

Title	多軸自在継手を用いた可変構造の形態解析および一般逆行列に基づく流体解析
Author(s)	横須賀, 洋平
Citation	
Issue Date	2013-06
Type	Thesis or Dissertation
Text version	ETD
URL	http://hdl.handle.net/10119/11444
Rights	
Description	Supervisor: 松澤 照男, 情報科学研究科, 博士

多軸自在継手を用いた可変構造の形態解析および
一般逆行列に基づく流体解析

北陸先端科学技術大学院大学

横須賀 洋平

要旨

工学問題に対し、連立一次方程式を解くことは基本といえる。このような連立一次方程式を解く場面において、未知数と方程式の数が一致し、逆行列を定義できることが正確な解を求める為のひとつの必要条件となっている。これを平衡決定問題と呼ぶ。

一方で、物理現象における偏微分方程式を離散化する手法によっては、必ずしも平衡決定問題とはならず、未知数に対し方程式の数が不足している劣決定問題、あるいは未知数に対し方程式が上回る優決定問題といった工学問題も存在する。これらの問題に対して有用といえる、一意性をもつ一般逆行列であるムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて解く手法が存在する。

ムーア・ペンローズ一般逆行列は方程式の形によらず、最適解、時には唯一解を提供できる汎用性の高い逆行列の性質を持っている。これらの性質は、精度や計算負荷が許容される限り、物理現象に限定されず連立一次方程式を解く工学問題において、広く受け入れられる可能性を持つ。方程式の形に縛られない利点は、構造-流体連成問題において、活用できる可能性は十分にある。

本研究では、対象とする物理現象を構造と流体の場合、それぞれにおいてムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた数値解析手法の有用性を示す。

ひとつは可変構造を対象とし、変位を未知数とする変位法を主体とした境界条件が不足する劣決定問題として可変構造を解析モデル化し、形態解析手法を提案していく。まずは、可変構造の形態解析において、従来技術では解決できない節点オフセット問題を解消した多軸自在継手を考案し、その挙動を示すことで、解析モデルが、節点オフセットを考慮しない理想的なトラスモデルで作成される根拠を示す。次に、既往の研究によると不安定構造の安定化移行解析に用いられた手法を基に、多軸自在継手を有する可変構造の形態解析手法を提案する。ここでは、一次元要素に用いられた無歪や伸びなしの剛体変位を求める解析に対し、本論文では、物質定義を明らかとし拡張することで、二次元要素を用いた面積一定の条件や全長一定の条件を与えた多彩な可変構造の挙動を数値解析により示す。提案手法の妥当性は、解析解が得られている懸垂曲線を基に検証を行う。

もうひとつは流体を対象とし、非圧縮性流体の非定常粘性流れの流体解析にムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた手法を提案する。流体解析では、従来は分離解法を用いて、適当な境界条件を課し、圧力を変数とした平衡決定問題となる連立一次方程式に帰着させ、計算負荷の大きな逆行列演算をせず、反復法等を用いて解を得る手法が一般的である。ただし、扱う問題によっては、無限遠といった境界条件を与えたくない問題も存在する。このような問題において、一般逆行列理論が有用である可能性は十分ある。本論文では、非圧縮性流体の連続の式に着目し、流体要素の体積変化率がゼロといった条件から連続の式を満たす速度モード行列を求めて、Navier-Stokes 方程式を満たす手順を定式化する。SMAC 法による分離解法を参考として、定式化を行い、流体問題のベンチマーク問題として扱われる Cavity 流れの数値解析を実行し、提案手法を検証する。本来、Cavity 流れは平衡決定問題として解を得ることが可能であるが、本論文では、ムーア・ペンローズ一般逆行列の流体問題への適用可能性を検討するために連続の式を劣決定問題として離散化している。解の信頼性が高いといわれている Ghia らの結果と比較し、数値解の精度を検証する。

上記 2 つの問題を扱い、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた構造と流体の連成問題を解く可能性を示唆したうえで、最後に準静的な連成問題として、膜構造と流体によるポンディング現象を想定した問題を定式化し、数値解析を行う。

これらの問題では、いずれも数値解析の結果から妥当性が判断できる。したがって、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた数値解析手法は、これまで適用されてきた構造の問題に限らず、流体の問題でも有用であることが示された。ただし、非圧縮性流体の非定常粘性流れでは、一般逆行列を演算するための計算負荷の大きさから従来手法に代替できる手法と述べることは困難であるが、今後、可変構造と風の連成問題といった連成問題で活用できる可能性があることは十分示された。

Abstract

In many engineering problems, it is necessary to solve simultaneous linear equations. In this approach, to obtain a precise solution, the number of unknown quantities must be equal to the number of equations, and the inverse matrix of these equations must be defined. This calculation condition is required for a consistent system.

However, the linear system referred to as an underdetermined system, which does not possess a sufficient number of equations for the unknown quantities, is composed of the some discretization methods using partial differential equations for physical phenomena. Another linear system is the overdetermined system, which has more equations than unknown quantities. A useful method for solving all these problems is the unique Moore–Penrose generalized inverse matrix method.

The Moore–Penrose generalized inverse matrix is a versatile inverse matrix, which can provide the optimum solution, which is sometimes unique, regardless of the type of linear system being considered. Hence, the Moore–Penrose generalized inverse matrix can be applied to a wide variety of engineering problems, including fluid–structure coupled problems, provided that the accuracy and computational work load are adequate.

This thesis discusses the usefulness of the Moore–Penrose generalized inverse matrix on the basis of a numerical analysis of the physical phenomena that occur in structures and fluids.

Initially, I treat variable-geometry structures and propose the method of the shape-finding analysis of variable-geometry structures. This proposed analysis is based on a displacement method in which the unknown quantities are defined with the displacement vector. In general, this analytical model of variable-geometry structures becomes an underdetermined system due to a lack of boundary conditions. However, variable-geometry structures unavoidably have some small offsets between the rotational centers of the links.

In this manner, variable-geometry structures pose these difficult problems. Therefore, we propose a joint system called the “multilink spherical joint,” which can form an ideal truss structure without offsets. Forming this structure with a multilink spherical joint satisfies the requirement for the behavior of ideal truss structure models.

Subsequently, I propose the shape-finding analysis of variable-geometry structures based on the analysis of the stabilizing process for an unstable structure. In previous research, this analysis of the stabilizing process has been applied to one-dimensional elements functioning with a rigid body. However, in this thesis I define the virtual material of a one-dimensional element as a rigid body and extend the results to the case of multi-dimensional elements. In this manner, the numerical analysis makes it possible to show the variable behavior of structures with an incompressible body. I also validate the proposed method by applying it to the analysis of a catenary.

The method is also modified for the case of fluids. I propose an analytical method for an incompressible fluid using the Moore–Penrose generalized inverse matrix. We typically use the separating method in a fluid analysis, which means that we calculate the velocity and the pressure separately. In this method, we do not calculate the inverse matrix, because of the large calculation load, but instead use the iteration method.

