

Title	磁気浮上システムにおける不確かさとロバスト性解析 ・設計に関する研究
Author(s)	畑, 彰賢
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1120
Rights	
Description	Supervisor: 藤田 政之, 情報科学研究科, 修士

修士論文

磁気浮上システムにおける不確かさと ロバスト性解析・設計に関する研究

指導教官 藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

畑 彰賢

1998年2月13日

要旨

近年、実システムと数学モデルの間の不確かさを考慮し、制御系の解析および設計を行なうロバスト制御に関する研究がおこなわれている。ロバスト制御を実システムへ適応した例として多くの研究があげられるが、磁気浮上システムもまたそのひとつにあげられる。このシステムは非常に複雑な要素が多く、実システムを数学モデルとして表すことは難しい。そのため、このシステムの制御系設計における数学モデルの導出に際し、多くの理想的な仮定をおいた上での大胆な簡略化が行なわれる。その結果と生じる不確かさは、従来まで数学モデルに陽に表わされることなく、制御系設計が行われてきた。そこで、これらの不確かさを数学モデルに陽に表し、ロバスト性解析、設計をおこなうことが重要になってくる。

磁気浮上システムの不確かさも従来、明確な記述はなされておらず、外乱にくわわる一部の要素として取り扱われることが多かった。その後、不確かさを考慮するロバスト制御を適用した研究がなされ、不確かさは数学モデルに陽に表されるようになってきた。しかし、この段階でも不確かさは非構造的な記述によるものであり、これらは数学的取り扱いが容易となるものの、保守的な記述であるために解析結果も保守的になることが予想される。

そこで、この記述の保守性を避けるためにも多少数学的な複雑性が増すことを容認するならば、不確かさは構造的に記述することが望ましいと考えられる。数学的な複雑性に関しても、近年の制御系 CAD の発展により比較的容易に取り扱えるようになってきている。そのような背景から、構造的な不確かさによるロバスト性解析、設計が可能になりつつある。

本研究では、構造的な不確かさを考慮した磁気浮上システムのロバスト性解析、設計を行なう。またその解析、設計に際しての問題点を検討する。さらに、非構造的に不確かさを記述した場合との解析結果の保守性について検討していく。

目次

1	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	1
2	数学的準備	3
2.1	不確かさと LFT 表現	3
2.1.1	不確かさ	3
2.1.2	LFT 表現	4
2.2	構造化特異値	5
2.2.1	複素構造化特異値 complex μ	5
2.2.2	混合構造化特異値 mixed μ	6
2.2.3	構造化特異値の上界と下界	6
2.2.4	下界	7
2.2.5	上界	7
2.3	μ によるロバスト性解析	8
2.3.1	ロバスト安定性	8
2.3.2	ロバスト制御性能	8
3	磁気浮上システムの構成	10
3.1	理想化されたモデル	11
3.2	実際の電磁石の吸引力およびインダクタンス	12
3.3	状態方程式	13
3.4	定常時	13

4	磁気浮上システムのモデル化	14
4.1	状態方程式	14
4.2	モデル A	15
4.2.1	モデル A の状態方程式	15
4.3	モデル B	16
4.3.1	モデル B の状態方程式	16
4.4	電磁石鉄心の渦電流を考慮したモデル	17
4.4.1	渦電流を考慮した状態方程式	18
4.5	プラントの不確かさのモデル化	19
4.5.1	非構造的な不確かさ	20
4.5.2	構造的な不確かさ	22
5	パラメータの同定	23
5.1	電磁石部のパラメータ	23
5.1.1	吸引力パラメータの同定	23
5.1.2	定常ギャップ近傍特性	26
5.1.3	等価回路のパラメータの同定	26
5.1.4	ノミナルモデル	29
5.2	パラメータの変動	29
5.2.1	パラメータ K_x, K_i が変動した場合	29
5.2.2	パラメータ M_0 が変動した場合	32
5.2.3	パラメータ L, R が変動した場合	32
5.2.4	パラメータ K_x, K_i, M_0 が同時に変動した場合	32
5.2.5	5つのパラメータが同時に変動した場合	32
6	問題設定	35
6.1	不確かさの記述	35
6.2	設計目標	35
7	制御系設計	38
7.1	D-K iteration	38
7.2	アプリケーションの計算精度	39

7.3	スケーリング行列 D の近似	41
7.3.1	フィッティング	42
7.3.2	フィッティング次数	42
7.4	非構造的な不確かさを考慮したモデル	46
7.5	構造的な不確かさを考慮したモデル	46
7.6	高精度の μ 計算による設計	52
7.7	D, G -K iteration	55
8	制御実験	58
8.1	ノミナル安定性	58
8.1.1	ノミナル制御性能	58
8.2	ロバスト安定性	59
8.2.1	ロバスト制御性能	59
8.3	コントローラの比較	62
9	ロバスト性解析	65
9.1	最悪ケースの摂動	65
9.2	μ 解析	65
9.2.1	ロバスト安定性	65
9.2.2	ロバスト制御性能	66
10	おわりに	72
A	システム仕様	75
A.1	電磁石の構造および電磁石アンプ	75
A.2	センサ	77
A.3	デジタル制御装置	77
A.4	ホスト・コンピュータ	79
B	吸引力の非理想化	80
B.1	鉄心の透磁率が有限である場合	80
B.2	電磁石に漏れ磁束がある場合	81

第 1 章

はじめに

1.1 研究の背景

磁気浮上技術はすでに磁気軸受, 振動制御システム, 運搬システムといった, 媒体を磁氣的に浮上させることに適用され始めている. というのも磁気浮上システムは非接触で対象物を持ち上げることが出来るからである. 本稿で用いる吸引力型磁気浮上技術の代表的なものでは, ドイツでは TR-07(トランスピッド), 日本では HSST-05(1991 年, 中部 HSST 開発(株)によって実験線が運用)などの運搬システムとして実用化されている.

この磁気浮上システムは本来, 不安定であるためにフィードバック制御は欠くことが出来ない. フィードバック制御システムを設計する為には数学モデルが必要となるが, 実際の物理的システムの振舞を明確に表現することは難しい. さらに, 設計の簡素化などのためにその数学モデルには様々な理想化, 簡略化が行われる. そのために数学モデルはつねに様々な不確かさを含むことになる. それゆえ, コントローラ的设计にはモデルにおける不確かさに対する安定性, および制御性能といったロバスト性を考慮すべきである.

本稿では, この磁気浮上システムをひとつの実例として, モデルにおける不確かさを考慮したロバスト性解析, 設計をおこなう.

1.2 研究の目的

一般に, システムの制御を行う際には数学モデルが必要となる. このシステムの数理モデルに対する不確かさを考慮した, ロバスト制御に関する研究が近年盛んである. よい制

御性能を保証するためには、数理モデルに対して不確かさをどのように記述するかが鍵となる。

その数理モデルには、多くの理想化および簡略化が行なわれ、実システムと数理モデルの間には不確かさが存在してしまう。そこで、不確かさを考慮して設計、解析を行なうロバスト制御に関する研究が近年盛んに行われている。ここで、不確かさをどのように記述するかが問題となるが、これまでは H_∞ 制御などの設計法および解析法が提案されている。従来これらの設計、解析法は不確かさを数学的にも容易に扱える非構造的に記述して行なうものであった。

しかし、非構造的な不確かさは数学的解析が容易となる反面、解析結果が保守的となる可能性がある。そのため、不確かさを構造的に取り扱える μ 設計法が提唱されることとなった。また、これまでの μ 設計法は構造化特異値 μ の値が複素数で取り扱われてきた。複素数だけの場合の方が容易に取り扱えるためである。不確かさを構造的に取り扱えるようにはなったが、実数パラメータの不確かさなどを考えた場合、実数と複素数の両方を考慮した設計、解析法でなくてはならない。このことを考慮した μ 設計、解析法も提唱されるようになった。また、制御性能の指標として従来の H_∞ ノルムを用いる解析法ではなく、 H_2 ノルムを用いる解析法が再認識されるようになっているが、実際の適用例は少なく、 H_∞ ノルムを用いる解析法においても依然として熟成されるべき要素が多く残されている。

そこで、不確かさの記述をどのように取るべきか検討し、設計および解析を行なう必要がある。本研究では、モデルのひとつとして磁気浮上システムを取り上げ、不確かさの記述として構造的、非構造的にとらえたモデルを解析、設計において検討する。さらにその設計、解析に用いられる 構造化特異値 μ を、complex, mixed の場合について検討することを目的とする。

第 2 章

数学的準備

2.1 不確かさと LFT 表現

2.1.1 不確かさ

一般にあるシステムの制御を行おうという際には、まず数理モデルが必要となる。このときに考えられた数理モデルと、実際のシステムとの相違が不確かさとして捉えることができる。その相違の要因として、以下のようなものが上げられる [1].

- パラメータの不正確さ, 変動
 - 測定誤差
 - 操作環境の変化 (温度変化等)
- 多くの理想化および簡略化
 - 線形化
 - 高周波での掴み切れない動特性
 - 物理プロセスの理解不足
- 実現時における不確かさ
 - 設計コントローラの低次元化
 - 周辺機器による入出力信号の変化

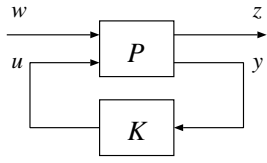


図 2.1: Lower LFT

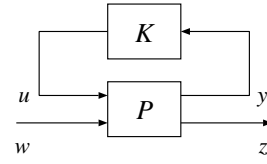


図 2.2: Upper LFT

これらの不確かさを陽にモデルに組み込むことで、不確かさに対応できるロバストな設計を行うことができる。

2.1.2 LFT 表現

不確かさを考慮したシステムを記述するのに有効な表現形式として、LFT (Linear Fractional Transformation, 線形分数変換) 表現があげられる [2],[3]. この表現は μ 解析でもよく用いられ、行列変換にも有効であり、線形システムの表現や解析に関して非常によく用いられる表現形式である。

まず、式 (2.1) のような行列 P と、

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ある行列 K が存在するとする。

このとき図 2.1, 2.2 のように、 P と K を結合して w から z への伝達関数 T_{zw} を構成する変換を LFT と呼ぶ。この P と K に対して LFTs はそれぞれ、

$$T_{zw} = \mathcal{F}_l(P, K) := P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.2)$$

$$T_{zw} = \mathcal{F}_u(P, K) := P_{22} + P_{21}K(I - P_{11}K)^{-1}P_{12} \quad (2.3)$$

と定義される。図 2.1 の場合を lower LFT, 図 2.2 の場合を upper LFT, と呼ぶ。ただし、 $\det|I - P_{22}K| \neq 0$ とする。

また、図 2.1, 2.2 において $z = 0$ として表現される枠組もある [4],[5].

2.2 構造化特異値

構造化特異値 μ は、構造を有する摂動に対してシステムのロバスト性を解析する指標となるものである。これは特異値 $\bar{\sigma}$ とスペクトル半径 ρ を一般化したものである。また、本稿で用いる設計手法とそのロバスト性解析で必要となる。

2.2.1 複素構造化特異値 complex μ

まず、各々の正規化された摂動をひとまとめでした形の、ブロック構造を与えるのであるが、このブロック構造の要素が複素数のみから構成される場合、構造化特異値は複素構造化特異値 (complex μ) と呼ばれる。それに対し、ブロック構造の要素に実数および複素数から構成される場合を混合構造化特異値 (mixed μ) と呼ぶ [6]。

complex μ の定義は以下のように与えられる。はじめに、 $\Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}$ を以下のように与える。 S は重複スカラブロックの数を、 F はフルブロックの数を表している。

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbf{C}, \Delta_j \in \mathbf{C}^{m_j \times m_j}\} \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n \quad (2.5)$$

本稿で用いる磁気浮上システムの場合には、つぎのように定義する。

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i, \Delta_{perf}] : \delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{C}, \Delta_i, \Delta_{perf} \in \mathbf{C}\} \quad (2.6)$$

このとき、complex $\mu_\Delta(M)$ の定義は以下ようになる。

定義 ブロック構造 Δ が与えられた場合に、行列 $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対して

$$\mu_\Delta(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (2.7)$$

ただし、 $I - M\Delta$ を特異にする $\Delta \in \Delta$ が存在しなければ、 $\mu_\Delta(M) = 0$ である。

$$\mathbf{B}_\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (2.8)$$

2.2.2 混合構造化特異値 mixed μ

同様に mixed μ の定義は以下のように与えられる [7]. はじめに, $\Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}$ を以下のように与える. $Sr + Sc = S$ は重複スカラーブロックの数を, F はフルブロックの数を表している.

$$\Delta = \{ \text{diag}[\delta_1^r I_{r_1}, \dots, \delta_{s_r} I_{r_{s_r}}, \delta_1^c I_{r_{s_r+1}}, \dots, \delta_{s_c} I_{r_{s_r+s_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i^r \in \mathbf{R}, \delta_i^c \in \mathbf{C}, \Delta_j \in \mathbf{C}^{m_i \times m_i} \} \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n \quad (2.10)$$

本稿で用いる磁気浮上システムの場合には, つぎのように定義する.

$$\Delta = \{ \text{diag}[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i, \Delta_{perf}] : \delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i, \Delta_{perf} \in \mathbf{C} \} \quad (2.11)$$

このとき, mixed $\mu_\Delta(M)$ の定義は complex μ と同様に式 (2.7) で与えられる.

2.2.3 構造化特異値の上界と下界

D-K iteration アプローチによる μ 設計法において, 周波数領域での μ の上界が大きく依存している. これは上界を μ の代わりに使用するためである. この μ 計算は, Matlab toolbox におけるアプリケーションにより上界, 下界を計算することができる.

ここからは特に断らない限り, μ とは complex μ のことを指すものとする. まず, 補題として次のことがいえる.

補題 $\rho(\cdot)$ はスペクトル半径を表し, 次の等式が成り立つ

$$\mu_\Delta(M) = \max_{\Delta \in \mathbf{B}_\Delta} \rho(M\Delta) \quad (2.12)$$

また, μ の定義などから次式が成り立つ.

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (2.13)$$

ここで, つぎのふたつの $\mathbf{C}^{n \times n}$ の部分集合を定義すると, 以下のような定理が導かれる.

$$\mathbf{Q}_\Delta = \{ Q \in \Delta : Q^* Q = I_n \} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D}_\Delta = \{ \text{diag}[D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbf{R}, d_j > 0 \} \quad (2.15)$$

定理 すべての $Q \in \mathbf{Q}_\Delta$ と $D \in \mathbf{D}_\Delta$ に対して

$$\mu_\Delta(MQ) = \mu_\Delta(QM) = \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1}) \quad (2.16)$$

が成立する.

よって,

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}_\Delta} \rho(QM) \leq \mu_\Delta(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (2.17)$$

となる. さらに, 任意の非零のスカラー γ に対して $DMD^{-1} = (\gamma D)M(\gamma D)^{-1}$ であるから, 式 (2.15) における最後の要素は 1 に正規化される.

$D \in \mathbf{D}_\Delta$ はスケーリング行列と呼ばれるものであり, 以上のように定義することで μ の上界, 下界を導くことができる.

2.2.4 下界

下界は $Q \in \mathbf{Q}_\Delta$ である Q において常に等号が成り立つことが知られている [7]. ただし, $\rho(QM)$ は局所的な最大値を持つ可能性がある.

2.2.5 上界

上界は凸計画問題として再構成することができ, 大域的な最小値を原理上は発見することができる. しかし, $2S + F \leq 3$ を満たすようなブロック構造 Δ に対しては, 上界は常に $\mu_\Delta(M)$ に等しくなるが, $2S + F > 3$ となるようなブロック構造に対しては上界が常に μ に等しくなるとは限らない. その例として以下のようなものがある.

- $S = 0, F = 3$ の場合は常に μ に等しくなる [7]
- $S = 0, F \geq 4$ の場合にはかなり近い値となる

本稿で用いる磁気浮上システムのモデル図 6.1 は $S = 3, F = 2$ であり, 上界が必ずしも μ と等しくなることは保証されない. また, 文献 [8] による磁気浮上システムのモデルにおいては $S = 0, F = 2$ であり, 上界は常に μ に等しくなることが保証される.

2.3 μ によるロバスト性解析

2.3.1 ロバスト安定性

$M(s)$ は安定な多入力 (n_z) 多出力 (n_w) のある線形システムの伝達関数であるとする.

S は実有理かつプロパ ($s = \infty$ に極を持たない) で安定な伝達関数の集合を表すとする. また, 任意のブロック構造 Δ に関して, S_Δ ブロック対角で安定有理な伝達関数全ての集合とし, Δ と同じ構造をもつとする.

$$S_\Delta := \{\Delta \in S : \Delta(s_0) \in \Delta \text{ for all } s_0 \in \bar{C}_+\} \quad (2.18)$$

定理 $\beta > 0$ とするとき, 図 2.3 に示すループが $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ を満たす, すべての $\Delta \in S_\Delta$ に対して well-posed かつ内部安定であることの必要十分条件は,

$$\|M\|_\Delta := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_\Delta(M(j\omega)) \leq \beta \quad (2.19)$$

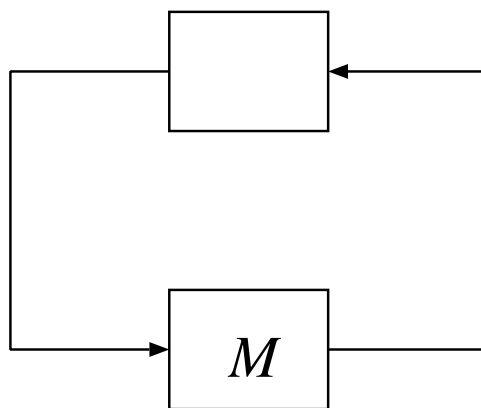


図 2.3: Robust stability

2.3.2 ロバスト制御性能

M は, 安定かつ実有理プロパな伝達関数で, $n_z + n_d$ 個の入力と $n_w + n_e$ 個の出力をもつと仮定する. M_{11} が n_z 個の入力と n_w 個の出力をもち, その他のブロックも適当な数の入出

力をもつような方法で M を分割する. $\Delta \subset \mathbf{C}^{n_w \times n_z}$ とし, 拡大されたブロック構造を以下のように定義します.

$$\Delta_P := \{\text{diag}\{\Delta, \Delta_F\} : \Delta \in \Delta, \Delta_F \in \mathbf{C}^{n_d \times n_e}\} \quad (2.20)$$

このとき, 外乱 d から誤差 e までの伝達関数を $F_u(M, \Delta)$ とすると,

定理 $\beta > 0$ とするとき, 図 2.4 に示すループが $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ を満たす, すべての $\Delta \in S_\Delta$ に対して well-posed かつ内部安定であり, $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty \leq \beta$ であることの必要十分条件は,

$$\|M\|_{\Delta_P} := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta_P}(M(j\omega)) \leq \beta \quad (2.21)$$

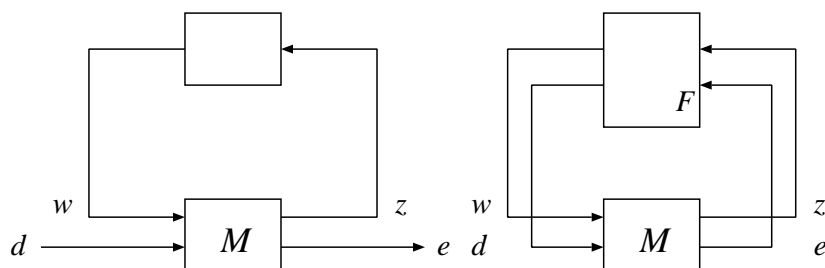


図 2.4: Robust performance

これはまた, ロバスト安定問題としてとらえることができる.

第 3 章

磁気浮上システムの構成

本稿での磁気浮上システムの構成図は以下のように表される [9]. ここで

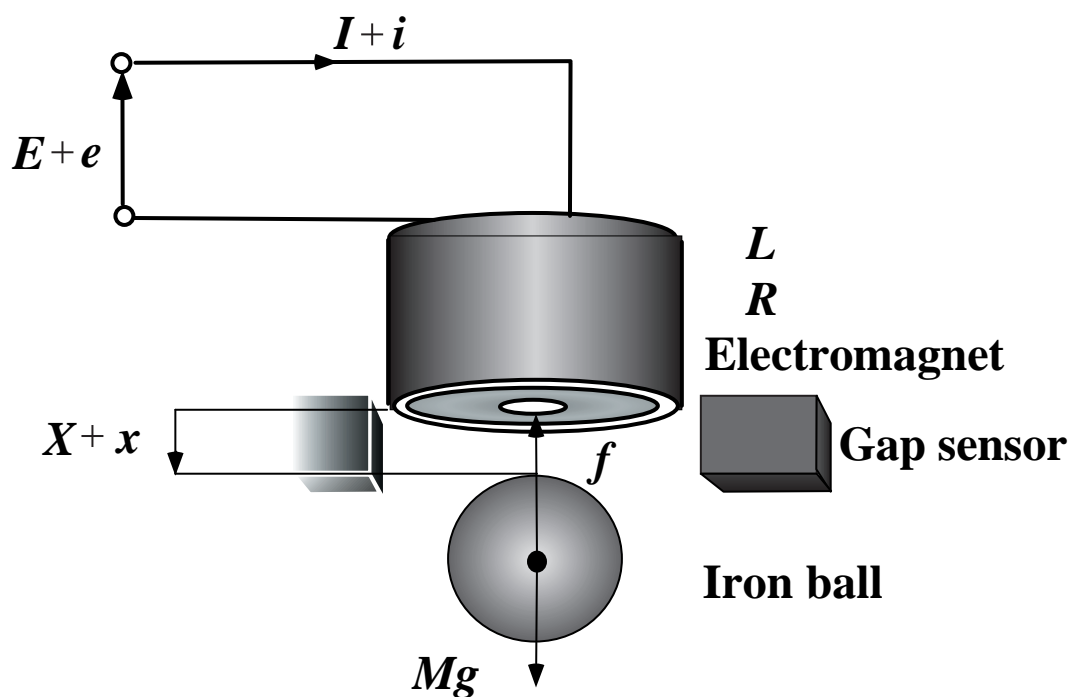


図 3.1: Magnetic Suspension System

E : 電磁石の定常電圧 e : 定常電圧からの微小変動
 I : 電磁石の定常電流 i : 定常電流からの微小変動
 X : 電磁石と鉄球の定常変位 x : 定常変位からの微小変動
 R : 電磁石の抵抗 L : 電磁石のインダクタンス
 M : 鉄球の質量
 f : 電磁石の吸引力

である。磁気浮上システム (Magnetic Suspension System 以降 M.S.S.) とは, gap sensor から得られる情報をもとに, 電磁石にかかる電圧, 電流によって発生する吸引力を能動的に制御することにより, 鉄球をある所定の位置で浮上させるものである。

本稿で用いた実装システムの仕様は, 付録に記すものとする。

3.1 理想化されたモデル

まず, 電磁石について巻数 N [turn], 鉄心断面積 S [m²] とする。ここで以下のような理想を行なう。

- 電磁石に漏れ磁束はない
- 磁気飽和がない
- ヒステリシスがない
- 鉄心の透磁率は無限大

$i_a = i + I, x_a = X + x$ とすると, ギャップに発生する磁束の磁束密度 B は次式で表される。

$$B = \frac{\mu_0 N i_a}{2x_a} \quad (3.1)$$

これにより, 電磁石の吸引力 f は

$$f = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2S = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 S}{4} \left(\frac{i_a}{x_a}\right)^2 = k \left(\frac{i_a}{x_a}\right)^2 \quad (3.2)$$

