Title	スプライン型リアプノフ関数を用いたゲインスケジューリング制御系の設計法
Author(s)	久米, 彩登
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1138
Rights	
Description	Supervisor:示村 悦二郎, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

スプライン型リアプノフ関数を用いたゲインスケジューリング制御系の設計法

指導教官　示村 悦二郎 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

610041 久米 彩登

1998 年 2 月 13 日

記号表

記号	意味
R	実数の集合
R_+	0 以上の実数の集合
R^n	n 次元実数空間
$R^{m\times n}$	実数を要素とする $m \times n$ 行列の集合
$Sym(n)$	$\mathrm{R}^{n\times n}$ の対称行列の集合
I_n	$n \times n$ の単位行列
A^{-1}	行列 A の逆行列
A^T	行列 A の転置
A^{-T}	行列 A^T の逆行列
$A > B\ (A \geq B)$	行列 $A - B$ が正定 (半正定)
$\|x\|$	ベクトル x の Euclid ノルム ($= \sqrt{x^T x}$)
$\\|A\\|$	行列 A の最大特異値ノルム
$\\|w\\|_{L_2}$	信号 $w(t)$ の L_2 ノルム $:= \{\int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt\}^{1/2}$
$\begin{bmatrix} (A)+(*)+B & * \\ C & D \end{bmatrix}$	対称行列の表記で $\begin{bmatrix} A+A^T+B & C^T \\ C & D \end{bmatrix}$ を表す.

目 次

第 1 章

序論

近年，制御系に要求される制御性能はますます高まる傾向にある．この一つの例を，1950年代から始まった航空機の高性能化に見ることができる．航空機の高性能化によって，広い範囲の速度や高度，姿勢で飛行することが要求されるようになる．それによって，機体の動特性は状況により著しく変化し，従来の固定ゲインを用いるフィードバック制御では所望の性能が得られなかったり，場合によっては安定性を失うという問題が生じる．この問題に対する一つの解決法として，航空機の飛行状態に応じて，コントローラのゲインを調整するという方法がとられている [16]．このように，オンラインで観測される制御対象の特性変動に応じて，制御器の特性を変化させる制御をゲインスケジューリング制御と呼ぶ．上の航空機のように，広範な稼働条件の下で安定性や制御性能を高度なレベルで要求される場合には，ゲインスケジューリング制御系の安定性や制御性能を理論的に検証することが望まれる．

こういった背景から，ゲインスケジューリングが制御理論の立場から研究されている．ゲインスケジューリング制御系の数式表現として，状態空間表現の各係数行列が制御対象の特性変化を示すスケジューリングパラメータに依存した LinearParameter-Varying(LPV) システムが用いられている [2, 7, 9]．制御対象を LPV システムとして表現すると，これまでの線形制御理論の豊富な結果を用いて制御系の解析や設計を行えるという大きな利点がある．

これまでに提案されている LPV 表現に基づくゲインスケジューリング制御系の設計法として，パラメータ凍結法がある [9]．この方法は，スケジューリングパラメータをいくつかの値に固定したときに得られる各線形時不変システムに対して，安定性と要求される

制御性能を保証する制御器をそれぞれ構成し，オンラインで観測されるパラメータに応じて 制御器をスケジューリングする方法である．しかし，スケジューリングパラメータが速く変化する場合には安定性を保証できなくなるという問題を含んでいる．一方，二次安定化の手法を用いて，パラメータが任意に速く変化する場合にも安定性を保証する方法が提案されている [2]．しかし，この方法ではスケジューリングパラメータが緩やかにしか変化しない場合には，制御が保守的になる．そこで，これらの問題を解決する方法として，パラメータに依存するリアプノフ関数を用いる方法が提案されている [1, 3, 7]．この方法では，パラメータの変化速度を考慮した制御系の設計が可能であり，パラメータ凍結法と違って安定性や性能が保証でき，二次安定化に基づく方法よりも保守性が軽減されている．

このパラメータに依存したリアプノフ関数を用いて，制御系の内部安定性と設計仕様である L_2 ゲイン性能を満たすコントローラの存在条件を，有効な数値計算アルゴリズムを有する線形行列不等式 (Linear Matrix Inequalities:LMI) で記述するアプローチが試みられている [3]．このアプローチでは，コントローラの存在条件をスケジューリングパラメータに依存した LMI 条件で与えている．ここで，連続パラメータに依存した LMI 条件の解を求める必要が生じるが，その解はパラメータを固定する毎に得られる無限個の LMI 条件を満たさなければならない．しかし，実際に無限個の LMI 条件を計算機で判定することは不可能である．この問題に対して，無限個の LMI 条件を解くのではなく，新たに有限個の LMI 条件を構成し，その解を求めれば元の無限個の LMI 条件を満たすのに十分であることが示されている [4, 5, 6]．これらの研究では，新たに構成する有限個の LMI 条件は，スケジューリングパラメータに依存した LMI 条件に対する十分性は満たすが必要性は証明されていない．そのため，パラメータ依存 LMI 条件の解が存在するとしても，必ずしも解を得られないという問題点が生ずる．そこで，保守性の小さな解析・設計をするために，パラメータに依存した LMI 条件に対して必要十分となる LMI 条件を構成することは重要である．

本論文では，パラメータに依存した LMI 条件と等価な LMI 条件の構成法を提案する．本論文で新たに提案する方法は，次のようなものである．まず，パラメータ依存 LMI 条件に対して，解の形を区分的に連続なスプライン型の関数とし，元の LMI 条件の十分条件となる有限個の LMI 条件を構成する．そして，スプライン関数の分割区間を十分小さくすれば，新たに提案する有限個の LMI 条件が元の LMI 条件の必要条件となることを証

明する．

新たに提案するこの手法を，まず，LPV システムの安定性，および，L_2 ゲイン性能を評価するパラメータ依存 LMI 条件に対して適用する．次に，その結果を状態フィードバックによるゲインスケジューリング制御系の安定性，および，L_2 ゲイン性能を評価するパラメータ依存 LMI 条件に対して拡張する．このとき，コントローラのゲインは，新たに構成する有限個の LMI 条件の解から得られるスプライン関数を用いて与えられる．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 章で準備を行う．第 3 章で，LPV システムの安定性および L_2 ゲイン性能を評価するパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成法を提案する．提案法を用いて，数値例で提案法の有効性を確認する．第 4 章では，第 3 章の有限個の LMI 条件の構成法を，安定性および L_2 ゲイン性能を保証するコントローラの設計法に拡張する．

第 2 章

準備

この章では，次章以降の議論に必要となる事柄の準備を行う．一般に非線形である動的システムの安定性の定義と性質を述べる．

2.1 動的システムの安定性

ここでは，一般に非線形である動的システムの安定性の定義と性質を述べる．

次のシステムを考える．

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.1}$$

ただし，$f : R^n \times R_+$は 局所的リプシッツ条件を満足し，t について区分的に連続であるとする．

先に安定性を定義する際に用いる言葉や関数の定義を述べる．

定義 2.1 [14]

原点 $x = 0$ が平衡点であるとは,

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.2}$$

が成り立つことをいう.

定義 2.2 [14]

システム (3.1) の平衡点 $x = 0$ が指数安定であるとは，次の条件：

$$|x(t)| \leq ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall |x(t_0)| < c \tag{2.3}$$

を満たす $k>0$, $\alpha>0$ および, t_0 に依存する 正の定数 c が存在することをいう.

定理 2.1 [14]

$x=0$ をシステム (3.1) の平衡点であると仮定し, 領域 D を $D=\{x\in R^n \mid |x|<r\}$ とする. また, $V:D\times R^n\to R_+$ は, 任意の $t\geq 0$ と任意の $x\in D$ で,

$$\gamma_1(|x|)\leq V(x,t)\leq \gamma_2(|x|) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}V(x,t)+\leq -\gamma_3(|x|) \tag{2.5}$$

を満たすような連続微分可能な関数とする. このとき, $[0,\ r)$ 上で$\gamma_i(\rho)=k_i\rho^\alpha$, $k_i>0$, $\alpha>0$, $i=1,2,3$ であれば, 平衡点 $x=0$ が指数安定である. ∎

第 3 章

有限個の LMI 条件を用いた LPV システムの安定性と L_2 ゲイン性能の評価

3.1 緒言

この章では，パラメータ依存の LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成法を提案する．扱うパラメータ依存 LMI 条件は，LPV システムの安定性および L_2 ゲイン性能の評価を与える LMI[3, 7] である．その際，ある区分的多項式関数を用いて，有限個の LMI 条件により LPV システムの安定性および L_2 ゲイン性能を評価する方法を提案する．3.4節で数値例をもとに提案した手法の考察を行う．

3.2 LPV システムの安定性の評価

3.2.1 節で，LPV システムの安定性を関する従来の研究結果を紹介する．3.2.2 節では，3.2.1 節の定理のパラメータに依存した LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成法を示す.

3.2.1 LPV システムの安定性

以下で与えられる LPV システムを考える．

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) \tag{3.1}$$

ただし，変数$\theta(t) \in R$ はスケジューリングパラメータとし，

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \\ \dot{\theta}(t) &\in \Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \end{aligned}$$

を満たすと仮定する．また，整数 $N_G \geq 0$ に対して，Θ の分割 $D_G = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N_G+1}\}, (\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_G+1} = \overline{\theta})$ を定義する．このとき，$A(\theta) \in R^{n\times n}$は θ の連続関数で，次のスプライン関数で与えられるとする．

$$A(\theta) = A_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i), \quad \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N_G \tag{3.2}$$

次に，システム (3.1) の指数安定性に関する定理を以下に記す．

定理 3.1 [7]

任意の $(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega$ に対して，次の線形行列不等式 (LMI):

$$\underline{\alpha} I \leq P(\theta) \leq \overline{\alpha} I, \tag{3.3}$$

$$\underline{\beta} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) \leq \overline{\beta} I \tag{3.4}$$

を満たす 対称な行列関数 $P(\theta)$ および，正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\beta}$ が存在するとき，システム (3.1) は $x = 0$ で 指数安定である． ∎

略証：θ 依存のリアプノフ行列 $P(\theta)$ を用いる．定理 2.1より，システム (3.1) に対して，$V > 0$ かつ，$\dot{V} < 0$ を満たすリアプノフ関数 $V = x^T P(\theta) x$ が存在すれば指数安定である．正の定数$\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\beta}$ が存在して LMI(3.3), (3.4) を満たすとき，V がリアプノフ関数となることは明らかである． (証明終り)

3.2.2 有限個の LMI 条件の構成法

ここでは，定理 3.1の LMI 条件に対して，必要十分条件となる有限個の LMI 条件を構成する方法を示す.