However, there are difficult problems with an artificial boundary condition such as assuming an infinite distance. In such problems, there is some possibility of using the Moore–Penrose generalized inverse matrix because it can be applied without boundary conditions.

In this thesis, I propose an algorithm for solving the Navier–Stokes equation by calculating the Moore–Penrose generalized inverse matrix and the velocity mode matrix, whose values are given by the equation of continuity. This method is based on simplified mercer and cell (SMAC) method, and I validate it by solving the cavity flow problem, which is considered to be a benchmark test in fluid analysis, and by comparing it with Ghia’s numerical value. In addition to the above two physical phenomena, I treat the fluid–structure interaction problem as quasi-static. The results of this problem indicate the ponding phenomenon that occurs in the membrane structures.

As a result of these numerical solutions, I can conclude that these proposed methods are appropriate. Therefore, it is shown that the method of numerical analysis using the Moore–Penrose generalized inverse matrix is useful for not only a structure analysis but also a fluid analysis. However, it is difficult to determine the most efficient method for fluid analysis because of the large computational load required to calculate the Moore–Penrose generalized inverse matrix. In the future, I believe that this method will prove useful for the wind and variable-geometry structure interaction problem.

目次

1. 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	3
1.3 本論文の構成	4
2. 一般逆行列理論	6
2.1 優決定問題における最小二乗一般逆行列	6
2.2 劣決定問題におけるノルム最小一般逆行列	7
2.3 ムーア・ペンローズ一般逆行列	7
2.3.1 ムーア・ペンローズ一般逆行列と一般解	7
2.3.2 優決定問題	8
2.3.3 劣決定問題	9
2.4 反傾原理について	10
2.5 正射影行列について	11
2.6 可変構造に課される条件について	12
2.7 非圧縮性流体に課される条件について	14
3. 多軸自在継手と可変構造体	16
3.1 可変構造の背景	16
3.2 隔軸自在継手・多軸自在継手	19
3.2.1 隔軸自在継手	19
3.2.2 隔軸自在継手	26
3.3 可変構造体	29
3.3.1 剛体モデル	29
3.3.2 軸部直動モデル	32
4. 可変構造の形態解析	34
4.1 可変構造の形態解析の概要	34
4.2 物体の記述方法—Lagrange 記述—	34
4.3 構造体と要素の領域について	35
4.4 要素座標における支配方程式	35
4.5 境界条件	37
4.6 構成方程式	38

4.7 重み付き残差法による基礎式の導出	39
4.8 構成方程式を考慮した基礎式.....	40
4.9 要素座標における変位－体積歪関係式.....	41
4.10 全体座標における支配方程式.....	41
4.11 全体座標における変位－体積歪関係式・基礎式.....	42
4.12 要素離散化と離散化方程式.....	43
4.12.1 一次元要素.....	43
4.12.2 二次元要素.....	48
4.13 剛体変位・面積一定変位.....	53
4.14 応力の算出.....	54
4.15 全長一定変位.....	55
4.16 $\gamma^{(k)}$ の決定について.....	56
4.16.1 一次元要素.....	56
4.16.2 二次元要素.....	57
4.17 数値解析事例.....	59
4.17.1 懸垂線.....	59
4.17.2 剛体モデル.....	60
4.17.3 軸部直動モデル.....	63
4.17.4 曲面構造の最適形状.....	67
4.18 悪条件連立方程式について.....	71
4.19 まとめ.....	72
5. 非圧縮性流体の非定常粘性流れの流体解析	73
5.1 流体解析の背景.....	73
5.2 物体の記述方法－Euler 記述－.....	74
5.3 支配方程式.....	74
5.4 空間方向離散化－差分法－.....	75
5.5 時間方向離散化－一般逆行列を用いた SMAC 法－.....	77
5.6 境界条件.....	78
5.7 収束判定.....	80
5.8 数値解析事例.....	81
5.8.1 Cavity 流れ.....	81
5.8.2 境界条件が不足した Cavity 流れ.....	86
5.9 まとめ.....	90

6. 準静的な構造・流体連成解析	92
6.1 膜構造と流体のポンディング現象について.....	92
6.2 主要変数.....	93
6.3 膜要素の基礎式と離散化.....	93
6.4 流体要素の基礎式と離散化.....	95
6.5 連成方程式.....	96
6.6 数値解析事例.....	97
6.7 まとめ.....	100
7. 結論と今後の課題	102
7.1 結論.....	102
7.2 今後の課題.....	103
謝辞	104
参考文献	105
本研究に関する発表論文	108
査読付き論文.....	108
査読付き国際会議.....	108
国内会議.....	108
特許.....	108

第 1 章

序論

工学問題において、物理現象を捉えるために、連立一次方程式を解くことは必須といえる。例として、構造問題では、平衡方程式を導出し、与えられた外力に対して、変位を求めるために解く。流体問題では、分離解法では圧力に関する Poisson 方程式を解くことになる。これらの多くは、連立一次方程式の係数行列が正則となる平衡決定問題に帰着する。しかし、平衡決定問題にならない問題も存在し、その解法として有用な一般逆行列が存在する。本研究の数値解析手法で用いられる一般逆行列は、連立一次方程式の形が劣決定問題や優決定問題に対して、解を提供することができる。また、連立一次方程式が同次方程式となる場合でも、解を提供することができる。

現在、構造問題に対する一般逆行列の適用事例があり、流体問題に対する一般逆行列の適用事例はない。流体問題に一般逆行列を適用することが可能となれば、構造-流体連成問題を解く可能性が示唆できる。

以下、本研究の研究背景・目的および本論文の構成を述べる。

1.1 研究背景

近年、工学問題に対し、数値シミュレーションによって現象を捉え、問題解決を行う手段は一般化してきている。固体や流体を扱う各分野で理論が整備され、実用に供するソフトウェアも多数存在する。線形・非線形問題、静的・動的問題、定常・非定常問題、連成問題といった扱う問題や手法も多種多様な様相がある。これらの工学問題を数値解析的に解く基礎理論として連続体力学[1,2,3]や線形代数[4]が存在し、いずれも連立一次方程式を解くことが基本といえる。例えば、流体問題における移流項など、非線形項でさえ線形化によって線形方程式を解く問題に置き換えることも少なくない。このような連立一次方程式を解く場面において、未知数と方程式の数が一致し、逆行列を定義できることが正確な解を求める為のひとつの必要条件となっている。これを平衡決定問題と呼ぶ。

一方で、必ずしも平衡決定問題とはならず、未知数に対し方程式の数が不足している劣決定問題、あるいは未知数に対し方程式が上回る優決定問題といった工学問題も存在する。構造に関して述べると、境界条件が不足した不安定状態にある場合や境界条件が多く不静定状態にある場合などが挙げられる。これらの問題に対して有用といえる、一意性をもつムーア・ペンローズ一般逆行列(以下、一般逆行列とする)[5,6,7]を用いて解く手法が存在す

