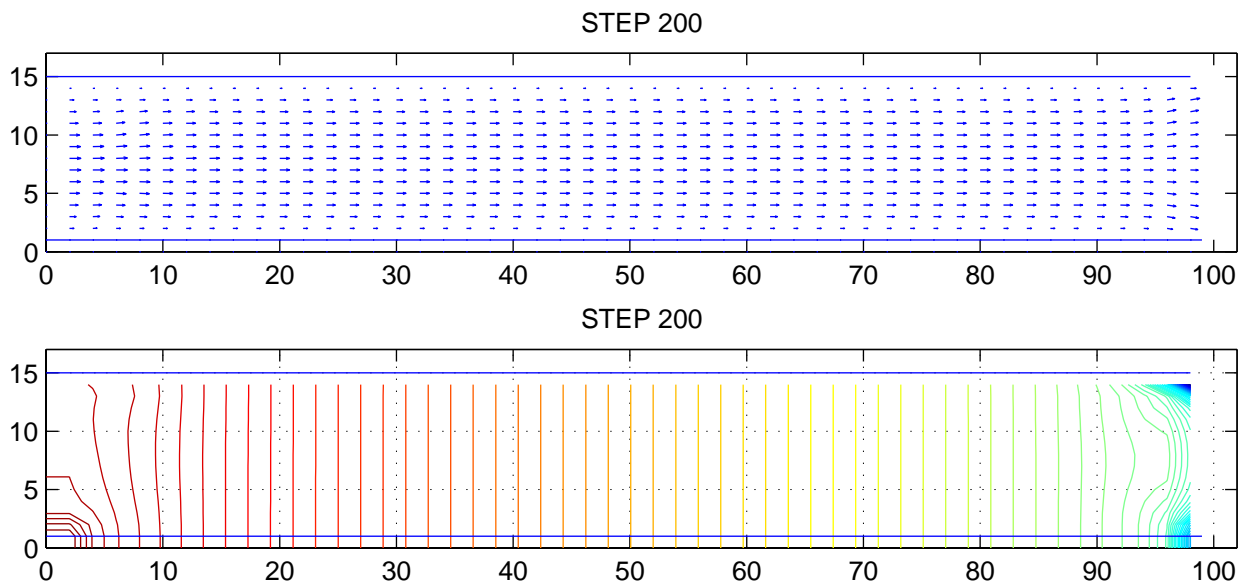


図 6.4: 狭窄する管 200 ステップ

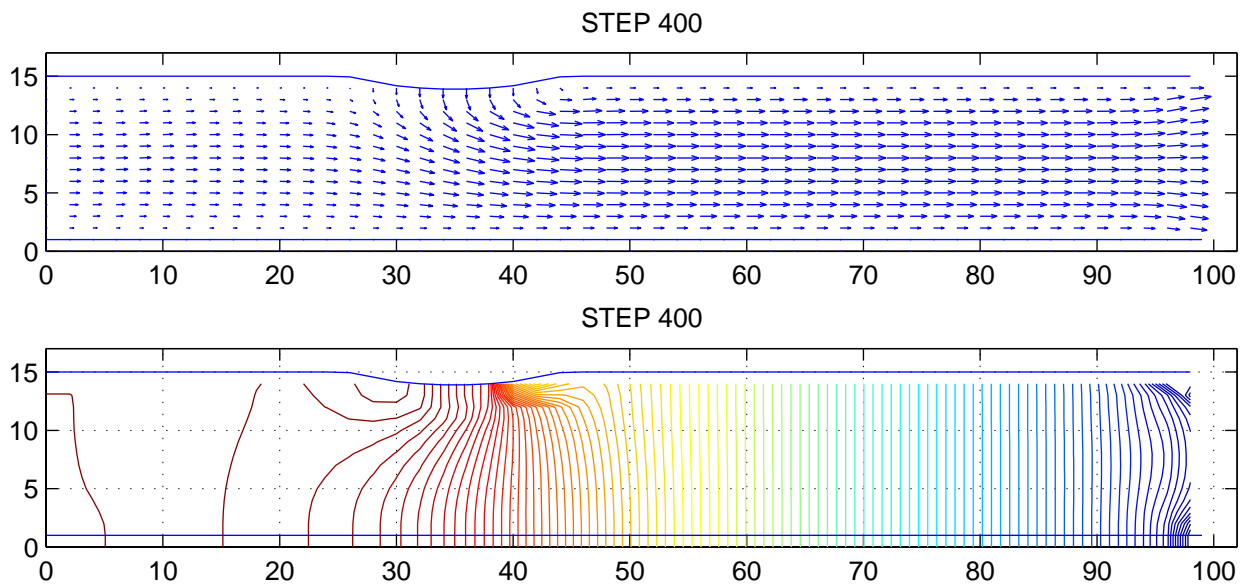


図 6.5: 狭窄する管 400 ステップ

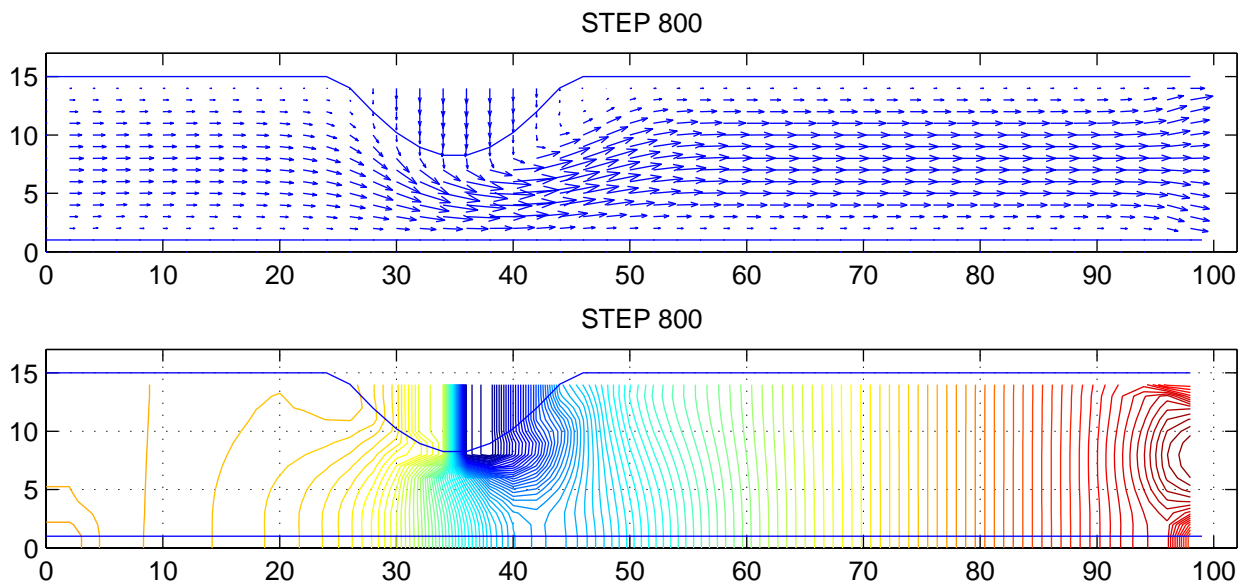


図 6.6: 狭窄する管 800 ステップ

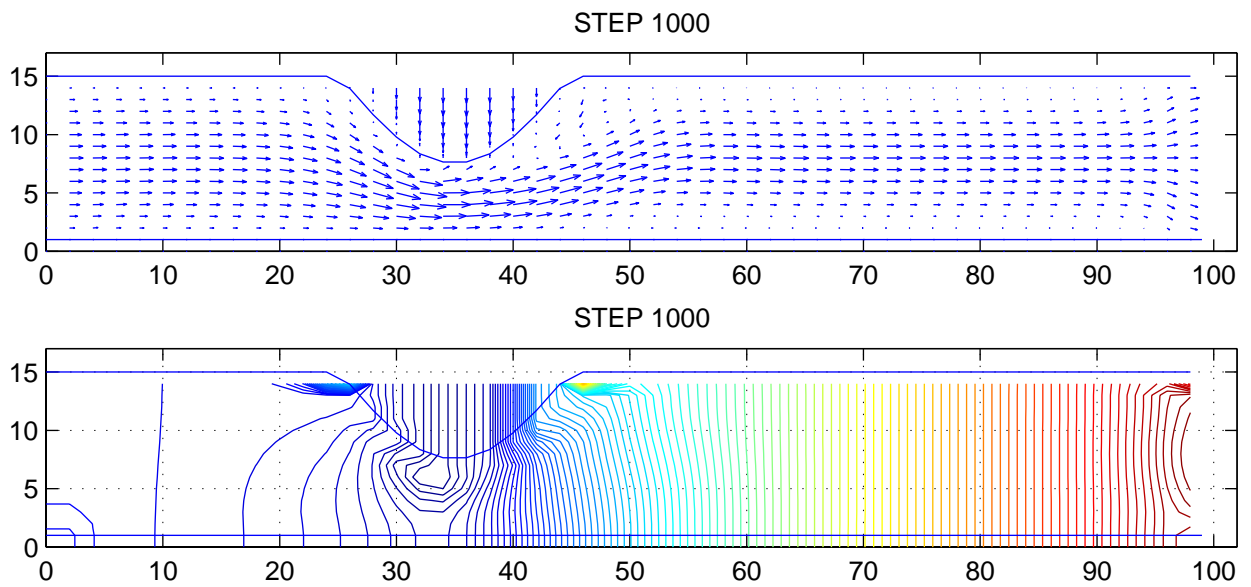


図 6.7: 狭窄する管 1000 ステップ

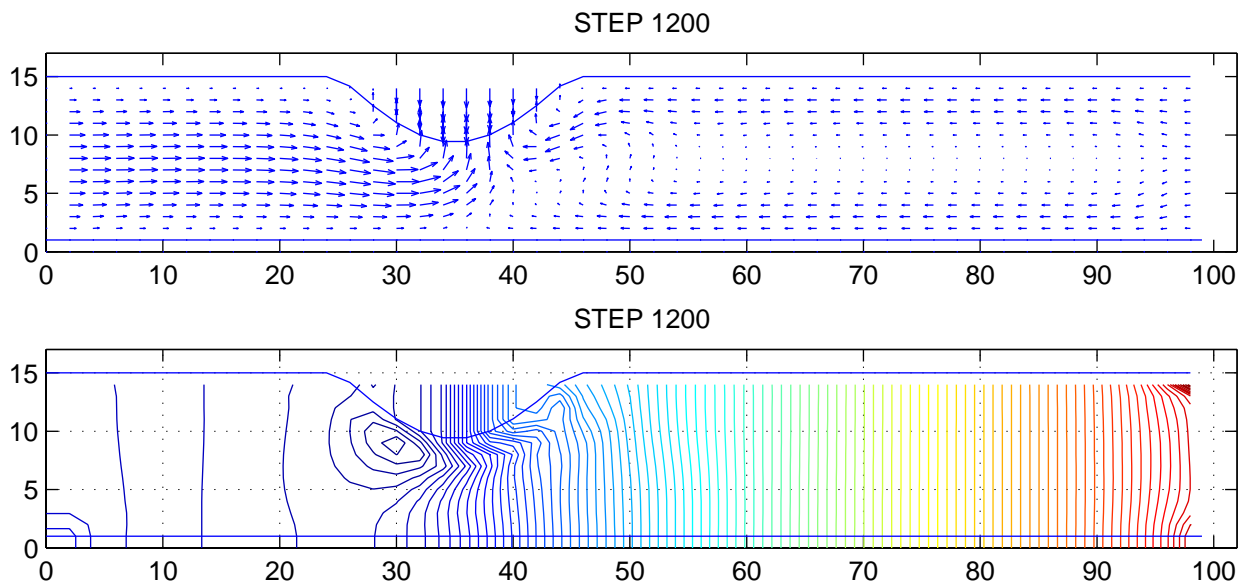


図 6.8: 狭窄する管 1200 ステップ

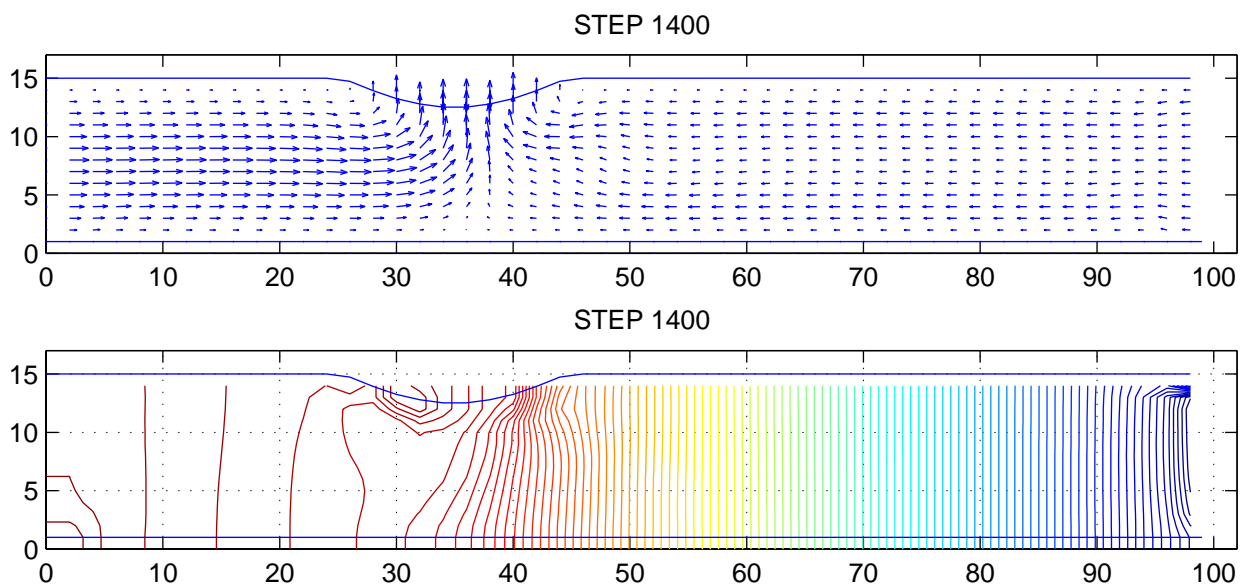


図 6.9: 狭窄する管 1400 ステップ

第 7 章

まとめ

7.1 CIP 法のメリット

本研究では、オイラーの手法により、空間に固定された格子での移動境界の問題の取り扱いについて検討した。移動境界の問題を CIP 法を使って有効と考えられる点は、境界を動かす操作が簡単であるという点である。