結果を示す前に，定理 3.1の LMI 条件の解をどのような形の関数で求めているか述べておく．まず，整数 $N_P \geq N_G \geq 0$ に対して，分割 $D_P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N_P+1}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 <$

$\cdots < \theta_{N_P+1} = \overline{\theta})$ を分割 D_G の細分となるようにとる．また，一次のスプライン関数

$$P_S(\theta) = \begin{cases} P_0, & \theta < \underline{\theta} \\ P_k + \frac{\theta-\theta_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}(P_{k+1} - P_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ P_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases}$$

を定義する．このとき，定理 3.1の LMI 条件の解は，$P_S(\theta)$ を平滑化した関数：

$$P(\theta) = \frac{1}{l} \int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} P_S(h) dh$$

として近似した．ただし，積分区間 $[\theta - \frac{l}{2}, \theta + \frac{l}{2}]$ には高々1 つの θ_k しか含まれないように 十分 小さな $l > 0$ を取る．

以下に，閉区間 Θ の分割幅を十分小さくとれば，新たに構成する有限個の LMI 条件が，定理 3.1の LMI 条件の必要十分条件となることを示す．

定理 3.2 整数 $N_G \geq 0$ と (3.2) 式の $A(\theta) \in R^{n \times n}$ が与えられるとする．ただし，変数 $\theta(t)$ については

$$(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Omega$$
$$\Theta := [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \subset R$$
$$\Omega := [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \subset R$$

を満たすものとする．このとき，次の (I)，(II) は等価である．

(I) 次のような $P(\theta)$ と正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$, $\underline{\beta}, \overline{\beta} > 0$ が存在する．

$$\begin{cases} P(\theta) & : \quad \theta \in \Theta \to Sym(n), \text{一階連続微分可能} \\ \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} & : \quad \text{一様連続} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\underline{\alpha} I \leq P(\theta) \leq \overline{\alpha} I, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{3.6}$$

$$\underline{\beta} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \leq \overline{\beta} I, \quad \forall (\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{3.7}$$

(II) ある整数 $N_P \geq N_G \geq 0$ と D_G の細分となるある分割 $D_P = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N_P}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_P} < \theta_{N_P+1} = \bar{\theta}$) と正の定数 $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b}, \underline{c}, \bar{c} > 0$，及び $P_0, P_1, \ldots, P_{N_P}, P_{N_P+1} \in Sym(n)$ が存在し，次の条件を満足する。

$$\underline{a}I \leq P_k \leq \bar{a}I, \quad k = 0, 1, \ldots, N_P + 1 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \underline{b}I \leq -P_k A(\theta_k) - A^T(\theta_k)P_k - \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \leq \bar{b}I, \\ k = 0, 1, \ldots, N_P, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \underline{b}I \leq -P_k A(\theta_k) - A^T(\theta_k)P_k - \omega \frac{P_k - P_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} \leq \bar{b}I, \\ k = 1, \ldots, N_P + 1, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \underline{c}I \leq -\{P_k A(\theta_k) + \frac{1}{2}(P_{k+1} - P_k)A^T(\theta_k) + \frac{1}{2}P_k(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k))\} \\ -\{\text{ 転置 }\} - \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \leq \bar{c}I, \quad k = 0, 1, \ldots, N_P, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \end{aligned} \tag{3.11}$$

(II) が成り立つとき，(I) の解 $P(\theta)$ は

$$P(\theta) = \frac{1}{l} \int_{\theta - \frac{l}{2}}^{\theta + \frac{l}{2}} P_S(h) dh$$

で与えられる．ただし，$P_S(\theta)$ は

$$P_S(\theta) = \begin{cases} P_0, & \theta < \underline{\theta} \\ P_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}(P_{k+1} - P_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ P_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases}$$

であり，l は十分小さな正数である． ∎

証明：[(I)→(II)]

今、(I) が成り立つと仮定する．整数 $N_P \geq 0$ に対して，D_G の細分を $D_P = \{\theta_0^{(D_P)}, \theta_1^{(D_P)}, \ldots, \theta_{N_P+1}^{(D_P)}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0^{(D_P)} < \theta_1^{(D_P)} < \cdots < \theta_{N_P}^{(D_P)} < \theta_{N_P+1}^{(D_P)} = \bar{\theta}$) とし，この分割 D_P に対して，

$$P_k^{(D_P)} := P(\theta_k^{(D_P)}), \quad k = 0, 1, \ldots, N_P + 1$$

と置く．(3.6) 式より，

$$\underline{a} := \underline{\alpha}, \quad \overline{a} := \overline{\alpha}$$

と置けば，明らかに

$$\underline{a}I \leq P_k^{(D_P)} \leq \overline{a}I, \tag{3.12}$$

が $k = 0, 1, \ldots, N_P + 1$ について成り立つ．

次に，$W^{(D_P)} = \max_k \{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}\}(> 0)$ が十分小さければ，任意の $\overline{\omega}$ に対して，$P(\theta)$, $\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta}$ の一様連続性から，

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}} \right\| &= \left\| \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{P(\theta_{k+1}^{(D_P)}) - P(\theta_k^{(D_P)})}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}} \right\| \\ &< \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{P_k^{(D_P)} - P_{k-1}^{(D_P)}}{\theta_k^{(D_P)} - \theta_{k-1}^{(D_P)}} \right\| &= \left\| \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{P(\theta_k^{(D_P)}) - P(\theta_{k-1}^{(D_P)})}{\theta_k^{(D_P)} - \theta_{k-1}^{(D_P)}} \right\| \\ &< \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

とできる．ここで，対称行列 X, Y について

$$\|X - Y\| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad X - \varepsilon I \leq Y \leq X + \varepsilon I$$

であるから，(3.13), (3.14) 式より

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}} \leq \frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}} \leq \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) + \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N_P$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}} \leq \frac{P_k^{(D_P)} - P_{k-1}^{(D_P)}}{\theta_k^{(D_P)} - \theta_{k-1}^{(D_P)}} \leq \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_k^{(D_P)}) + \frac{\underline{\beta}}{2\overline{\omega}}, \quad k = 1, 2 \ldots, N_P + 1$$

となる．これと (3.7) 式より，

$$\underline{b} = \frac{\underline{\beta}}{2}, \quad \bar{b} = \frac{\underline{\beta}}{2} + \overline{\beta}$$

と置けば，

$$\begin{aligned}\underline{b}I \leq -P_k^{(D_P)}A(\theta_k^{(D_P)}) - A^T(\theta_k^{(D_P)})P_k^{(D_P)} - \omega \frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}} \leq \bar{b}I, \\ k = 0, 1, \ldots, N_P, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\underline{b}I \leq -P_k^{(D_P)}A(\theta_k^{(D_P)}) - A^T(\theta_k^{(D_P)})P_k^{(D_P)} - \omega \frac{P_k^{(D_P)} - P_{k-1}^{(D_P)}}{\theta_k^{(D_P)} - \theta_{k-1}^{(D_P)}} \leq \bar{b}I, \\ k = 1, 2 \ldots, N_P + 1, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}\end{aligned} \tag{3.16}$$

が成り立つ．

同様に，$W^{(D_P)}$ が十分小さければ，$P(\theta)$, $\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}$ の一様連続性から，

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| [\{P_k^{(D_P)}A(\theta_k^{(D_P)}) + \frac{1}{2}(P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)})A(\theta_k^{(D_P)}) + \frac{1}{2}P_k^{(D_P)}(A(\theta_{k+1}^{(D_P)}) - A(\theta_k^{(D_P)}))\} + \{\text{転置}\} \\
&\qquad + \omega\frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}}\ ] - \{P(\theta_k^{(D_P)})A(\theta_k^{(D_P)}) + A^T(\theta_k^{(D_P)})P(\theta_k^{(D_P)}) + \omega\frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta_k^{(D_P)})\}\Bigg\| \\
&= \Bigg\|\frac{1}{2}\left\{(P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)})A(\theta_k^{(D_P)}) + P_k^{(D_P)}(A(\theta_{k+1}^{(D_P)}) - A(\theta_k^{(D_P)}))\right\} + \frac{1}{2}\{\text{転置}\} \\
&\qquad + \omega\frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}} - \omega\frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta_k^{(D_P)})\Bigg\| \\
&\le \|P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}\|\cdot\|A(\theta_k^{(D_P)})\| + W^{(D_P)}\|P_k^{(D_P)}\|\cdot\max_{0\le i\le N_G}\|\frac{A_i - A_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\| \\
&\qquad + \left\|w\left\{\frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta_k^{(D_P)}) - \frac{P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)}}{\theta_{k+1}^{(D_P)} - \theta_k^{(D_P)}}\right\}\right\| \\
&< \frac{\underline{\beta}}{2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

とできる．これより，

$$\underline{c} := \frac{\underline{\beta}}{2}, \quad \bar{c} := \overline{\beta} + \frac{\underline{\beta}}{2}$$

と置くと，

$$\underline{c}I \le -\{P_k^{(D_P)}A(\theta_k) + \frac{1}{2}(P_{k+1}^{(D_P)} - P_k^{(D_P)})A^T(\theta_k) + \frac{1}{2}P_k^{(D_P)}(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k))\} - \{\text{転置}\} \le \bar{c}I$$
$$k = 0, 1, \cdots, N_P \tag{3.18}$$

が成り立つ．

以上より，(3.13)，(3.14)，(3.17) 式が満たされるように D_P を選べば，(3.12)，(3.15)，(3.16)，(3.18) 式より (3.8)，(3.9)，(3.10)，(3.11) 式が成り立つ．

[(II)→(I)]

逆に，今 (II) が成り立つとする．ここで次の関数

$$P_S(\theta) = \begin{cases} P_0, & \theta < \underline{\theta} \\ P_k + \frac{\theta-\theta_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}(P_{k+1} - P_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ P_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases} \tag{3.19}$$

