JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	複数の凸多面体を折ることができる展開図に関する研究
Author(s)	松井，寛彰
Citation	
Issue Date	2013-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/11343
Rights	
Description	Supervisor:上原隆平，情報科学研究科，修士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

修 士 論 文

複数の凸多面体を折ることができる展開図に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

松井 寛彰

2013 年 3 月

修 士 論 文

複数の凸多面体を折ることができる展開図に関する研究

指導教員　石原哉 教授

審査委員主査　石原哉 教授
審査委員　浅野哲夫 教授
審査委員　平石邦彦 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

0910058 松井 寛彰

提出年月: 2013 年 2 月

Copyright © 2013 by Hiroaki Matsui

概 要

展開図は古くから幾何学の一部として研究されている．今でも解けない問題が数多くあり，活発に研究されている分野である．展開や折りの問題において，異なる二つの直方体を折ることができる展開図が知られている．本研究では，まず二つの直方体を折ることができる展開図の効率の良い探索を行い，それを基にして，異なる三つの直方体を折ることができる展開図の発見を目指す．

目 次

第 1 章　はじめに **1**
1.1　研究の背景と目的 1
1.2　本論文の流れ 1

第 2 章　準備 **3**
2.1　展開図と直方体 3
2.2　展開図に関する定理 4
2.3　表面積が同じで形の異なる直方体 4
2.4　既存の展開図発見アルゴリズム 5
2.5　部分展開図と擬展開図 5

第 3 章　展開図全列挙アルゴリズム **6**
3.1　異なる二つの箱を折ることのできる展開図の全列挙アルゴリズム 6
3.2　展開図と直方体のデータ構造 7
3.3　部分展開図の判定 8
3.4　擬展開図の生成 9
3.4.1　一ヶ所のみ埋まっている場合 9
3.4.2　二ヶ所が埋まっている場合 (上下，左右) 10
3.4.3　二ヶ所が埋まっている場合 (上左，上右，下左，下右) 10
3.4.4　三ヶ所が埋まっている場合 10
3.4.5　四ヶ所が埋まっている場合 11
3.5　展開図の正規化 12
3.6　展開図同士の比較 12
3.6.1　展開図の圧縮 13
3.6.2　ハッシュ表 13

第 4 章　異なる二つの直方体を折ることのできる展開図 **14**
4.1　表面積 22 の直方体 ($1 \times 1 \times 5$，$1 \times 2 \times 3$) を折れる展開図 14
4.1.1　実験 14
4.1.2　結果 14
4.2　表面積 30 の直方体 ($1 \times 1 \times 7$，$1 \times 3 \times 3$) を折れる展開図 16
4.2.1　実験 16

4.2.2　結果 16

第 5 章　体積 0 の直方体を含む異なる三つの直方体を折ることのできる展開図　18

5.1　表面積 22 の直方体 $(1 \times 1 \times 5,\ 1 \times 2 \times 3,\ 0 \times 1 \times 11)$ を折れる展開図 . . . 18

第 6 章　まとめ　20

参考文献　22

第1章　はじめに

1.1　研究の背景と目的

展開図は1500年代から幾何学の一部として研究されている [2][5]．今でも解けない問題が数多くあり，活発に研究されている分野である．

Lubiw と O'Rourke が1996年に問題を提起して以来 [3]，多面体を折ることができる多角形が研究されてきた．2007年の Demaine と O'Rourke による幾何的な折りアルゴリズムに関する本では，そのような多角形に関する多くの結果が載せられている [2, 25章]．そして，それらの多角形は玩具やパズルとして応用される．例えば,「cubigami」というパズルは Miller と Knuth によって開発された．これは七つの異なるテトラキューブを折ることのできる共通の展開図である．

本研究では，複数の直方体を折ることができる展開図を研究対象とする．展開や折りの問題において，異なる二つの直方体を折ることができる展開図が知られている．展開図とは，単位正方形からなる四連結の単純多角形である．従って，展開図は単位正方形単位でしか折ることは許されず，n 個の単位正方形からなる展開図は，表面積が n の直方体を折る．

三谷・上原 [4] による計算機実験により，異なる二つの直方体を折ることができる展開図が数万示された (2008)．その結果を利用し，こうした展開図は無限に存在することが構成的に証明されている [4]．さらに，異なる二つの直方体だけでなく，異なる三つの直方体を折る展開図に関しても探索が行われた [4]．しかし当時，三つの直方体を折る展開図は発見できなかった．

このとき，三谷・上原は二つのアルゴリズムにより展開図の探索を行った．どちらも乱択アルゴリズムであり，展開図はランダムに生成される．したがって，出力される展開図には漏れがある．本研究では，まず，与えられた異なる二つの直方体に対し，これらを折ることのできる全ての展開図を列挙する全列挙アルゴリズムを考案し，展開図の探索を行う．なお，本論文の結果の一部は国際会議 [1] で発表された．