る。

劣決定問題や優決定問題は、解を正確に求めることは、平衡決定問題のように簡単にはいかない。劣決定問題では複数の解が存在する不定となり、優決定問題では解が求められない不能となる。しかし、一般逆行列を用いて解くことで、劣決定問題では解のノルムを最小とする、優決定問題では残差ノルムを最小とする解を求めることが可能であり、劣決定問題では余解を用いることで未定乗数を含んだ一般解を導出することも可能である。また平衡決定問題では、一般逆行列を用いることで、唯一解を求めることができる。必ずしもすべての行列に対して解を提供できるわけではないが、一般逆行列は方程式の形によらず、最適解、時には唯一解を提供できる汎用性の高い逆行列の性質を持っている。これらの性質は、精度や計算負荷が許容される限り、物理現象に限定されず連立一次方程式を解く工学問題において、広く受け入れられる可能性を持つ。しかし、広く工学問題として活用される可能性がありながら、応用されている研究分野が少ない。本研究では、一般逆行列を構造問題や流体問題に適用して、数値解析を行い、その有用性を示したうえで、構造一流体連成問題の適用可能性を示すことが趣旨である。

構造問題では、解析対象として可変構造を想定する。可変構造は、従来の動く構造物全般を対象としているが、主に軸部材で組み立てられたトラス状構造物の形状が自在に変化する構造体を想定する。このような構造体の形態解析に一般逆行列や、これに類する疑似逆行列が用いられる事例は存在する。建築構造では、不安定構造の形態解析[5,6]や、ロボット工学では、冗長性機構における逆運動学による構造体姿勢の追跡である[8]。その他、統計学や画像処理[9]の分野などで応用されている。

しかし、これらの数値解析において、不安定構造の事例は、可変構造を想定しているというより、むしろ膜やケーブルなどの材料を解析対象として、曲げ剛性が低いために生じる剛体変位を実現することを想定している。ロボット工学の事例では、二次元平面を想定する、あるいは、三次元空間を想定する場合は接合部による誤差の影響を無視できることを前提としている場合が多い。ここでの接合部の誤差とは、従来の自在継手機構は、構成できる軸数がせいぜい2,3軸程度であり、多軸で構成する場合は、単純な一軸回転機構を複数配置することとなり、節点オフセット[10]が必ず生じるため、解析挙動と実挙動に誤差が生じうるという意味である。したがって、接合部の誤差の影響を考慮した解析を実行するか、解析挙動と実挙動が適合するような多軸自在継手がのぞまれる。

なお、既往の研究では、解析に用いられる離散化要素に一次元トラス要素を用いる事例が多く、これらは剛体として扱われるものの、二次元要素や三次元要素に拡張できるような一般形の物質定義、すなわち構成方程式は定義せずに、解析が行われている。これは、想定している問題にその必要性がない、あるいは問題を簡略化する意味では有効といえるが、さらなる理論拡張を行い、要素の次元数が増える問題を想定すれば、必然的に物質定義を考慮する必要がある。一次元要素では剛体として扱われる問題が、二次元要素ではどのような現象として現れるか、検討する必要がある。離散化の流れや境界条件をどのよう

に定義していくか、明らかにする必要がある。

このような可変構造を実現するための乗り越えるべき工学的な壁は、他にも多々存在するが、最終的に考慮すべき問題として、構造体全体として柔軟であり剛ではない特徴から、建築物として応用する場合には、風による外乱の影響を受けやすいことが考えられ、構造一流体連成解析が必要と位置づけられる。

次に、流体問題について説明すると、流体問題に一般逆行列が適用されている事例はない。なぜなら、流体問題では大規模な問題を扱うため、連立一次方程式を解く際に、計算機メモリの負担が大きいと、逆行列演算は行わないことが多い[11]。一般的には、非圧縮性粘性流体の問題では、分離解法を適用すれば、圧力に関する Poisson 方程式を解く必要が出てくる。これを解くために、計算機メモリの負担が少ないガウスザイデル法やSOR法といった反復法がよく用いられる。これらは収束計算を行うことになり、不安定な問題では解が発散することもある。離散化手法によっては、高レイノルズ数流れのように不安定で収束が困難な現象があることが知られている。このような問題に対して、安定に解を提供できる一般逆行列の有用性が示される可能性は十分にある。また、一般逆行列を流体問題へ適用することが可能となれば、既往の研究で適用されている構造問題や本研究で想定している可変構造などと組み合わせて、構造一流体連成解析が適用できる可能性が示唆される。

本研究では、上記のような背景から、構造問題で考えられていた一般逆行列による手法を可変構造に適用することで、さらなる理論拡張を行い、流体問題へ応用することで、流体問題でも有用であることを示す。そして、これらを含めた工学問題としての構造一流体連成問題の可能性を示す。

1.2 研究目的

本研究の目的は、大きく捉えると可変構造における一般逆行列を用いた構造一流体連成問題への足掛かりを与えるものである。しかし、そこに至るための構造問題、流体問題それぞれの一般逆行列理論の適用と理論拡張が必要といえる。さらに、解析の問題以前に、可変構造の前提として、解析挙動と実挙動の適合の問題がある。これらを逆にたどり、本論文の目的を説明すると、以下のとおりである。

- a) 解析挙動と実挙動の適合を実現するために、節点オフセット問題を解消した多軸自在継手を提案する。これを接合部に用いることにより、理想的なトラス状可変構造による形態解析と実挙動が適合すると考えられる。
- b) 一次元トラス要素の概念に物質定義を行い、二次元要素に拡張する。これらを可変構造に応用した形態解析手法を提案する。本論文では、可変構造に、非圧縮性と応力の偏差成分を無視した物質定義を行い、一次元要素では、剛体変位、二次元要素では、面積一定変位が実現できることを示す。なお、これらの定式化には、有限要素法の理論の流

れに従うことで、本手法と有限要素法の異なる点を明らかとする。

- c) 剛体変位や面積一定変位をさらに拡張することで、一次元要素の全長一定変位、二次元要素の表面積一定変位が実現できることを示す。本論文では、全長一定変位を考慮することで、可変構造に多彩な挙動が生じうることを、数値解析を行うことにより示す。
- d) 本論文で扱う要素は、全体座標数と要素座標数が一致しない問題もある。これに対して、微分の連鎖則を用いた座標変換が有効な手立てであることを示す。なお、ここでも、要素毎の小さな長方形列を扱うため、一般逆行列を用いている。
- e) 一般逆行列理論を適用しても解けない問題があり、その原因が悪条件連立一次方程式となっていることを明らかとし、現段階で一般逆行列の近似解法を用いることが有効な手法であることを示す。
- f) 一般逆行列理論を流体問題へ適用して、非圧縮性粘性流体の非定常流れ場の数値解析を行う。ここでは、圧力勾配項と連続の式が反傾原理にあることを明らかとし、一回の一般逆行列演算を行えば、圧力に関する Poisson 方程式を解く必要がなく、行列(一般逆行列)とベクトルの内積演算だけで、毎ステップの解が求まることを示す。これにより、得られた解を検証し、一般逆行列理論を用いた流体解析の有用性を示す。
- g) 一般逆行列理論の特徴として、境界条件が不足した問題も解けることを流体問題で示す。
- h) 構造-流体連成問題の適用可能性を検討するために、準静的な構造-流体問題として、膜と流体のポンディング現象問題を扱い、数値解析を行う。