を定義する．分割 D_P は分割 D_G の細分であり，ある $0 \leq i \leq N_G$ について $[\theta_k, \theta_{k+1}] \subseteq [\theta_i, \theta_{i+1}]$ がわかっている．そこで，以下では k を固定し，$\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}] \subseteq [\theta_i, \theta_{i+1}]$ とする．また，t を

$$t = \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}$$

と置くと，$t \in [0, 1]$ で

$$\theta = \theta_k + t(\theta_{k+1} - \theta_k)$$

である．このとき

$$P_S(\theta) = P_k + t(P_{k+1} - P_k) = (1-t)P_k + tP_{k+1}$$

と表すことができるので，(3.8) 式より

$$\underline{a}I \leq P_S(\theta) \leq \overline{a}I \tag{3.20}$$

が示される．

次に，係数行列 $A(\theta)$ と $P_S(\theta)$ を，変数 t を用いて表現しておく．

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= A_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i) \\
&= \left(A_i - \frac{\theta_{i+1}}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i)\right) + \theta\left(\frac{A_{i+1} - A_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\right) \\
&= A^{i0} + \theta A^{i1} \\
&= A^{i0} + \{\theta_k + t(\theta_{k+1} - \theta_k)\}A^{i1} \\
&= (A^{i0} + \theta_k A^{i1}) + t(\theta_{k+1} - \theta_k)A^{i1} \\
&= A(\theta_k) + t\{A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k))\} \\
&= \tilde{A}_0 + t\tilde{A}_1 \\
P_S(\theta) &= P_k + t(P_{k+1} - P_k) \\
&= \tilde{P}_0 + t\tilde{P}_1
\end{aligned}$$

ただし，

$$\tilde{A}_0 = A(\theta_k), \quad \tilde{A}_1 = A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k), \quad \tilde{P}_0 = P_k = P_S(\theta_k), \quad \tilde{P}_1 = P_{k+1} - P_k$$

である．これより，$\omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}$に対して，(3.9) 式から，

$$\underline{b}I \leq -\tilde{P}_0\tilde{A}_0 - \tilde{A}_0^T\tilde{P} - \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k} \leq \bar{b}I, \tag{3.21}$$

を得る．(3.10) 式で k を $k+1$ に置き換えたものから，

$$\underline{b}I \leq -(\tilde{P}_0+\tilde{P}_1)(\tilde{A}_0+\tilde{A}_1) - (\tilde{A}_0+\tilde{A}_1)^T(\tilde{P}_0+\tilde{P}_1) - \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k} \leq \bar{b}I, \tag{3.22}$$

を得る．また，(3.11) 式から，

$$\begin{aligned} \underline{c}I \quad \leq \quad & -\{\tilde{P}_0\tilde{A}_0 + \frac{1}{2}\tilde{P}_1\tilde{A}_0 + \frac{1}{2}\tilde{P}_0\tilde{A}_1\} \\ & -\{\text{ 転置 }\} - \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k} \leq \bar{c}I, \end{aligned} \tag{3.23}$$

を得る．

今，$\forall\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$, $\omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}$ に対して，

$$\begin{aligned} & P_S(\theta)A(\theta) + A^T(\theta)P_S(\theta) + \omega\frac{P_{k+1}-P_k}{\theta_{k+1}-\theta_k} \\ = \quad & (\tilde{P}_0+t\tilde{P}_1)(\tilde{A}_0+t\tilde{A}_1) + (\tilde{A}_0+t\tilde{A}_1)^T(\tilde{P}_0+t\tilde{P}_1) + \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k} \\ = \quad & (\tilde{P}_0\tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T\tilde{P}_0 + \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k}) + t\left\{(\tilde{P}_0\tilde{A}_1+\tilde{P}_1\tilde{A}_0) + (\tilde{P}_0\tilde{A}_1+\tilde{P}_1\tilde{A}_0)^T\right\} + t^2(\tilde{P}_1\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^T\tilde{P}_1) \\ = \quad & -K_0 - tK_1 - t^2K_2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

と計算できる．なお，

$$\begin{aligned} K_0 \quad &= \quad -(\tilde{P}_0\tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T\tilde{P}_0 + \omega\frac{\tilde{P}_1}{\theta_{k+1}-\theta_k}) \\ K_1 \quad &= \quad -((\tilde{P}_0\tilde{A}_1+\tilde{P}_1\tilde{A}_0) + (\tilde{P}_0\tilde{A}_1+\tilde{P}_1\tilde{A}_0)^T) \\ K_2 \quad &= \quad -(\tilde{P}_1\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^T\tilde{P}_1) \end{aligned}$$

とする．

(3.24) 式があるスカラー $\underline{\kappa}, \overline{\kappa}$ について

$$\underline{\kappa}I \leq K_0 + tK_1 + t^2K_2 \leq \overline{\kappa}I, \quad \forall t \in [0,1]$$

となるためには，

$$K_0 + tK_1 + t^2K_2 = (1-t)^2K_0 + t^2(K_0+K_1+K_2) + 2t(1-t)(K_0+\frac{1}{2}K_1)$$

と変形できることから，

$$\begin{cases} \underline{\kappa} I \leq K_0 \leq \overline{\kappa} I \\ \underline{\kappa} I \leq K_0 + K_1 + K_2 \leq \overline{\kappa} I \\ \underline{\kappa} I \leq K_0 + \frac{1}{2}K_1 \leq \overline{\kappa} I \end{cases} \tag{3.25}$$

が成り立てば十分である (渡辺ら [4])．(3.25) の各不等式はおのおの (3.21)，(3.22)，(3.23) 式より満たされる．よって，$\forall k = 0, 1, \ldots, N_P$ について，

$$\underline{\kappa} I \leq -P_S(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P_S(\theta) - \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \leq \overline{\kappa} I \tag{3.26}$$

が $\forall \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}$ で成り立つ．

(3.26) 式と，$P_S(\theta)$ が $\theta \in R$ で一様連続であることから，十分小さい $l > 0$ について，

$$\frac{1}{2}\underline{\kappa} I \leq -P_S(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P_S(\theta) - \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \leq (\overline{\kappa} + \frac{\kappa}{2})I \tag{3.27}$$

を $\forall \theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_{k+1} + \frac{l}{2}]$, $\omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}$, $k = 0, 1, \ldots, N_P$ で満足することができる．

次に $P(\theta)$ を，$P_S(\theta)$ を平滑化した

$$P(\theta) = \frac{1}{l}\int_{\theta - \frac{l}{2}}^{\theta + \frac{l}{2}} P_S(h)dh \tag{3.28}$$

として定義する．ただし，積分区間 $[\theta - \frac{l}{2}, \theta + \frac{l}{2}]$ には高々1 つの θ_k しか含まれず，かつ，(3.27) 式が成り立つように $l > 0$ を取る．

今，$P_S(\theta)$ は一次のスプライン関数であるから，

$$P_S(\theta) = P_0 + \sum_{i=1}^{N+1} (\theta - \theta_i)_+ R_i, \quad R_i \in Sym(n) \tag{3.29}$$

と表すことができる [13]．ただし，

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

とする．すると，P_k は

$$P_k = P_S(\theta_k) = P_0 + \sum_{i=0}^{N+1} (\theta_k - \theta_i)_+ R_i = P_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\theta_k - \theta_i) R_i$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} - P_k &= \left\{P_0 + \sum_{i=0}^{k}(\theta_{k+1} - \theta_i)R_i\right\} - \left\{P_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(\theta_k - \theta_i)R_i\right\} \\
&= (\theta_{k+1} - \theta_k)R_k + \sum_{i=0}^{k-1}(\theta_{k+1} - \theta_k)R_i \\
&= (\theta_{k+1} - \theta_k)\sum_{i=0}^{k} R_i
\end{aligned}
$$

と計算でき, $\frac{P_{k+1}-P_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}$ は

$$
\frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} = \sum_{i=0}^{k} R_i \tag{3.30}
$$

と表現することができる.

$\theta_k \not\in [\theta - \frac{l}{2}, \theta + \frac{l}{2}]$ のとき,

$$
P(\theta) = P_S(\theta) \tag{3.31}
$$

$$
\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) = \frac{\partial P_S}{\partial \theta}(\theta) = \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \tag{3.32}
$$

$\theta_k \in [\theta - \frac{l}{2}, \theta + \frac{l}{2}]$ すなわち $\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ のとき,

$$
\begin{aligned}
P(\theta) &= \frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} P_S(h)dh \\
&= \frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} \left\{P_0 + \sum_{i=0}^{k}(h - \theta_i)_+ R_i\right\} dh \\
&= P_0 + \frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} \left\{\sum_{i=0}^{k-1}(h - \theta_i)R_i + (h - \theta_k)_+ R_k\right\} dh \\
&= P_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(\theta - \theta_i)R_i + \frac{1}{l}\int_{\theta_k}^{\theta+\frac{l}{2}} \{(h - \theta_k)R_k\} dh \\
&= P_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(\theta - \theta_i)R_i + \frac{R_k}{l}\left[\frac{1}{2}(h - \theta_k)^2\right]_{\theta_k}^{\theta+\frac{l}{2}} \\
&= P_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(\theta - \theta_i)R_i + \frac{R_k}{2l}(\theta + \frac{l}{2} - \theta_k)^2
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

これより,

$$
\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} R_i + \frac{\theta - (\theta_k - \frac{l}{2})}{l} R_k \tag{3.34}
$$

となる．従って， $\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ において

$$\begin{aligned}\|P(\theta) - P_S(\theta)\| &= \left\| \left\{ (\theta - \theta_k)_+ - \frac{\{\theta - (\theta_k - \frac{l}{2})\}^2}{2l} \right\} R_k \right\| \\ &\leq \frac{l}{8} \cdot \|R_k\|\end{aligned}$$

がいえる．

以上より，$\forall \theta \in \Theta$ で $P(\theta)$ と $P_S(\theta)$ の関係式

$$\|P(\theta) - P_S(\theta)\| \leq \frac{l}{8} \max_{0 \leq k \leq N_P} \|R_k\| \tag{3.35}$$