1.2　本論文の流れ

2章では準備として，言葉の定義や探索の前提となる同じ表面積の直方体の組について述べ，既存のアルゴリズムについて説明する．

3 章では異なる二つの直方体を折ることのできる展開図を全列挙する全体のアルゴリズムを示し，さらにポイントごとに掘り下げて述べる．

4 章では実際にアルゴリズムを実装し，得られた結果を述べる．

5 章では 4 章で得られた結果のうちの一つの特徴的な展開図について述べる．

6 章では全体のまとめと今後の課題について述べる．

第2章　準備

2.1　展開図と直方体

展開図とは，単位正方形からなる四連結の単純多角形である．従って，展開図は単位正方形単位でしか折ることは許されず，n 個の単位正方形からなる展開図は，表面積が n の直方体を折る．

単純な直方体の展開図でも重なりや穴ができることが知られている (図 2.1)．こうした展開図は実用上あまり望ましくない．そこで，図 2.2 の左のように内部に穴のある場合は，本研究においては展開図とはみなさないこととする．また，図 2.2 の右の展開図は，左上に一見穴があるように見えるが，これは穴ではない．展開図は四連結としているので，これは単に展開図の外部である．

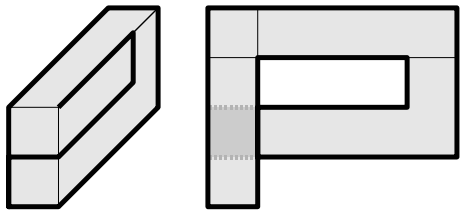

図 2.1: 重なりのある展開図

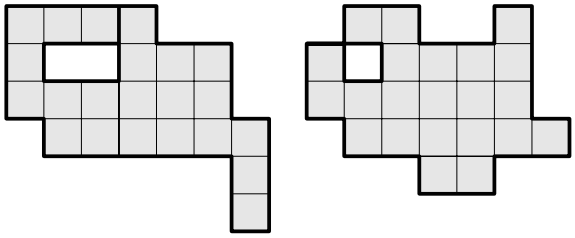

図 2.2: (左) 穴のある展開図 (右) 穴のない展開図

2.2 展開図に関する定理

ここで，展開図に関する既存の定理を一つ示しておく．

定理 [4] 切れ込みがある展開図から折れる凸多面体は，切れ込みがない展開図からも折ることができる (図 2.3)．

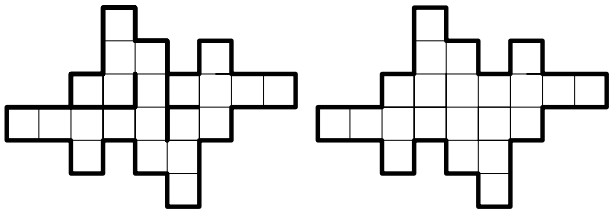

図 2.3: (左) 切れ込みのある展開図 (右) 切れ込みのない展開図

略証 もし切れ込みを使って多面体を折るなら，切れ込みの間に必ず展開図のどこか一部分が入り込む (図 2.4)．このとき，この点の周りに集まる角の総和が 360° を超えるので，これは凸でない多面体となる．

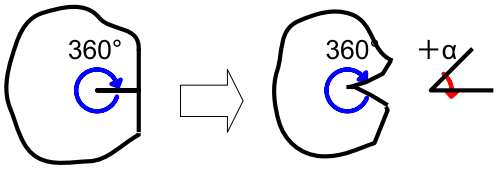

図 2.4: 切れ込みを使って多面体を折る

この定理により，切れ込みを使って別の直方体を折ることはないので，本研究では切れ込みのない展開図のみを考える．

2.3 表面積が同じで形の異なる直方体

複数の異なる直方体を折る展開図の探索を行うには，まず，表面積が同じで，辺の長さが異なる直方体の集合を考える必要がある．これを集合 $P(S) = \{(a,b,c)|(ab+bc+ac)\times 2 = S\}$ で表す (正の整数 S, a, b, c, $0 < a \leq b \leq c$)．つまり，$|P(S)| \geq 2$ のとき，各要素 (a, b, c) のサイズの直方体を折れる展開図が存在する可能性がある．

これは，例えば $0 \leq a \leq b \leq c \leq 50$ といった具体的な範囲の a, b, c について全て計算することで，簡単に求めることができる．具体的な値の一覧は表 2.1 の通りである．

表 2.1: 同じ表面積を持つ直方体同士の一覧

$$
\begin{aligned}
P(22) &= \{(1,1,5),(1,2,3)\} \\
P(30) &= \{(1,1,7),(1,3,3)\} \\
P(34) &= \{(1,1,8),(1,2,5)\} \\
P(38) &= \{(1,1,9),(1,3,4)\} \\
P(46) &= \{(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)\} \\
P(54) &= \{(1,1,13),(1,3,6),(3,3,3)\} \\
P(58) &= \{(1,1,14),(1,2,9),(1,4,5)\} \\
P(62) &= \{(1,1,15),(1,3,7),(2,3,5)\} \\
P(64) &= \{(1,2,10),(2,2,7),(2,4,4)\} \\
P(70) &= \{(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

直方体の表面積 22 では，三辺が $1 \times 1 \times 5$ の直方体と $1 \times 2 \times 3$ の直方体の二つが存在する．この表面積 22 のときが，異なる形の直方体が出現する最小の表面積である．

