JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	複数の凸多面体を折ることができる展開図に関する研究
Author(s)	松井，寛彰
Citation	
Issue Date	2013-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/11343
Rights	
Description	Supervisor:上原隆平，情報科学研究科，修士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

複数の凸多面体を折ることができる展開図に関する研究

松井 寛彰 (0910058)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2013 年 2 月 6 日

キーワード: 展開図, 折り, 列挙，多面体, 多角形.

展開図は 1500 年代から幾何学の一部として研究されている．今でも解けない問題が数多くあり，活発に研究されている分野である．Lubiw と O'Rourke が 1996 年に問題を提起して以来，多面体を折ることができる多角形が研究されてきた．2007 年の Demaine と O'Rourke による幾何的な折りアルゴリズムに関する本では，そのような多角形に関する多くの結果が載せられている．そして，それらの多角形は玩具やパズルとして応用される．例えば,「cubigami」というパズルは Miller と Knuth によって開発された．これは七つの異なるテトラキューブを折ることのできる共通の展開図である．

本研究では，複数の直方体を折ることができる展開図を研究対象とする．展開や折りの問題において，異なる二つの直方体を折ることができる展開図が知られている．展開図とは，単位正方形からなる四連結の単純多角形である．従って，展開図は単位正方形単位でしか折ることは許されず，n 個の単位正方形からなる展開図は，表面積が n の直方体を折る．単純な直方体の展開図には重なりや穴ができることが知られている．こうした展開図は実用上あまり望ましくない．そこで，内部に穴のある場合は本研究においては展開図とはみなさないこととする．また，展開図内部に切れ込みがあっても，これを使って別の直方体を折ることはできない．従って，本研究では切れ込みのない展開図のみを考える．

複数の異なる直方体を折る展開図の探索を行うには，まず，表面積が同じで，辺の長さが異なる直方体の集合を考える必要がある．具体的には $2(ab+bc+ca) = 2(a'b'+b'c'+c'a')$ を満たす a, b, c, a', b', c' の組み合わせを調べれば良い．そのような組み合わせだけが，$a \times b \times c$ と $a' \times b' \times c'$ の二つの直方体の展開図になり得る．これはコンピュータを使って，$1 \leq a, b, c, a', b', c' \leq 50$ くらいならば力技ですぐに求めることができる．表面積 22 の直方体では，三辺が $1 \times 1 \times 5$ の直方体と $1 \times 2 \times 3$ の直方体の二つが存在する．この表面積 22 のときが，異なる直方体の出現する最小の表面積である．また，三つ以上の直方体を折る展開図を探すには，少なくとも表面積 46 以上を調べる必要がある．

三谷・上原による計算機実験により，異なる二つの直方体を折ることができる展開図が数万示された (2008)．その結果を利用し，こうした展開図は無限に存在することが構成的

Copyright © 2013 by Hiroaki Matsui

に証明されている．さらに，異なる二つの直方体だけでなく，異なる三つの直方体を折る展開図に関しても探索が行われた．しかし当時，三つの直方体を折る展開図は発見できなかった．

このとき，三谷・上原は二つのアルゴリズムにより展開図の探索を行った．一つは，辺に沿ってランダムに切り込みを入れて直方体を展開し，多数の展開図を生成することで，異なる直方体から同じ形の展開図を見つける方法である．もう一つは，一枚の単位正方形に，ランダムに一枚ずつ単位正方形を繋ぎ合わせていき，入力した二つの直方体を折れる展開図になるまで展開図を生成する方法である．それらはどちらも乱択アルゴリズムであり，展開図はランダムに生成される．したがって，出力される展開図には漏れがある．

本研究では，まず，与えられた異なる二つの直方体に対し，これらを折ることのできる全ての展開図を列挙する全列挙アルゴリズムを考案し，展開図の探索を行う．考案した全列挙アルゴリズムは，まず，単位正方形一枚からスタートする．そして，考えられる全ての辺に単位正方形を繋いでいき，部分的な展開図を大量に生成するものである．最終的に，直方体の表面積の大きさまで単位正方形を増やす．

この全列挙アルゴリズムを実装し，実行した．結果，最小表面積が 22 である $1\times1\times5$ と $1\times2\times3$ の二つの直方体に関して，それらを折ることのできる展開図の全列挙を行うことができた．$1\times1\times5$ と $1\times2\times3$ の直方体を折ることのできる展開図の総数は 2263 個である．そしてその中に，一つ興味深い展開図が存在した．それら二つの直方体に加え，$0\times1\times11$ の体積 0 の直方体を折ることができる展開図である．いわゆる二重被覆長方形である．つまり，体積 0 の直方体を認めることで，異なる三つの直方体を折ることができる．また，この展開図は同じものを敷き詰めることで，平面を隙間無く埋めることができるタイリングの性質を持っている．

本研究では，残念ながら三つの直方体を折れる展開図の探索まで至ることができなかった．本研究の後，2012 年に白川・上原によって体積 0 でない一般的な三つの直方体を折れる展開図が示されている．現在見つかっている三つの直方体を折れる展開図の最小表面積は 532 である．三つの直方体を折れる展開図の最小表面積が一体いくつであるかは未解決である．特に，表面積 46 の $1\times1\times11$，$1\times2\times7$，そして $1\times3\times5$ の三つの直方体が折れるかどうか，今後の課題である．