が示された．このことから (3.6) 式がいえる．

次に (3.7) 式を示す．$\theta \notin [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ のとき，(3.31)，(3.32) 式を (3.27) 式に代入すると

$$\frac{1}{2}\underline{\kappa} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) \leq (\overline{\kappa} + \frac{\underline{\kappa}}{2})I$$

が直ちに得られる．

次に，$\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ ，$k = 1, 2, \ldots, N_P$ について考える．ここで，$l > 0$ は任意に小さく取れることに注意する．まず，(3.35) 式より，十分小さい $l > 0$ について (3.27) 式の $P_S(\theta)$ を $P(\theta)$ で置き換えると，任意の $\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$，$k = 0, 1, \ldots, N_P$について，

$$\frac{1}{4}\underline{\kappa} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \leq (\overline{\kappa} + \frac{3}{4}\underline{\kappa})I \tag{3.36}$$

が成り立つ．ここで，

$$\left[\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}\right] = \left[\theta_{k-1} - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}\right] \cap \left[\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_{k+1} + \frac{l}{2}\right]$$

であるから，$\forall \theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ においては，(3.36) 式と，(3.36) 式の k を $k-1$ で置き換えた式：

$$\frac{1}{4}\underline{\kappa} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega \frac{P_{k-1} - P_k}{\theta_k - \theta_{k-1}} \leq (\overline{\kappa} + \frac{3}{4}\underline{\kappa})I \tag{3.37}$$

が成り立つ．

今，$u = \frac{\theta - (\theta_k - \frac{l}{2})}{l}$ とおく．$\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_k + \frac{l}{2}]$ のとき $0 \leq u \leq 1$ である。よって，$u \times (3.36) + (1-u) \times (3.37)$ を求めると，この区間で

$$\frac{1}{4}\underline{\kappa} I \leq -P(\theta)A(\theta) - A^T(\theta)P(\theta) - \omega \left\{ u \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} + (1-u) \frac{P_k - P_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} \right\} \leq (\overline{\kappa} + \frac{3}{4}\underline{\kappa})I$$

を得る．ここで，(3.30) 式と (3.34) 式より

$$\begin{aligned}
u\frac{P_{k+1}-P_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}+(1-u)\frac{P_k-P_{k-1}}{\theta_k-\theta_{k-1}} &= u\sum_{i=0}^{k}R_i+(1-u)\sum_{i=0}^{k-1}R_i \\
&= u\left\{\sum_{i=0}^{k-1}R_i+R_k\right\}+(1-u)\sum_{i=0}^{k-1}R_i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}R_i+uR_k \\
&= \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta) \quad ((3.34)\text{ より})
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\theta\in[\theta_k-\frac{l}{2},\theta_k+\frac{l}{2}]$ でも

$$\frac{1}{4}\underline{\kappa}I\leq -P(\theta)A(\theta)-A^T(\theta)P(\theta)-\omega\frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta)\leq(\overline{\kappa}+\frac{3}{4}\underline{\kappa})I$$

を得た．

以上より，(3.7) 式が十分小さい $l>0$ について示せた．$P(\theta)$ の一階連続微分可能性，$\frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta)$ の$\theta\in\Theta$ での一様連続性も明らかである．（証明終り）

この定理によって，LPV システムの安定性を評価するパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる LMI 条件の構成法を示した．証明の中で，(I) の解の近似であるスプライン関数の区間を十分小さくとれば，定理 3.4(II) の LMI 条件が (I) の LMI 条件の必要性を満たすことを示した．この定理と，定理 3.1によって，パラメータ依存リアプノフ関数を用いた安定性評価を保守性なく行えることを保証した．

3.3　LPV システムの安定性と L_2ゲイン性能

従来の研究 [7] では，LPV システムの L_2 ゲイン性能を評価をする結果が得られている．まず，3.3.1節でこの結果を紹介する．3.3.2節では，3.3.1節の定理 3.3のパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分性となる LMI 条件の構成法を示す．

3.3.1　安定性と L_2 ゲイン性能

次の LPV システムを考える．

$$\Sigma \quad : \quad \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(\theta)x(t) + B(\theta)w(t), \quad x(0) = 0 \\ z(t) & = & C(\theta)x(t) + D(\theta)w(t) \end{array}$$

ただし，$x(t) \in R^n$ は状態，$z(t) \in R^p$ は観測出力，$w(t) \in R^m$ は外部入力を表す．また，スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ については、次の制約があると仮定する．

$$\theta(t) \quad \in \quad \Theta := [\underline{\theta}, \overline{\theta}], \tag{3.38}$$

$$\dot{\theta}(t) \quad \in \quad \Omega := [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \tag{3.39}$$

システム Σ の L_2 ゲインを次で定義する．

定義 3.1 システム Σ が指数安定のとき，システムΣ の L_2 ゲイン $G(\Sigma)$ を次で定義する．

$$G(\Sigma) = \sup_{w \in L_2, w \neq 0} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}}$$

ただし，$w \in L_2$ は w の L_2 ノルムが有界な値を持つことを意味する．

システム Σ の L_2 ゲインを評価する次の定理が得られている．

定理 3.3 [3, 7]

(3.38)，(3.39) 式を満たすすべての $(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega$ に対して，次の LMI 条件：

$$\underline{\alpha} I \le P(\theta) \le \overline{\alpha} I, \tag{3.40}$$

$$\underline{\beta} I \le - \begin{bmatrix} A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + \omega \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) & P(\theta)B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T P(\theta) & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \le \overline{\beta} I \tag{3.41}$$

を満たす対称な行列関数 $P(\theta)$ が存在するとき，システム Σ は $x = 0$ で指数安定で，かつ， L_2 ゲインが γ 未満となる． ∎

3.3.2　有限個の LMI 条件の構成法

次の定理は，3.2節で用いたスプライン型の関数を用いて，L_2 ゲイン性能を満たすパラメータ依存 LMI 条件に対して必要十分となる有限個の LMI 条件を構成する．その証明は，3.2節の定理 3.2の証明に基に行う．

定理 3.4 整数 $N_G \geq 0$ と 分割 $D_G = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N_G+1}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_G+1} = \overline{\theta}$)，および，$\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N_G$ におけるシステムΣ の係数行列は次で与えられるとする．

$$
\begin{aligned}
A(\theta) &= A_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i) \in \Re^{n \times n} \\
B(\theta) &= B_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(B_{i+1} - B_i) \in \Re^{n \times m} \\
C(\theta) &= C_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(C_{i+1} - C_i) \in \Re^{p \times n} \\
D(\theta) &= D_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(D_{i+1} - D_i) \in \Re^{p \times m}
\end{aligned}
$$

ただし，変数 θ については

$$
(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Omega
$$

$$
\Theta := [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset \Re
$$

$$
\Omega := [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \subset \Re
$$

を満たすと仮定する．このとき，次の (I)，(II) は等価である．

(I) 次のような $P(\theta)$ と正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$, $\underline{\beta}, \overline{\beta} > 0$ が存在する．

$$
\begin{cases}
P(\theta) & : \quad \theta \in \Theta \to Sym(n), \text{一階連続微分可能} \\
\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} & : \quad \text{一様連続}
\end{cases}
\tag{3.42}
$$

$$
\underline{\alpha} I \leq P(\theta) \leq \overline{\alpha} I, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{3.43}
$$

$$
\underline{\beta} I \leq - \begin{bmatrix} A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) + \omega \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta) & P(\theta) B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T P(\theta) & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \overline{\beta} I,
$$

$$
\forall (\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{3.44}
$$

(II) ある整数 $N \geq N_G \geq 0$ と区間 Θ のある分割 $D = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_N < \theta_{N+1} = \bar{\theta}$) と正の定数 $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b}$, $\underline{c}, \bar{c} > 0$，及び $P_0, P_1, \ldots, P_N, P_{N+1} \in Sym(n)$ が存在し，次の条件を満足する。

$$\underline{a}I \leq P_k \leq \bar{a}I, \quad k = 0, 1, \ldots, N+1 \tag{3.45}$$

$$\underline{b}I \leq -\begin{bmatrix} A(\theta_k)^T P_k + P_k A(\theta_k) + \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} & P_k B(\theta_k) & C(\theta_k)^T \\ B(\theta_k)^T P_k & -\gamma I & D(\theta_k)^T \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \bar{b}I, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \quad \forall \omega \in \Omega \tag{3.46}$$

$$\underline{b}I \leq -\begin{bmatrix} A(\theta_k)^T P_k + P_k A(\theta_k) + \omega \frac{P_k - P_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} & P_k B(\theta_k) & C(\theta_k)^T \\ B(\theta_k)^T P_k & -\gamma I & D(\theta_k)^T \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \bar{b}I, \quad k = 1, \ldots, N+1, \quad \forall \omega \in \Omega \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} \underline{c}I \quad \leq \quad & -\begin{bmatrix} A(\theta_k)^T P_k + P_k A(\theta_k) + \omega \frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} & P(\theta_k) B(\theta_k) & C(\theta_k)^T \\ B(\theta_k)^T P_k & -\gamma I & D(\theta_k)^T \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \\ & -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \{P_k(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)) + (P_{k+1} - P_k)A(\theta_k)\} + \{*\} & * & * \\ \{P_k(B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k)) + (P_{k+1} - P_k)B(\theta_k)\}^T & 0 & * \\ C(\theta_{k+1}) - C(\theta_k) & D(\theta_{k+1}) - D(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \leq \bar{c}I, \\ & k = 0, 1, \ldots, N, \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{3.48}$$

(II) が成り立つとき，(I) の解 $P(\theta)$ は

$$P(\theta) = \frac{1}{l}\int_{\theta - \frac{l}{2}}^{\theta + \frac{l}{2}} P_S(h)dh$$

で与えられる．ただし，$P_S(\theta)$ は

$$P_S(\theta) = \begin{cases} P_0, & \theta < \underline{\theta} \\ P_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}(P_{k+1} - P_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ P_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases}$$