また，三つ以上の直方体を折る展開図を探すには，少なくとも表面積 46 以上を調べる必要があることがわかる．

2.4 既存の展開図発見アルゴリズム

三谷・上原 [4] は二つのアルゴリズムにより展開図の探索を行った．一つは，辺に沿ってランダムに切り込みを入れて直方体を展開し，多数の展開図を生成することで，異なる直方体から同じ形の展開図を見つける方法である．もう一つは，単位正方形一枚に，ランダムに一枚ずつ単位正方形を繋ぎ合わせていき，入力した二つの直方体を折れる展開図になるまで展開図を生成する方法である．それらはどちらも乱択アルゴリズムであり，展開図はランダムに生成される．従って，出力される展開図には漏れがある．

本研究では，まず，与えられた異なる二つの直方体に対し，これらを折ることのできる全ての展開図を列挙する全列挙アルゴリズムを考案し，展開図の探索を行う．

2.5 部分展開図と擬展開図

直方体の表面の，ある一部を形成し得る部分的な展開図のことを，ここでは部分展開図と呼ぶことにする．

また，部分展開図かどうかわからない多角形を擬展開図と呼ぶことにする．

第3章　展開図全列挙アルゴリズム

3.1　異なる二つの箱を折ることのできる展開図の全列挙アルゴリズム

入力：異なる二つの直方体 B_1, B_2 の三辺 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$
出力：入力した直方体 B_1, B_2 を折ることのできる全ての展開図

操作 1 面積 $s = 1$ の擬展開図 (単位正方形一枚) を考える．

操作 2 擬展開図が各直方体 B_1, B_2 において，どこか少なくとも一ヶ所で部分展開図となるかチェックする．

操作 3 チェックした擬展開図が，直方体 B_1, B_2 どちらか一方でも，部分展開図となり得ない場合，その擬展開図は捨てる．もし，各直方体 B_1, B_2 において，どこか少なくとも一ヶ所で部分展開図となるなら，その部分展開図の面積 s を 1 増やす (単位正方形を一枚つけ加える)．

このとき，面積を 1 増やすことでできる異なる形の擬展開図全てのパターンを生成する．異なる形とは，擬展開図を反転・回転しても他の擬展開図と重複しないということである．

操作 4 増やした全ての擬展開図について，操作 2・3 を繰り返す．また，面積 s を 1 増やす際，生成する擬展開図に穴を生じさせないようチェックする．

操作 5 面積 s が表面積まで達したら，擬展開図が直方体 B_1, B_2 の展開図となるかチェックをし終了する．

この最終チェックを通った展開図が，二つの直方体 B_1, B_2 を折ることができる全ての展開図である．

この一連の操作による面積の増加と部分展開図生成のイメージは図 3.1 の通りである．

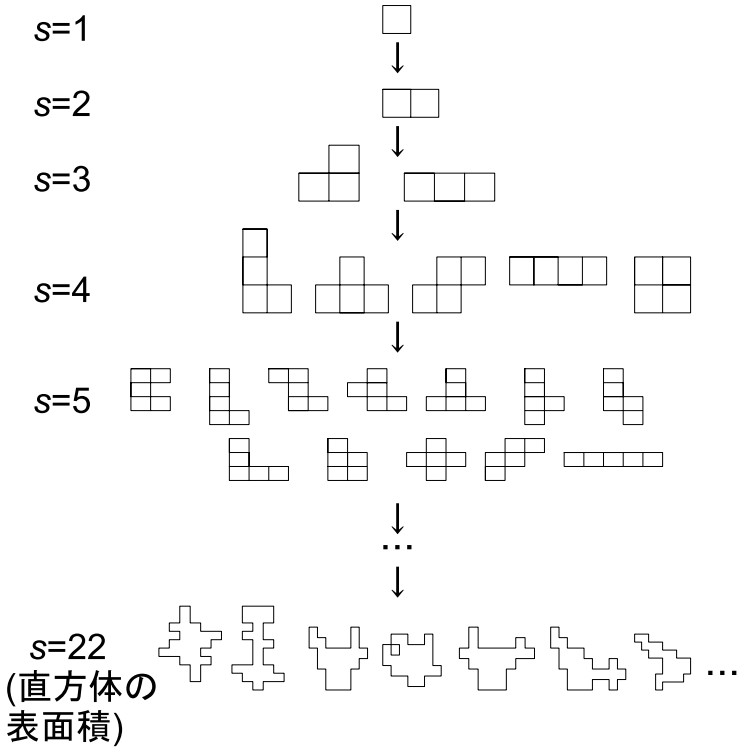

図 3.1: 面積の増加と部分展開図数の変化

3.2 展開図と直方体のデータ構造

本研究では，展開図はプログラム上で 0 と 1 の二次元配列によって表現する (図 3.2).

直方体は，全ての単位正方形に番号付けをしておき，それぞれの単位正方形で連結している単位正方形同士を互いにつなぎ合わせたリスト構造とする (図 3.3).