となる。ここで, k は電磁石吸引力係数である。このとき, インダクタンスは電流 1A 当りの鎖交磁束数より,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x_a} \quad (3.3)$$

3.2 実際の電磁石の吸引力およびインダクタンス

実際のシステムでは前述のような理想的な吸引力は得られず、 x_0 をある補正定数として、式 (3.2) は以下のようなになる。

$$f = k \left(\frac{i + I}{x + X + x_0} \right)^2 \quad (3.4)$$

さらに非線形項を近似することを考える。 $f(x)$ の分母を $f_l(x) = (x + X + x_0)^{-2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_l(x) &= -2(x + X + x_0)^{-3} \\ \frac{d^2}{dx^2} f_l(x) &= 6(x + X + x_0)^{-4} \end{aligned}$$

よって $f(i, x)$ は $x = 0$ における Taylor 展開によって次のように書ける。

$$\begin{aligned} f(i, x) &= k(I^2 + 2Ii + i^2) \{ (X + x_0)^{-2} - 2(X + x_0)^{-3}x + 3(X + x_0)^{-4}x^2 - \dots \} \\ &= \frac{kI^2}{(X + x_0)^2} - \frac{2kI^2}{(X + x_0)^3}x + \frac{2kI}{(X + x_0)^2}i \\ &\quad - \frac{3kI^2}{(X + x_0)^4}x^2 - \frac{4kI}{(X + x_0)^3}ix + \frac{k}{(X + x_0)^2}i^2 - \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

ゆえに $f(i, x)$ の 1 次近似は

$$f(i, x) \cong \frac{kI^2}{(X + x_0)^2} - \frac{2kI^2}{(X + x_0)^3}x + \frac{2kI}{(X + x_0)^2}i \quad (3.6)$$

また、実際には漏れ磁束が存在し、鉄心の透磁率が有限であるため、電磁石のコイルのインダクタンスの電圧特性は、次のようなものに近いものとなる。

$$L(x) = \frac{Q}{x + X + x_0} + L_0 \quad (3.7)$$

ここで L_0 は漏れ磁束によるインダクタンス、 Q はある定数を表す。さらに

$$f = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L(x)i_a^2}{2} \right) = -\frac{1}{2}i_a^2 \frac{dL(x)}{dx} = \frac{Q}{2} \left(\frac{i_a}{x + X + x_0} \right)^2 \quad (3.8)$$

であるから、 $Q = 2k$ として

$$L(x) = \frac{2k}{x + X + x_0} + L_0 \quad (3.9)$$

となる。

3.3 状態方程式

図 3.1 で表される磁気浮上システムは、以下のように有次元の線形時不変な状態方程式に表される。磁気浮上システムは鉄球をある所定の位置に浮上させるものであり、定常点からの変化に対する制御となる。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad y = C\mathbf{x} \quad (3.10)$$

ここで状態変数、入出力は以下のように定義する。

$$\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad i]^T, \quad u = e, \quad y = x \quad (3.11)$$

この状態方程式の係数を決定する上での基本式を以下に示す。

$$\frac{d}{dt}x_a = \dot{x}_a \quad (3.12)$$

$$M \frac{d^2 x_a}{dt^2} = Mg - f \quad (3.13)$$

$$e_a = Ri_a + \frac{d}{dt}Li_a \quad (3.14)$$

ただし、 $e_a = e + E$ である。

3.4 定常時

定常時において次式が成立する。

$$M \frac{d^2 x_a}{dt^2} = 0 = Mg - k \left(\frac{I}{X + x_0} \right)^2 \quad (3.15)$$

$$E = RI \quad (3.16)$$

すると基本式は以下のように書き改められる。

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (3.17)$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = k \left(\frac{I}{X + x_0} \right)^2 - f \quad (3.18)$$

$$e = Ri + \frac{d}{dt}L(i + I) \quad (3.19)$$

これら 3 つの式より、磁気浮上システムを構成することができる。

第 4 章

磁気浮上システムのモデル化

4.1 状態方程式

図 3.1 で表される磁気浮上システムは、式 (3.10), (3.11) のような状態方程式に表され、更にこの状態方程式の係数を決定する上での基本式は、次のようなものであった。式 (3.17), (3.18), (3.19)。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= \dot{x} \\ M\frac{d^2x}{dt^2} &= k\left(\frac{I}{X+x_0}\right)^2 - f \\ e &= Ri + \frac{d}{dt}L(i+I)\end{aligned}$$

ところで、 L をギャップの関数 $L(x)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L(x)i_a) &= i_a\frac{dL(x)}{dt} + L(x)\frac{di}{dt} \\ &= i_a\frac{\partial L(x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + L(x)\frac{di}{dt} \\ &= -\frac{2k}{(x+X+x_0)^2}i_a\dot{x} + L(x)\frac{di}{dt}\end{aligned}\tag{4.1}$$

式 (4.1) の右辺第 1 項は速度起電力とよばれる。対象物が平衡点付近で比較的安定に浮上している場合には \dot{x} は小さく、 $x+X+x_0$ は大きいのでおよそ無視できる。また、この項は対象物が下向きに動くとき ($\dot{x} > 0$) には印加電圧を上げる方向に、上向きに動くとき ($\dot{x} < 0$) には印加電圧を下げる方向に働くので安定化させる働きがある。つまり、電磁石のコイルのインダクタンスを定数 L とすることができる。

一方、対象物が速く動く場合にはこの項を考慮する必要がある。つまり、電磁石のコイルのインダクタンスをギャップの関数 $L(x)$ として扱う考え方である。

以上のことを考慮し、電磁石のコイルのインダクタンスを定数とするモデル A、電磁石のコイルのインダクタンスを式 (3.9) とするモデル B について考える。

4.2 モデル A

電磁石のコイルのインダクタンスを定数 L とすると、基本式は以下のようになる。

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (4.2)$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - f \quad (4.3)$$

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad (4.4)$$

4.2.1 モデル A の状態方程式

基本式より以下の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{kI^2}{(X+x_0)^2} - \frac{f}{M} \\ &= \frac{2kI^2}{M(X+x_0)^3}x - \frac{2kI}{M(X+x_0)^2}i \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e \quad (4.7)$$

ここで $K_x = \frac{2kI^2}{(X+x_0)^3}$, $K_i = \frac{2kI}{(X+x_0)^2}$ とおくと、状態方程式は以下のようになり、ブロック線図は図 4.1 のようになる。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_x & 0 & -K_i \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.8)$$

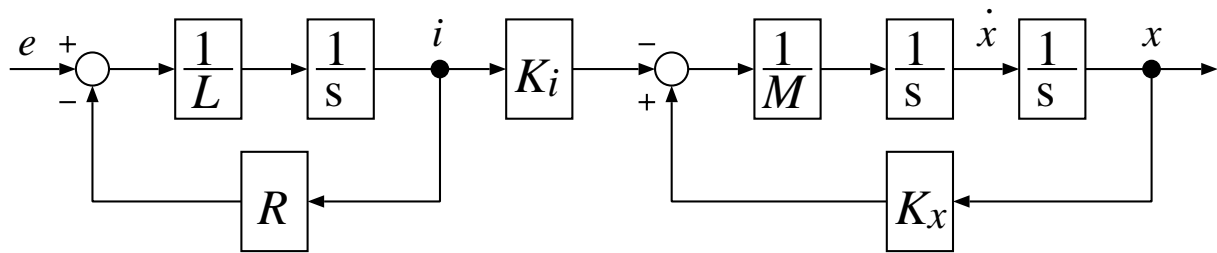


図 4.1: Model 'A'

4.3 モデル B

電磁石のインダクタンスをギャップの関数 $L(x)$ とすると基本式は以下のようになる.

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (4.9)$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg - f \quad (4.10)$$

$$e = Ri - \frac{2k}{(x + X + x_0)^2} i_a \dot{x} + L(x) \frac{di}{dt} \quad (4.11)$$

4.3.1 モデル B の状態方程式

$L(x)$ を $x = 0$ で Taylor 展開すると,

$$L(x) = \frac{2k}{X + x_0} + L_0 - \frac{2k}{(X + x_0)^2} x + \dots \quad (4.12)$$

平衡点付近 ($x \cong 0, i \cong 0$) において, $L(x=0) = \frac{2k}{X+x_0} + L_0$ とし, 基本式より以下の式が得られる.

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{kI^2}{(X + x_0)^2} - \frac{f}{M} = K_x x - K_i i \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{2kI}{(X + x_0)^2 L(0)} \dot{x} \\ &\quad - \frac{R}{L(0)} i + \frac{1}{L(0)} e \end{aligned} \quad (4.15)$$

ここで $L_a = \frac{2kI}{(X+x_0)^2}$ とおき, 状態方程式, ブロック線図は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_x & 0 & -K_i \\ 0 & \frac{L_a}{L(0)} & -\frac{R}{L(0)} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(0)} \end{bmatrix} \\
 C &= [1 \ 0 \ 0]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

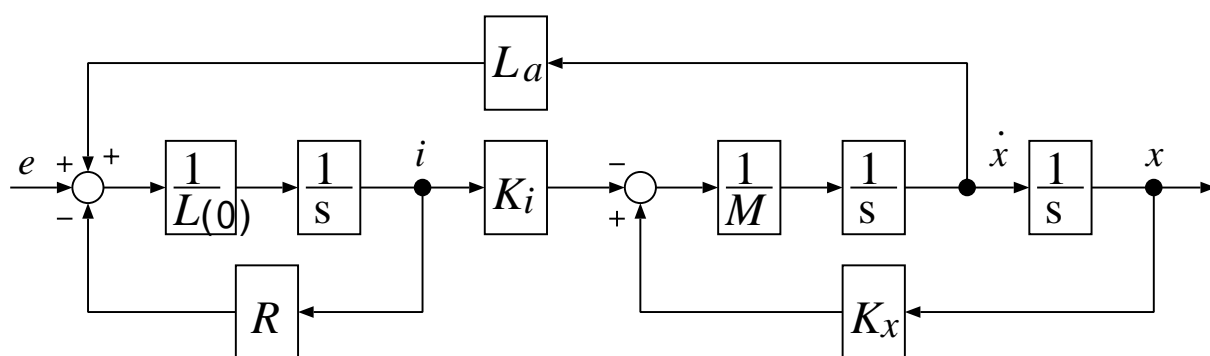


図 4.2: Model 'B'

4.4 電磁石鉄心の渦電流を考慮したモデル

電磁石の鉄心材料として積層鉄心を使用するという条件では, 渦電流による影響は無視できる. しかし, 塊状鉄心を使用する場合には渦電流による影響を考慮しなくてはならない.

渦電流回路は厳密には分布定数系となり, 取り扱いが極めて困難となる. そこで渦電流を集中定数とし, 抵抗 R_{ed} とインダクタンス L_{ed} を用いて電磁石の抵抗 R_f とインダクタンス L_f とのはしご型回路として扱う. するとモデル A の基本式は以下ようになる.

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \tag{4.17}$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg - f \tag{4.18}$$

$$e = R_f i + L_f \frac{di_f}{dt} \tag{4.19}$$

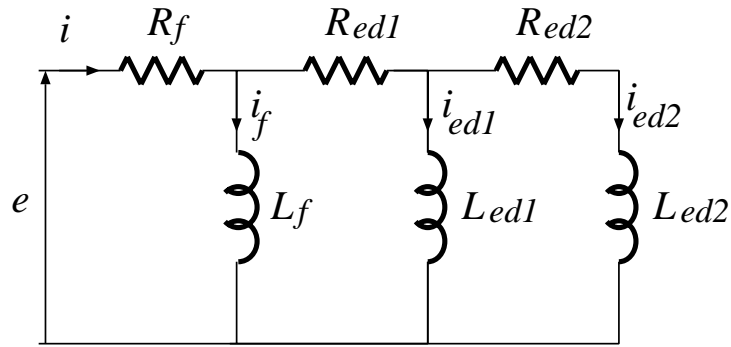


図 4.3: Circuit of electromagnetic with eddy current

さらに,

$$\begin{aligned} L_f \frac{di_f}{dt} &= R_{ed1}(i_{ed1} + i_{ed2}) + L_{ed1} \frac{d}{dt}(i_{ed1}) \\ L_{ed1} \frac{di_{ed1}}{dt} &= R_{ed2}(i_{ed2}) + L_{ed2} \frac{d}{dt}(i_{ed2}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

また,

$$i = i_f + i_{ed1} + i_{ed2} \quad (4.21)$$

である.

$$\begin{aligned} e &= R_f i + L_f \frac{di_f}{dt} \\ &= R_f i + R_{ed1}(i_{ed1} + i_{ed2}) + L_{ed1} \frac{di_{ed1}}{dt} \\ &= R_f i + R_{ed1}(i_{ed1} + i_{ed2}) + R_{ed2} i_{ed2} + L_{ed2} \frac{di_{ed2}}{dt} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4.1 渦電流を考慮した状態方程式

電磁石の渦電流を考慮すると以下の式が得られる.

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} \quad (4.23)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{kI^2}{(X + x_0)^2} - \frac{f}{M} = K_x x - K_i i \quad (4.24)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_f}{dt} + \frac{di_{ed1}}{dt} + \frac{di_{ed2}}{dt} \quad (4.25)$$

$$\frac{di_f}{dt} = -\frac{R_f}{L_f}i + \frac{1}{L_f}e \quad (4.26)$$

$$\frac{di_{ed1}}{dt} = -\frac{R_f}{L_{ed1}}i - \frac{R_{ed1}}{L_{ed1}}i_{ed1} - \frac{R_{ed1}}{L_{ed1}}i_{ed2} + \frac{1}{L_{ed1}}e \quad (4.27)$$

$$\frac{di_{ed2}}{dt} = -\frac{R_f}{L_{ed2}}i - \frac{R_{ed1}}{L_{ed2}}i_{ed1} - \frac{R_{ed1} + R_{ed2}}{L_{ed2}}i_{ed2} + \frac{1}{L_{ed2}}e \quad (4.28)$$

ここで状態変数を以下のようにとる.

$$\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad i \quad i_f \quad i_{ed1} \quad i_{ed2}]^T, \quad u = e, \quad y = x \quad (4.29)$$

また, $a3 = (\frac{1}{L_f} + \frac{1}{L_{ed1}} + \frac{1}{L_{ed2}})$, $a2 = (\frac{1}{L_{ed1}} + \frac{1}{L_{ed2}})$, $b = \frac{R_{ed1}}{L_{ed1}} + \frac{R_{ed1}+R_{ed2}}{L_{ed2}}$ とすると状態方程式, ブロック線図は以下ようになる.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_x & 0 & -K_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_f a1 & 0 & -R_{ed1} a2 & b \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_{ed2}} & 0 & -\frac{R_{ed1}}{L_{ed1}} & -\frac{R_{ed1}}{L_{ed1}} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_{ed2}} & 0 & -\frac{R_{ed1}}{L_{ed2}} & -\frac{R_{ed1}+R_{ed2}}{L_{ed2}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ \frac{1}{L_f} \\ \frac{1}{L_{ed1}} \\ \frac{1}{L_{ed2}} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.5 プラントの不確かさのモデル化

これまでに述べてきた磁気浮上システムの数学モデルには, 不確かさが存在することは避けられない. その不確かさには

1. 無視された非線形性
 - 電磁石のインダクタンスを定数とすることや近似するなど
 - 吸引力の1次近似
2. モデル化されなかった動特性
 - 渦電流を考慮した場合と考慮しない場合など

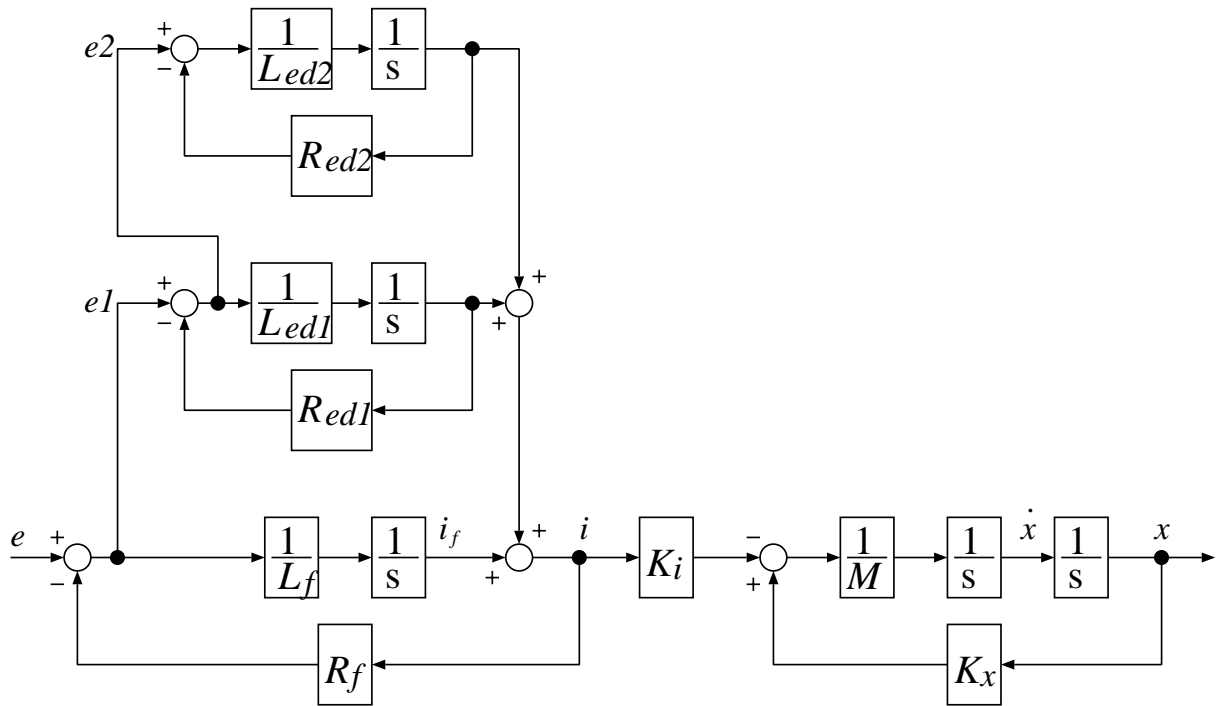


図 4.4: Model 'A' with eddy current

3. パラメータの誤差

- 電磁石の R, L や、 M など

などが考えられる。前節までに述べた各磁気浮上の数学モデルにおいて、渦電流を考慮しないモデル A をベースとして残りのモデルとの差を不確かさとして扱うこともできる。本稿では、渦電流を考慮しないモデル A をノミナルモデルとして以降の議論を行うものとする。このモデルに対して不確かさを表すのに、より簡素で扱いやすいものとして非構造的に表す方法がある。非構造的な不確かさはモデル化されないダイナミクスを覆うことができること、簡単かつ一般的解析法が使えるという利点がある。そこで、まずノミナルプラントに対して非構造的な不確かさを考える。

4.5.1 非構造的な不確かさ

非構造的な不確かさとして加法的摂動を用い、プラント集合は以下のように表される [8].

$$\mathbf{G} := \{G_{nom} + \Delta_{add}W_{add} : \|\Delta_{add}\|_{\infty} \leq 1\} \quad (4.31)$$

W_{add} は不確かさの周波数重みとする.

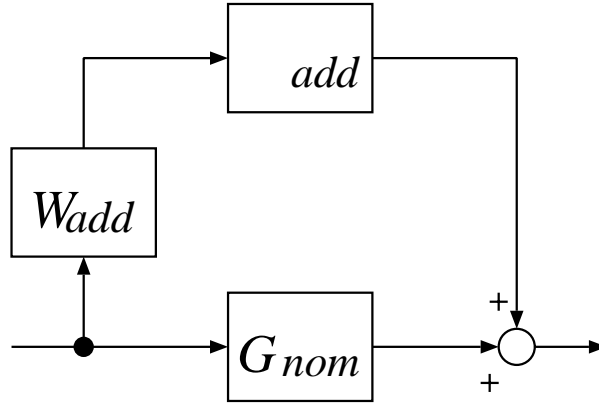


図 4.5: Sets of plant

ただし, 加法的摂動に対する重み関数 W_{add} は, 実験的検証により決定される.
非構造的な不確かさを考慮したフィードバック系は図 4.6のように表される. ここで,

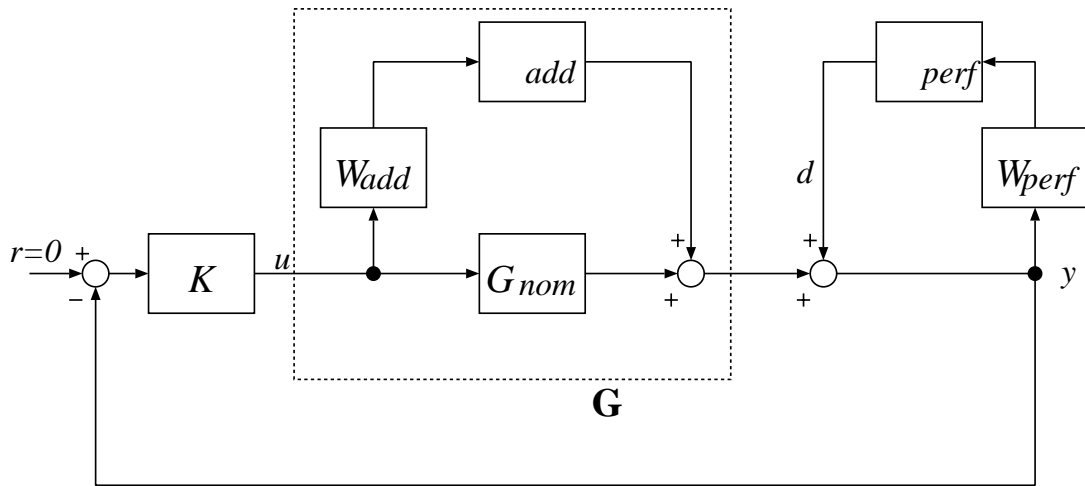


図 4.6: Feedback loop of unstructured uncertain model

W_{perf} は外乱 d を抑制するための重み関数である.

加法的摂動のロバスト安定性の条件は,

$$\|W_{add}K(I + G_{nom}K)^{-1}\|_{\infty} < 1 \quad (4.32)$$

となる. また, 外乱に対するロバスト制御性能の必要十分条件は感度関数 $S = (I + GK)^{-1}$ より以下ようになる.

$$\|W_{perf}(I + \tilde{G}K)^{-1}\|_{\infty} < 1 \quad (4.33)$$

4.5.2 構造的な不確かさ

先に述べたように, 不確かさを非構造的に記述することは, 設計を簡略化できるという利点があった. しかし, 非構造的に不確かさを記述することで保守的となりやすい. また, その解析を行なう上では不確かさは構造的に記述し, 解析が行なわれる. 多少設計に関して複雑化することを容認するならば [10], 不確かさを構造的に記述することで保守性は軽減される. 本稿では不確かさを構造的に記述したモデルを考えるものとする. 磁気浮上システムに構造的に不確かさを記述すると図 4.7 のようになる [11].