であり， l は十分小さな正数である． ∎

略証：((I)→(II)) 定理 3.2の証明と同様である．
((II)→(I)) 定理 3.2 と同じように θ から t への変数変換を行うと，$t \in [0,1]$ で

$$\begin{array}{lllll} A(\theta) & = & A(\theta_k)+t(A(\theta_{k+1})-A(\theta_k)) & = & \tilde{A}_0+t\tilde{A}_1 \\ B(\theta) & = & B(\theta_k)+t(B(\theta_{k+1})-B(\theta_k)) & = & \tilde{B}_0+t\tilde{B}_1 \\ C(\theta) & = & C(\theta_k)+t(C(\theta_{k+1})-C(\theta_k)) & = & \tilde{C}_0+t\tilde{C}_1 \\ D(\theta) & = & D(\theta_k)+t(D(\theta_{k+1})-D(\theta_k)) & = & \tilde{D}_0+t\tilde{D}_1 \\ P_S(\theta) & = & P_k+t(P_{k+1}-P_k) & = & \tilde{P}_0+t\tilde{P}_1 \end{array}$$

となる．すると，

$$\begin{bmatrix} A(\theta)^T P_S(\theta)+P_S(\theta)A(\theta)+\omega\frac{P_{k+1}-P_k}{\theta_{k+1}-\theta_k} & P_S(\theta)B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T P_S(\theta) & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} = L_0+tL_1+t^2L_2 \tag{3.49}$$

と書ける．ただし，

$$\begin{array}{lll} L_0 & = & \begin{bmatrix} \tilde{A}_0^T\tilde{P}_0+\tilde{P}_0\tilde{A}_0+\omega\frac{P_{k+1}-P_k}{\theta_{k+1}-\theta_k} & \tilde{P}_0\tilde{B}_0 & \tilde{C}_0^T \\ \tilde{B}_0^T\tilde{P}_0 & -\gamma I & \tilde{D}_0^T \\ \tilde{C}_0 & \tilde{D}_0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ L_1 & = & \begin{bmatrix} (\tilde{P}_0\tilde{A}_1+\tilde{P}_1\tilde{A}_0)+(*) & \tilde{P}_0\tilde{B}_1+\tilde{P}_1\tilde{B}_0 & \tilde{C}_1^T \\ (\tilde{P}_0\tilde{B}_1+\tilde{P}_1\tilde{B}_0)^T & 0 & \tilde{D}_1^T \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ L_2 & = & \begin{bmatrix} \tilde{P}_1\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^T\tilde{P}_1 & \tilde{P}_1\tilde{B}_1 & 0 \\ \tilde{B}_1^T\tilde{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

である．すると，定理 3.2と同様に以下の３つの不等式

$$\begin{array}{ccc} \underline{\kappa}I \leq & L_0 & \leq \overline{\kappa}I \\ \underline{\kappa}I \leq & L_0+L_1+L_2 & \leq \overline{\kappa}I \\ \underline{\kappa}I \leq & L_0+\frac{1}{2}L_1 & \leq \overline{\kappa}I \end{array}$$

が満たされると十分である．これらの不等式は各々(3.46)，(3.47)，(3.48) 式により満足される． （証明終り）

この定理によって，L_2 ゲイン性能の評価をするパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる LMI 条件の構成法を示した．定理 3.4と，定理 3.3によって，パラメータ依存リアプノフ関数を用いた性能評価を保守性なく行えることを保証した．

3.4 数値例

ここでは，数値例を用いて定理 3.4 の検証を行う．

必要十分性を有する本提案法を用いて計算した L_2 ゲインの値が妥当なものであるか，分割節点を増やすにしたがってどうなるか検証する．

まず，L_2 ゲインの真の最小値が存在すると仮定する．しかし，その真の最小値を求める方法はないため，まず，ある特殊な状況に限定して議論を進める．その特殊な状況とは，$\Omega = \{0\}$ のときである．このとき，定理 3.4は，ロバスト H_∞ ノルム条件と等価になり，H_∞ ノルムは別の方法で得ることができる．そこで，定理 3.4の有限個の LMI 条件を解いて L_2 ゲインを求め，別の方法で求めた H_∞ ノルムとどのような関係にあるか調べる．

次の LPV システム：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \theta A_1)x + (B_0 + \theta B_1)w, \\ z &= (C_0 + \theta C_1)x + (D_0 + \theta D_1)w \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} &A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0.50197 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1.3 & -20 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \\ &B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2.2 & 0.5 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \\ &C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\theta \in \Theta = [0, 1]$$

に対して，定理 3.4(II) の LMI 条件を解き，その結果に対して考察を行う．

今，$\Omega = \{0\}$ に対応する定理 3.4(II) の LMI 条件を作ると次のようになる．

$$\underline{a}I \le P_k \le \bar{a}I, \quad k = 0, 1, \ldots, N+1 \tag{3.51}$$

$$
\underline{b}I \leq -\begin{bmatrix} A(\theta_k)^T P_k + P_k A(\theta_k) & P_k B(\theta_k) & C(\theta_k)^T \\ B(\theta_k)^T P_k & -\gamma I & D(\theta_k)^T \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \bar{b}I,
$$

$$
k = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{3.52}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{c}I \quad \leq \quad & -\begin{bmatrix} A(\theta_k)^T P_k + P_k A(\theta_k) & P(\theta_k)B(\theta_k) & C(\theta_k)^T \\ B(\theta_k)^T P_k & -\gamma I & D(\theta_k)^T \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \\
& -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \{P_k(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)) + (P_{k+1} - P_k)A(\theta_k)\} + \{*\} & * & * \\ \{P_k(B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k)) + (P_{k+1} - P_k)B(\theta_k)\}^T & 0 & * \\ C(\theta_{k+1}) - C(\theta_k) & D(\theta_{k+1}) - D(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \leq \bar{c}I,
\end{aligned}
$$

$$
k = 0, 1, \ldots, N \tag{3.53}
$$

ただし，ここでは

$$
\underline{a} = \underline{b} = \underline{c} = 0.1^{-10}, \quad \overline{a}, \bar{b}, \overline{c} : \text{制約なし}
$$

とし，区間 Θ の分割の仕方は等分割とした．また，次の分割はその前の分割の細分になるように，分割節点数 N を $N = 0, 1, 3, 7, 15, 31$ として計算する．次の問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \gamma \\
&\text{subject to} \quad (3.51), \quad (3.52), \quad (3.53)
\end{aligned}
$$

に対して，凸最適化を用いて解いた結果を図 3.1 に実線で示し，最小化した値は表 3.1 の γ_1 の欄にまとめた．図 3.1 は，横軸が区間 Θ の分割節点数を示す $N = 0, 1, 3, 7, 15, 31$ であり，縦軸はそのとき最小化した γ の値である．また，図 3.1 の破線はパラメータ依存 LMI 条件の必要条件のみからなる凸最適化問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \gamma \\
&\text{subject to} \quad (3.51), \quad (3.52)
\end{aligned}
$$

についての結果を示したものであり，各 N での最小化した値は表 3.1 の γ_2 の欄にまとめた．

一方，図 3.2 はシステム (3.50) の θ を固定したときに得られる線形システムの H_∞ ノルムをプロットしたものである．

図 3.1 を見ると，分割節点数が増えるにしたがって，破線の値は大きくなり，実線の値は減少しつつ，共にある値に漸近していくことがわかる．破線の値が大きくなるのは，(3.51)，(3.52) の条件が定理 3.4(I) の解の必要条件になっていることから，分割数が増えれば増えるほど真の解に近付くことを意味する．一方，実線の値が減少しつつ破線に漸近していくのは，３つの制約条件 (3.51)，(3.52)，(3.53) が定理 3.4(I) の解の十分条件であり，分割を増やせば必要条件になることを示している．

次に，同じ LPV システムに対して パラメータ $\theta(t)$ の変化が，

$$\Omega = [-1, 1]$$

の範囲にあるとき，

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \gamma \\ \text{subject to} & (3.45),\ (3.46),\ (3.47),\ (3.48) \end{array}$$

の問題を解いた結果を図 3.3 に示し，表 3.1 の γ の欄にまとめる．

この結果を見ると，図 3.1 の実線と類似した結果になっている．類似している点は，分割数を増やすと実線の γ の値が減少していくことである．また，図 3.1 の実線は，$N = 15$ からの値はほとんど変化していないが，図 3.3 は図 3.1 の実線と比較すれば，$N = 15$ から $N = 31$ での値の減少分は大きい．これは，微分項 $\frac{\partial P(\theta^k)}{\partial \theta}$ を $\frac{P_{k+1} - P_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}$ で近似しているため，分割数が少ない間は誤差が大きく，分割数が増えるほど近似誤差が小さくなることが理由であると思われる．