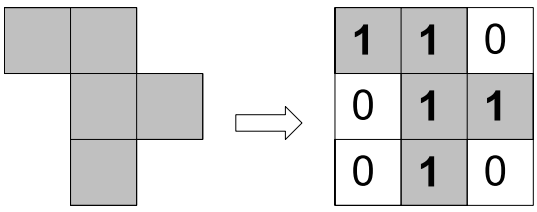

図 3.2: 二次元配列で表した展開図

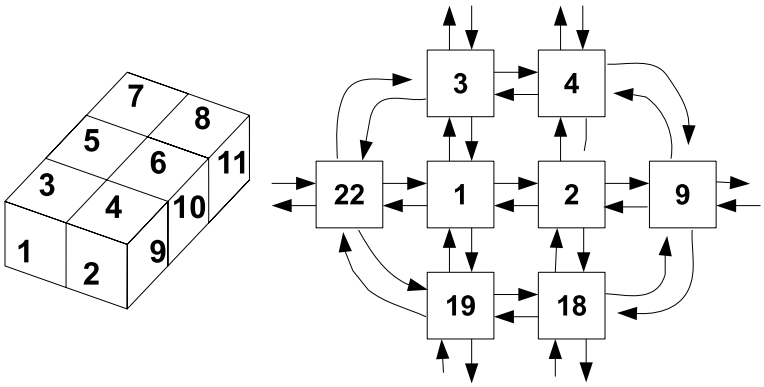

図 3.3: 単位正方形の番号付けとリスト構造

3.3 部分展開図の判定

擬展開図が部分展開図であるかどうかは，直方体に擬展開図を貼り合わせるように確認していく．擬展開図自身で重ね合ってはいけない．どこか一ヶ所でもピタリと貼り合わせることが可能な部分があれば，その擬展開図は部分展開図である．どこの部分にも貼り得ない場合，それは部分展開図ではない．

まず，擬展開図のどこか一点を決め，その点を基準に，表面積 n の直方体の 1 番から $n/2$ 番まで貼りあわせていく (図 3.4)．さらに，擬展開図を 90° 傾けた場合も同様に行う．つまり，最大で合計 n 回のチェックをする．なお，反転対称により，n 番目まで確認する必要はなく，擬展開図の向きを変えた確認も 90° のみで十分である．n 回までのチェックのうち少なくとも一回でもどこかで貼り合わせることができれば，それは部分展開図である．

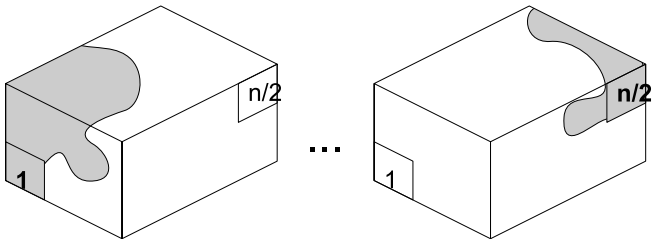

図 3.4: 擬展開図のチェック

また，図 3.5 のような回転対称である直方体については，チェックする範囲をさらに省くことができる．

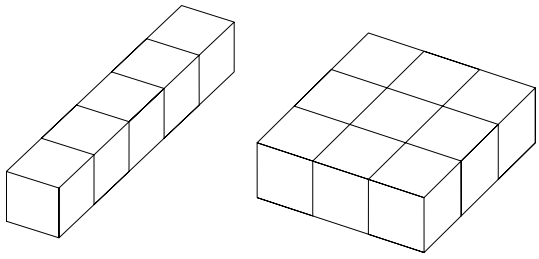

図 3.5: 回転対称の直方体

3.4 擬展開図の生成

部分展開図の周囲をなぞるようにして面積を一つ増やし，その部分展開図から考えられる全ての擬展開図を生成する (図 3.6)．このとき，展開図の内部に穴が生じないよう注意しなければならない．

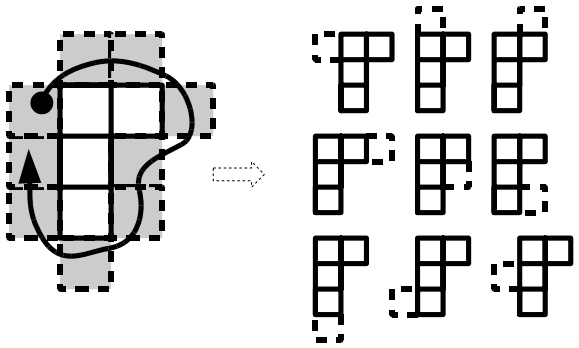

図 3.6: 擬展開図の生成

穴のない擬展開図を生成するために，部分展開図に単位正方形を追加することで穴ができるかどうかの判定をする必要がある．面積を追加する予定の単位正方形に着目し，その周囲八つの状態によって穴ができるかどうかが決まる．まず，追加する予定の単位正方形の位置に連結する上下左右の四つの状態を見て場合わけを考える．さらに，場合によって他の四つ角のチェックも必要である．

3.4.1 一ヶ所のみ埋まっている場合

面積を追加する予定の単位正方形の上下左右のうち，一ヶ所のみ埋まり，残り三ヶ所が空の場合，考えられるパターンは一つである．その他の状態に寄らず穴はできない (図 3.7)．

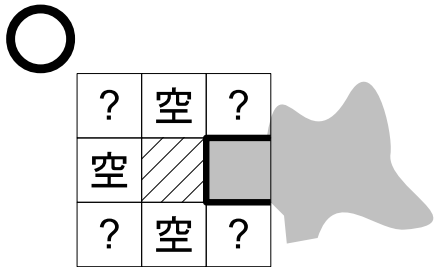

図 3.7: 一ヶ所しか埋まっていない場合

3.4.2 二ヶ所が埋まっている場合 (上下，左右)

上下，または左右の二ヶ所が埋まり，残り二ヶ所が空の場合，その他の状態に寄らず必ず穴ができる (図 3.8).