以下、本研究の目的に対する考察を述べる。

連立一次方程式の形を考えると、可変構造は本質的に境界条件を不足していることになるが、本来非圧縮性流体の流体解析は、圧力の Poisson 方程式を導けば、平衡決定問題に帰着する。わざわざ、劣決定問題として計算機メモリの負担が大きくなる一般逆行列を用いて解く手法を提案し、連立一次方程式の形を崩す必要があるだろうか、という疑問が残る。

これに対し、そもそも、Navier-Stokes 方程式に解析解が存在するか、証明されておらず、近似解による現象の数値シミュレーションが先行して研究されている現状がある。近似精度を許容したうえで、取り扱う現象によって実用に供するものも存在するが、不安定で解けない、あるいは困難な問題も存在する。これらをエビデンスと考えれば、一般逆行列を用いる有用性は十分ありうる。

また、平衡決定問題に持ち込むことは、本来、圧力の定義点と速度の定義点が一貫していなければならない。このように離散化すると、圧力振動が起こる問題が知られている[12]。これを避けるために、差分法による圧力と速度の定義点を変えた離散化を行う場合が多い。この場合、内挿するか、平均化操作をして、速度の定義点を調整することもしばしば行われている。

この問題を一般逆行列が本質的に改善できるかどうかは、現状わからない。ただし、平

平衡決定問題に持ち込むことなく、解を提供することは可能である。今後の可能性を踏まえて、一般逆行列を用いた数値解析手法の定式化と検証を行うことは重要と考えられる。

1.3 本論文の構成

本論文では、本研究の概要を第 1 章の序論で述べる。以降の章では、物理現象に沿って、数値解析を行う。第 2 章では一般逆行列の理論と解の特性について述べる。第 3 章では、可変構造に用いられる多軸自在継手の提案を述べ、第 4 章では、可変構造の形態解析手法について述べる。可変構造の新たなモデルを提案し、数値解析を行うことで、その実現性を述べる。第 5 章で非圧縮性流体の非定常粘性流れの流体解析を扱う。一般逆行列を用いた流体解析の定式化を行い、数値解析を行うことで、一般逆行列の有用性を検証する。第 6 章では、準静的な構造・流体連成解析を扱う。膜構造と流体のポンディング現象を対象としている。第 7 章で結論と今後の課題を述べる。

第 2 章

一般逆行列理論

本章では、本研究の礎ともいえる一般逆行列理論について、既往の研究を概観することで、解の性質を述べる。また、本研究を通して明らかとなった可変構造や非圧縮性流体に課される条件と対応する現象についてあらかじめ概観する。

一般逆行列は、すべての行列に対して適用され、唯一存在する逆演算子と定義される行列のことである。E.H.Moore が最初に定義し、後に R.Penrose により再発見され整理されたといわれている[7,13]。

取り扱う規範に応じて様々な一般逆行列が存在する。そのため、一般逆行列を利用する前に、解の性質を知ることが重要と考える。はじめに、連立一次方程式の係数行列が長方形となる優決定問題(過剰決定系とも呼ばれる)に対する最小二乗解、劣決定問題(過少決定系とも呼ばれる)に対するノルム最小解を求める一般逆行列を導出することで、与えられる解の性質を述べる。次に、一意性を持つムーア・ペンローズ一般逆行列とその性質を述べる。また、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて表される一般解の解釈と余解の精度、反傾原理、正射影行列について述べる。

2.1. 優決定問題における最小二乗一般逆行列

ここに、 A を $m \times n$ 行列、 \mathbf{x} を n 次元列ベクトル \mathbf{y} を m 次元列ベクトルとする。ランク r として、連立一次方程式は次のように定式化される。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2-1)$$

上記、連立一次方程式は $m > n = r$ となる場合、係数行列 A が縦長行列となる優決定問題となる。このような問題における最小二乗一般逆行列は以下のように定義される。

$$A^- = (A^T A)^{-1} A^T \quad (2-2)$$

また、一般形は未知定数行列 E を用いて、以下となる。

$$A^- = (A^T A)^{-1} A^T + (I - (A^T A)^{-1} A^T A)E \quad (2-3)$$

右辺第 2 項は誤差項である。 I は単位行列である。未知定数行列 E により最小二乗一般逆行列は複数存在することになる。また、 A^- の一般形は以下の条件を満たしている。

$$A A^- A = A \quad (2-4)$$

$$(A A^-)^T = A A^- \quad (2-5)$$

式(2-4)は、一般逆行列の必要十分条件であり、式(2-5)は最小二乗一般逆行列の条件である。

このような、優決定問題の最小二乗一般逆行列は、残差ベクトルの二乗を目的関数とした制約なしの最適化問題を自動的に満たしていることになる。導出方法については、参考文献[9]等を参照されたい。

2.2. 劣決定問題におけるノルム最小一般逆行列

未知数が方程式の数を上回る場合、すなわち劣決定問題を考える。式(2-1)で表される連立一次方程式は $n > m = r$ となる場合、係数行列 A が横長行列となる劣決定問題となる。このような劣決定問題におけるノルム最小一般逆行列は以下のように定義される。

$$A^- = A^T(AA^T)^{-1} \quad (2-6)$$

一般形は以下となり、

$$A^- = A^T(AA^T)^{-1} + E(I - AA^T(AA^T)^{-1}) \quad (2-7)$$

前出と同様、右辺第 2 項は誤差項である。このように定義されるノルム最小一般逆行列は複数与えられることになる。 A^- は次の条件を満たす。

$$AA^-A = A \quad (2-8)$$

$$(A^-A)^T = A^-A \quad (2-9)$$

式(2-8)は、式(2-4)と同様、一般逆行列の必要十分条件であり、式(2-9)はノルム最小一般逆行列の条件である。劣決定問題のノルム最小一般逆行列は、残差ベクトルが $\mathbf{0}$ となる等式制約条件をもとに、特解の二乗ノルムを目的関数とする制約付きの最適化問題を自動的に解いていることになる[9]。

ここで、最小二乗型とノルム最小型の一般逆行列いずれも、 $A^T A$ と AA^T の逆行列を導出していることになるため、これらの逆行列が存在する必要がある。如何なる場合でも一般逆行列が存在するとは限らない。

2.3. ムーア・ペンローズ一般逆行列

2.3.1. ムーア・ペンローズ一般逆行列と一般解

前節で与えられた最小二乗型もノルム最小型の一般逆行列の一般形は式(2-3)、式(2-7)より未知定数行列 E を含んだもので、一意に決定できない欠点がある。これを克服した一般逆行列がムーア・ペンローズ一般逆行列である。次の条件を満たす A^+ はムーア・ペンローズ一般逆行列である。

$$AA^+A = A \quad (2-10)$$

$$(AA^+)^T = AA^+ \quad (2-11)$$

$$(A^+A)^T = A^+A \quad (2-12)$$

$$A^+AA^+ = A^+ \quad (2-13)$$

式(2-11)の最小二乗型と式(2-12)のノルム最小型が満たす条件をすべて満たし、かつ式(2-13)の条件を付けくわえた形で表される。この条件は反射型一般逆行列と呼ばれる一般逆行列の性質を表し、 A と A^+ のランクが同じとなる性質を持つ。この4つの条件を基に、ムーア・ペンローズ一般逆行列が一意であることを示すことが可能となる。

ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて式(2-1)の一般解は以下となる。

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{y} + (I_n - A^+ A) \boldsymbol{\alpha} \quad (2-14)$$

右辺第1項は、特解、第2項は余解に相当する。 $\boldsymbol{\alpha}$ は任意の列ベクトルである。

ここで、優決定問題は、未知数に対し方程式の数が多いことから、方程式の解が求まらない不能となる場合が多い。また、劣決定問題は、必ず解が求まる不定となる。このような解の存在条件を検証するために、下式を用いる。

$$(I_m - AA^+) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2-15)$$

上式を満たす場合、解が存在することになる。解が存在する場合、特解はノルム最小解となり、解が存在しない場合、ノルム最小、かつ最小二乗解となる。

なお、こうして与えられるムーア・ペンローズ一般逆行列には様々な性質が存在する。本論文では割愛するが、参考文献[5,6,7,9]等を参照されたい。特に、本論文で引用される性質として、以下を挙げておく。

$$(A^T)^+ = (A^+)^T \quad (2-16)$$

2.3.2. 優決定問題

本項では優決定問題におけるムーア・ペンローズ一般逆行列と解の形を与える。一般的に、ムーア・ペンローズ一般逆行列の表現形式や求め方には様々な存在する。詳細は参考文献[5,6,7,9]を参照されたい。代表的な求め方に特異値分解などがある。

フルランクの優決定問題におけるムーア・ペンローズ一般逆行列は、式(2-2)と同様に、以下のように表すことができる。

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (2-17)$$

フルランクの係数行列 A に対し与えられる、上記の一般逆行列を擬逆行列とも呼ばれている。あらかじめ、与えられる行列 A の性質がわかっているならば、これも有用であることがわかる。

式(2-17)のムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて、優決定問題における式(2-1)の連立一次方程式の解は、以下となる。

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{y} \quad (2-18)$$

優決定問題に与えられる解は、解の存在条件を満たさない場合が多く、ノルム最小かつ最小二乗解となる。

2.3.3.劣決定問題

本項では劣決定問題におけるムーア・ペンローズ一般逆行列と解の形を与える。フルランクの劣決定問題におけるムーア・ペンローズ一般逆行列は、式(2-6)と同様に、以下のよう表すことができる。

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \quad (2-19)$$

式(2-16)と同様、上記の一般逆行列を擬逆行列とも呼ぶ。

式(2-18)のムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて、劣決定問題における式(2-1)の連立一次方程式の解は、以下となる。

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{y} + (I_n - A^+A)\boldsymbol{\alpha} \quad (2-20)$$

劣決定問題に与えられる解は、必ず解の存在条件を満たすため、上式の右辺第 1 項の特解はノルム最小解となる。

ここで、余解について述べる。余解は劣決定問題のときに、必ず存在し、以下に表される同次方程式を満たす解である。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2-21)$$

また、余解は誤差を修正する項となっている[6]。

ここで、余解の精度について検証する。式(2-20)の一般解を以下のように表す。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_c \quad (2-22)$$

\mathbf{x}_p は特解、 \mathbf{x}_c は余解である。式(2-20)から余解は以下のように表される。

$$\mathbf{x}_c = (I - A^+A)\boldsymbol{\alpha} \quad (2-23)$$

である。ここで、両辺 A をかけて、

$$A\mathbf{x}_c = A(I - A^+A)\boldsymbol{\alpha} \quad (2-24)$$

右辺より、任意である $\boldsymbol{\alpha}$ は除外して、

$$A(I - A^+A) = A - AA^+A \quad (2-25)$$

となる。ムーア・ペンローズ一般逆行列の 4 つの条件のひとつ(2-10)から、上式の右辺は 0 となることは明らかである。すなわち、任意である $\boldsymbol{\alpha}$ に関係なく、一般逆行列の定義から余解は厳密に同次方程式を満たすことがわかる。ただし、計算機による打ち切り誤差は生じる。

後述することになるが、本論文で用いられる解析事例には、変位や速度を求解する場面において、劣決定問題を扱うことが想定され、主に余解を重要視し、論を構成していく。すなわち、式(2-20)の同次方程式を満たす解が可変構造や非圧縮性流体を扱う上で、有用と考える。また、応力や圧力を求解する場面において、優決定問題を扱うことが想定される。

解析事例によってフルランクとなり、かつ後述する反傾原理があれば、式(2-16)の関係から、式(2-17)、(2-19)のいずれか一方のムーア・ペンローズ一般逆行列を利用すればよいことになる。

ここで、本節で述べたムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた解の性質をまとめて Fig.2-1 に記す.

式の形	解の形
$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix}$ <p>劣決定問題 ($n < m = r$)</p>	$\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A^+ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix} + \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ I - A^+A \end{matrix} \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \alpha \end{matrix}$ <p>特解：ノルム最小解 余解：同次方程式を満たす解 誤差の修正項</p>
$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix}$ <p>平衡決定問題 ($m = n = r$)</p>	$\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A^+ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix}$ <p>唯一解</p>
$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix}$ <p>優決定問題 ($m > n = r$)</p>	$\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{x} \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ A^+ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{y} \end{matrix}$ <p>ノルム最小かつ最小二乗解</p>

Fig.2-1 式の形と解の形

左は各方程式の形を示し、右は方程式に対する解の形とその性質を示し、対応関係を明示したものである。なお、上図で示されるとおり、平衡決定問題に対するムーア・ペンローズ一般逆行列の働きは、通常の逆行列と同様の働きをし、解は唯一解となる。

2.4. 反傾原理について

いずれも係数が $m \times n$ の長方形行列となる 2 つの方程式に対して、以下の関係が成り立つとき、反傾関係が成立している。ここで、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は n 次元ベクトル、 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ は m 次元ベクトルと

する.

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 \quad (2-26)$$

$$B\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (2-27)$$

$$A^T = B \quad (2-28)$$

ここで、式(2-26)、(2-27)の係数行列 A と B のムーア・ペンローズ一般逆行列 A^+ と B^+ の関係をみると、式(2-16)を用いて、以下となる.

$$A^+ = ((A^T)^+)^T = (B^+)^T \quad (2-29)$$

両辺転置を取れば、以下となる.

$$(A^+)^T = B^+ \quad (2-30)$$

このような関係にあるとき、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ がいずれも独立変数であっても、一方のムーア・ペンローズ一般逆行列が得られれば、もう一方の連立方程式の解も得られることになる. このような関係を利用することにより、本論文では、構成方程式に独立変数が与えられても、2つの方程式の解が得られることになる. このような反傾関係が成立している事実を反傾原理と呼ぶ.