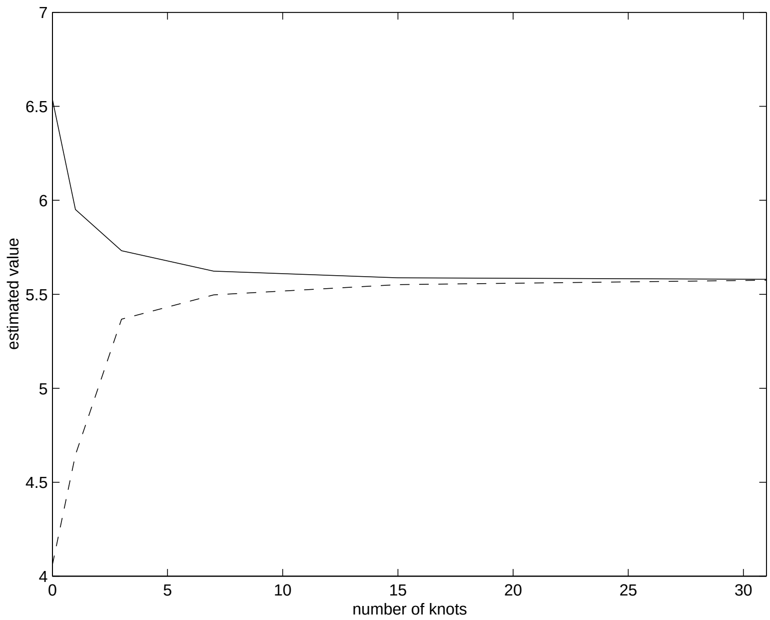

図 3.1: Estimations of H_∞ norm

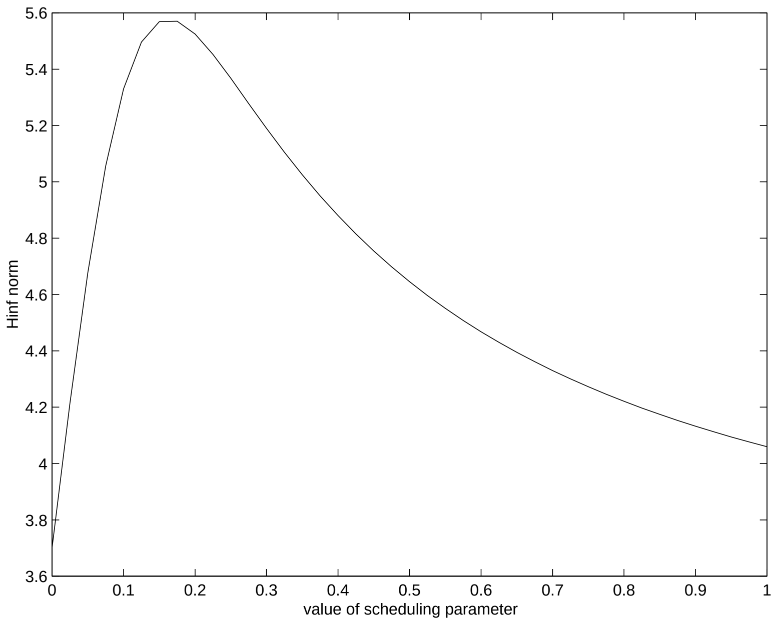

図 3.2: H_∞ norm

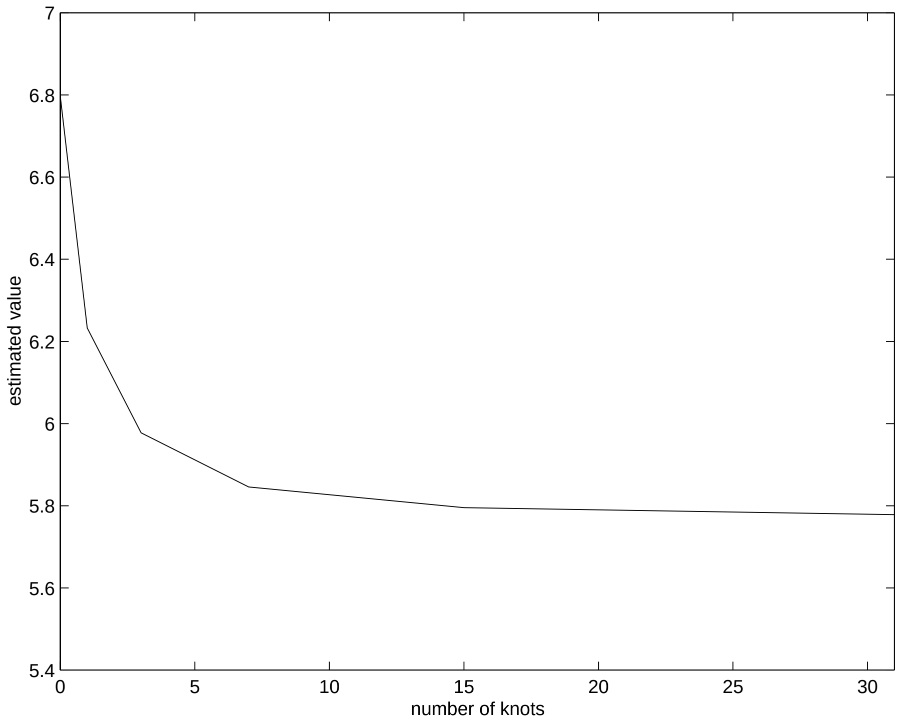

図 3.3: Estimations of L_2 gain

Knots	γ	γ_1	γ_2
-1		7.5811	
0	6.7961	6.5386	4.0598
1	6.2326	5.9514	4.6457
3	5.9774	5.7319	5.3675
7	5.8458	5.6230	5.4966
15	5.7953	5.5875	5.5518
31	5.7782	5.5802	5.5747

表 3.1: data of caluclations

3.5　結言

この章では，LPV システムの安定性および L_2 ゲイン性能の評価を行うパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件を構成する方法を示した．そして，ある数値例で有限個の LMI 条件を解き，得られた結果に対して考察を行った．

次章では，ここで提案した方法を状態フィードバックによるゲインスケジューリング制御系の設計法に利用する．

第 4 章

スプラインイン関数を用いたゲインスケジューリング制御系の設計法

4.1　緒言

前章では，有限個の LMI 条件を用いて，LPV システムの安定性および L_2 ゲイン性能を評価する方法を提案した．ここでは，その結果を状態フィードバックを用いた制御系設計問題に拡張する．4.2節で，状態フィードバックを用いて LPV システムの安定性，および，L_2 ゲイン性能を保証するパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成法を示す.

4.2　状態フィードバックを用いた制御系設計

4.2.1　状態フィードバックと安定性

次の LPV システムを考える．

$$\dot{x}(t) \;=\; A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \tag{4.1}$$

ここで，$x(t) \in R^n$ は状態，$u(t) \in R^m$は制御入力である．ただし，変数 $\theta(t) \in R$ はスケジューリングパラメータとし，

$$\theta(t) \;\in\; \Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$$

$$\dot{\theta}(t) \in \Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$$

を満たすと仮定する．また，自然数 $N_G \geq 0$ に対して，Θ の分割 $D_G = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N_G+1}\}, (\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_G+1} = \overline{\theta})$ が与えられ，この分割 D_G に対する係数行列は，それぞれ次のようなスプライン関数として与えられるとする．

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i), \quad \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, N_G \\ B(\theta) &= B_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(B_{i+1} - B_i), \quad \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, N_G \end{aligned}$$

今，ゲインスケジューリング状態フィードバック

$$u(t) = F(\theta(t))x(t) \tag{4.2}$$

を用いて，システム (4.1) を安定化することを考える．システム (4.1) に状態フィードバック (4.2) を施したとき，閉ループ系は

$$\dot{x}(t) = \{A(\theta) + B(\theta)F(\theta)\}x(t) \tag{4.3}$$

と表される．従って，定理 3.1より，任意の $(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega$ に対して，

$$\underline{\alpha}I \leq P(\theta) \leq \overline{\alpha}I, \tag{4.4}$$

$$\underline{\beta}I \leq -\omega\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta} - \{A(\theta) + B(\theta)F(\theta)\}^T P(\theta) - P(\theta)\{A(\theta) + B(\theta)F(\theta)\} \leq \overline{\beta}I \tag{4.5}$$

を満たす 正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\beta}, \overline{\beta}$，および， 行列関数 $P(\theta)$，$F(\theta)$ が存在するとき，閉ループ系 (4.3) は指数安定化される．

4.2.2 安定性を保証する有限個の LMI 条件の構成法

4.2.1節では，閉ループ系の安定性の判別をパラメータに依存した LMI 条件として記述している．ここでは，そのパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成法，およびフィードバックゲインの構成の仕方を示す．

定理 4.1 次の (I)，(II) は等価である．

(I) 次のような $P(\theta)$，$F(\theta)$ と正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\beta}, \overline{\beta} > 0$ が存在する．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P(\theta) & : & \theta \in \Theta \to Sym(n), \text{一階連続微分可能} \\ F(\theta) & : & \theta \in \Theta \to R^{m\times n}, \text{連続で区分的に微分可能} \\ \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} & : & \text{一様連続} \end{array} \right. \tag{4.6}$$

$$\underline{\alpha} I \leq P(\theta) \leq \overline{\alpha} I, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{4.7}$$

$$\underline{\beta} I \leq -\omega \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} - \{A(\theta) + B(\theta)F(\theta)\}^T P(\theta) - P(\theta)\{A(\theta) + B(\theta)F(\theta)\} \leq \overline{\beta} I, \quad \forall (\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{4.8}$$

(II) ある整数 $N_P \geq N_G \geq 0$ と D_P の細分となるある分割 $D = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N_P}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_P} < \theta_{N_P+1} = \bar{\theta}$) と正の定数 $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b}$, $\underline{c}, \bar{c} > 0$，及び $X_0, X_1, \ldots, X_{N_P}, X_{N_P+1} \in Sym(n)$，$W_0, W_1, \ldots, W_{N_P}, W_{N_P+1} \in R^{m\times n}$ が存在し，$\omega = \underline{\omega}, \overline{\omega}$ に対して，次の条件を満足する。

$$\underline{a} I \leq X_k \leq \overline{a} I, \quad k = 0, 1, \cdots, N_P + 1 \tag{4.9}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{b} I \leq & w \frac{X_{k+1} - X_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} - A(\theta_k) X_k - X_k A^T(\theta_k) \\ & -B(\theta_k) W_k - W_k^T B^T(\theta_k) \qquad \leq \bar{b} I \\ & k = 0, 1, \cdots, N_P \end{array} \tag{4.10}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{b} I \leq & w \frac{X_k - X_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} - A(\theta_k) X_k - X_k A^T(\theta_k) \\ & -B(\theta_k) W_k - W_k^T B^T(\theta_k) \qquad \leq \bar{b} I \\ & k = 1, 2, \cdots, N_P + 1 \end{array} \tag{4.11}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{c} I \leq & w \frac{X_{k+1} - X_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \\ & -\{A(\theta_k) X_k + \frac{1}{2} A(\theta_k)(X_{k+1} - X_k) + \frac{1}{2}(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)) X_k\} \\ & -\{A(\theta_k) X_k + \frac{1}{2} A(\theta_k)(X_{k+1} - X_k) + \frac{1}{2}(A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)) X_k\}^T \\ & -\{B(\theta_k) W_k + \frac{1}{2} B(\theta_k)(W_{k+1} - W_k) + \frac{1}{2}(B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k)) W_k\} \\ & -\{B(\theta_k) W_k + \frac{1}{2} B(\theta_k)(W_{k+1} - W_k) + \frac{1}{2}(B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k)) W_k\}^T \quad \leq \bar{c} I \\ & k = 0, 1, \cdots, N_P \end{array} \tag{4.12}$$

(II) が成り立つとき，(I) の解 $P(\theta)$，$F(\theta)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
P(\theta) &= \left\{\frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} X_S(h)dh\right\}^{-1} \\
F(\theta) &= W_S(\theta)X_S(\theta)^{-1}
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし，$X_S(\theta)$，$W_S(\theta)$ は

$$
X_S(\theta) = \begin{cases} X_0, & \theta < \underline{\theta} \\ X_k + \frac{\theta-\theta_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}(X_{k+1}-X_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ X_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases}
$$

$$
W_S(\theta) = W_k + \frac{\theta-\theta_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}(W_{k+1}-W_k), \quad \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P
$$