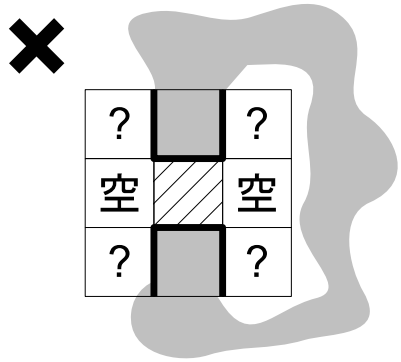

図 3.8: 二ヶ所が埋まっている場合 (上下，左右)

3.4.3 二ヶ所が埋まっている場合 (上左，上右，下左，下右)

上左，上右，下左，または下右の二ヶ所が埋まり，残り二ヶ所が空の場合，埋まっている単位正方形同士の傍にある角の単位正方形の状態により穴ができるかが決まる.

角が埋まっていると穴はできないが，角が空だと穴ができてしまう (図 3.9).

3.4.4 三ヶ所が埋まっている場合

上下左右のうち三ヶ所が埋まってる場合も，3.4.3 項同様に，埋まっている単位正方形同士の傍にある角の状態で決まる (図 3.10).

角二つが埋まっていると穴はできないが，角が一つでも空だと穴ができてしまう.

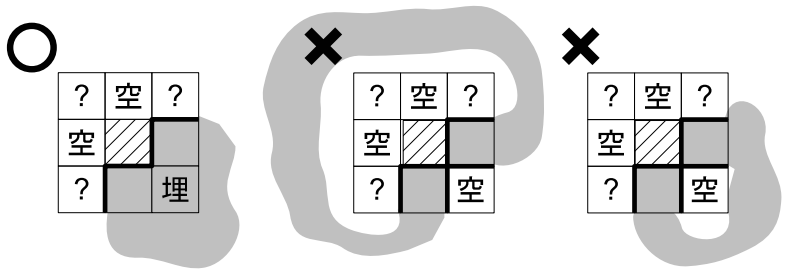

図 3.9: 二ヶ所が埋まっている場合 (上左，上右，下左，下右)

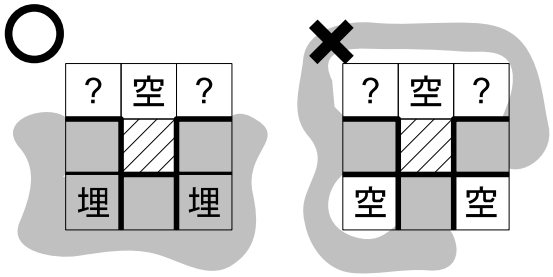

図 3.10: 三ヶ所が埋まっている場合

3.4.5 四ヶ所が埋まっている場合

四ヶ所全てが埋まっている場合，角が一ヶ所のみ空であれば穴はできない．角が二ヶ所以上空であると穴が生じる (図 3.11).

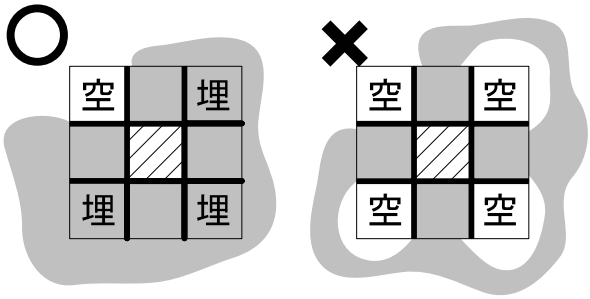

図 3.11: 四ヶ所が埋まっている場合

3.5 展開図の正規化

実行過程で，本質的に同じ形をした部分展開図が何度も生成される．例えば図 3.12 にあるものは全て同じものである．これらの管理のため，展開図の正規化を行う必要がある．

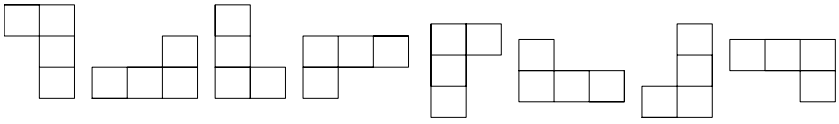

図 3.12: 同じ形をした多角形

正規化のルールは以下の通りである．

ルール 1 展開図の縦と横の大きさが違う場合は縦長を正規形とする．

ルール 2 本質的に同じ形をしたある展開図のグループにおいて (展開図の幅が縦横同じ場合は全部で八パターン，縦長は四パターン)，図 3.13 のように 0 と 1 で表現された展開図を左上から右下までを読み込み一本の大きな二進数とみなし，一番大きい値のものを正規形とする．