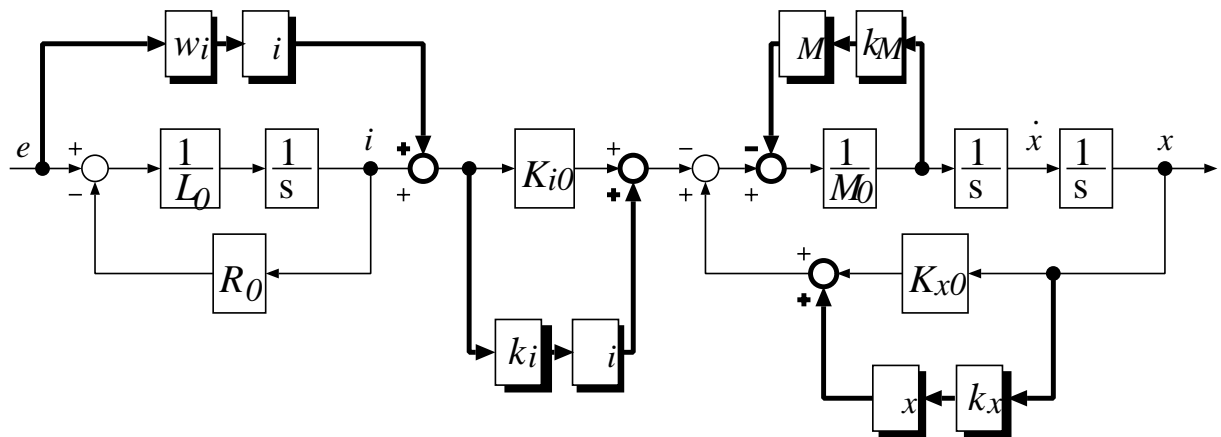


図 4.7: Structured uncertain model for M.S.S.

このモデルでは, 電磁石部に関して高周波でのモデル化されない動特性を考慮し, 重み w_i を設定する. 電磁石パラメータにおいて, 特にインダクタンス L を測定することは非常に困難とされるため, このように電磁石部に関して非構造的に不確かさを考えることは妥当であると思われる. また, 質量変動として重み k_M およびギャップ変動に相当する重み k_i, k_x が考えられている.

第 5 章

パラメータの同定

磁気浮上システムの解析・設計するにあたり、パラメータの同定を行なうことは必要不可欠である。磁気浮上システムにおいては電磁石部の吸引力、およびその等価回路のパラメータがそれにあたる。本来、磁気浮上システムは不安定なシステムであるため、そのパラメータの同定には注意を払わなくてはならない。さらに、このときに得られるデータからノミナルモデルに対する不確かさを検討することができる。

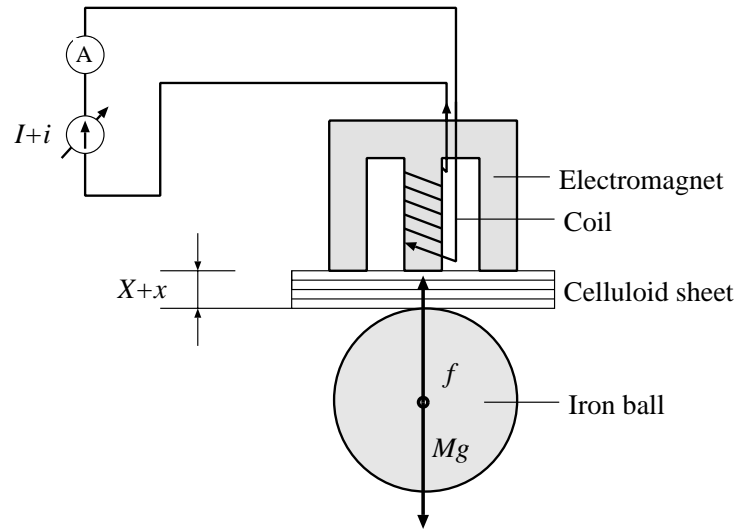
5.1 電磁石部のパラメータ

5.1.1 吸引力パラメータの同定

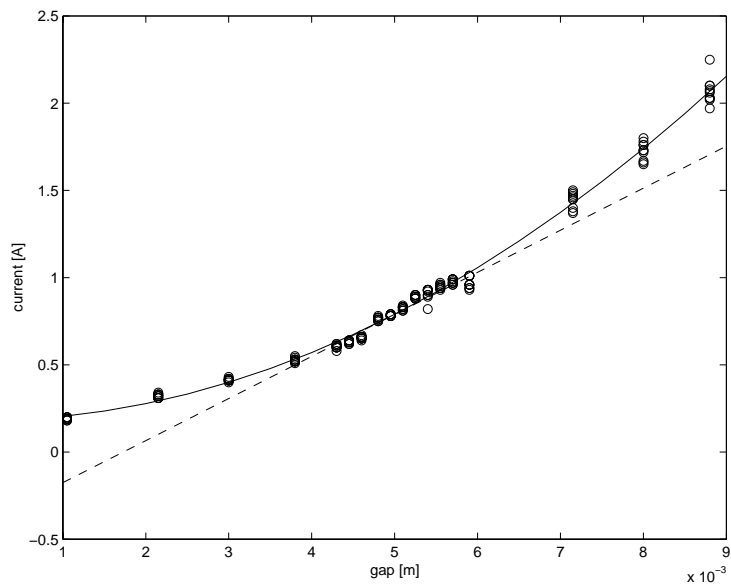
吸引力パラメータの同定には、図 5.1の回路を用いる。電磁石部と鉄球の間に、任意の厚さのセルロイド板を挟み（ギャップ一定）、鉄球を吸着させる。その後、徐々に電磁石に流す電流を減少させ、鉄球が落下する瞬間の電流値を測定する。この鉄球が落下した瞬間を、電磁石が発生する吸引力と鉄球に働く重力が等しい ($f = Mg$) と考える。ここでは直径 6.35 cm、質量 $M = 1.04$ kg の鉄球を用いたため、 $f = 10.2$ N となる。この考えに基づき、セルロイド板の厚さを変えて測定することにより、電磁石の吸引力特性を測定する。

この測定方法を用い、直径 6.35 cm、質量 $M = 1.04$ kg の鉄球を使用したときのギャップ-電流特性を図 5.2に示す。

ここでは、電磁石と鉄球の間のギャップを 1.05 ~ 8.80mm (18 点) まで徐々に増やして行き、それを 1 回として 10 回の測定を行なった。ここで、図 5.2の 印は測定値、実線は



☒ 5.1: Circuit for measurement of magnetic force



☒ 5.2: Current value ($f=\text{constant}$)

この測定値から求めたギャップ-電流曲線、破線はギャップを 5.00mm としたときの接線を表す。

吸引力 f は、理想化を行なうことにより、

$$f = k \left(\frac{I + i}{X + x + x_0} \right)^2 \quad (5.1)$$

と表される [9]. 故に

$$I + i = \sqrt{\frac{f}{k}}(X + x) + \sqrt{\frac{f}{k}}x_0 \quad (5.2)$$

となる. この式 (5.2) から、電流はギャップに比例するはずであるが、図 5.2 では電流はギャップのほぼ 2 乗に比例した特性を示している. これは当初の仮定である、磁気飽和がない、ヒステリシスがないなどの理想化による影響と思われる. このように曲線的な特性を有する理由は、付録において解説しておく.

ここでは、このギャップ-電流直線を図 5.2 で表されている曲線 (実線) の定常ギャップ $X = 5.00\text{mm}$ における接線 (破線) とする. その接線より、傾き、および切片を求め、式 (5.2) からパラメータ k, x_0 を決定する. また、定常電流 I は、定常ギャップのときのギャップ-電流直線の電流値とする. この測定から求められたパラメータを表 5.1.1 に示す.

表 5.1.1: Parameters of magnetic force

Symbol	Value	Unit
X	5.00×10^{-3}	m
x_0	-1.76×10^{-3}	m
I	0.789	A
k	1.71×10^{-4}	Nm^2/A^2
K_x	6.27×10^3	N/m
K_i	25.7	N/A

ここで、 k_x, k_i は K_x, K_i の変動幅をしめす.

表 5.1.2: Parameters of magnetic force

Symbol	Value	Unit
k_x	5.88×10^3	N/m
k_i	39.9	N/A

5.1.2 定常ギャップ近傍特性

表 5.1.1では k_x, k_i が K_x, K_i の約 1 倍もしくはそれ以上であり、不確かさとして見た場合には大きすぎる事が分かる。これは次章で詳細を解説するが、吸引力を平衡点近似しているため全体的に変化をとらえると、大きな変動を有してしまうためと思われる。そこでさらに、定常ギャップ 5.00mm から ± 0.70 mm の範囲で測定を行なったときの各パラメータを表 5.1.2に示す。

表 5.1.3: Parameters of (gap= near 5mm)

Symbol	Value	Unit
X	5.00×10^{-3}	m
x_0	-2.00×10^{-3}	m
I	0.70	A
k	1.37×10^{-4}	Nm ² /A ²
K_x	6.86×10^3	N/m
K_i	25.2	N/A

表 5.1.4: Parameters of (gap= near 5mm)

Symbol	Value	Unit
k_x	0.22×10^3	N/m
k_i	1.36	N/A

各パラメータの値は全体的な特性を残す意味で表 5.1.1の値を公称値とする。

5.1.3 等価回路のパラメータの同定

電磁石の等価回路のパラメータ R, L は、渦電流がないものとして図 5.3の回路を用いて測定を行なった [12]。このパラメータ L を測定することは非常に困難とされるため、この等価パラメータの測定には注意を要する。ここで、 L, R : 電磁石の等価回路のパラメータ、 V_{in} :入力電圧、 V_{out} :出力電圧、 r :測定のための付加小抵抗となっている。この測定では、定常ギャップ $X = 5.00$ mm 離れた位置に鉄球をおいた状態で行なった。また、この回路の入力電圧 V_{in} は、先程求めた定常電流 $I = 0.789$ A を中心とした周波数 ω の正弦波を入力する。ここでは、アンプへの入力電圧に振幅 2.00V の正弦波を加えた。そして、この正弦波

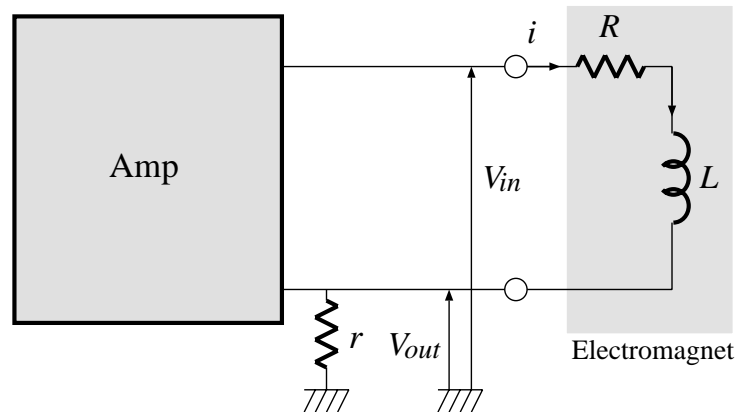


図 5.3: Circuit for measurement of equivalent parameter

の周波数を変化させたときの入出力電圧のゲイン A とその位相差 ϕ を測定し、この測定値より、 L, R のパラメータを次式から求める。

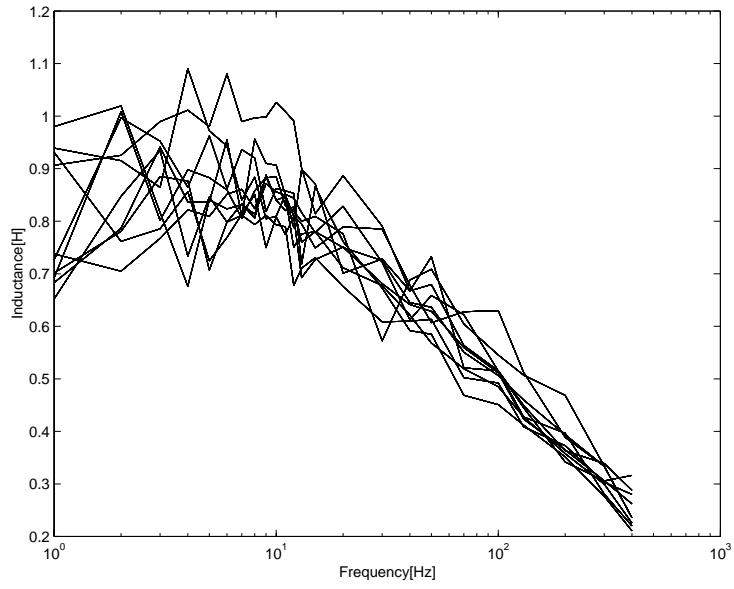
$$L = \frac{r}{\omega A} \sin \phi, \quad R = \frac{r}{A} \cos \phi - r \quad (5.3)$$

ここでは、付加小抵抗は、 $r = 1.30\Omega$ のものを用いた。また、入力正弦波の周波数は 1 ~ 300Hz (23 点) まで増やして行き、それを 1 回として 10 回の測定を常温で行なった。この方法により測定した L, R の周波数特性は図 5.4, 5.5になる。

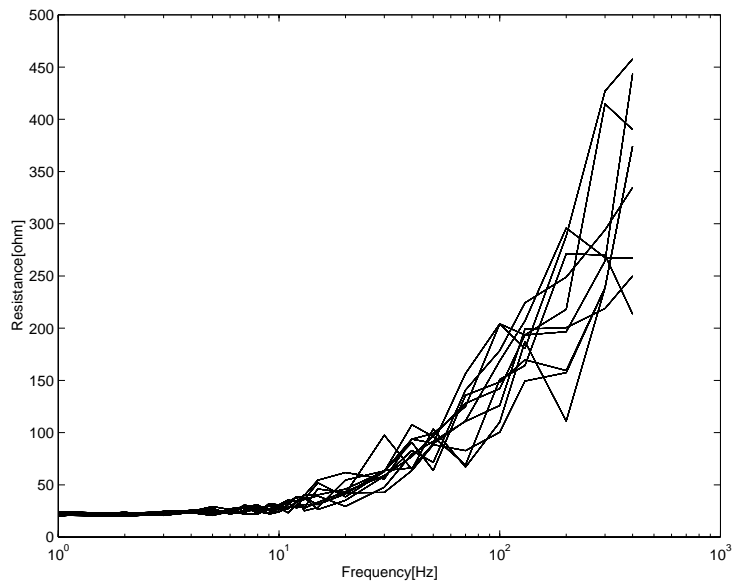
この図からもわかるように、この同定法を用いると等価回路のパラメータ L, R の特性は周波数により異なってしまふことがわかる。さらに、電磁石のコイルは発熱体であるため、そのパラメータが温度によって変化する。抵抗 R の公称値は摂氏 20 度で 20.0Ω であり、変化率は $+0.4\%/1^\circ\text{C}$ である。しかし本稿では、鉄球が浮上している際には、常温で周波数が 10Hz 以下となると仮定し、その周波数以下で測定したときの L, R の平均値を公称値 L_0, R_0 として用いることにする。また、電磁石部に対して式 (5.4) のように不確かさを見積もることができる。

$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L_0s + R_0} + w_i(s)\Delta_i(s) \quad (5.4)$$

ここで、 L_0, R_0 は、それぞれの公称値、 $w_i(s)$ は重み関数であり、 $\Delta_i(s)$ は $|\Delta_i(j\omega)| \leq 1$ で変動するものとする。



☒ 5.4: Characteristic of inductance



☒ 5.5: Characteristic of resistance

表 5.1.5: Parameters of L,R

Symbol	Value	Unit
L_0	0.859	H
L_{min}	0.652	H
L_{max}	1.09	H
R_0	24.8	Ω
R_{min}	19.9	Ω
R_{max}	32.0	Ω

表 5.1.3および図 5.6より,

$$w_i(s) = \frac{1.0 \times 10^{-3}}{0.85 \times 0.859} \times \frac{(s + 80.0)(s + 10.0)}{(s + 23.0/0.85)(s + 24.8/0.859)} \quad (5.5)$$

とおくものとする.

5.1.4 ノミナルモデル

前節までの同定により, ノミナルモデルの伝達関数は次式のようになる.

$$G_{nom}(s) = \frac{-28.9}{(s + 77.8)(s - 77.8)(s + 28.8)} \quad (5.6)$$

この式をみると伝達関数の極が s -平面の右半平面に存在し, 不安定となることがわかる.

5.2 パラメータの変動

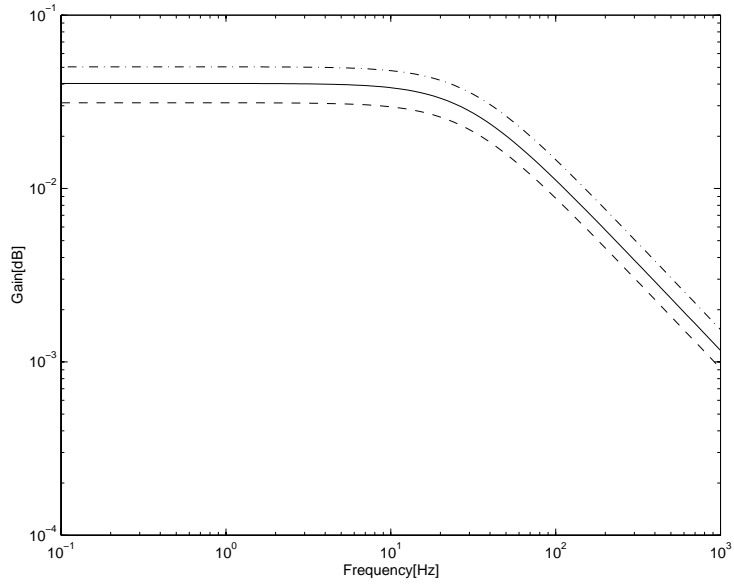
ノミナルモデルを G_{nom} とし, パラメータの変動をうけたモデルを G とするとき, 以下のような摂動を考える.

$$\Delta := G - G_{nom} \quad (5.7)$$

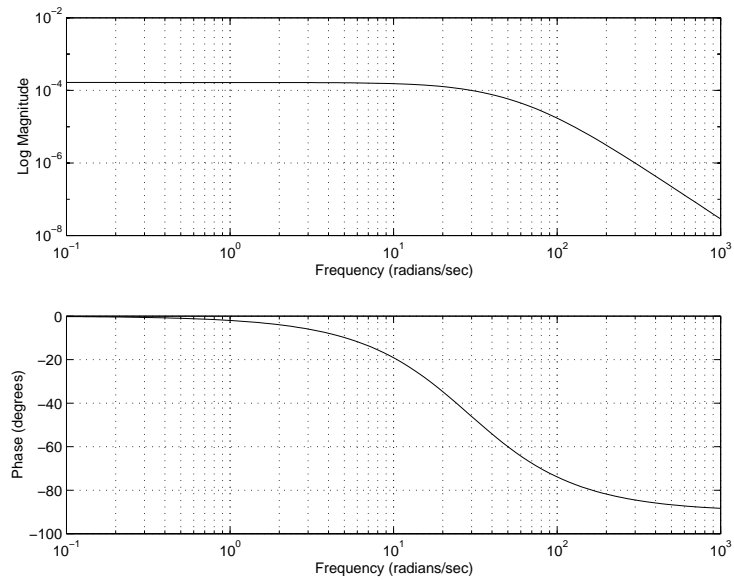
5.2.1 パラメータ K_x, K_i が変動した場合

ギャップ変動に相当する K_x, K_i が変動した場合には k_x, k_i は図 5.8のように変化する. k_x, k_i が, ギャップ変動に対してこのように非線形性を有しているのは, 吸引力を平衡点 (steady gap = 5.00mm) で近似されているためである. それゆえ, k_x, k_i の変化としては定常変位 5.00mm から ± 1.60 mm の範囲で考えるものとする.

仮に, 定常変位 5.00mm から ± 0.30 mm の変動を想定した場合は図 5.9のようになる.



⊠ 5.6: Characteristic of $1/(Ls + R)$



⊠ 5.7: Bode plots of G_{nom}

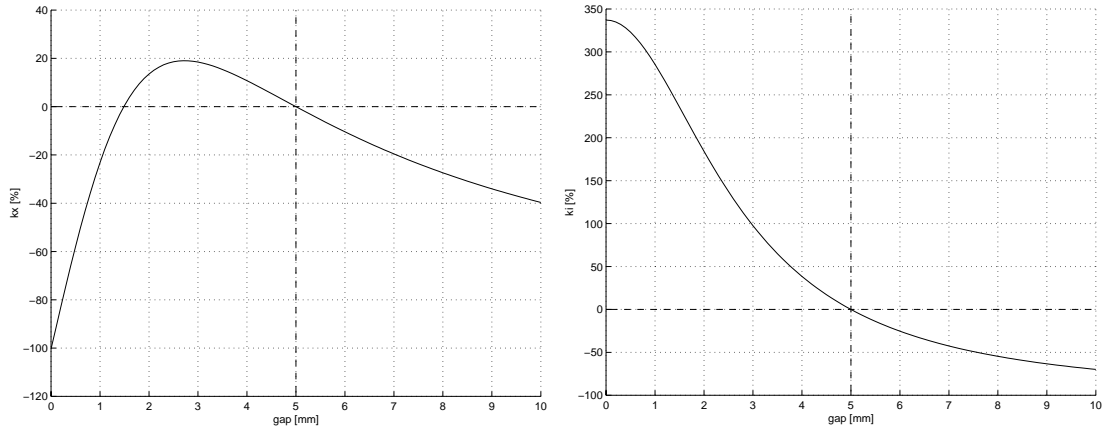


图 5.8: k_x, k_i

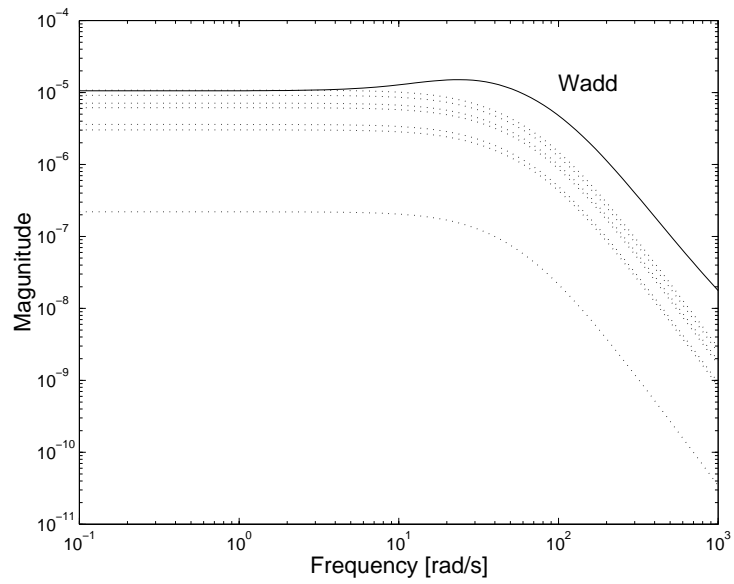


图 5.9: Δ in the case of perturbed K_x, K_i

5.2.2 パラメータ M_0 が変動した場合

図 5.10は, 鉄球質量 M_0 が ± 0.124 kg の変動を想定している.