であり， l は十分小さな正数である． ∎

証明：[(I)→(II)] 条件 (4.6) より，

$$
\begin{aligned}
X(\theta) &= P(\theta)^{-1} && (4.13) \\
W(\theta) &= F(\theta)X(\theta) && (4.14)
\end{aligned}
$$

と置くと，$X(\theta) \in Sym(n)$ は一階微分可能で，$W(\theta) \in \Re^{m\times n}$ は連続である．このとき，(4.13)，(4.14) 式を (4.7)，(4.8) 式に代入すると，ある正数 $\underline{\alpha}'$，$\overline{\alpha}'$，$\underline{\beta}'$，$\overline{\beta}' > 0$ について，

$$
\underline{\alpha}' I \le X(\theta) \le \overline{\alpha}' I, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{4.15}
$$

$$
\underline{\beta}' I \le w\frac{\partial X(\theta)}{\partial\theta} - A(\theta)X(\theta) - B(\theta)W(\theta) - X(\theta)A(\theta) - W(\theta)B(\theta)^T \le \overline{\beta}' I, \\ \forall(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{4.16}
$$

となる．定理 3.2の証明と同様の方法で，(4.15)，(4.16) 式から (II) が導かれる．

[(II)→(I)] 次の二つのスプライン関数：

$$
X_S(\theta) = \begin{cases} X_0, & \theta < \underline{\theta} \\ X_k + \frac{\theta-\theta_k}{\theta_{k+1}-\theta_k}(X_{k+1}-X_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, N_P \\ X_{N+1}, & \theta > \overline{\theta} \end{cases} \tag{4.17}
$$

$$W_S(\theta) = W_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}(W_{k+1} - W_k), \quad \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, N_P \tag{4.18}$$

を定義する．また，$X(\theta)$ を スプライン関数 $X_S(\theta)$ を平滑化した関数：

$$X(\theta) = \frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} X_S(h)dh \tag{4.19}$$

として定義する．ただし，積分区間 $[\theta - \frac{l}{2}, \theta + \frac{l}{2}]$ には高々1 つの θ_k しか含まれないように l を取る．

すると，定理 3.2の証明と同様の方法で，$\forall\theta \in \Theta$ において，

$$\|X(\theta) - X_S(\theta)\| \le l \cdot M, \quad (M : \text{正の定数}) \tag{4.20}$$

が得られる．ここで，対称行列 X, Y について

$$\|X - Y\| \le \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad X - \varepsilon I \le Y \le X + \varepsilon I$$

であることと (4.20) 式から，(4.7) 式を示すことができる．

次に，(4.8) 式を示す．

(4.9)，(4.10)，(4.11)，(4.12) 式が成り立つことから，$k = 0, 1, \cdots, N$ について

$$\begin{aligned} \underline{\kappa} I \le \ & w\tfrac{X_{k+1}-X_k}{\theta_{k+1}-\theta_k} - A(\theta)X_S(\theta) - X_S(\theta)A^T(\theta) - B(\theta)W_S(\theta) - W_S(\theta)B^T(\theta) \le \overline{\kappa} I, \\ & \forall(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \end{aligned} \tag{4.21}$$

が成り立つことがいえる．ここで，

$$F_S(\theta) = W_S(\theta)X_S(\theta)^{-1} \tag{4.22}$$

と置けば，(4.21) 式は，

$$\begin{aligned} \underline{\kappa} I \le \ & w\tfrac{X_{k+1}-X_k}{\theta_{k+1}-\theta_k} - \{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}X_S(\theta) \\ & -X_S(\theta)\{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}^T \le \overline{\kappa} I, \\ & \forall(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \end{aligned} \tag{4.23}$$

のように書ける．今，(4.20) 式，および，$A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)$ が θ について連続関数であることから，十分小さい $l > 0$ をとれば，任意の $\theta \in [\theta_k - \frac{l}{2}, \theta_{k+1} + \frac{l}{2}]$，任意の$\omega \in \Omega$, $k = 0, 1, \ldots, N_P$ について，

$$\frac{1}{2}\underline{\kappa} I \le w\frac{X_{k+1} - X_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} - \{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}X(\theta) - X(\theta)\{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}^T \le (\overline{\kappa} + \frac{\kappa}{2})I \tag{4.24}$$

を満足することができる．(4.24) 式が成り立つことから，定理 3.2の証明と同様の方法を用いると，

$$\frac{1}{4}\underline{\kappa}I \leq w\frac{\partial X}{\partial \theta}(\theta) - \{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}X(\theta) - X(\theta)\{A(\theta) + B(\theta)F_S(\theta)\}^T \leq (\overline{\kappa} + \frac{3}{4}\underline{\kappa})I, \quad \forall(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{4.25}$$

が成り立つことを示すことができる．この $F_S(\theta) \in R^{m\times n}$ は連続で区分的に微分可能であるから，$P(\theta) = X(\theta)^{-1}$，$F(\theta) = F_S(\theta)$ と置けば，(4.25) 式から (4.8) 式が導かれる．

(証明終り)

この定理によって，状態フィードバックを用いたときの閉ループ系の安定判別を表現したパラメータ依存 LMI 条件に対して，保守性なく有限個の LMI 条件を記述できることを保証した．さらに，状態フィードバックのゲイン $F(\theta)$ は，有限個の LMI 条件を解いて得られる二つのスプライン関数 $X_S(\theta)$, $W_S(\theta)$ を用いて構成すればよいことを示した．

4.3 L_2 ゲイン性能を保証する有限個の LMI 条件の構成法

ここでは，全節の安定性を保証する LMI 条件の構成法を，L_2 ゲインを保証する状態フィードバックによる制御系設計問題に対して拡張する．

次の LPV システムを考える．

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) + B_u(\theta(t))u(t), \\
z(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) + D_u(\theta(t))u(t)
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

ただし，$x(t) \in R^n$ は状態，$w(t) \in R^m$ は外部入力，$z(t) \in R^p$ は観測出力，$u(t) \in R^{m_u}$ 制御入力であり，スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ は

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &\in \Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \\
\dot{\theta}(t) &\in \Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}]
\end{aligned}
$$

の条件を満足する．また，整数 $N_G \geq 0$ と 区間 Θ の分割 D_G に対して，係数行列はスプライン関数で与えられるとする．各分割内 ($\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$) での表現は次の通りである．

$$
\begin{aligned}
A(\theta) &= A_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(A_{i+1} - A_i) \in R^{n \times n} \\
B(\theta) &= B_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(B_{i+1} - B_i) \in R^{n \times m} \\
B_u(\theta) &= B_{ui} + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(B_{ui+1} - B_{ui}) \in R^{n \times m_u} \\
C(\theta) &= C_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(C_{i+1} - C_i) \in R^{p \times n} \\
D(\theta) &= D_i + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(D_{i+1} - D_i) \in R^{p \times m} \\
D_u(\theta) &= D_{ui} + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}(D_{ui+1} - D_{ui}) \in R^{p \times m_u}
\end{aligned}
$$

このとき，定理 3.4と定理 4.1を組み合わせれば，ゲインスケジューリング状態フィードバック

$$
u(t) = F(\theta(t))x(t) \tag{4.27}
$$

を用いて閉ループ系：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \{A(\theta(t)) + B_u(\theta(t))F(\theta(t))\}x(t) + B(\theta(t))w(t), \\
z(t) &= \{C(\theta(t)) + D_u(\theta(t))F(\theta(t))\}x(t) + D(\theta(t))w(t)
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

を安定化し，かつ w から z への L_2 ゲインを γ 未満とするフィードバックゲイン $F(\theta)$ を，有限個の LMI 条件を解いて区分的に求める次の定理が成り立つ．

定理 4.2 次の (I)，(II) は等価である．

(I) 次のような $P(\theta)$，$F(\theta)$ と正の定数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$, $\underline{\beta}, \overline{\beta} > 0$ が存在する．

$$\begin{cases} P(\theta) & : \quad \theta \in \Theta \to Sym(n), \text{一階連続微分可能} \\ F(\theta) & : \quad \theta \in \Theta \to R^{m_u \times n}, \text{連続で区分的に微分可能} \\ \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} & : \quad \text{一様連続} \end{cases} \tag{4.29}$$

$$\underline{\alpha} I \leq X(\theta) \leq \overline{\alpha} I, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{4.30}$$

$$\underline{\beta} I \leq - \begin{bmatrix} G(\theta,\omega) & * & * \\ B(\theta)^T P(\theta) & -\gamma I & * \\ C(\theta) + D_u(\theta) F(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \overline{\beta} I, \qquad \forall (\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega \tag{4.31}$$

ただし，

$$\begin{aligned} G(\theta,\omega) \quad := \quad & \omega \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} + P(\theta)\{A(\theta) + B_u(\theta)F(\theta)\} \\ & + \{A(\theta) + B_u(\theta)F(\theta)\}^T P(\theta) \end{aligned}$$