図 3.13 のグループでは右上の形が一番大きい値であるので，これが正規形である．

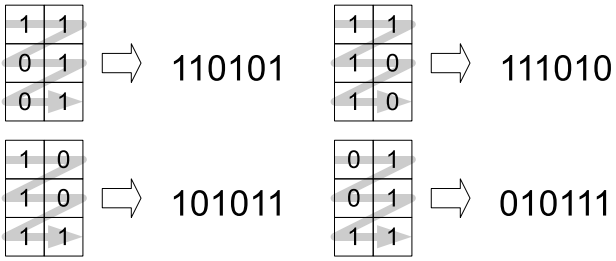

図 3.13: 同じ形をした展開図のグループと正規形

3.6 展開図同士の比較

生成される大量の部分展開図は圧縮し，ハッシュ表にて管理し，検索を行う．

3.6.1 展開図の圧縮

二次元配列のままでは無駄が多くデータ量も膨大になるので，まず，正規化された展開図を圧縮する．配列の各行を一つの二進数とみなし十進数へ変換し，一次元配列でこれを保持する (図 3.14)．また，展開図の縦と横の大きさを別途格納しておく．

この部分展開図から擬展開図を生成するときは，逆の操作をして圧縮された展開図を解凍する．

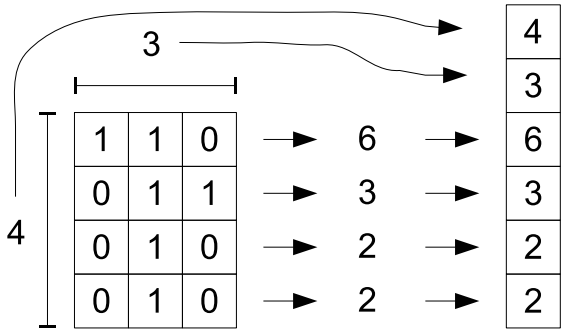

図 3.14: 展開図の圧縮

3.6.2 ハッシュ表

圧縮した展開図をハッシュ表に登録し，管理する (図 3.15)．

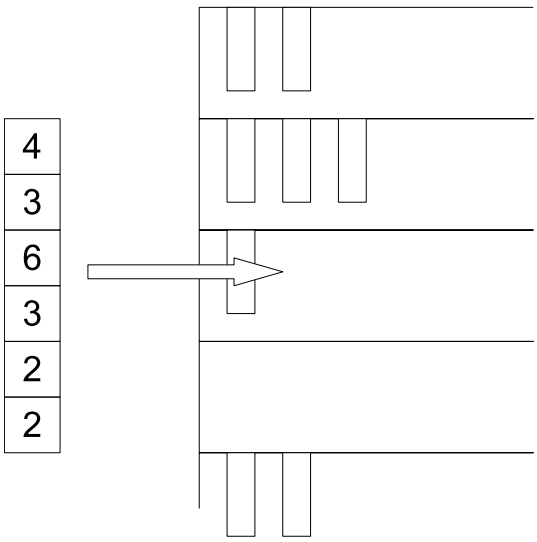

図 3.15: ハッシュ表に登録

第4章　異なる二つの直方体を折ることのできる展開図

4.1　表面積22の直方体 $(1\times1\times5$，$1\times2\times3)$ を折れる展開図

4.1.1　実験

展開図全列挙アルゴリズムをC言語プログラミングにより実装し，表面積22の直方体 $(1\times1\times5$，$1\times2\times3)$ の場合に関して探索を行った (図4.1)．実行環境は一般的なデスクトップPC(DELL vostro 200) である．

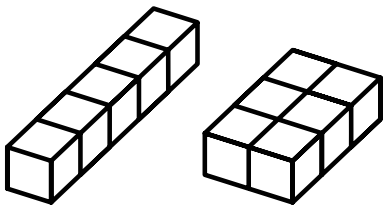

図 4.1: 表面積22の直方体 $(1\times1\times5$，$1\times2\times3)$

4.1.2　結果

結果を表4.1にまとめ，グラフ化したものが図4.2である．表は，面積 s の増加と部分展開図数の変化を示している．

これらの結果を出力するのにおよそ10時間程度の時間を要した．

面積 $s=9$ までは，生成される全ての擬展開図が部分展開図となる．グラフを見ると $s=15$ 付近から一気に増加することがわかる．$s=17$ の部分展開図数5182945でピーク値を取り，その後，急激に減少していく．

最終的に残る展開図数は2263となり，これが $1\times1\times5$ と $1\times2\times3$ の二つの直方体を折ることのできる全ての展開図である [1]．

表 4.1: 表面積 22 の直方体の各面積 s における部分展開図数の推移

面積 s	部分展開図数	面積 s	部分展開図数
1	1	12	57439
2	1	13	193383
3	2	14	604269
4	5	15	1632811
5	12	16	3469043
6	35	17	5182945
7	108	18	4917908
8	368	19	2776413
9	1283	20	882062
10	4600	21	133037
11	16388	22	2263