5.2.3 パラメータ L, R が変動した場合

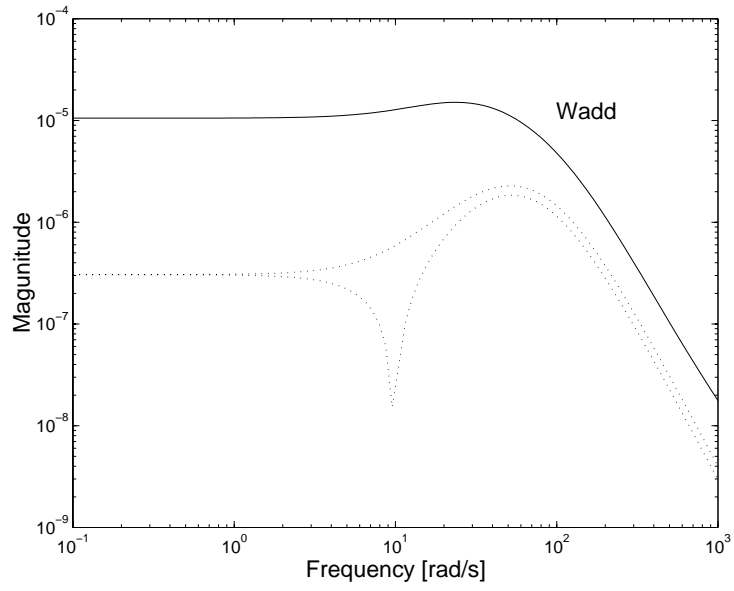
図 5.11は, 電磁石部のパラメータ L, R が それぞれ ± 0.0773 H, ± 0.0248 Ω 変動した場合を想定している.

5.2.4 パラメータ K_x, K_i, M_0 が同時に変動した場合

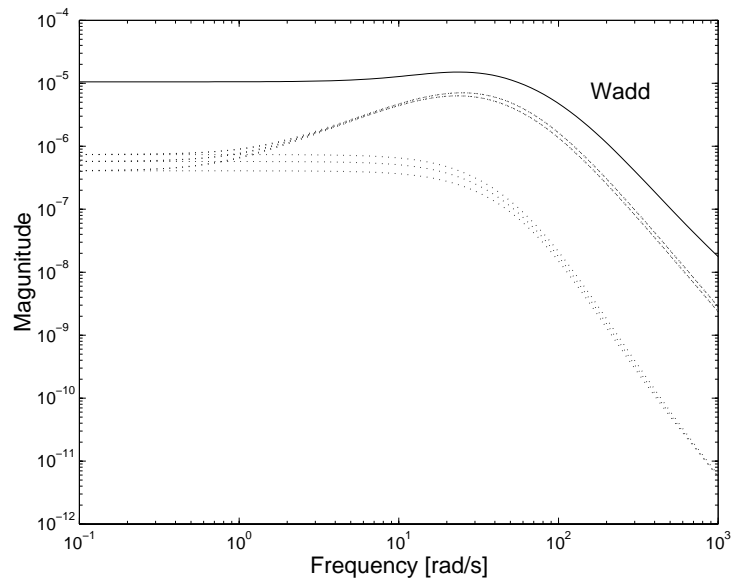
本稿でパラメータの不確かさとして扱う K_x, K_i, M_0 が同時に変動した場合には図 5.12 のようになる. 定常変位 5.00mm から ± 0.30 mm の変動を, M_0 に対しては ± 0.124 kg の変動を想定している.

5.2.5 5つのパラメータが同時に変動した場合

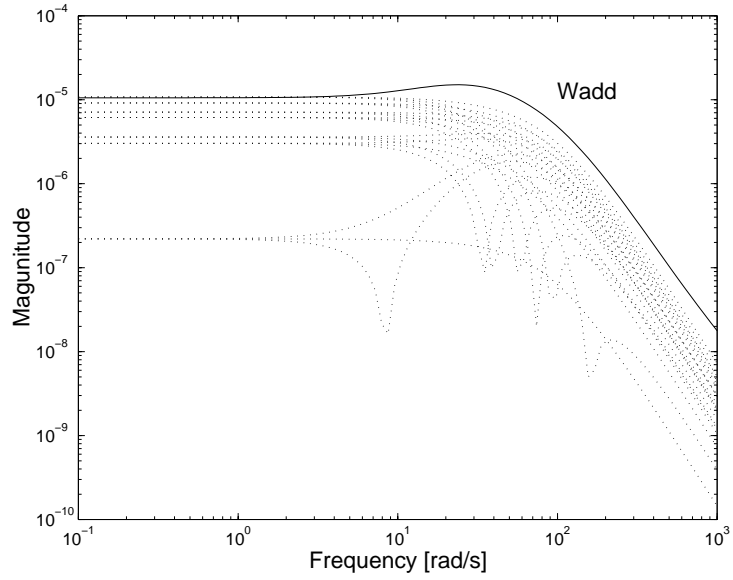
すべてのパラメータが同時に変動した場合には図 5.13のようになる. これにより, プラントの不確かさを非構造的な加法的な不確かさとして捉えた場合, 実線 (-) のように不確かさの重み W_{add} を決定することが出来る.



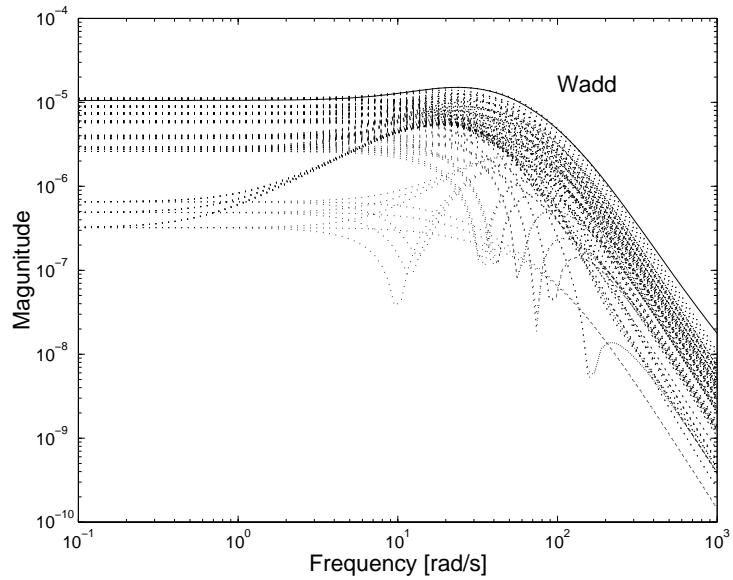
⊠ 5.10: Δ in the case of perturbed M_0



⊠ 5.11: Δ in the case of perturbed L_0, R_0



⊠ 5.12: Δ in the case of perturbed K_x, K_i, M_0



⊠ 5.13: Δ in the case of perturbed K_x, K_i, M_0, L_0, R_0

第 6 章

問題設定

6.1 不確かさの記述

先に述べたように、本稿では不確かさを構造的に記述したモデルを考えるものとする。その図 4.7 のモデルに対してコントローラ K などを加えて、図 6.1 のように LFT 表現を考える。それと同時に、一般化プラント P を構成する。

ここで、 $W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r}$ は外乱抑制のための重みである。

6.2 設計目標

制御対象における不確かさ Δ_{pert} を、つぎのように定義する。

$$\Delta_{pert} = \{\text{diag}[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i] : \delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i \in \mathbf{C}\} \quad (6.1)$$

このとき、すべての Δ_{pert} に対して、閉ループ系が安定であり、

$$\|F_l[F_u(P, \Delta_{pert}), K]\|_\infty \leq 1 \quad (6.2)$$

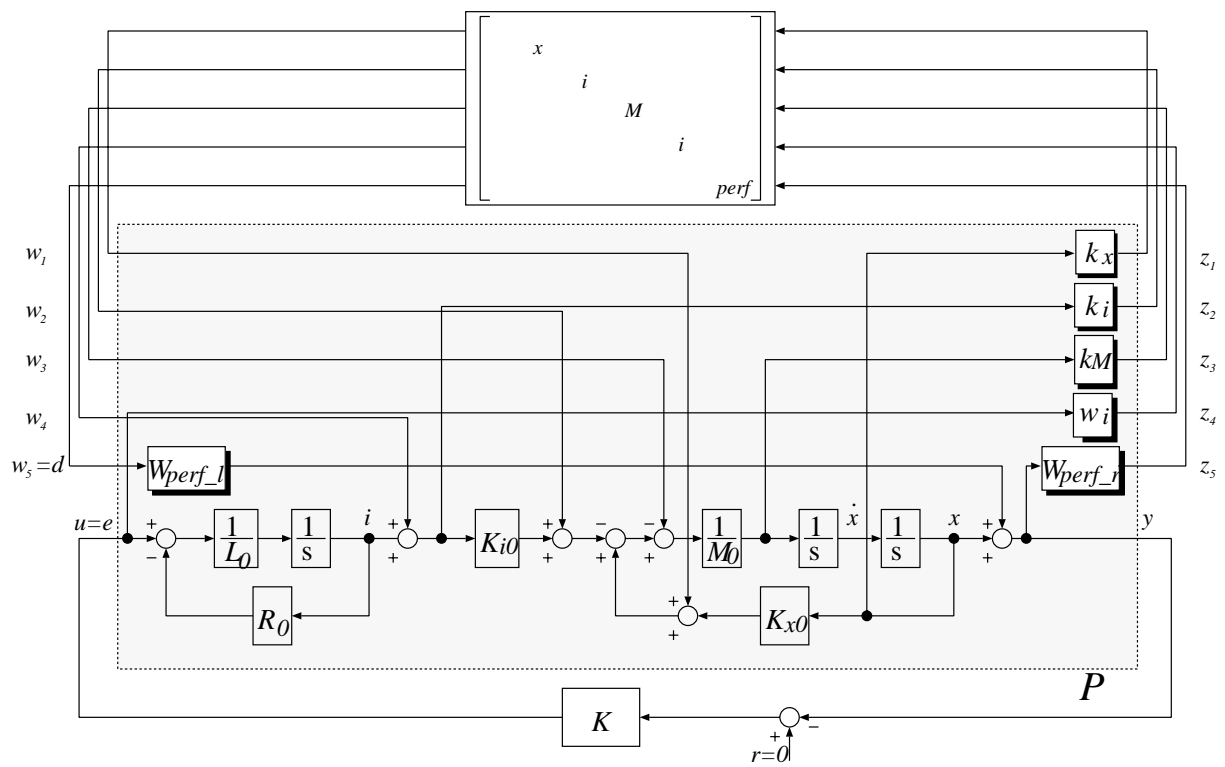
を満足するような安定化コントローラ K を見つけることが設計目標である。

ここで式 (6.2) は、等価的につぎのように変換することができる。

$$\|F_u[F_l(P, K), \Delta_{pert}]\|_\infty \leq 1 \quad (6.3)$$

さらに外乱抑制のための重み W_{perf} をモデルに加え、LFT 表現ができたため、

$$\Delta_F = \Delta_{perf} \in \mathbf{C} \quad (6.4)$$



⊠ 6.1: Generalized plant of M.S.S.

$$\Delta = \text{diag}[\Delta_{pert}, \Delta_F] \quad (6.5)$$

$M := F_l(P, K)$ とすることで, コントローラ K がロバスト制御性能を満足する条件として

$$\mu_\Delta[M(j\omega)] < 1 \quad (6.6)$$

が導かれる. これはちょうど M に対するロバスト安定性問題となる. μ 設計法の目標は, 閉ループ伝達関数 $F_l(P, K)$ の $\mu_\Delta(\cdot)$ のピーク値を最小化する安定化コントローラ K をみつけることである.

$$\min_K \max_\omega \mu_\Delta(F_l(P, K)(j\omega)) \quad (6.7)$$

第 7 章

制御系設計

7.1 D-K iteration

式 (6.7) は, μ の上界により近似的につぎのように書き改められる.

$$\min_{\text{stabilizing } K} \max_{\omega} \min_{D_{\omega} \in \mathbf{D}_{\Delta}} \bar{\sigma}(D_{\omega} F_l(P, K)(j\omega) D_{\omega}^{-1}) \quad (7.1)$$

ここで周波数に依存するスケーリング行列 D_{ω} を実数有理な安定な最小位相の伝達関数 $\hat{D}(s)$ に制限すると

$$\min_{\text{stabilizing } K} \min_{\hat{D}(s) \in \mathbf{D}} \|\hat{D} F_l(P, K)(j\omega) \hat{D}^{-1}\|_{\infty} \quad (7.2)$$

となり, この最適化問題の近似解法が D-K iteration とよばれている. しかしながら, この方法は最小値への収束を保証するものではない.

1. D-K iteration の最初の Step

H_{∞} 制御則を設計: 問題を解くため, まず $\hat{D}(s)$ を任意に安定最小位相実有理な伝達関数に固定し, 次のような最適制御問題を解く.

$$\min_K \|F_l(P_D, K)\|_{\infty} \quad (7.3)$$

2. K を固定

つぎに 最初の Step で得られたコントローラ K をもとにして μ 解析を行い, 周波数依存のスケーリング行列 D を探索する (μ の上界の計算). つぎに最小位相の実数有理な伝達関数をフィッティングする.

3. D を固定

D を固定して最適化問題を解く.

$$\min_{\text{stabilizing } K} \|\hat{D}F_l(P, K)\hat{D}^{-1}\|_{\infty} \quad (7.4)$$

ここで P_D を一般化プラント P が \hat{D}, \hat{D}^{-1} を吸収したものであるとし, つぎのように書き改める.

$$\min_{\text{stabilizing } K} \|F_l(P_D, K)\|_{\infty} \quad (7.5)$$

この問題はまさに H_{∞} 最適制御問題である. これによりコントローラ K を再度求める.

上記の一連の作業を繰り返すことにより, (7.2) の近似解を得ることができる.

しかしながら, Step 3. において μ -Analysis and Synthesis Toolbox(以降 Toolbox) におけるフィティングアルゴリズムは最小二乗法, 発見的解法に基づいている. そのため, フィティングにより異なる解が得られる可能性がある.

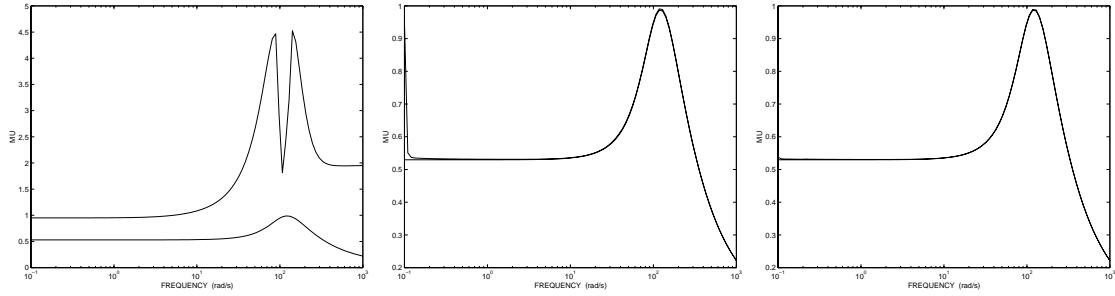
7.2 アプリケーションの計算精度

D-K iteration のアルゴリズムは MATLAB Toolbox の中で実装されている [6]. そのアルゴリズムには μ 解析のステップがある. その μ の計算精度がコマンドオプションによって選択できるようになっているが, この μ 解析の結果がスケーリング行列 D の作成に大きな影響を与える. そのため, 各オプションの選択の仕方によっても得られる解が異なる. そこでこの節では上界に関する 3 つの主なオプションに関して, 構造的に不確かさを考慮した M.S.S を通して考察する.

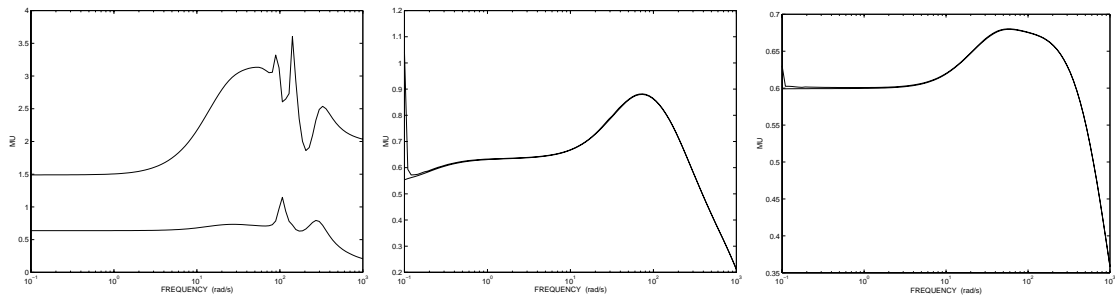
ただし, ここでは複素構造化特異値を扱うものとする. というのも, 混合構造化特異値を扱えるオプションと, そうでないオプションが比較対象となるためである.

以下の図は左から

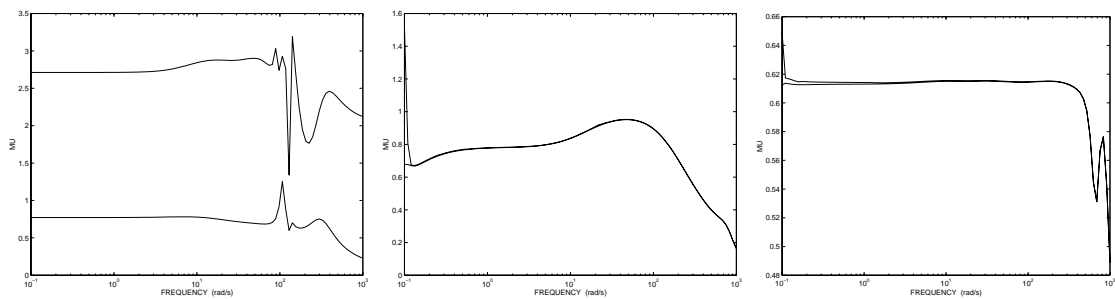
1. u : 平衡化/LMI 手法による上界と下界 [13]
2. c : 高精度の上界
3. C : より高精度の上界



☒ 7.1: 1st μ analysis



☒ 7.2: 2nd μ analysis



☒ 7.3: 3rd μ analysis

による結果である。ただし、フィッティングは auto fit アルゴリズムを使用している。また、Toolbox version3.0 において 2. の場合が推奨されている。また、以下の表はこのときに達成された H_∞ 最適制御問題における各 γ の値を示している。

表 7.2.1: γ Value

option	u	c	C
1st	1.37	1.37	1.37
2nd	3.12	1.15	0.70
3rd	1.28	2.92	0.62

これらの図から 1. の場合では上界と下界の開きが大きく、2. の場合には上界が低周波の $\omega = 10^{-1}$ 付近で過渡的に大きくなってしまっている。また、2. の場合には必ずその最小周波数で過渡的に大きくなる傾向がある。

下界はパワーアルゴリズムで正確に計算できるため、上界との開きが少ない方が正確な解析ができ、最適なコントローラ K が設計できるものと考えられる。そのためこのモデルでは、オプションは 3. の場合を用いた方がより良いコントローラを探索できると考えられる。

7.3 スケーリング行列 D の近似

前節で、D-K iteration における μ 計算に関して複素の場合と、mixed の場合が考えらると述べた。 μ 計算オプションとこららの組合せにより、次のような μ 解析が考えられる。

- I. (option:u, complex)
- II. (option:u, mixed)
- III. (option:c, complex)
- IV. (option:C, complex)

ただし、オプション 'c','C' の場合には mixed μ 計算は行えない。

7.3.1 フィッティング

D スケーリングのフィッティングの様子を図 7.4 から図 7.7 に示す. 図 7.4 は I. の場合, 図 7.5 は II. の場合, 図 7.6 は III. の場合, 図 7.7 は IV. の場合を示している. この例では H_∞ 制御則を求めた後の 1 回目のフィッティングの様子を表している. 図の最上段は, フィッティングによってどれだけ μ の値に近づいているかを示している. D スケーリングのフィッティングは 2 段目に当り, 最下段は 各々の感度を示している. 各ブロックに対して左上段より block 1, block 2, ..., block 5 となっている. 破線 - - がフィッティングを表しており, 各々の次数は表 7.3.1 のようになる.

表 7.3.1: Fitting order

pare	block 1	block 2	block 3	block 4	block 5
I	2	5	5	5	0
II	5	5	5	5	0
III	1	4	5	1	0
IV	1	3	4	0	0

図 7.6, 7.5 の場合にはフィッティングはかなり良いものといえる. また, 図 7.7 の場合の block 4 に対してはフィッティングを良くしなくても, μ 近似はかなり良いものが得られている.

7.3.2 フィッティング次数

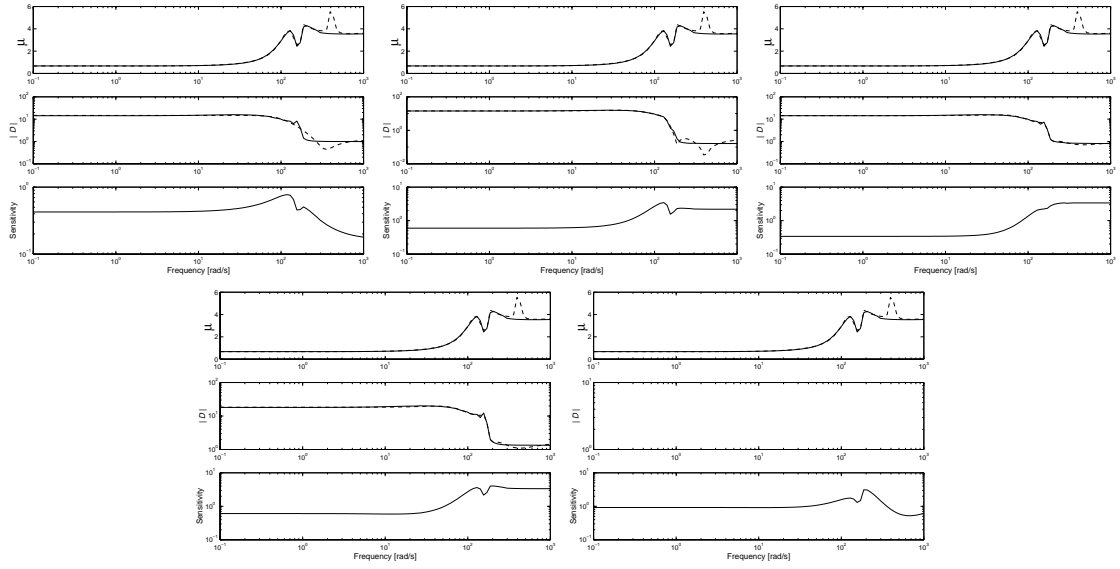
次に, 式 (2.6) で示された Δ ブロックは以下のようなものであった.