2.5. 正射影行列について

以下の関係を満たす正方行列のことを射影行列と呼ぶ[5,6,7].

$$P^2 = P \quad (2-31)$$

P が射影行列のとき、以下も射影行列となる.

$$I - P \quad (2-32)$$

射影行列の中で、対称行列となるものを正射影行列と呼ぶ.

$$P^2 = P \quad \text{かつ} \quad P^T = P \quad (2-33)$$

P が正射影行列のとき、 $I - P$ も正射影行列となる.

ムーア・ペンローズ一般逆行列により表される以下の4つの行列はそれぞれ正射影行列の性質を持つ.

$$AA^+ \quad (2-34)$$

$$A^+A \quad (2-35)$$

$$I_m - AA^+ \quad (2-36)$$

$$I_n - A^+A \quad (2-37)$$

本論文の中では、式(2-37)の正射影行列が、零空間への正射影行列となり、可変構造における剛体変位モード行列や流体問題における連続の式を満たす速度モード行列として用いられる.

上記、関係式は一般逆行列理論の中では、既知の事実であり、本論文では次式の関係を用いて、第5章の流体問題を解くことになる. 以下、次式の導出を示す.

正射影行列 P のムーア・ペンローズ一般逆行列は以下のように表せる.

$$P^+ = P \quad (2-38)$$

上式の関係は、特異値分解を用いて、以下のように示せる。任意の $m \times n$ の行列 A は、特異値分解により、以下となる。

$$A = U \Sigma V^T \quad (2-39)$$

ここで、 U, V はそれぞれ m 次元、 n 次元の正規直交基底を並べたものである。ここで、行列 A のランクに該当する特異値行列 Σ を Σ_r とすれば、 Σ_r は AA^T あるいは、 $A^T A$ の非零固有値 λ_i の正の平方根 μ_i を対角に並べたものである。

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_r \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (2-41)$$

また、特異値分解により、ムーア・ペンローズ一般逆行列は以下となる。

$$A^+ = V^T \Sigma^{-1} U \quad (2-42)$$

ここで、任意の行列 A を正射影行列と考えれば、

$$P^T P = P P^T = P \quad (2-43)$$

より、正射影行列 P の特異値 ${}_P \mu_i$ と非零固有値 ${}_P \lambda_i$ の関係は以下となる。

$${}_P \mu_i = \sqrt{{}_P \lambda_i} = {}_P \lambda_i \quad (2-44)$$

また、特異値 ${}_P \mu_i$ の関係は以下となり、

$${}_P \mu_i = {}_P \mu_i^2 = 1 \quad (2-45)$$

Σ_r は単位行列となることがわかる。したがって、 $\Sigma_r = \Sigma_r^{-1}$ となるため、式(2-38)の関係は示せる。

2.6. 可変構造に課される条件について

前節までに、一般逆行列の解の性質を述べ、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた連立一次方程式の一般解や優決定問題、劣決定問題における解の形を示した。一般解の右辺第 2 項の余解は、劣決定問題の特解で生じる誤差の修正項として与えられるが、一方で、同次方程式を満たす解と捉えることができる。式(2-21)を再録する。

$$Ax = 0 \quad (2-46)$$

上式は、ムーア・ペンローズ一般逆行列による余解を用いれば、右辺のベクトル量を 0 とする解を求めることが可能であることを意味する。

余解を用いる解析手法は、既往の研究では、変位-伸び関係式や変位-歪関係式を上式で表し、右辺に与えられる伸びや歪を 0 とする不安定構造の安定化移行解析[5,6]などに用いられている。

本論文では、可変構造に課される条件を与えるために、余解を用いる手法を使用する。
 Fig.2-2 にそれぞれの条件と現象を示す。

可変構造					
	課される条件		→	現象	
	一次元要素	二次元要素		一次元要素	二次元要素
$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	歪 $\frac{\Delta dL}{dL}$	面積変化率 $\frac{\Delta dA}{dA}$	= 0	剛体変位	面積一定変位
$\int_{\Omega^k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$	伸び ΔdL	変形量 ΔdA		剛体変位	面積一定変位
$\sum_{\Omega^k=1}^g \int_{\Omega^k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$	全長伸び $\sum_{\Omega^k=1}^g \Delta dL$	全面積変形量 $\sum_{\Omega^k=1}^g \Delta dA$		全長一定変位	表面積一定変位

Fig.2-2 可変構造に課される条件と現象

Fig.2-2 に示される条件は、可変構造を一般形(二次元要素, 三次元要素に拡張すること)に表すことを前提に、条件をまとめたものである。左側の表に表される各物理量を 0 とする条件を用いることで、右側の表に表される各現象を取り扱うことが可能となる。

本論文で用いられる可変構造では、非圧縮性を考慮するために、体積歪を 0 とする。体積歪が一次元要素に縮退した場合は、軸歪となり、二次元要素に縮退した場合は、面積変化率となる。この条件を与えることで一次元要素では、剛体変位が可能となり、二次元要素では、面積一定変位が可能となる。面積一定変位は、面積を一定としたまま、形状は自在に変形することを許容した変位である。さらにこれを拡張し、全長一定変位や表面積一定変位が可能となる。全長・表面積一定変位は、一定とするための条件を個々の要素に限定せずに、適用する要素全体の中で条件を与える。これらの各現象を Fig.2-3 に示す。

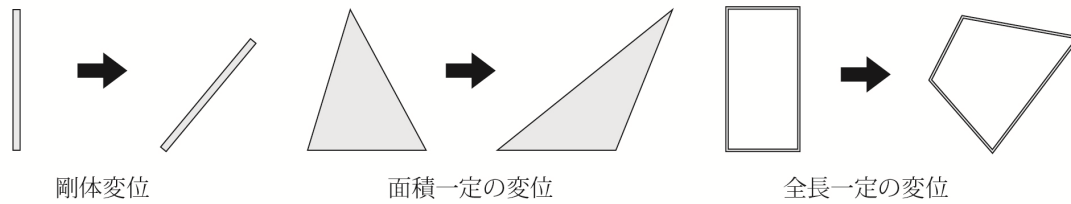


Fig.2-3 剛体変位・面積一定変位・全長一定変位

本論文では，トラス要素や三角形定ひずみ要素といった一次元要素，二次元要素を取り扱うが，三次元要素に拡張することも考えられる．また，このように与えられる変位-体積歪関係式を基に構成された連立一次方程式は，横長の長方形行列となり，劣決定問題の形をとる．これは，可変構造により変位に関する境界条件が不足していることに起因する．したがって，余解を用いた手法が可能となる．可変構造に関する定式化については，第 4 章にて後述する．

2.7. 非圧縮性流体に課される条件について

非圧縮性流体では，質量保存則から導出される連続の式を満たす条件を与える．連続の式は，圧縮性流体においては密度が変化することも考慮するが，非圧縮性流体の連続の式は，密度を一定とすることで，流体要素の体積変化率を 0 とする条件に帰着する．下式のように， \boldsymbol{v} を速度とした速度場の発散で与えられる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2-47}$$