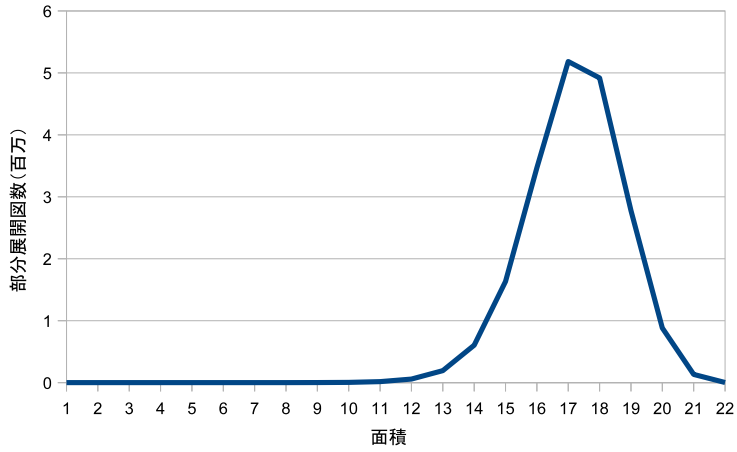

図 4.2: 表面積 22 の直方体の各面積 s における部分展開図数の推移

4.2　表面積 30 の直方体 $(1 \times 1 \times 7,\ 1 \times 3 \times 3)$ を折れる展開図

4.2.1　実験

表面積 30 の直方体 $(1 \times 1 \times 7,\ 1 \times 3 \times 3)$ の場合に関して探索を行った (図 4.3).
今回の実行環境はスーパーコンピュータ (SGI Altix 4700) である.

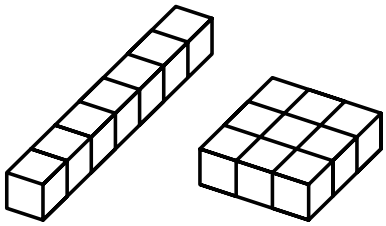

図 4.3: 表面積 30 の直方体 $(1 \times 1 \times 7,\ 1 \times 3 \times 3)$

4.2.2　結果

結果を表 4.2 にまとめ，グラフ化したものが図 4.4 である．面積 $s = 9$ までは表 4.1 と同じなので省略する．残念ながら展開図の全列挙には至らなかった.
面積 $s = 22$ における約八億の部分展開図を出力するのに一ヶ月以上かかっている.

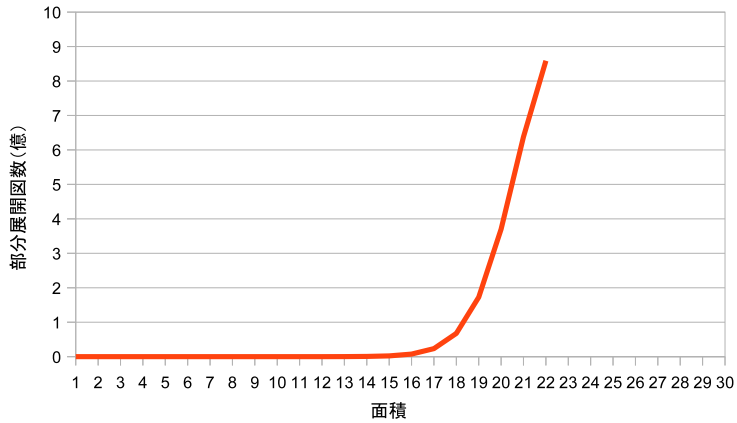

図 4.4: 表面積 30 の直方体の各面積 s における部分展開図数の推移

4.1 節の表面積 22 の結果の図 4.2 のグラフと比較すると，ピーク値が面積 $s = 23$ 付近に来るであろうことが予想される.

表 4.2: 表面積 30 の直方体の各面積 s における部分展開図数の推移

面積 s	部分展開図数
9	省略
10	4601
11	16405
12	57879
13	200209
14	682639
15	2288392
16	7486799
17	23400443
18	67607975
19	172552180
20	369968536
21	637877374
22	858803412
23	未探索

第5章　体積0の直方体を含む異なる三つの直方体を折ることのできる展開図

5.1　表面積22の直方体$(1\times1\times5,\ 1\times2\times3,\ 0\times1\times11)$を折れる展開図

4.1節の実験結果である$1\times1\times5$と$1\times2\times3$の直方体を折れる2263の展開図の中に，一つ興味深い展開図が存在する (図5.1).

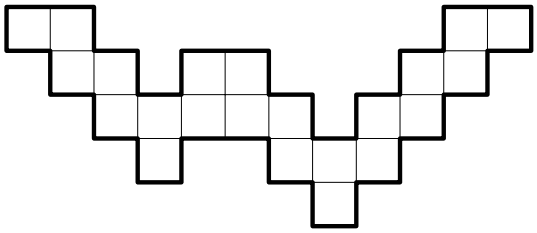

図 5.1: 表面積22の直方体を折れる展開図

図5.2 a) のように折ると，$1\times1\times5$と$1\times2\times3$の二つの直方体になる．さらに，図5.2 b) のように両端を半分に閉じることで，$0\times1\times11$の体積0の直方体を折ることができる[1]．いわゆる二重被覆長方形である.