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i, \Delta_{perf}] : \delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i, \Delta_{perf} \in \mathbf{C}\}$$

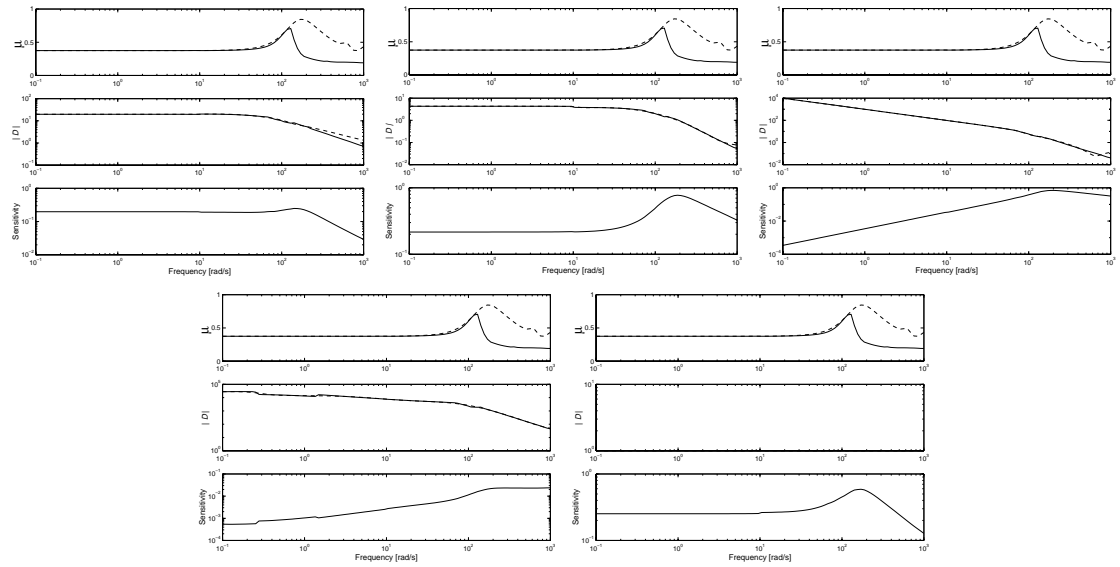
ここで $\delta_x, \delta_i, \delta_M$ に対しては, complex μ , mixed μ のいずれの場合も定数の重みを与えている. また, Δ_i, Δ_{perf} はそれぞれ 2 次, 1 次の関数の重みを与えている. そのことを考慮して, フィッティングの際に各ブロックに対して, 表 7.3.2 のようにフィッティングを行った. なお, ここでは I., IV. の場合のみの考察とする.

表 7.3.2: Fitting constant order

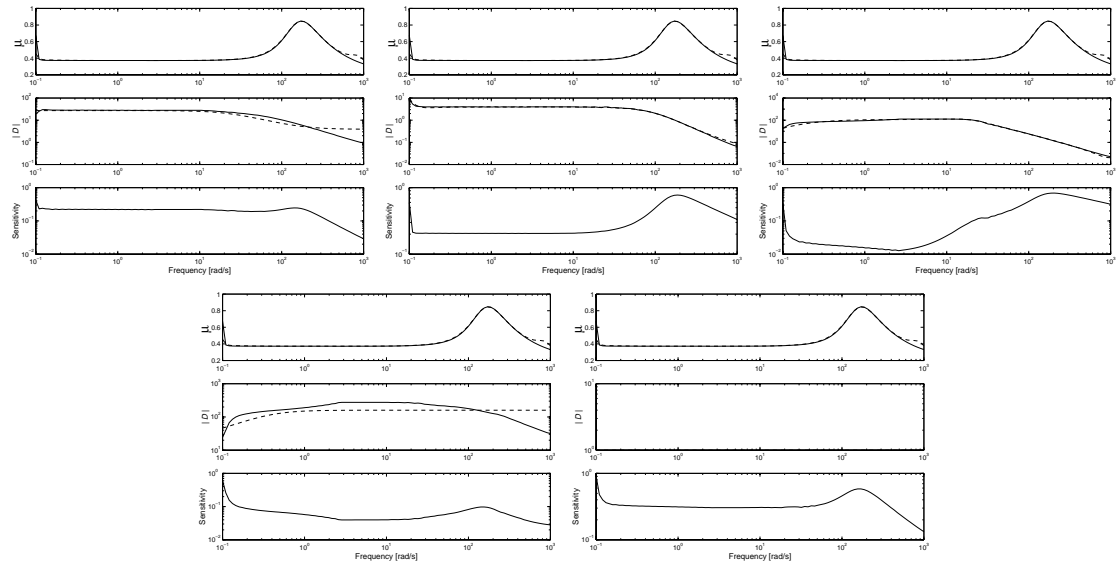
pare	block 1	block 2	block 3	block 4	block 5
I	0	0	0	2	1
IV	0	0	0	2	1



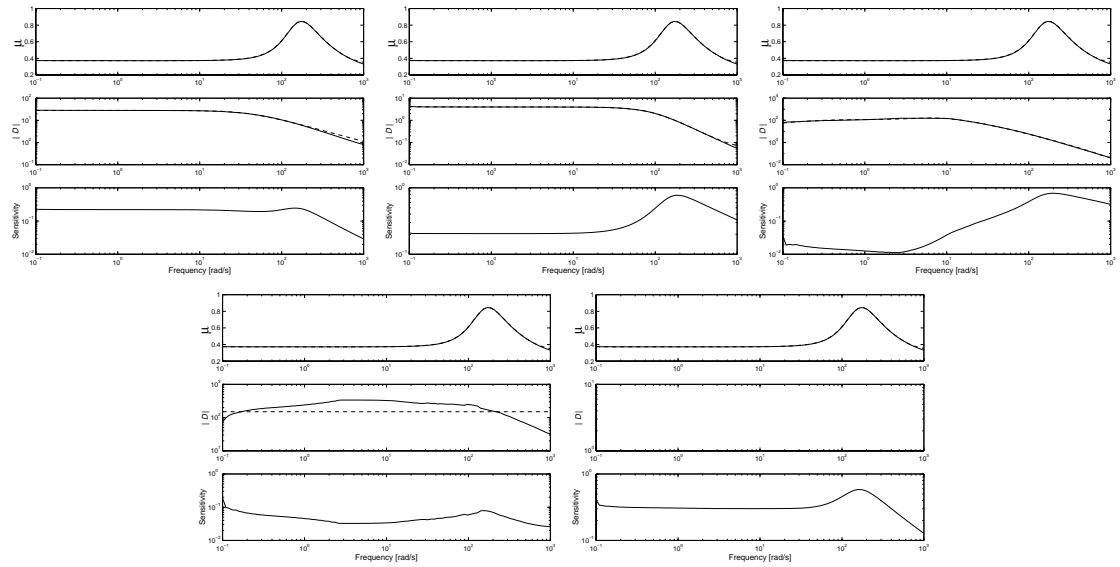
⊗ 7.4: u-complex fitting



⊗ 7.5: u-mixed fitting



⊗ 7.6: c-complex fitting



⊗ 7.7: C-complex fitting

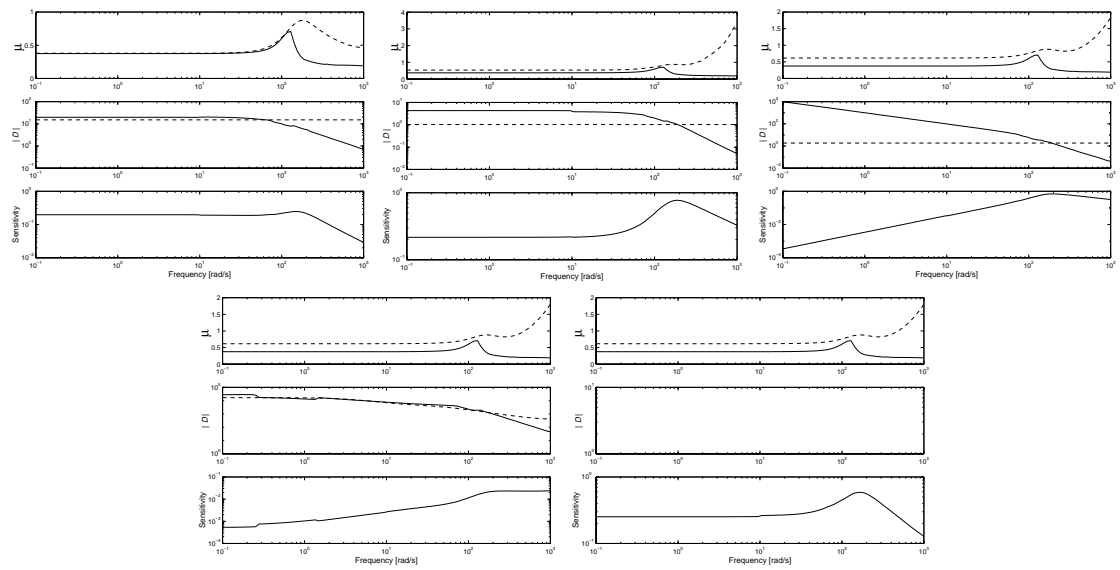


図 7.8: constant scaling in the case of I.

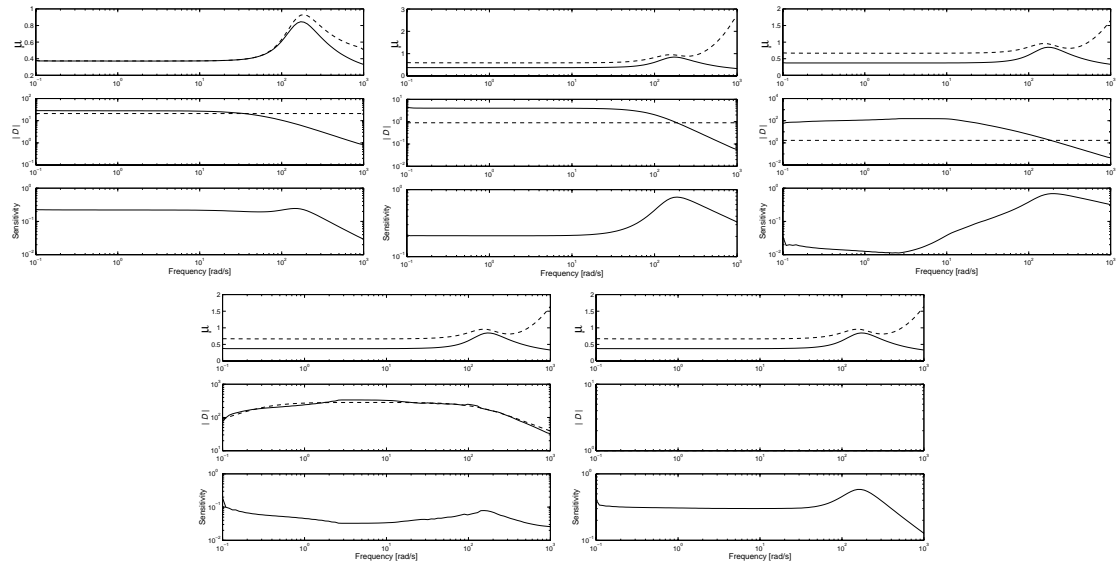


図 7.9: constant scaling in the case of IV.

図 7.8, 7.9 のいずれの場合も、フィッティングが最良ではなく、 μ の近似が都合の良いものではない。また、block 5 を 1 次でフィッティングを行うとランク落ちを起こしてしまい、つぎのステップにおける H_∞ 制御問題の前提条件の一つ [3] を

前提条件 行列 $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ は列フルランクである

満たさないなどの不都合が生じてくる。

7.4 非構造的な不確かさを考慮したモデル

以上のようなことに注意しながら、本稿では構造的な不確かさを考慮した設計を行うのではあるが、まず、より簡素な非構造的に不確かさを記述した設計を行い、それを比較対象として選ぶことが懸命である。非構造的な不確かさに対する周波数重み W_{add} は、定常ギャップから $\pm 0.3\text{mm}$ の変動を想定し、その重みを以下のように決定する。

$$W_{add} = W_{add-l}W_{add-r} = 2.78 \times 10^{-7} \times \frac{(s + 5.66)(s + 126)(s + 1.13 \times 10^3)}{(s + 18.9)(s + 31.4)(s + 37.7)} \quad (7.6)$$

$$W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r} = 1.00 \times 10^{-5} \times \frac{2.81 \times 10^6}{s + 0.101} \quad (7.7)$$

また、 W_{perf} を低周波での外乱抑制のための周波数重みとする。

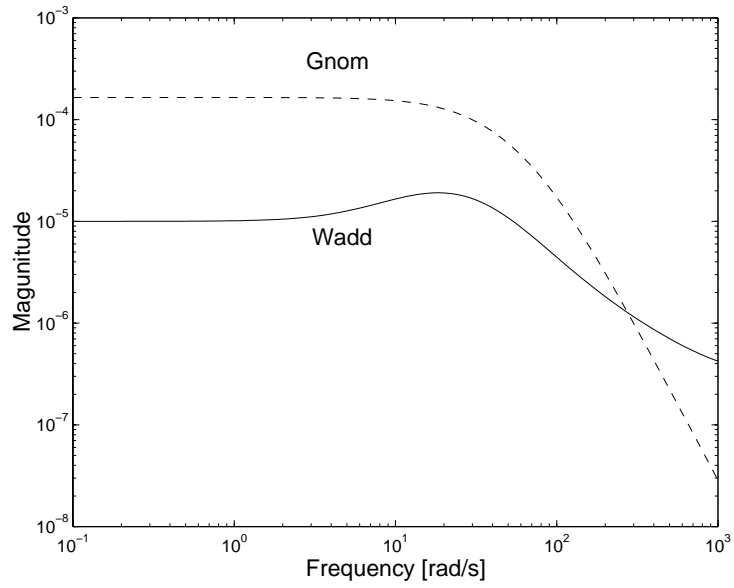
これによりコントローラ K_{add} を得る。

$$\begin{aligned} K_{add} = -2.38 \times 10^{10} \times & \frac{(s + 6.98 \times 10^3)(s + 105)(s + 77.8)}{(s + 6.72 \times 10^3)(s + 914)(s + 714)} \\ & \times \frac{(s + 11.0)(s + 13.3)(s + 18.9)}{(s + 666)(s + 105)(s + 12.5)(s + 17.2)} \\ & \times \frac{(s + 37.7)(s + 32.2)(s + 28.8)(s + 31.4)}{(s + 30.0)(s + 35.5)(s + 32.3)(s + 0.101)} \end{aligned} \quad (7.8)$$

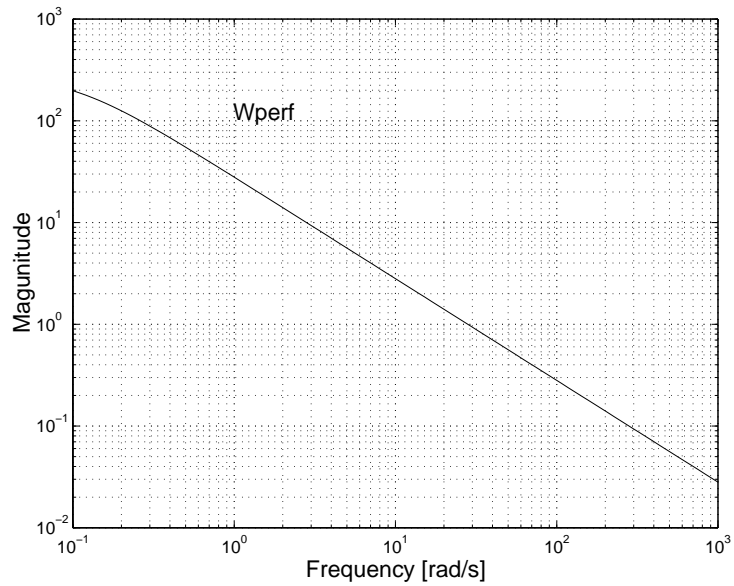
周波数応答は図 7.12 である。

7.5 構造的な不確かさを考慮したモデル

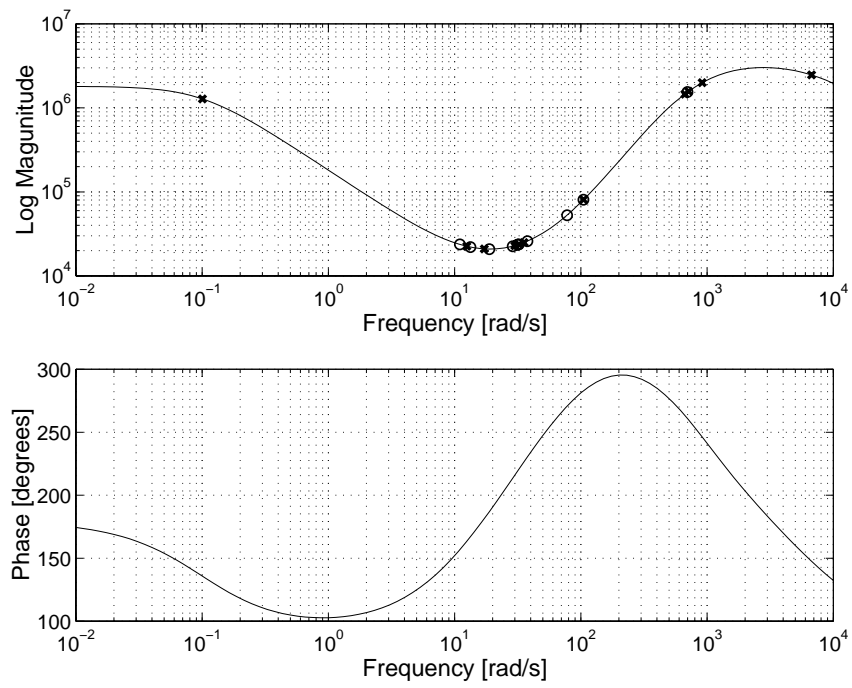
本稿では、図 4.7 のようなモデルに対してロバスト性の検討を行なう。本研究では試行錯誤を繰り返し設計をおこなったが、この節以降は代表的な設計仕様のひとつを取り上げて話を進めることとする。このときのパラメータ変動 $(\delta_x, \delta_i, \delta_M)$ は定常ギャップから $\pm 0.9\text{mm}$ の変動を想定し、その重みを表 7.5 のように決定する。



7.10: Frequency response of W_{add}



7.11: Frequency response of W_{perf}



☒ 7.12: Frequency response of controller K_{add}

表 7.5.1: Design parameters

Symbol	Value	Unit
k_x	60.8	N/m
k_i	8.70	N/A
k_M	0.190	kg

また, 電磁石部に対して次式のように不確かさを見積もる.

$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{0.859s + 24.8} + w_i(s)\Delta_i(s), \quad |\Delta_i(jw)| \leq 1 \quad (7.9)$$

ここで, $w_i(s)$ は重み関数であり, 次式で表される.

$$w_i(s) = \frac{5.20 \times 10^{-4}}{0.782 \times 0.859} \times \frac{(s + 0.320)(s + 90.0)}{(s + 24.7/0.782)(s + 24.8/0.859)} \quad (7.10)$$

$$W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r} = 1.0 \times 10^{-5} \times \frac{1.74 \times 10^6}{s + 0.101} \quad (7.11)$$

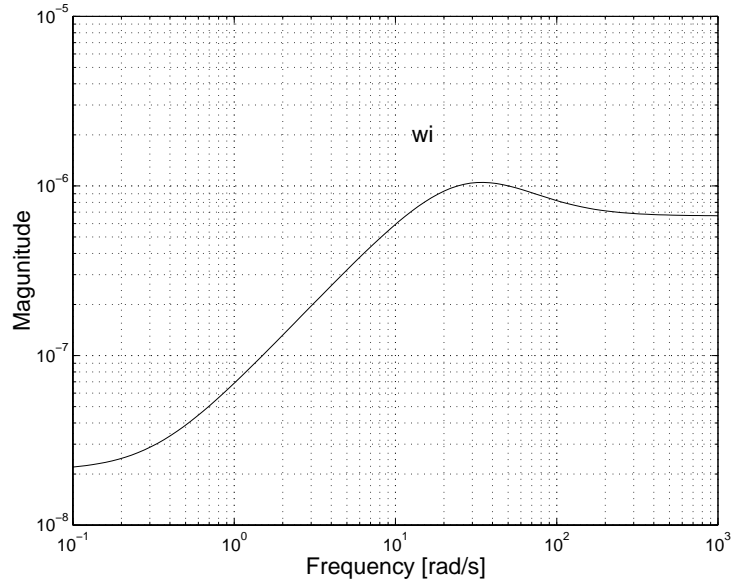
さらに, W_{perf} を低周波での外乱抑制のための周波数重みとして定義する. 式 (7.11) のゲインは式 (7.7) のゲインよりも小さい. しかしながら得られる低周波での制御性能は, 後述する考察ではこちらの場合の方がよい制御性能特性を示している. 以上のように各値を決定し, D-K iteration を用いて (6.6) 式を満足するコントローラ K_{mu} を設計した.

しかし, この設計のままでは実際のシステムを実装する際に計算速度が遅くなる可能性がある. 平衡化実現を行なうことにより K_{mu} を 34 次から 18 次に低次元化を施した.

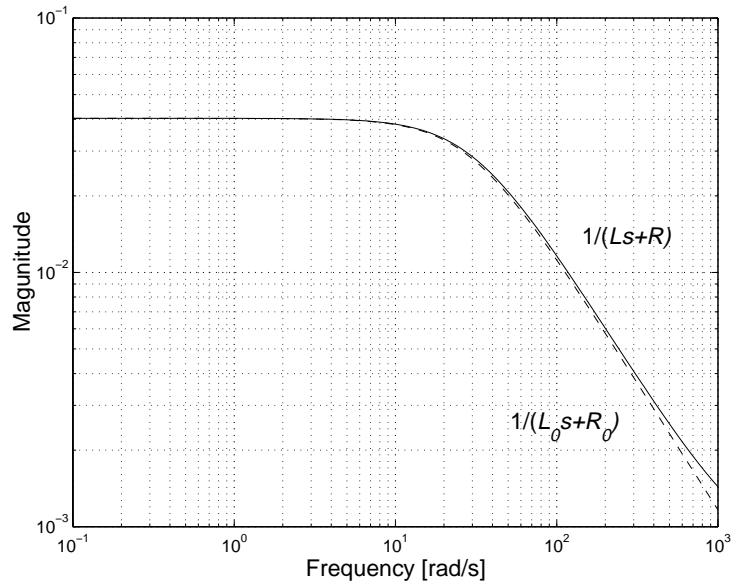
このときのコントローラ K_{mu} は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} K_{mu} = & -4.99 \times 10^{10} \times \frac{(s + 963 \pm j584)(s + 346 \pm j863)}{(s + 1.18 \times 10^3 \pm j1.51 \times 10^3)(s + 767 \pm j767)} \\ & \times \frac{(s + 108 \pm j770)(s + 32.5 \pm j2.07)(s + 0.0431 \pm j0.114)}{(s + 374 \pm j847)(s + 144 \pm j786)(s + 0.0472 \pm j0.116)} \\ & \times \frac{(s + 73.1)(s + 10.7)(s + 0.218)}{(s + 1.59 \times 10^3)(s + 13.0)(s + 0.101)(s + 1.23 \times 10^{-2})} \\ & \times \frac{(s + 1.70 \times 10^{-2} \pm j8.15 \times 10^{-2})(s + 4.31 \times 10^{-3} \pm j78.8 \times 10^{-3})}{(s + 1.71 \times 10^{-2} \pm j8.15 \times 10^{-2})(s + 3.57 \times 10^{-3} \pm j78.8 \times 10^{-3})} \end{aligned} \quad (7.12)$$

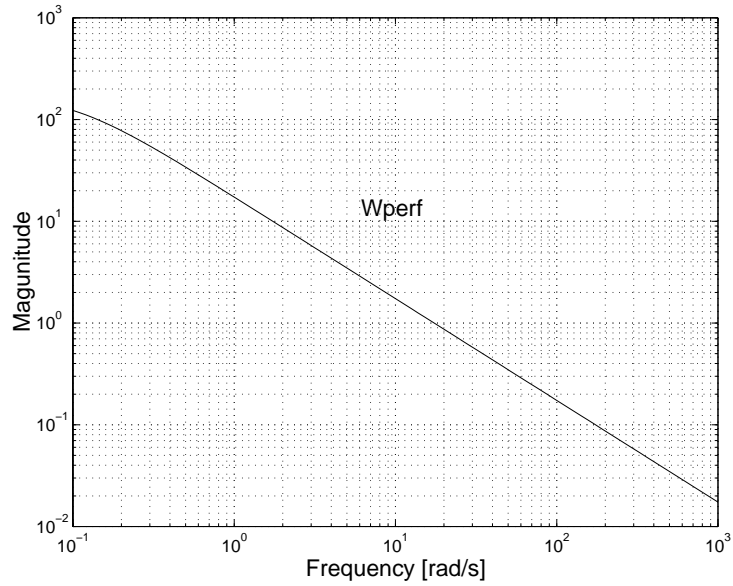
図 7.16において, 点線 (··) は D-K iteration の最初のステップ (H_∞ 制御問題) で得られたコントローラ K_{mu1} を表し, 破線 (- -) は非構造的なモデルに対するコントローラ K_{add} , 実線 (-) が最終的に得られたコントローラ K_{mu} のボード線図を表している.