解析空間が二次元平面で，二次元要素や格子を用いる場合は，可変構造で与えられる面積を一定とする条件と同様である面積変化率を 0 とすることにより，非圧縮性流体の連続の式を満たす条件を与えることが可能である．

Fig.2-4 に，Fig.2-2 と同様に非圧縮性流体に課される条件と現象を示す．扱う変数は異なるが，Fig.2-4 から可変構造の面積一定変位のための条件と非圧縮性流体の連続の式を満たす速度は，同様の式によって表現できることがわかる．

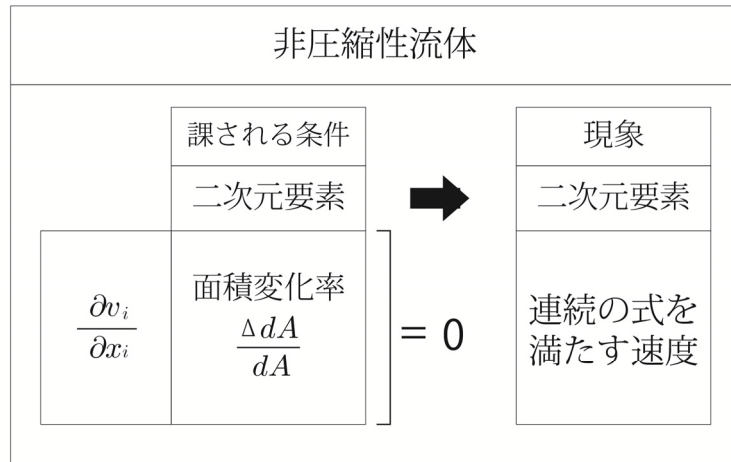


Fig.2-4 非圧縮性流体に課される条件と現象

本論文では、連続の式を基に離散化方程式をたてる。この場合、ひとつの格子に対して、ひとつの方程式が成り立ち、X、Y方向に速度の未知変数が与えられる。したがって、連立一次方程式は、横長の長方形行列となり、劣決定問題の形をとる。

可変構造と非圧縮性流体の問題を応用して、準静的な構造・流体連成問題を考える。本論文では、構造として、膜構造を想定し、全長一定の変位となる条件を与える。流体には、面積一定の変位となる条件を与える。詳細については、第6章で述べる。

Fig.2-2 や Fig.2-4 に示される各条件は、線形化に起因し、解析ステップが増加するにつれ蓄積する誤差を除けば、基本的に一般逆行列の定義から、すなわち第 2.3.3 項の式(2-21)～(2-25)の関係から、厳密に満たすことができる。

第3章

多軸自在継手と可変構造体

本章では，多軸自在継手と可変構造体について述べる．多軸自在継手は著者らにより考案されたジョイント機構であり，既往の研究では実現が困難な節点オフセットが生じない多軸継手を実現している．節点オフセットが生じない可変構造は，その挙動を理想的なトラス形状として形態解析を行うことに価値が生まれることになる．このような多軸自在継手を用いた可変構造の代表モデルを剛体モデルと軸部直動モデルに分類し，可変構造体として提案する．

3.1 可変構造の背景

既往の研究では，可変構造として統一的理解で述べられた論文は例が少なく、展開構造 [14,15](Fig.3-1)や、適応構造物，知的適応構造物などの呼び名で論が展開されてきている．主に，機械，宇宙，建築といった分野でそれぞれの目的に適合したハードウェアを取り扱っている．これらの目的も多岐にわたり，収納・展開可能な構造 [14,15]や，Variable Geometry Truss(VGT)にみられる宇宙空間での構造制御 [16,17] (Fig.3-2)などが含まれる．規模を小さくすれば，パラレルリンク機構の工作機械や産業用ロボットも関連してくる [18]．また，応用数理では，折り紙の問題を扱う分野もある [19]．それぞれが多リンクと多自由度といった共通の概念を持ちながら，独自に研究されてきた．また，上述の中には，剛体で構成され，何等かの機構を有し，外力により挙動する構造物と，軸部材に何等かのアクチュエータが付与され，制御される構造物に分けられる．本研究で使用する可変構造の意味は，これらを包含する意味で使用する．

Fig.3-1,2 において，可変構造の事例として，展開構造と VGT の紹介をする．Fig.3-1 は，展開構造の先駆的研究者である Emilio Perez Pinero による展開構造の事例である．軸部中間に設けられる三又の接続部材と，軸端部に設けられる接続部材，軸部材により織りなす展開構造であり，シザーズ型展開構造とも呼ばれる．左図は，収納状態を表し，右図は，展開状態を表す．Fig.3-2 は，VGT の事例であり，VGT はアメリカ航空宇宙局 NASA において 1980 年代から 90 年代にかけて，精力的に研究開発が行われてきた．Fig.3-2 は 1985 年に NASA ラングレー研究所にて製作された double octahedral VGT である．図の中央の三角形をなす部材それぞれが，直動アクチュエータにより伸縮することで形状変化を可能とする．

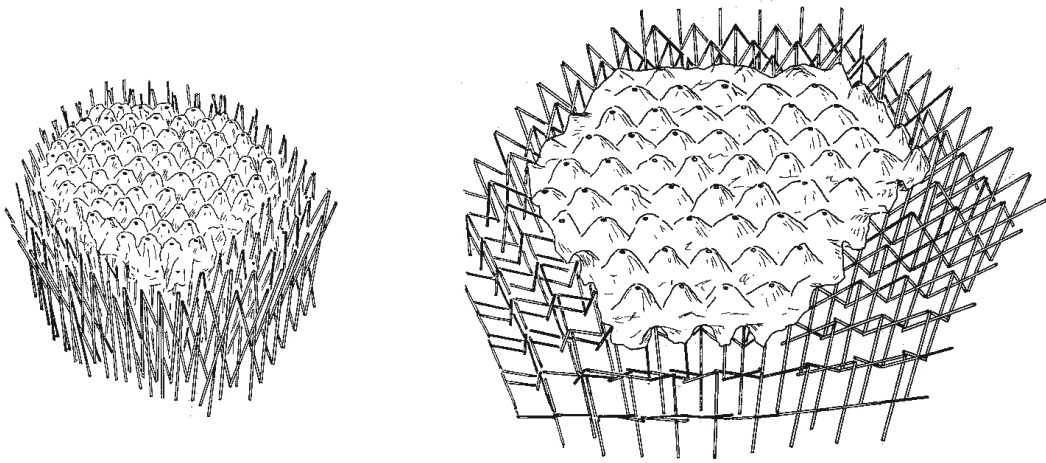


Fig. 3-1 展開構造の事例：三次元網状構造物 [15]