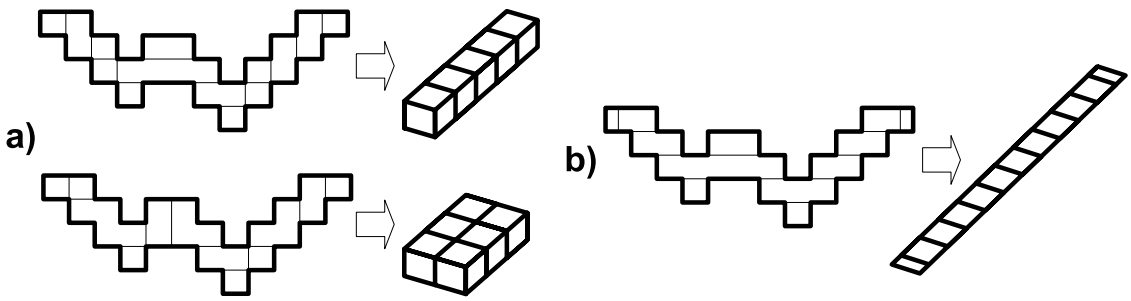

図 5.2: 体積0を含む三つの直方体を折れる展開図

体積0の直方体を認めることで，三つの直方体を折ることができる展開図を発見することができた．これは2263個の展開図の中で一つだけであった．

両端を単位正方形の半分で折っている点について異論があるかもしれないが，その点は単位正方形を四分割し，表面積四倍のものとみなすことで解決する．

また，この展開図は同じものを敷き詰めることで，平面を隙間無く埋めることができるタイリングの性質を持つ (図5.3)[1].

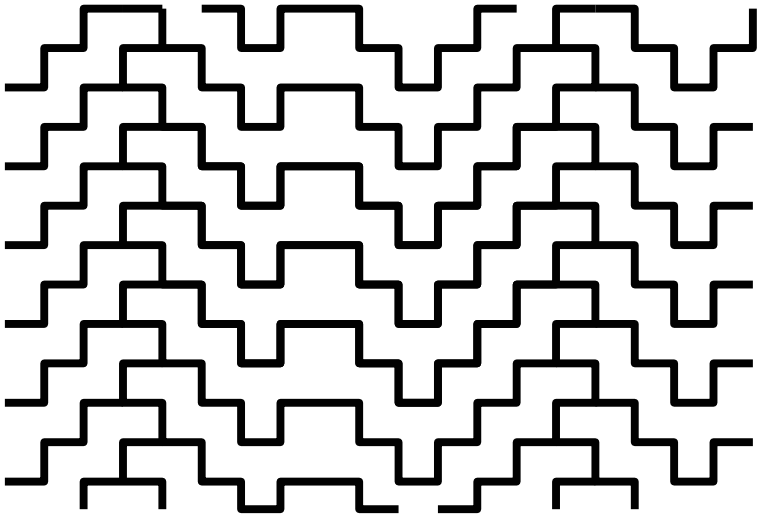

図 5.3: タイリング

第6章　まとめ

最小表面積が 22 である $1 \times 1 \times 5$ と $1 \times 2 \times 3$ の二つの直方体に関して，展開図の全列挙を行うことができた．それらを折ることのできる展開図の総数は 2263 個である [1].

そしてその中に，一つ興味深い展開図が存在した．それら二つの直方体に加え，$0 \times 1 \times 11$ の体積 0 の直方体を折ることができる展開図である [1]．つまり，体積 0 の直方体を認めることで，異なる三つの直方体を折ることができた．

本研究の後，2012 年に白川・上原によって体積 0 でない一般的な三つの直方体を折れる展開図が示されている [6]．現在見つかっている三つの直方体を折れる展開図の最小表面積は 532 である．

表 2.1 の表面積 46 との乖離が大きく，三つの直方体を折れる展開図の最小表面積が一体いくつであるかは未解決である．特に，表面積 46 の $1 \times 1 \times 11$，$1 \times 2 \times 7$，そして $1 \times 3 \times 5$ の三つの直方体が折れるかどうか，今後の課題である．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，厚くご指導を賜りました上原隆平教授に深く感謝致します。
また、研究生活において多くの助言や知識を頂いた上原研究室・浅野研究室の皆様に感謝致します。

参考文献

[1] Z. Abel, E. Demaine, M. Demaine, H. Matsui, G. Rote, and R. Uehara. Common Development of Several Different Orthogonal Boxes. In *23rd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2011)*, pp. 77–82, 2011.

[2] E. D. Demaine and J. O'Rourke, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. *Cambridge University Press*, 2007.（邦訳: 上原隆平訳『幾何的な折りアルゴリズム』近代科学社, 2009 年）

[3] A. Lubiw and J. O'Rourke. When Can a Polygon Fold to a Polytope? Technical Report Technical Report 048, Department of Computer Science, Smith College, 1996.

[4] J. Mitani and R. Uehara, Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes, *Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 39–42, 2008.

[5] J. O'Rouke, How To Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedora. *Cambridge University Press*, 2011. (邦訳: 上原隆平訳『折り紙のすうり』近代科学社，2012 年)

[6] Toshihiro Shirakawa and Ryuhei Uehara, Common Developments of Three Different Othogonal Boxes, *The 24th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2012)*, pp. 19–23, 2012.