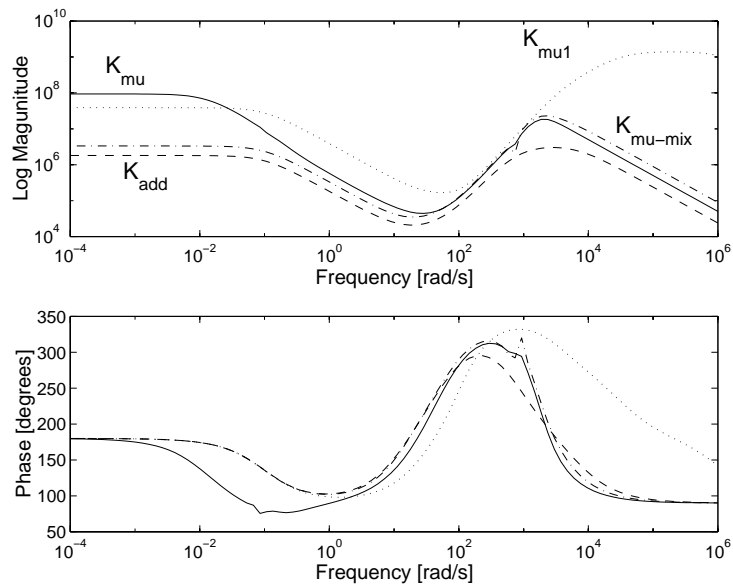
⊗ 7.13: Frequency response of weighting function w_i



⊗ 7.14: Frequency response of $1/(Ls + R)$



☒ 7.15: Frequency response of W_{perf} of Structured uncertain model



☒ 7.16: Frequency response of K_{mu}

また, K_{mu} と同様の仕様で D-K iteration の μ 解析を行った得られるコントローラ K_{mu-mix} の設計も行った. これらのコントローラを用いたときのループ伝達関数 GK により, システムが制御される周波数である交差周波数は以下ようになる. なお, この周波数が大きいほど応答性が速くなるともいえる.

表 7.5.2: cross frequency

controller	frequency [rad/s]
K_{add}	140
K_{mu1}	319
K_{mu}	243
K_{mu-mix}	265

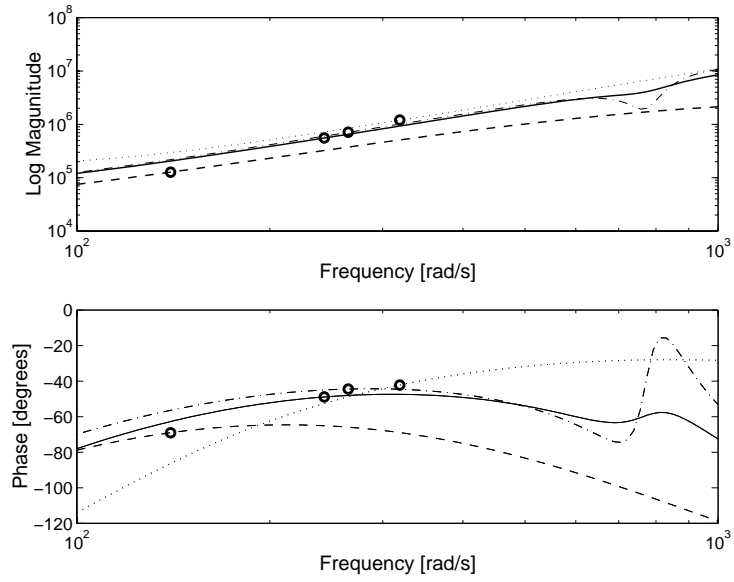
図 7.16 から, 低周波での K_{mu} のゲインが最も大きいため外乱を加えたときの応答性が最も良いことが予想される. さらに, 10^4 [rad/s] 以上の高周波において K_{mu1} はゲインが大きいため, 振動的な浮上特性となることが予想される. 実際, K_{mu1} はロバスト制御性能の条件を満たしていない.

また, 低次元化に関して図 7.19 を参照されたい. この図は K_{mu} に関して 6 次 (破線), 10 次 (点線) に低次元化したときのボード線図を表している. これらの場合では K_{mu} との等価性がかなり損なわれてしまうことがわかる. しかし, 不確かさを含めたモデルの次元は 6 次であり, コントローラも 6 次であるのが妥当である. これは D-K iteration の D スケーリング行列により, 設計問題自体が近似的に置き換えられることによる影響ではないかと考えられる.

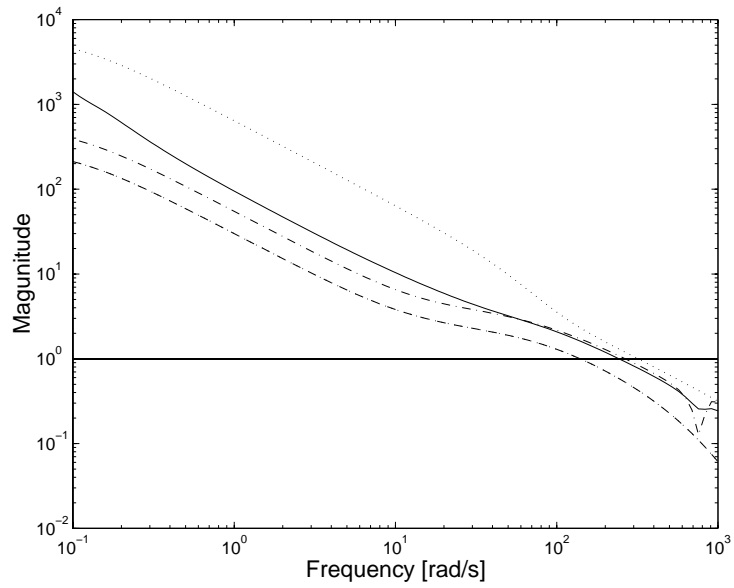
7.6 高精度の μ 計算による設計

これまでに述べたアプリケーションの計算精度に関して, どの程度高精度に計算すれば良いのか明らかでない. そのためこれまでは オプションは 'c' を設定して設計を行ってきた. 今回, オプションを 'C' に設定して設計を行った.

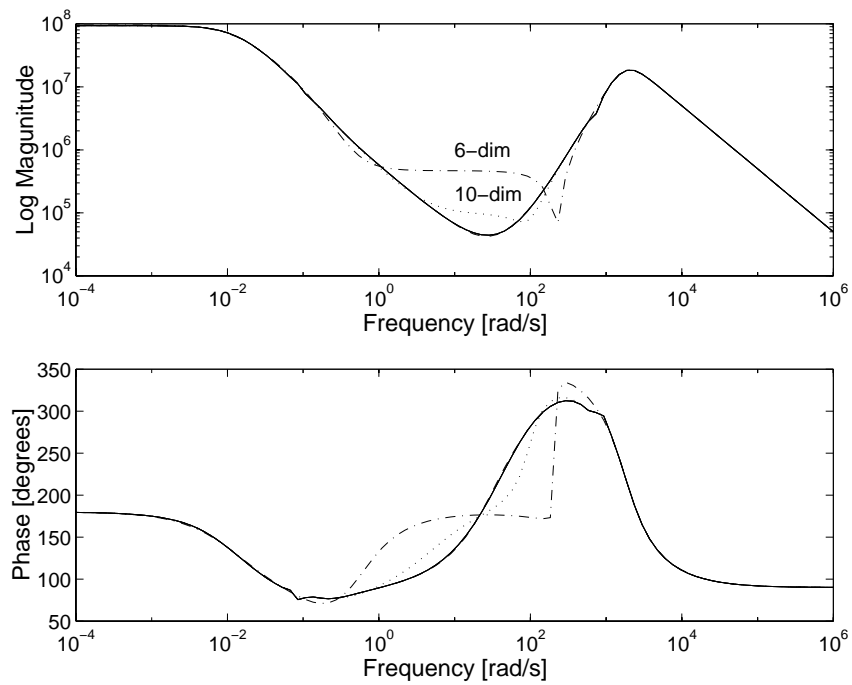
このときのパラメータ変動は定常変位から ± 1.2 mm の変動を想定し, その重みを以下のように決定する.



☒ 7.17: Frequency response of K_{mu}



☒ 7.18: Loop transfer function



7.19: Controller reduction

表 7.6.1: Design parameters

Symbol	Value	Unit
k_x	796	N/m
k_i	12.5	N/A
k_M	0.201	kg

電磁石部に対する重み $w_i(s)$ は次式のように見積もる.

$$w_i(s) = 1.13 \times 10^{-8} \times \frac{(s + 0.321)(s + 900)}{(s + 31.4)(s + 28.9)} \quad (7.13)$$

さらに, 低周波での外乱抑制のための周波数重みを次式のように見積もる.

$$W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r} = 1.00 \times 10^{-3} \times \frac{1.34 \times 10^4}{s + 0.0999} \quad (7.14)$$

以上により 1 回目 6 次, 2 回目 22 次と最終的に 24 次のコントローラ K_{mu} を設計し, 平衡化実現により 11 次に低次元化を施した.

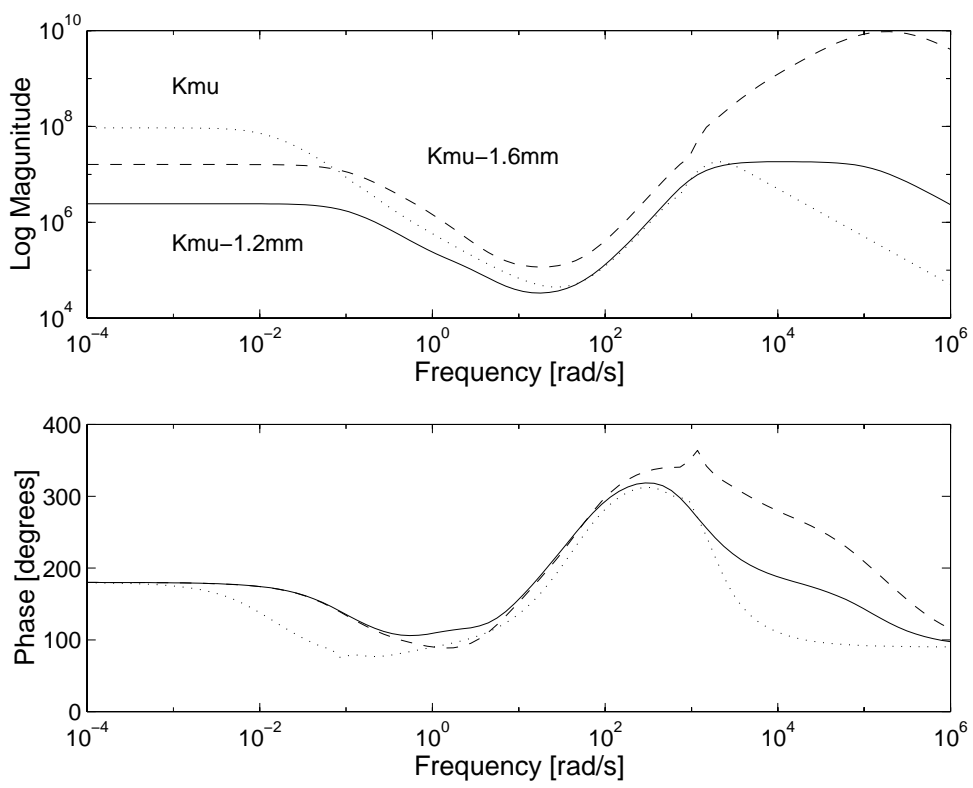
$$\begin{aligned} K_{mu} = & -2.35 \times 10^{12} \times \frac{(s + 6.61 \times 10^3)(s + 986)}{(s + 1.27 \times 10^5)(s + 6.40 \times 10^3)} \\ & \times \frac{(s + 333 \pm j430)(s + 1.02 \pm j0.109)}{(s + 841 \pm j571)(s + 341 \pm j447)(s + 2.56 \pm j1.02)} \\ & \times \frac{(s + 70.1)(s + 36.2)(s + 5.18)(s + 8.63)}{(s + 1.71 \times 10^3)(s + 0.0999)(s + 0.648)} \end{aligned} \quad (7.15)$$

このときのコントローラの周波数応答は図 7.20 のようになる. ここで, 点線 (..) は K_{mu} を, 実線 (-) が高精度に計算したコントローラ $K_{mu-1.2mm}$ を表している. 破線 (- -) はギャップ変動を $\pm 1.6mm$ に想定して高精度に計算したコントローラ $K_{mu-1.6mm}$ を表している.

この $K_{mu-1.6mm}$ に対する浮上実験は, 残念ながら浮上すらさせることができなかった. また, $K_{mu-1.2mm}$ の場合においては浮上させることは可能であったが, K_{mu} の場合と比べて定常時での振動が大きく, よい性能を得られなかった. つまり, かなり高精度の計算では十分な性能が得られないと考えられる. よって, 本稿での設計では μ 計算における有効範囲はオプション 'c' までとして考えるものとする.

7.7 D,G-K iteration

D-K iteration は実数の摂動を含まない Δ ブロックに対する設計法であった. そのため, μ の上界を計算し, スケーリング行列 D のフィッティングを行うことで制御問題を解いて



☒ 7.20: Bode plots of K_{μ}

いた. ゆえに, μ 解析において mixed μ 解析が行えたとしてもフィッティングは complex μ に対応するものである.

そこで, 実数の摂動を含むような Δ ブロックに対する

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i, \Delta_{perf}] : \delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i, \Delta_{perf} \in \mathbf{C}\}$$

設計法として D,G-K iteration と呼ばれるものがある [14]. これは μ の上界が

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}, G \in \mathbf{G}} \min_{\beta} \{\beta : M^*DM + j(GM - M^*G) - \beta^2 D \leq 0\} \quad (7.16)$$

与えられ, さらに式 (7.16) の β に対する条件式は以下のような $D_1 \in \mathbf{D}, G_1 \in \mathbf{G}$ が存在するとき成り立つ.

$$\bar{\sigma} \left[\left(\frac{D_{\omega}(\mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)))D_{\omega}^{-1}}{\beta_1} - jG_{\omega} \right) (I + G_{\omega}^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \leq 1 \quad (7.17)$$

これにより, D-K iteration と同様にスケーリング行列 D, G を見つけ, P_a を次のように書き表すことで

$$P_a = \begin{bmatrix} D_{\min}(s) & \\ & I \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} D_{\min}(s)^{-1}G_M(s) & \\ & I \end{bmatrix} - \beta_1 \begin{bmatrix} G_N(s) & \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

ここで周波数に依存するスケーリング行列 D_{ω} を実数有理な安定な最小位相の伝達関数 $\hat{D}(s)$ に制限すると問題はつぎのようになり,

$$\min_{\text{stabilizing } K} \|F_l(P_a, K)\|_{\infty} \quad (7.19)$$

H_{∞} 最適制御問題となる.

しかしながら, D,G-K iteration は アプリケーション上に未だ実装されておらず, この方法を用いた M.S.S. の設計は行っていない.

第 8 章

制御実験

つぎに, コントローラ K_{add} , K_{mu} , K_{mu-mix} に対して離散化を行ないデジタル制御装置に実装した. これにより, 実験的なロバスト性の検証が行える. それぞれのサンプリング周期はつぎのようになる. サンプリング周期が同一でない理由は各々のコントローラの次元の違いによるものである.

表 8.0.1: Sampling Period

controller	time [μs]
K_{add}	85
K_{mu}	130
K_{mu-mix}	70

8.1 ノミナル安定性

図 8.1は, 定常変位 5.00mm での浮上特性である. 表 8.2に示している平均値および標準偏差から, やや振動的ではあるがほぼノミナル安定性は満たされているいえる. また目視による検証においても, 見て取れるほどの振動は確認されなかった.

8.1.1 ノミナル制御性能

図 8.2は, 定常変位 5.00mm の浮上状態で鉄球質量の約 2.85 倍に相当するステップ状の外乱を入力電圧に加えたときの浮上特性である. この鉄球質量の約 2.85 倍という値は, アンプによる出力限界を表している. 右側の図が重力方向の外乱を加えたときである. こ

のときの変位幅は表 8.2.1に示す。変位幅は 1 mm 以下であり、制御性能は十分満たされていることがわかる。

8.2 ロバスト安定性

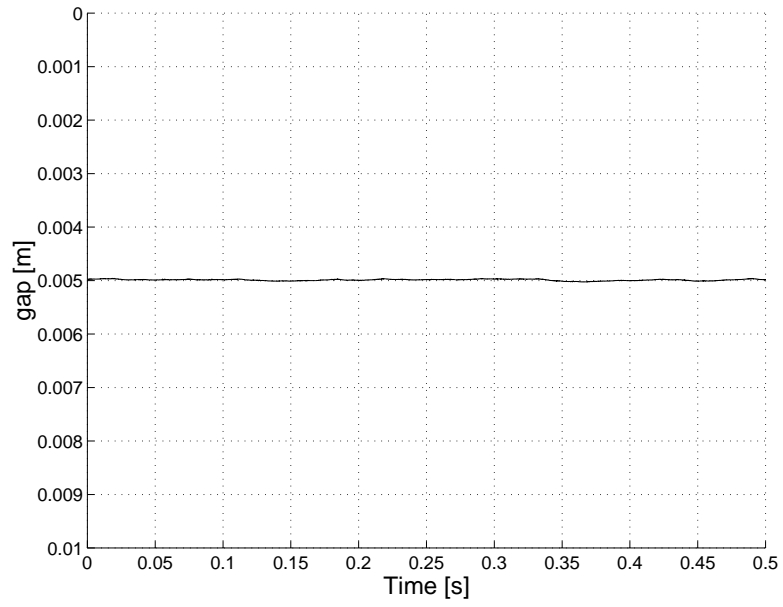
構造的な不確かさを記述することによる保守性の軽減を目的とした設計ではあるが、まず設計仕様のロバスト性を満たしていることが第一条件である。図 8.3は、定常変位 5.00mm の設計仕様に対して、変位 4.10mm, 5.90mm に目標値変動させたときの浮上特性である。表 8.2に示すデータから、安定性は満たされているといえるが、変位が小さい場合には目標値との誤差が大きい傾向がみられる。これは電磁石部と鉄球の接近により漏れ磁束が極端に少なくなり、吸引力が当初の予測よりも強く働いたためと思われる。

表 8.2.1: Analysis data of each stability

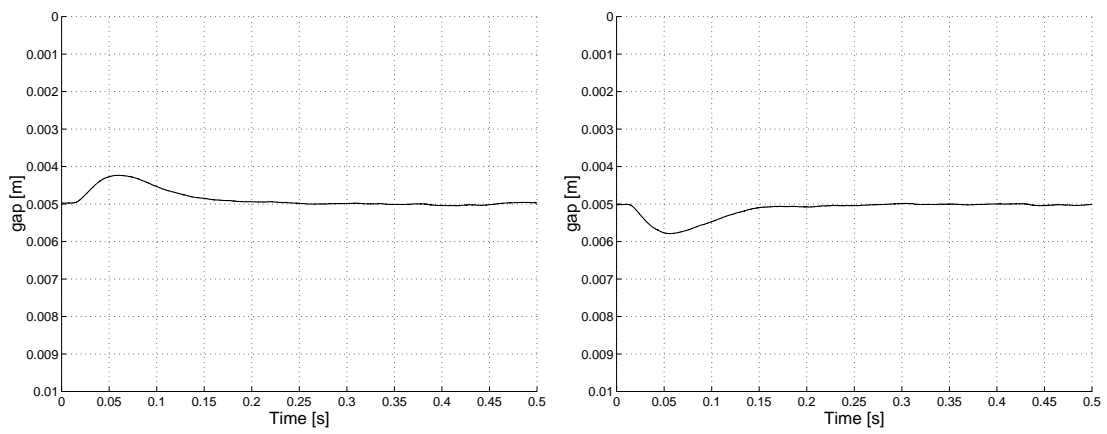
gap		Value[mm]
4.10mm	average	4.02
	absolute error	1.30×10^{-1}
	standard deviation	1.39×10^{-2}
5.00mm	average	4.99
	absolute error	4.38×10^{-2}
	standard deviation	1.58×10^{-2}
5.90mm	average	5.88
	absolute error	6.35×10^{-2}
	standard deviation	1.84×10^{-2}

8.2.1 ロバスト制御性能

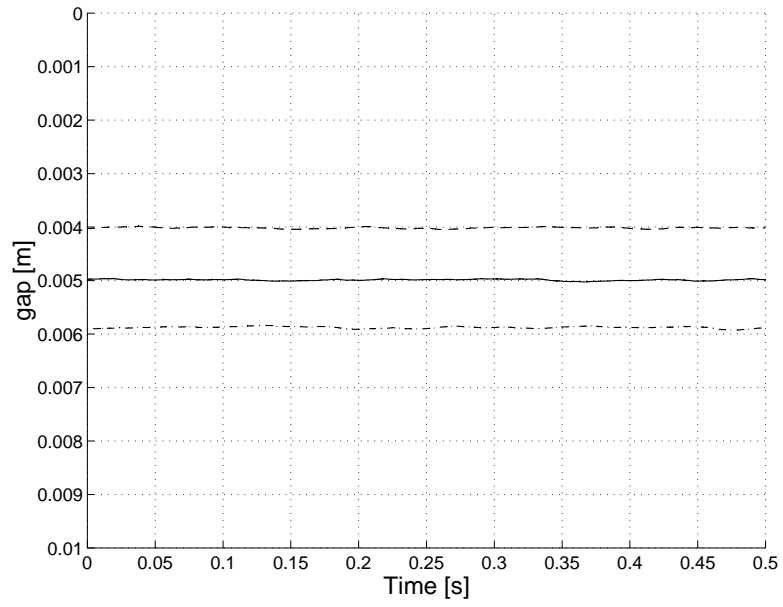
図 8.4は、定常変位 5.00mm の設計仕様に対して、変位 4.10mm, 5.90mm に目標値変動させ、その浮上状態で鉄球質量の約 2.85 倍に相当するステップ状の外乱を入力電圧に加えたときの浮上特性である。表 8.2.1にこのときの変位幅を示す。この表から変位幅は 1 mm 以下であり、応答性がよいといえる。また、重力方向への外乱に対する応答性の方が制御性能がよくないといえる。これは漏れ磁束の増加による吸引力の低下によるものであると考えられる。