これは、固体の領域の存在するすべての格子に速度を与えれば固体全体が移動するし、一部だけに速度を与えれば、固体が変形する。これを拡張すれば、固体領域が 2 つに分離したり、合体したりするような計算も可能になると考えられる。

また、移動境界の問題を 3 次元で扱うことを考えると、ラグランジュの手法のように、3 次元的に格子の移動を行なう際に、格子の潰れや、形状などにも注意を払わなくてはならない。この点、オイラーの手法では、格子は空間的に固定されており、境界の位置は CIP 法によって計算され、その位置は計算精度には影響しない。このため、CIP 法による移動境界問題の 3 次元化はやりやすいと考えられる。

7.2 弾性体との相互作用への指標

今回の計算では、固体の動きが一方向的に流体に伝わるという計算であった。今後の展開としては、固体と流体の相互作用などが考えられる。これは、固体が流体から受ける力を計算することによって、流体と固体の相互作用を計算できるだろう。また、今回の計算では、流体の圧力の計算と同時に、固体内部の圧力についての計算も行なった。この、固体

内部の圧力を応力として考えることにより固体が変形するような問題を扱うことも可能となるだろう。これは、固体を弾性体として扱い、弾性問題の基礎方程式を解く必要がある。これにより、流体から受ける力により、固体が変形するような、流体と固体の相互作用の問題も扱えるようになると考えられる。

7.3 並列化の指標

並列化のためのアプローチとしては領域分割を利用した方法が考えられる。今回の計算では、圧力のポアソン方程式を反復計算するのに 8 割、9 割の時間を費やしていることから、まず、ここの並列化が必要となる。ただし、反復計算の中で多量の通信が発生することが予想されるので、スケーラビリティを確保するためには、通信の回数を減らすような工夫が必要となるだろう。次に、CIP 法の並列化であるが、領域分割をした場合、隣の領域の格子の持っている値と勾配のデータを通信するだけなので、効率は高いものになると期待できる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、貴重な御助言、御指導を賜りました松澤照男教授に深く感謝致します。そして、お世話になった研究室の皆様に深く感謝致します。

参考文献

1. 矢部 孝 “固体、液体、気体の統一解法を目指す CIP 法” 第 7 回計算流体力学シンポジウム講演論文集計算流体力学シンポジウム講演論文集, p151-p156, 1996
2. 矢部 孝 “汎用数値計算法 CIP 法の可能性 (固体、液体、気体の同時解法およびボルツマン、マクスウエル方程式の解法) 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, p65-p68, 1994
3. T.Yabe et al. , Compt.Phys.Comm.66, p219-p232, 1991
4. T.Yabe et al. , Compt.Phys.Comm.66, p233-p242 1991
5. 保原充、大宮司久明編、数値流体力学、東京大学出版会, p15-34, 1992
6. 水野明哲著、流れの数値解析入門、朝倉書店、p6-47, 1995
7. 古田展康 “CIP 法による移動する物体回りの流れの解析”、第 11 回数値流体力学シンポジウム講演論文集、p337-338, 1997