とする．

(II) ある整数 $N_P \geq N_G \geq 0$ と D_G のある細分となる分割 $D_P = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N_P}\}$ ($\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N_P} < \theta_{N_P+1} = \bar{\theta}$) と正の定数 $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b}$, $\underline{c}, \bar{c} > 0$，及び $X_0, X_1, \ldots, X_{N_P}, X_{N_P+1} \in Sym(n)$，$W_0, W_1, \ldots, W_{N_P}, W_{N_P+1} \in \Re^{m_u \times n}$ が存在し，次の条件を満足する．

$$\underline{a} I \leq X_k \leq \bar{a} I, \quad k = 0, 1, \ldots, N_P + 1 \tag{4.32}$$

$$\underline{b} I \leq - \begin{bmatrix} G_1(k) & * & * \\ B(\theta_k)^T & -\gamma I & * \\ C(\theta_k) X_k + D_u(\theta_k) W_k & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq \bar{b} I, \qquad k = 0, 1, \ldots, N_P, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \tag{4.33}$$

$$
\underline{b}I \le -\begin{bmatrix} G_2(k) & * & * \\ B(\theta_k)^T & -\gamma I & * \\ C(\theta_k)X_k + D_u(\theta_k)W_k & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \le \bar{b}I,
$$

$$
k = 1, \ldots, N_P + 1, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{c}I \;\; \le \;\; & -\begin{bmatrix} G_1(k) & * & * \\ B(\theta_k)^T & -\gamma I & * \\ C(\theta_k)X_k + D_u(\theta_k)W_k & D(\theta_k) & -\gamma I \end{bmatrix} \\
& -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_1(k) & B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k) & H_2(k)^T \\ (B(\theta_{k+1}) - B(\theta_k))^T & 0 & (D(\theta_{k+1}) - D(\theta_k))^T \\ H_2(k) & D(\theta_{k+1}) - D(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \le \bar{c}I,
\end{aligned}
$$

$$
k = 0, 1, \ldots, N_P, \quad \omega = \underline{\omega}, \overline{\omega} \tag{4.35}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
G_1(k) &:= -\omega\frac{X_{k+1} - X_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} + A(\theta_k)X_k + X_kA(\theta_k)^T + B_u(\theta_k)W_k + W_k^T B_u(\theta_k)^T, \\
G_2(k) &:= -\omega\frac{X_k - X_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} + A(\theta_k)X_k + X_kA^T(\theta_k) + B_u(\theta_k)W_k + W_k^T B_u(\theta_k)^T, \\
H_1(k) &:= \{A(\theta_k)(X_{k+1} - X_k) + (A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k))X_k \\
&\quad + B_u(\theta_k)(W_{k+1} - W_k) + (B_u(\theta_{k+1}) - B_u(\theta_k))W_k\} + \{\text{ 転置 }\}, \\
H_2(k) &:= C(\theta_k)(X_{k+1} - X_k) + (C(\theta_{k+1}) - C(\theta_k))X_k \\
&\quad + D_u(\theta_k)(W_{k+1} - W_k) + (D_u(\theta_{k+1}) - D_u(\theta_k))W_k
\end{aligned}
$$

とする．

(II) が成り立つとき，(I) の解 $P(\theta)$，$F(\theta)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
P(\theta) &= \left\{\frac{1}{l}\int_{\theta-\frac{l}{2}}^{\theta+\frac{l}{2}} X_S(h)dh\right\}^{-1} \\
F(\theta) &= W_S(\theta)X_S(\theta)^{-1}
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし，$X_S(\theta)$，$W_S(\theta)$ は

$$
X_S(\theta) = \begin{cases} X_0, & \theta < \underline{\theta} \\ X_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}(X_{k+1} - X_k), & \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P \\ X_{N+1}, & \theta > \bar{\theta} \end{cases}
$$

$$W_S(\theta) = W_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}(W_{k+1} - W_k), \quad \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N_P$$

であり，l は十分小さな正数である． ∎

証明：[(I) → (II)]

$P(\theta)$，$F(\theta)$ は連続であるから，

$$\begin{aligned} X(\theta) &= P(\theta)^{-1} \\ W(\theta) &= F(\theta)X(\theta) \end{aligned}$$

と置けば，$X(\theta) \in Sym(n)$，$W(\theta) \in R^{m \times n}$ は連続である．この $X(\theta), W(\theta)$ を用いれば，定理 3.4，定理 4.1と同様に (II) が示される．

[(II) → (I)]

ここでも，定理 4.1と同様に，(4.17) 式と (4.18) 式のスプライン関数 $X_S(\theta)$，$W_S(\theta)$，および，$X_S(\theta)$ を平滑化した (4.19) 式の $X(\theta)$ を定義すれば，任意の $(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega$ に対して，条件 (4.29)，(4.30)，(4.31) を満たす

$$P(\theta) = X(\theta)^{-1}$$

と，

$$F(\theta) = W_S(\theta)X_S(\theta)^{-1}$$

の形のフィードバック $F(\theta)$ が存在することを示すことができる．

(証明終り)

この定理によって，状態フィードバックを用いたときの閉ループ系の性能評価を表現したパラメータ依存 LMI 条件に対して，保守性なく有限個の LMI 条件を記述できることを保証した．さらに，状態フィードバックのゲイン $F(\theta)$ は 有限個の LMI 条件を解いて得られる二つのスプライン関数 $X_S(\theta)$,$W_S(\theta)$ を用いて構成すればよいことを示した．

4.4　結言

この章では，状態フィードバックを施した閉ループ系の安定性，および L_2 ゲイン性能を評価するパラメータ依存 LMI 条件に対して，必要十分となる有限個の LMI 条件の構成

法を提案した．前節と同様，パラメータ依存 LMI 条件の解を，スプライン型の関数の形で保証した．フィードバックゲインは，提案法である有限個の LMI 条件を解いて得られるスプライン関数を用いて構成できることを示した．

第 5 章

結論

LPV 表現に基づくゲインスケジューリング制御系の設計においては，保守性の小さい設計法として，コントローラの存在条件はスケジューリングパラメータに依存した LMI 条件で記述される．しかし，連続パラメータに依存した LMI 条件の解は，パラメータを固定する毎に得られる無限個の LMI 条件を解いた解で十分となるが，実際に無限個の LMI 条件を計算機で解くことは不可能である．この問題に対して，本研究では，パラメータ依存 LMI 条件に対して必要十分となる有限個の LMI 条件を構成する方法を提案した．この方法の特徴は，解の形をあるスプラインで近似し，元のパラメータ依存の LMI 条件と等価な LMI 条件であることが証明されている点である．これによって，スプラインの分割区間を細かくとれば，パラメータ依存リアプノフ関数を用いた性能評価を完全に行えることが明らかとなり，数値例でもその有効性を確認できた．

また，本論文で扱った LPV システムは，係数がスカラーであるスケジューリングパラメータについて一次のスプライン関数として表現されるものを扱った．

本論文の内容をまとめると次の通りである．

- 制御対象は LPV システムであり，その係数行列はスカラーのスケジューリングパラメータの一次スプライン関数で与えられる．

- 安定性・L_2 ゲイン性能を評価するパラメータ依存 LMI 条件と等価な LMI 条件を構成する方法を提案した．この方法のポイントは 元のパラメータ依存 LMI 条件の解をスプライン関数で表現したことである．また，スプラインの分割区間を小さくとれば，本論文で提案した有限個の LMI 条件が，パラメータ依存 LMI 条件の解の必要条件を満たすことを論理的に保証し，数値例でその有効性を確認した．

- 状態フィードバックによる制御系設計問題では，フィードバックゲインを本論文で提案した有限個の LMI 条件を解いて得られるスプライン関数で構成すればよいことを示した．

最後に，本提案法について，考察すべき事柄と今後の見通しを述べておく．まず，提案法と従来の研究 [4, 5, 6] に対して，計算効率・計算量と制御性能に関してより定量的な評価と考察が必要である．今後，状態フィードバックのみでなく出力フィードバックによるゲインスケジューリング制御系設計にも，本論文の提案法を拡張できるか検討することも重要である．文献 [8] で提案されている方法で，より一般的な LPV システムに対しても，本提案法が拡張できると思われる．

謝 辞

本研究を行うに当たって，親切な御指導を賜りました北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科 示村悦二郎教授に深く感謝の意を表します．さらに，本研究の端緒を賜り，常に有益な御教示，御助言，ならびに，忍耐強い励ましをして下さった増淵泉助手に心から感謝いたします．また，藤田政之助教授，Christoph Ament 助手他，諸先生に多くの御教示を受けたことに感謝の意を表します.

日頃，良き相談相手となっていただいたロボティクス講座 示村・藤田研究室の先輩諸氏，ならびに，ともに学んだ同輩，後輩諸氏に感謝いたします.

最後に，これまで著者の研究生活をささえてくれた両親に感謝いたします.

参考文献

[1] 内田，渡辺，藤田："ゲインスケジューリングの新しい展開"，電学論 C，Vol.116，No.10，pp.1085-1088，1996.

[2] A.Packard："Gain Scheduling via Linear Fractional Transformation"，Syst.Cont.Lett.，Vol. 22，pp.79-92，1994.

[3] 渡辺，内田，藤田，示村："スケジューリングパラメータを持つ線形システムの H^{∞} 制御"，計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.4, pp.481-488, 1995.

[4] 渡辺，内田，藤田："有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析" 制御理論シンポジウム，pp.9-14, 1995.

[5] 東，渡辺，内田："有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータをもつ線形システムの解析における凸包の構成法"，制御理論シンポジウム，pp.73-78, 1996.

[6] P.Gahinet，P.Apkarian and M.Chilali："Affine Parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty"，IEEE Trans. Auto. Contr.，Vol.41，pp.436-438，1996.

[7] Pierre Apkarian, Greg Becker, Pascal Gahinet and Hiro Kajiwara：LMI Techniques in Control Engineering from Theory to Practice, Workshop Notes CDC 1996, Kobe Japan.

[8] 増淵，示村："ディスクリプタ形式に基づくゲインスケジューリング制御系設計"，制御理論シンポジウム，pp.21-24，1997.

[9] J. S. Shamma and M. Athans："Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants"，IEEE，Trans.Auto.Contr.， Vol. 35，pp.898-907，1990.

[10] G.Becker, A. Packard, D.Philbrick and G. Balas：“Control of parametrically-dependent linear systems : a single quadratic Lyapunov approach”, Proc. of American Control Conference, San Francisco, June, pp.2795-2799, 1993.

[11] K.Poola and A.Tikku：“Robust Performance Against Time-Varing Structured Perturbations”, IEEE, Trans.Auto.Contr., AC 40-9, pp.1589-1602, 1995.

[12] 岩崎：LMI と制御，昭晃堂，1997.

[13] 桜井：スプライン関数入門，東京電機大学出版局，1981.

[14] Krstić, Kanellakopoulos and kokotović ; NonLinear & Adaptive Control Design, JOHN WILEY & SONS, INC., 1995.

[15] Hassan K. Khalil：NONLINEAR SYSTEMS second edition, Prentice Hall, Upper Saddele River, 1996.

[16] 西村，金井，村田：航空宇宙における誘導と制御，計測自動制御学会，1995.

[17] 吹田，新保：理工系の微分積分学，学術図書出版社，1987.