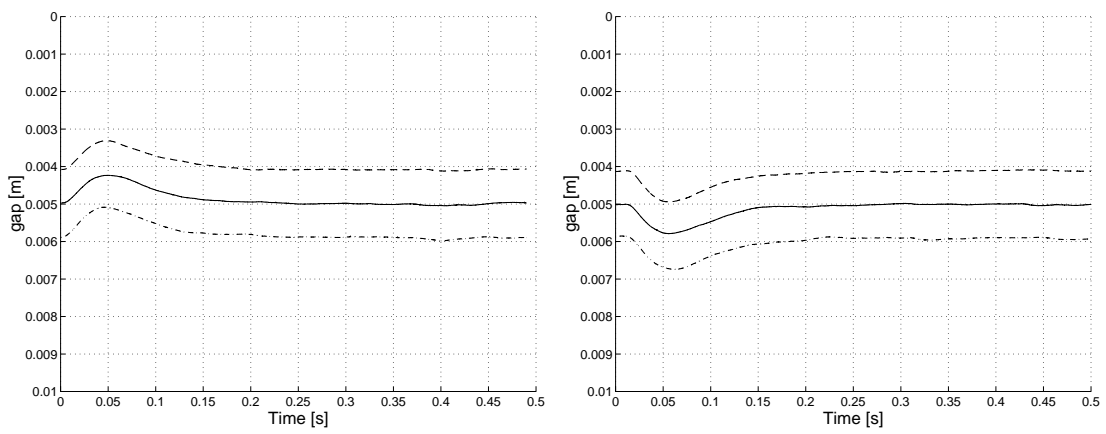
⊗ 8.1: Response with K_{mu} at the steady point



⊗ 8.2: Response to step disturbance with K_{mu} at the steady point



⊠ 8.3: Response with K_{mu}



⊠ 8.4: Response to step disturbance with K_{mu}

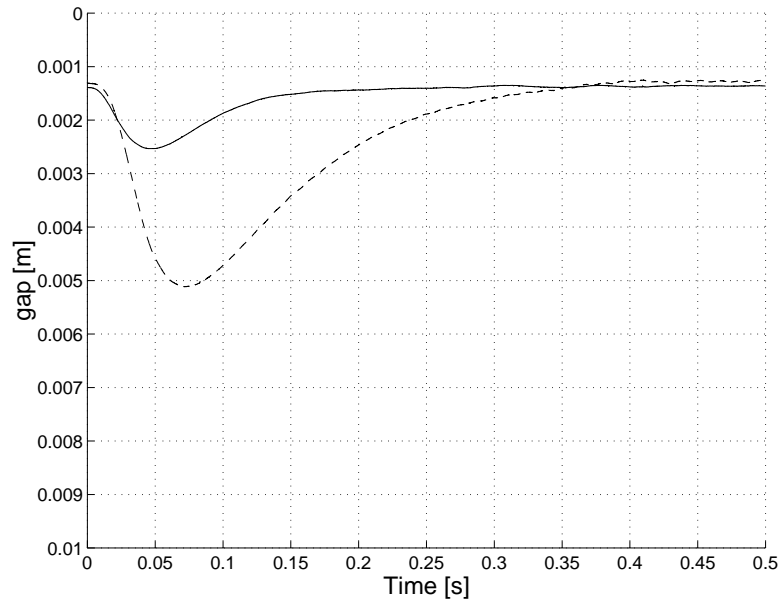
表 8.2.2: Analysis data of each performance

gap		Value[mm]
4.10mm	average	4.02
	absolute error	7.92×10^{-1}
	absolute error	8.44×10^{-1}
5.00mm	average	4.99
	absolute error	7.67×10^{-1}
	absolute error	7.91×10^{-1}
5.90mm	average	5.88
	absolute error	8.17×10^{-1}
	absolute error	8.45×10^{-1}

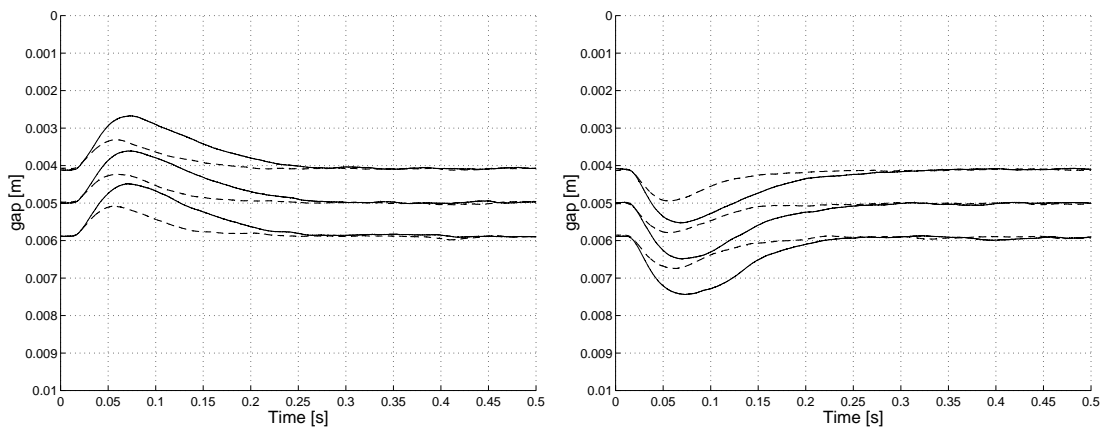
8.3 コントローラの比較

保守性の軽減を実験的に検証するには、設計されたコントローラの性能の臨界を探り、その振る舞いの考察を行う。その結果として得られる実システムの振る舞いと、設計仕様での不確かさの許容できる範囲との開きによりその保守性の軽減の有意性を決定することができる。図 8.5は、定常変位 5.00mm の設計仕様に対して、変位 1.30mm に目標値変動させ、その浮上状態で鉄球質量の約 2.85 倍に相当するステップ状の外乱を入力電圧に加えたときの浮上特性である。この目標値変動は、設計仕様よりもかなり大きな不確かさを生むような疑似的な状況を作り出している。図 8.5の破線 (- -) は K_{add} の応答を表している。この図より、双方とも定常変位 (5.00mm) から変化した場合にも制御性能が満たされていることがわかる。また、 K_{mu} の方が変位幅が狭く、即応性もありことから、 K_{add} よりも制御性能が良いといえる。このことは先に述べた設計コントローラの低周波域でのゲインの大きさに起因する。許容できる不確かさの範囲と制御性能の大きさにはトレードオフがあるが、 K_{mu} の方が kx, ki も大きく見積もっており、解析結果の保守性を軽減できるといえる。しかしながら、設計仕様よりも大きな不確かさを許容できることから、さらなる保守性の軽減が必要である。そのためにも不確かさの見積もり方、モデルの再検討なども必要となる。

つぎに、図 8.6は K_{mu} と同仕様のもと、D-K iteration の μ 解析を complex μ ではなく、mixed μ を用いて設計したコントローラ K_{mu-mix} の浮上実験の様子を示している (実線)。



⊠ 8.5: Response to step disturbance with K_{add} and K_{mu}



⊠ 8.6: Response to step disturbance with K_{mu-mix}

破線は (- -) K_mu の特性を表している. 双方とも図 8.4の場合と同じ条件の外乱を加えている. これにより, K_mu の方が外乱に対する変動が少ないことがわかる. 理論的には実数パラメータに関して実数の不確かさとして取り扱った K_{mu-mix} の場合の方が, より制御性能をよくできるかもしくは許容できる不確かさの範囲を大きくできるはずであるが, 現段階では望ましい結果は得られなかった. これは D-K iteration において, μ の上界の近似が D スケーリングのみ, つまり complex μ に関して対応しているためにフィティングがうまく行われず, その結果としてこのような違いが得られたのではないかと思われる. これらの比較検討を十分に行うためにも実数パラメータの不確かさを考慮できる設計法 (D,G-K iteration) の実装が不可欠である.

第 9 章

ロバスト性解析

9.1 最悪ケースの摂動

システムが不確かさに対してロバスト性をもつかどうかを決めるのに加えて、与えられた大きさの最悪ケースの摂動を得ることは有用である。ここでは、ブロック構造を式 (2.6) として、その大きさを α に制限して起こりうる最悪ケース性能はつぎのように定義される。

$$\mathcal{W}(M, \Delta, \alpha) := \max_{\Delta \in \Delta} \|F_u(M, \Delta)\|_{\infty} \quad (9.1)$$

ただし、

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] \leq \alpha \quad (9.2)$$

この α に対して、 $\mathcal{W}(M, \alpha)$ をプロットしたものが図 9.1 である。コントローラを見つけ出す設計目標は式 (6.3) で表された。これにより、 Δ の大きさが 1 以下のときに $\mathcal{W}(M, 1)$ は 1 以下であって、設計目標が達成されていることがわかる。

9.2 μ 解析

9.2.1 ロバスト安定性

構造化特異値を用いたロバスト安定性の解析を行う。ここでは、 K_{mu} に関してまず高精度に complex μ を計算した場合 (option:C) を示す。peak 値は 0.680 であり、上下界どうしがかなり漸近しており、ほぼ一つの線になっていることが図 9.2 から読み取れる。

つぎに、平衡化/LMI手法による mixed μ 解析 (option:u) を示す. peak 値は 0.192 である. なお、下界は各周波数でほぼ 0 の値を示している.

2章に示したロバスト安定性の定理より、式 (2.19) におけるは $\beta = 1$ であり、それにより閉ループ系の構造化特異値が 1 以下となることが、この場合のロバスト安定性の必要十分条件である. 従って、各々の場合において peak 値は 1 以下であり、ロバスト安定性が満たされていることがわかる.

つぎに、 K_{mu-mix} についても検討をおこなう. 図 9.4 は complex μ 解析によるもので、peak 値は 0.603 である. さらに、図 9.5 は mixed μ 解析によるもので、peak 値は 0.518 である. とともに peak 値は 1 以下である. しかし、 K_{mu} の mixed μ 解析の値と K_{mu-mix} の値の方とかなりの開きがあることがわかる. これは complex μ による設計を行った K_{mu} には complex μ による解析が妥当であり、mixed μ による解析は無意味であることを示している.

9.2.2 ロバスト制御性能

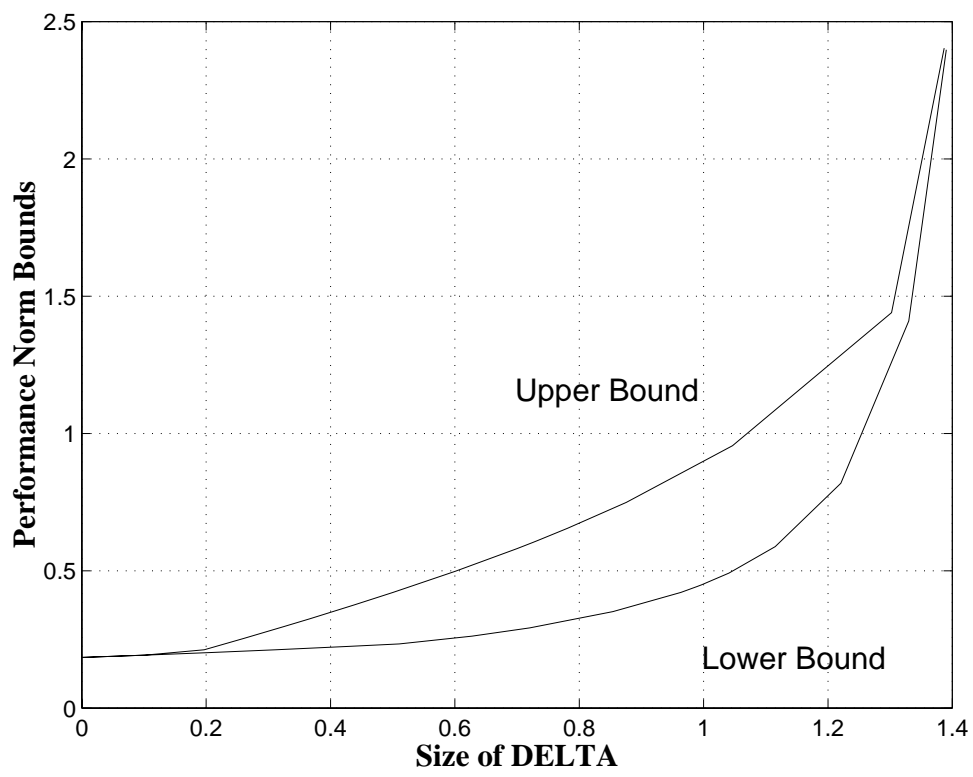
構造化特異値を用いたロバスト制御性能の解析を行う. 安定性のときと同様、まず高精度に複素構造化特異値を計算した場合 (option:C) を示す. peak 値は 0.820 である.

つぎに、平衡化/LMI手法による混合複素構造化特異値による解析 (option:u) を示す. peak 値は 0.762 である.

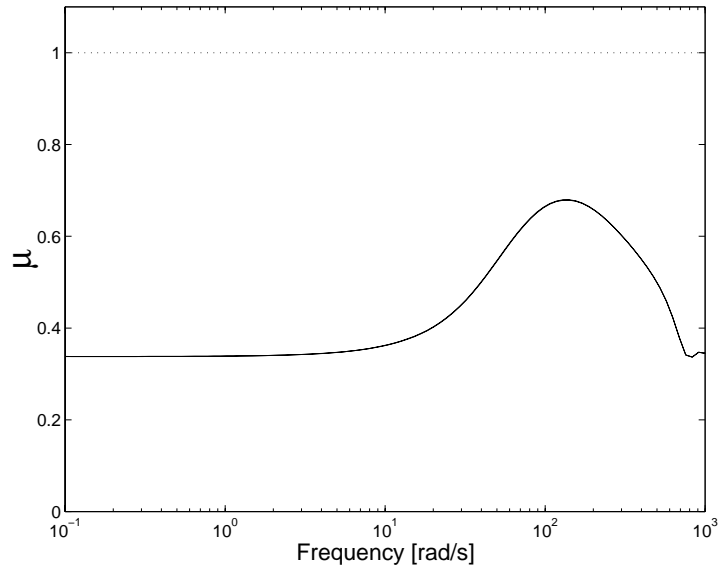
ロバスト制御性能の定理、式 (2.21) によりロバスト制御性能の必要十分条件である、閉ループ系の構造化特異値が 1 以下となることが、満たされていることがわかる.

安定性のときと同様に、 K_{mu-mix} についても検討をおこなう. 図 9.8 は complex μ 解析によるもので、peak 値は 0.810 である. さらに、図 9.9 は mixed μ 解析によるもので、peak 値は 0.731 である. とともに peak 値は 1 以下である. しかし安定性のときとは違い、 K_{mu} の mixed μ 解析の値と K_{mu-mix} の値の方とかなりの開きは少ない.

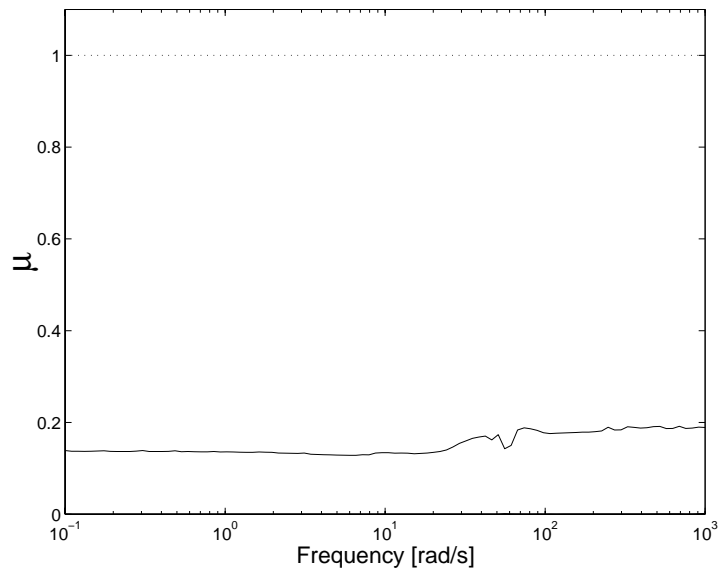
そうであっても complex μ による設計を行った K_{mu} には complex μ による解析が妥当であり、mixed μ による設計を行った K_{mu-mix} に対しては mixed μ による解析をおこなうことは当然である.



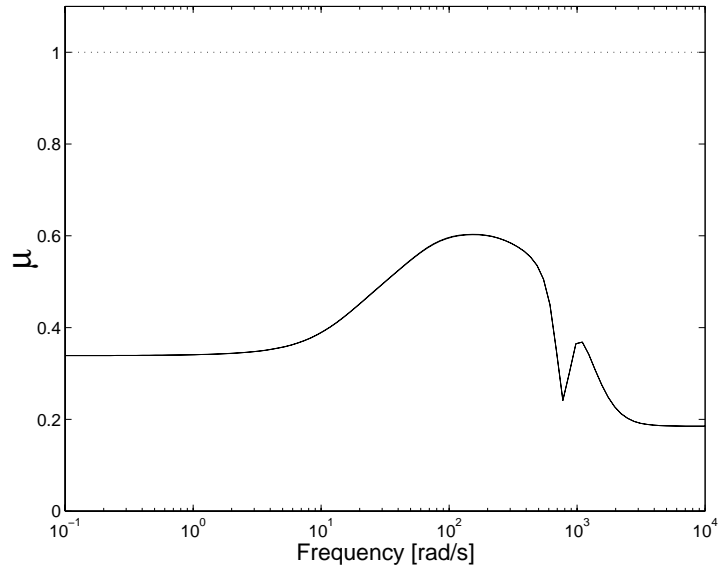
☒ 9.1: Performance Norm Bound



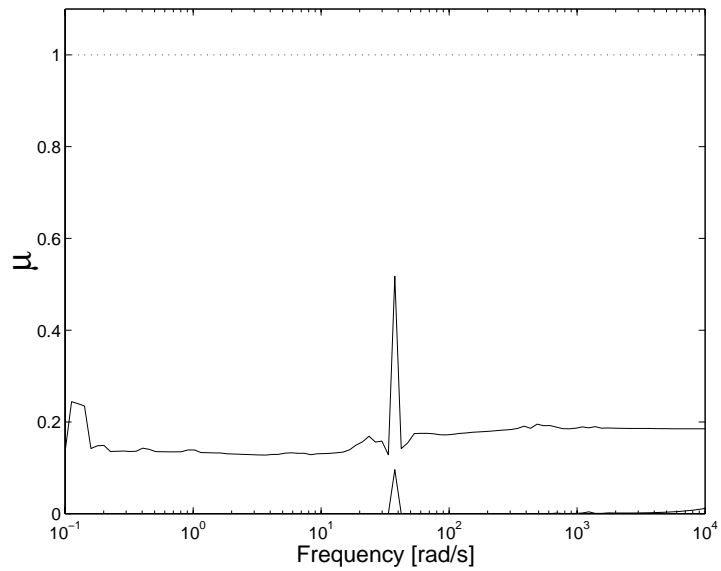
⊗ 9.2: complex mu plots for robust stability with K_{mu}



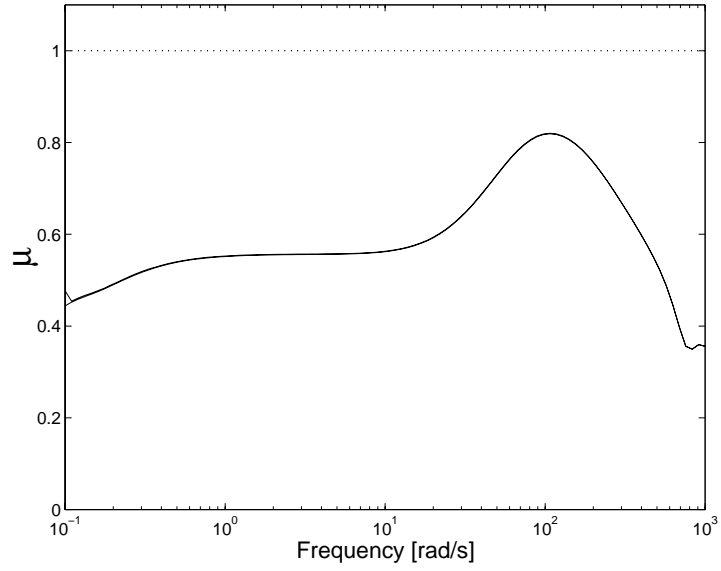
⊗ 9.3: mixed mu plots for robust stability with K_{mu}



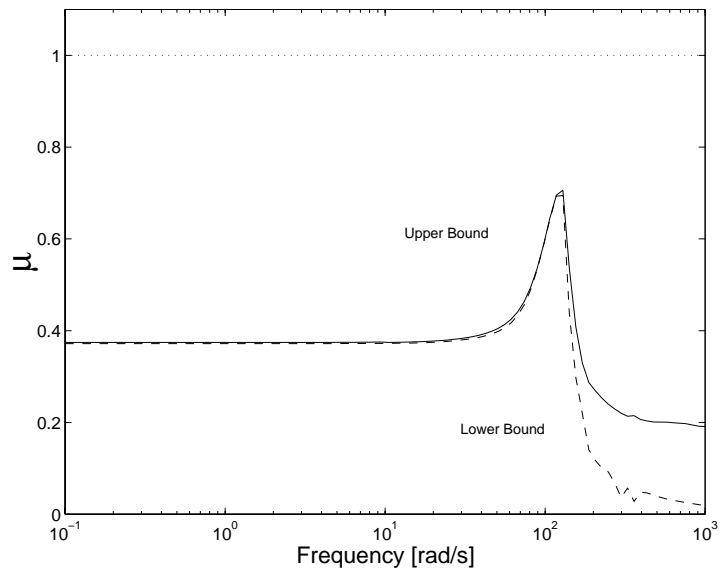
⊠ 9.4: complex mu plots for robust stability with $K_{\mu-mix}$



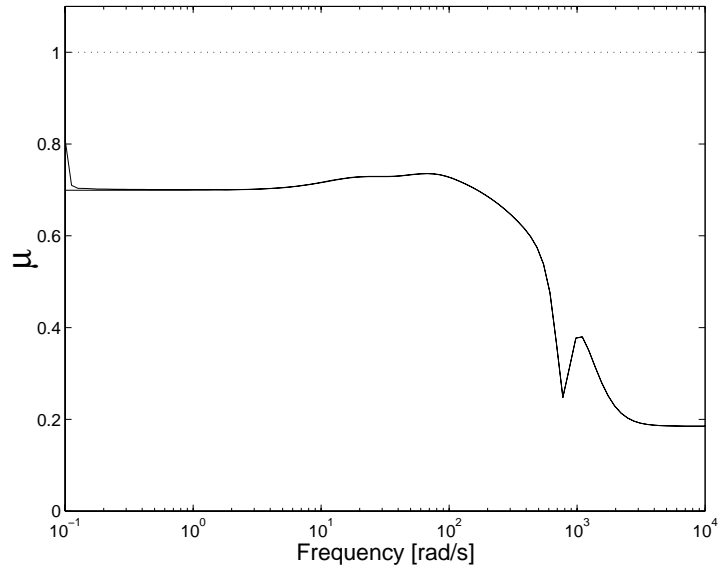
⊠ 9.5: mixed mu plots for robust stability with $K_{\mu-mix}$



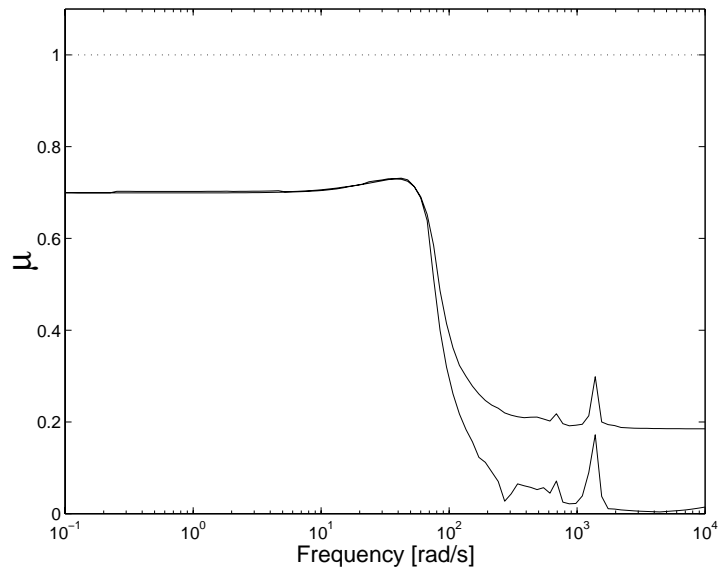
⊗ 9.6: complex mu plots for robust performance with K_{mu}



⊗ 9.7: mixed mu plots for robust performance with K_{mu}



⊗ 9.8: complex mu plots for robust performance with $K_{\mu-mix}$



⊗ 9.9: mixed mu plots for robust performance with $K_{\mu-mix}$

第 10 章

おわりに

本稿では、この磁気浮上システムをひとつの実例として、モデルにおける不確かさを考慮したロバスト性解析、設計をおこなった。

まず、様々な理想化、簡略化などによる不確かさをモデルにどのように記述するかが鍵となっていたが、これには構造的、非構造的にとらえたモデルを対象に解析、設計について浮上実験および μ 解析により検討を行った。構造的に記述することで、非構造的に記述した場合よりも理論と実システムとの間の保守性を軽減できることを、設計における不確かさの許容できる範囲により確認した。

また、設計および解析法に用いた構造化特異値 μ に関して、数学的に容易に取り扱える従来の complex μ を用いた場合と、実数と複素数の両方を考慮した mixed μ による設計、解析法について検討した。設計段階での考察として、complex μ に対応した設計手法である D-K iteration について、より高精度に計算した方が不確かさを大きく見積もれることが、当然の結果として得られた。しかし、実数パラメータの不確かさを扱うには mixed μ に対応した設計法が必要である。それは D,G-K iteration と呼ばれるものであるが、本稿では D-K iteration における μ 解析のプロセスを mixed μ 解析に変更して設計を試みた。

設計したコントローラについてのロバスト性であるが、安定性、および制御性能について μ 解析および浮上実験により検討を行った。mixed μ 解析を用いて設計を行ったコントローラと、高精度に計算した complex μ の場合のコントローラを比較検討した結果、ある程度高精度に計算した complex μ の場合の方がより良い制御性能が得られることが浮上実験よりわかった。また、 μ 解析によるロバスト性解析であるが、安定性、制御性能ともに十分な結果が確認できた。

しかしながら問題点として, complex μ 解析, mixed μ 解析の結果の違いを明確に示すことはできなかった. さらに, 実験結果と理論との間の保守性を多少, 軽減できたものの依然として解析結果と実験結果との間には相違があり, 不確かさの見積もり方が保守的であることが考えられる. そのため, 実システムの振る舞いをさらに明確に表すような, 不確かさの表記法について検討する余地がある [4],[15]. 本稿では, 不確かさを線形時不変の不確かさとして解析, 設計をおこなったが, 時変系の不確かさや [16], 不確かさの分布を確立的に記述 ([17]) してみることが考えられる. また, これらの不確かさを非線形な不確かさとして記述することも考えられる. これらにより, 実システムに対してより具体的な解析, 設計が可能となるかもしれない. さらに, この制御性能の解析についても最悪状態について解析する H_∞ ノルムをもちい制御性能の評価を行なうのではなく, 平均として解析する H_2 ノルムにより解析をおこなうことで保守性の軽減が可能となるかもしれない [18]. 設計に関しては文献 [19] などがあげられる. 加えて, 構造的に不確かさを記述し実数のパラメータを考慮した解析, 設計には元になるノミナルモデルの正確さ (ここでの正確さとは, 実システムと数学モデルの近似性をさす) が要求される. そのため, 複雑な要素をはらむ磁気浮上システムにおいてはノミナルモデルをどのように決定するかもひとつの課題となりうる. 本研究結果からは, 構造的に不確かさを記述することで保守性を軽減できたといえるが, その軽減はごく微量なものともいえるため, ノミナルモデルの再検討を要するという考え方もできる.

ゆえに今後の課題として, 従来の不確かさの表記のまま設計法として D-K iteration ではなく, D,G-K iteration をもちいて設計, 解析が必要である. さらに, 不確かさの表記法の再検討, およびそれに伴うコントローラ的设计, 解析が必要である.

謝辞

本研究を行うにあたり、終始御指導を賜りました示村 悦二郎教授、藤田 政之助教授に深謝いたします。また、有益な御助言や御討論をいただいた研究室の先輩方に心から感謝致します。特に直接御指導頂いた金沢大学の滑川 徹 助手に心から感謝致します。さらに、お互いに励まし合い、研究に協力してくれた研究室の諸兄に感謝致します。

第 A 章

システム仕様

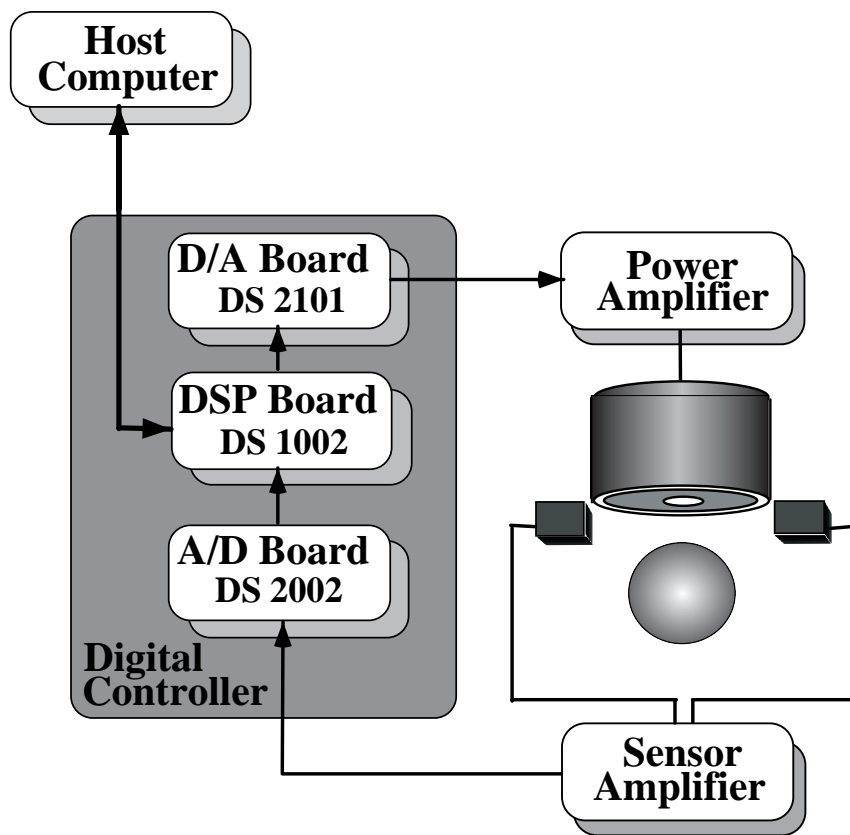
磁気浮上システムとは、電磁石の発生する吸引力を能動的に制御することにより直径 6.35 cm、質量 1.04 kg の鉄球をある所定の位置で浮上させるものである。

本稿で用いる磁気浮上システムの実験装置の構成を図 A.1に示す。この実験装置は主に電磁石装置部、センサ装置部、デジタル制御装置部、ホストコンピュータの部分に分けられる。

この磁気浮上制御系の信号の流れは、まずセンサでギャップの変位を測定する。つぎに、その位置信号を A/D コンバータでデジタル化する。この信号をもとにデジタル制御装置で制御則を演算し、制御入力となる電圧指令値を D/A コンバータに出力する。さらに、D/A コンバータからのアナログの出力信号を電磁石アンプで増幅し、電磁石の吸引力を制御する。

A.1 電磁石の構造および電磁石アンプ

本稿で用いる電磁石の外形を図 A.2に示す。電磁石は円筒形電磁石を用い、その内側には直径 0.8 mm の導線を 3000 回巻いたコイルが取り付けられている。電磁石アンプには Nachi 製の FCDDL1-4-5040 を用いる。この仕様については表 A.1 に示す。



☒ A.1: System Environment

A.2 センサ

水平方向に非接触の位置センサとしてレーザーセンサを取り付けることで、鉄球の鉛直方向の位置を知ることができる。

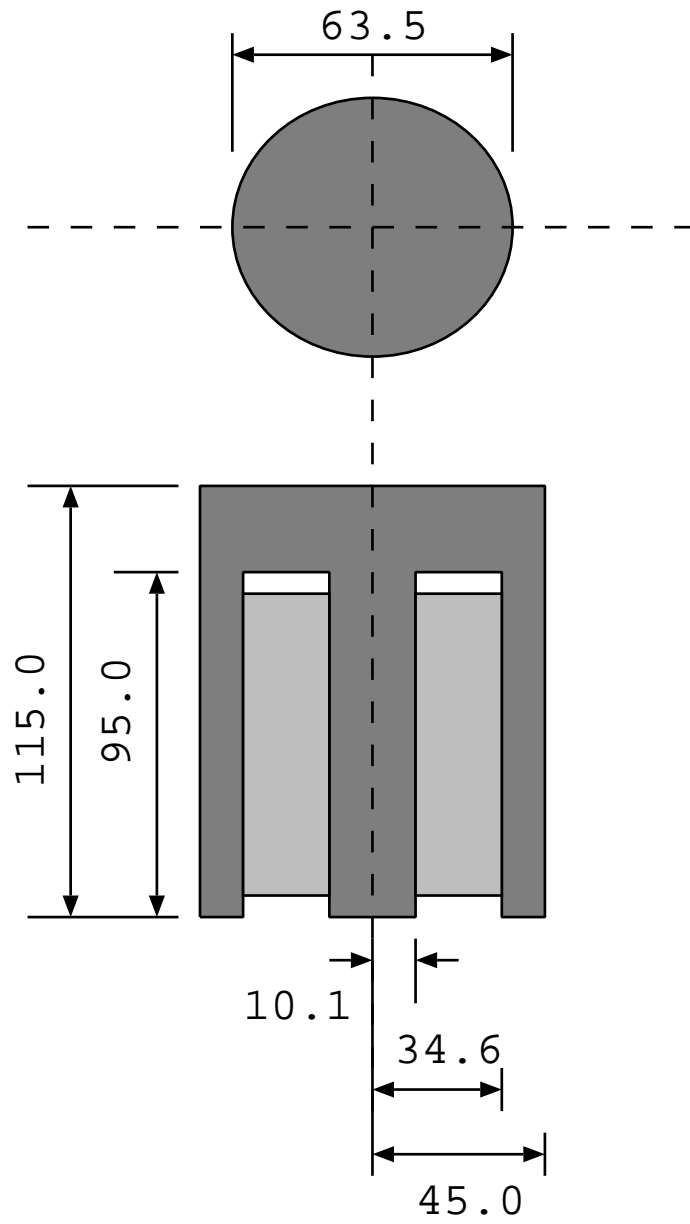
このセンサは、距離に比例した電圧を 0 ~ 10[V] の範囲で出力するセンサである。このセンサにより 0.00 ~ 10.00[mm] の測定が可能である。

表 A.1: Amplifier of Electromagnet Specification

型式	リニア式 DC 電流アンプ model FCDL 1-4-5040
最大出力電圧/電流	± 50 [V] / +4[A](連続 3[A])
電流検出抵抗	1[Ω]
出力電流/入力電圧	0.4 [S]
バイアス設定範囲	0 ~ 3 [A]
電圧増幅段 GB 積	1[MHz]
入力極性	正負極性 設定可
電源	AC 100[V] 3[A]
寸法	W420 × H190 × D450 [mm]
重量	15 [kg]

A.3 デジタル制御装置

コントローラには dSPACE 社の デジタル制御装置 DSP-CITpro を使い、デジタル制御系を構成する。DSP-CITpro は A/D コンバータボード DS2002, 浮動小数点演算ボード DS1002, D/A コンバータボード DS2101 から構成されている。その中枢となるボードには TEXAS INSTRUMENT 社製の DSP TMS320C30 を使用している。TMS320C30 は最大 33MHz の RISC 型で 32bit 浮動小数点が可能な DSP である。



☒ A.2: Electro Magnet

A.4 ホスト・コンピュータ

ホスト・コンピュータには日本 DEC 社製の DECpc4662MTE を用いた。これより、デジタル制御装置への指令を与える。

表 A.2: DS2002 A/D converter specification

DS2002	A/D コンバータボード
A/D 変換時間	5[μ sec]
分解能	16 [bit]
入力電圧	± 10 [V]

表 A.3: DS2101 D/A converter specification

DS2101	D/A コンバータボード
D/A 変換時間	3 [μ sec]
分解能	12 [bit]
入力電圧	± 10 [V]

表 A.4: Digital controller specification

DS1002	プロセッサボード
DSP データ幅	32 [floating bit]
DSP 命令サイクル	60 [nsec]
DSP クロック周波数	33 [MHz]

第 B 章

吸引力の非理想化

吸引力 f は、以下のような理想化を行なうことにより、

1. 鉄心の透磁率は無限大
2. 電磁石に漏れ磁束はない
3. 磁気飽和がない
4. ヒステリシスがない

次式のように表された [9].

$$f = k \left(\frac{I + i}{X + x + x_0} \right)^2 \quad (\text{B.1})$$

しかし、実際のシステムではこのような理想的な吸引力は得られない。そこで、次節より前述の理想化を取り除いていくこととする。

B.1 鉄心の透磁率が有限である場合

鉄心の透磁率を有限 μ とすると、

$$\frac{B_i}{\mu} 2(l_1 + l_2) + \frac{B_g}{\mu_0} 2x_a = Ni \quad (\text{B.2})$$

である。ここで

$$C_0 = \frac{B_i}{\mu} 2(l_1 + l_2) \quad C_0 > 0 \quad (\text{B.3})$$

とすると,

$$B_g = \frac{\mu_0(Ni - C_0)}{2x_a} \quad (\text{B.4})$$

となる. これにより, 吸引力 f は

$$\begin{aligned} f &= \frac{B_g^2}{2\mu_0} \cdot 2S \\ &= \frac{\mu_0 S}{4x_a} (N^2 i^2 - 2NC_0 i + C_0^2) \\ &= \frac{\mu_0 N^2 S}{4x_a} \left(i - \frac{C_0}{N}\right)^2 \\ &= k \left(\frac{i - C_1}{x_a}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる. ここで

$$C_1 = \frac{C_0}{N} \quad C_1 > 0 \quad (\text{B.6})$$

である.

B.2 電磁石に漏れ磁束がある場合

ギャップ部において漏れ磁束が存在する時の B_g の減少量を B_{leak} とすると, 吸引力 f は次式のようになる.

$$f = \frac{(B_g - B_{leak})^2}{2\mu_0} \cdot 2S \quad (\text{B.7})$$

となる. ここで

$$B_{leak} = b \cdot B_g \quad 1 > b > 0 \quad (\text{B.8})$$

とおくと, 式(B.5)より

$$\begin{aligned} f &= \frac{B_g^2 S}{\mu_0} (1 - b)^2 \\ &= k(1 - b)^2 \left(\frac{i - C_1}{x_a}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる. さらに, ギャップ x_a が大きくなると b の値も大きくなる. 従って b を定数ではなくギャップ x_a の関数として $b(x_a) = b_1 x_a$ とおくと,

$$f = k(1 - b_1 x_a)^2 \left(\frac{i - C_1}{x_a}\right)^2 \quad (\text{B.10})$$

となる. このとき, 式 (B.10) は次式のように書き換えられる.

$$i_a = \sqrt{\frac{f}{k} \frac{x_a}{1 - b_1 x_a}} + C_1 \quad (\text{B.11})$$

この式に対して, $f = 10.15, k = 1.71 \times 10^{-4}, b = 60.0, C_1 = 0.1805$ としたときの図が, 図 B.1である.

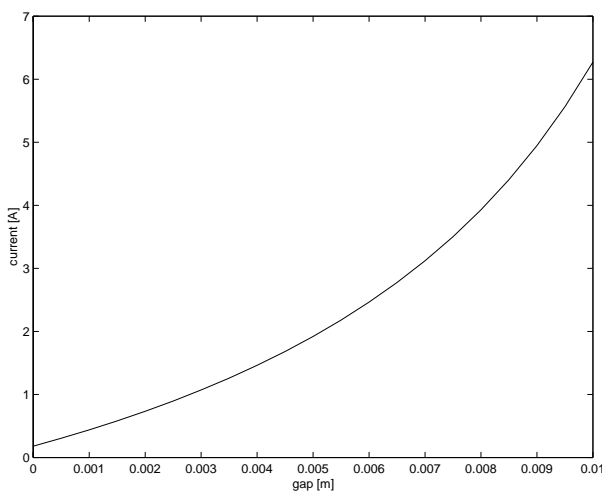


図 B.1: Current value ($f=\text{constant}$)

図 B.1を 3 次元的にとらえると図 B.2のようになる.

これは鉄心の透磁率が有限, 磁気飽和がある場合である. この図 B.1は図 5.2の実験値とかなり類似したものとなっている. よって, 式 (B.11) より各パラメータは次のようになる.

表 B.2.1: Parameters of magnetic force

Symbol	Value	Unit
k_x	5.88×10^3	N/m
k_i	39.88	N/A

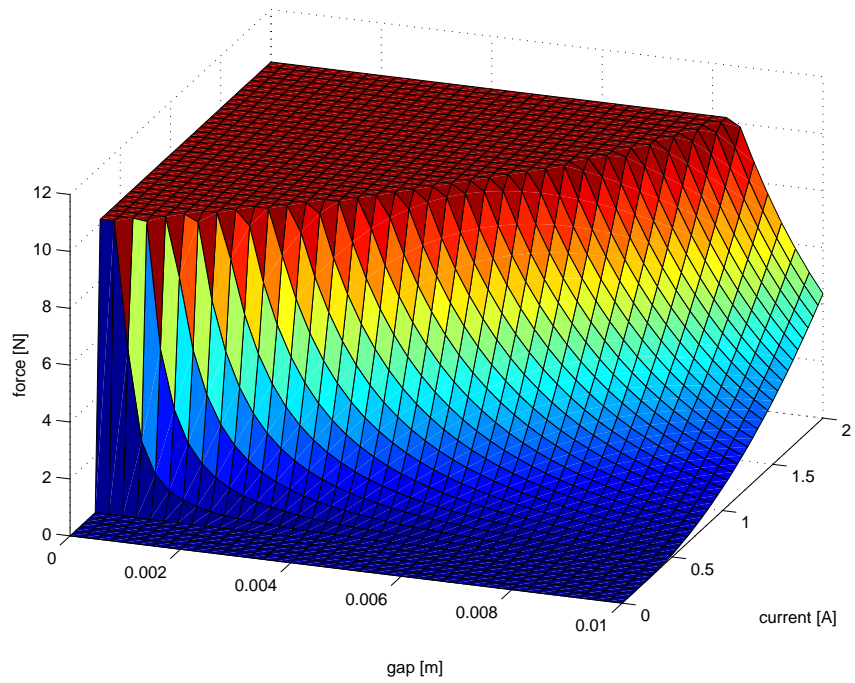


図 B.2: ギャップ-電流-吸引力特性

参考文献

- [1] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control*, JOHN WILEY & SONS Ltd, 1996.
- [2] J. Doyle, A. Packard and K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs and μ ," *Proc. 30th IEEE CDC*, pp. 1227-1232, 1991.
- [3] 細江 繁幸, 荒木 光彦, 制御系設計, 朝倉書店, 1994.
- [4] R.D'Andrea, F.Paganini, and J.C.Doyle, "Uncertain Behavior," *Proc. 32nd IEEE CDC*, pp. 3891-3896, San Antonio, Texas, 1993.
- [5] F.Paganini, R.D'Andrea, and J. C. Doyle, "Behavioral Approach to Robustness Analysis," *Proc. 1994 ACC*, pp. 2782-2786, Baltimore, Maryland, 1994.
- [6] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith, *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*, MUSYN Inc. and The MathWorks Inc., 1997.
- [7] J. C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEEE Proceedings*, vol. 129, no. 6, pp.242-250, 1982.
- [8] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K, Uchida, " μ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp.530-536, 1995.
- [9] 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会 編, 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社, 1993.
- [10] P.M. Young and J.C.Doyle, "Computation of μ with real and complex uncertainties," *Proc. 29th IEEE CDC*, pp. 1230-1235, 1990.

- [11] 藤田, 滑川, 松尾, “不確かさを考慮した磁気浮上制御系モデリングとロバスト性解析,” 電気学会システム制御研究会資料, SC-97-25, 1997.
- [12] 松村, 中森, “ランダムノイズによる鉄心入り電磁石の定数測定について,” 昭和 60 年度電気関係学会 北陸支部連合大会 講演論文集, pp. 22-23, 1985.
- [13] P. Young, Newlin, and J. Doyle, “Practical computation of the mixed μ problem,” *Proceeding of the American Control Conference*, pp.2190-2194, June, 1992.
- [14] Kemin Zhou and J. C. Doyle, “Essentials of robust control,” Prentice Hall. Inc, p.p.381-390, 1998.
- [15] F.Paganini, and J.C.Doyle, “Analysis of Implicitly Defined Systems,” *Proc. 33rd IEEE CDC*, pp. 3673-3678, Lake Buena Vista, Florida, 1994.
- [16] F. Paganini, “Robust Stability Under Mixed Time Varing, Time Invariant and Parametric Uncertainty,” *CDS Tech. Rep. CDS95-024*, Calif. Inst. of Technology, 1995.
- [17] F. Paganini, “Set Descriptions of White Noise and Worst Case Induced Norms,” *Proc. 32nd IEEE CDC*, pp.3658-3663, San Antronio, Texas, 1993.
- [18] E. Feron, “Analysis of Robust H_2 Performance with Multipliers,” *Proc. 33rd IEEE CDC*, pp.2015-2021, Lake Buena Vista, Florida, 1994.
- [19] R. D’Andrea, “LMI Approach to Mixed Performance Objective Controllers: Application to Robust H_2 Synthesis,” *CDS Tech. Rep. CDS95-020*, Calif. Inst. of Technology, 1995.