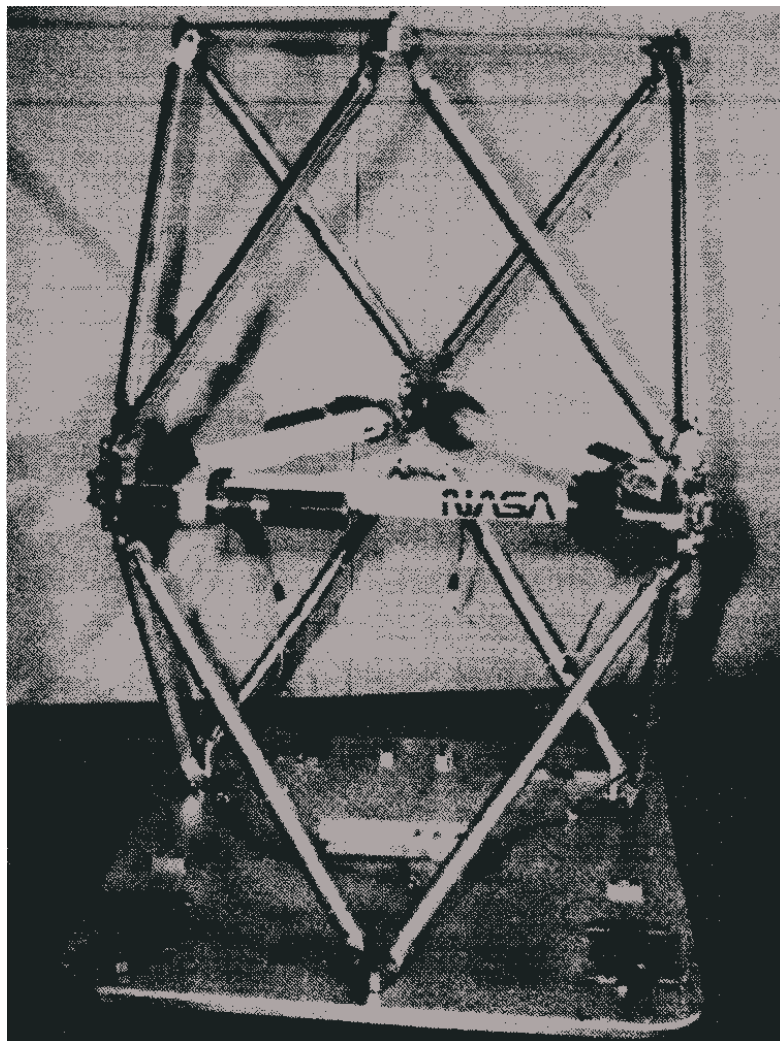


Fig.3-2 VGTの事例：NASA VGT ハードウェア [16]

また、上述の可変構造、特に VGT の研究において、ジョイント機構に関する言及は、新規性を持った機構への言及は少なく、主に現状考えられるジョイント機構の組み合わせで論じられることが多い。

このような場合、節点オフセットと呼ばれる複数のジョイントの回転中心間のオフセットが避けられないことが指摘されている。Fig.3-3 に節点オフセットが生じる多軸の自在継手を事例として挙げる。本来、理想的な回転中心点は継手の中央に位置するべきであるが、従来の継手機構では、全ての軸部材がそれを共有することが困難であり、複数の回転中心軸が存在し、それらは理想的な回転中心点から外れることになる。図に示されるような複数の回転中心軸同士の距離が節点オフセットと呼ばれている。

また、このような継手を有する構造体の数値解析により挙動を示すには、節点オフセットを考慮する必要がある。この場合、数値解析にも誤差が含まれ、節点オフセットの距離が部材長の 1%程度に収まる設計を要求する必要があるとしている[10]。加えて、節点オフセットがあることで、回転中心付近に曲げやねじれといった応力が発生すると考えられる。これは、大規模な構造物になれば、無視できないものとなるだろう。

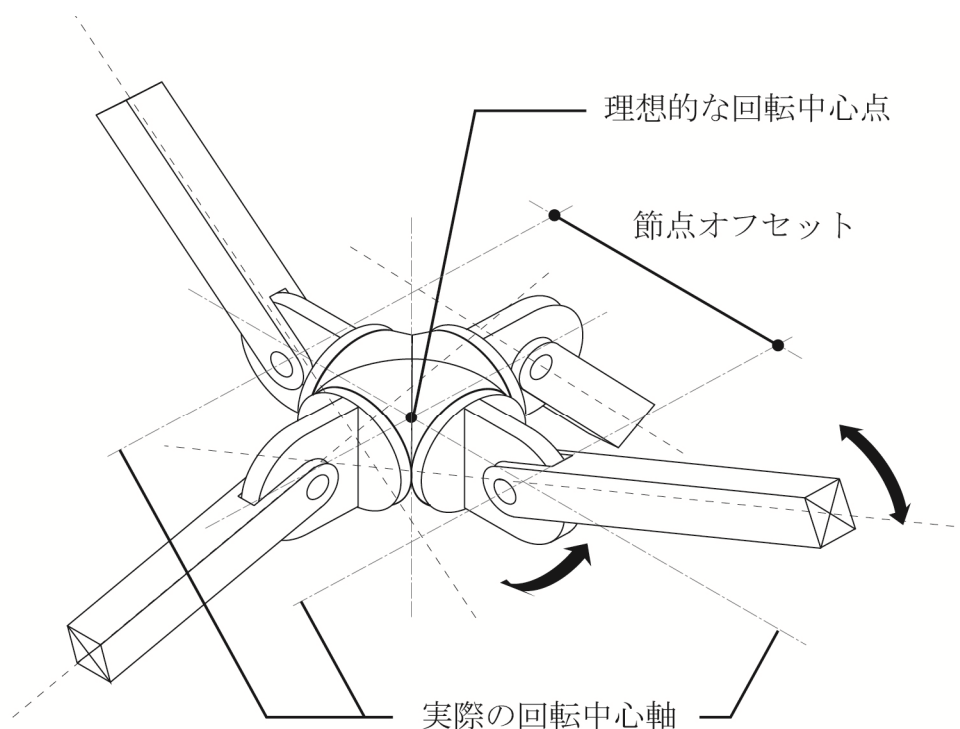


Fig. 3-3 節点オフセットが生じる多軸自在継手の事例

本研究では、節点オフセットが生じない多軸自在継手を考案し、可変構造に用いることを想定する。可変構造では、剛体で構成され、何等かの接合部機構を有し、外力により挙

動する構造物を剛体モデルとする。さらに何等かのアクチュエータが付与され、制御される構造物を軸部直動モデルとして、可変構造物を提案する。また、次章において、これらの構造物を実現するために、形態解析を行う。この数値解析では、理想的なトラス形状として数値解析を行っている。これは、多軸自在継手を用いることを想定しており、節点オフセットを考慮しない形態解析が有用であると考えているためである。

なお、既往の研究による多軸のジョイント機構に関する研究について、文献[20]を参照されたい。

本論文では、多軸自在継手の詳細について説明する。また、剛体モデルとして、任意の自由曲面を構成する可変構造物を提案する。軸部直動モデルとして、Tetrahedral Walker を模した可変構造物を提案する。各モデルの提案意図を含め、以降の各節で詳細を述べる。

3.2 隔軸自在継手・多軸自在継手

3.2.1 隔軸自在継手

多軸自在継手とは、隔軸自在継手を基に構成された自在継手である。本論文では、隔軸自在継手から説明を行い、多軸自在継手へ拡張する過程を説明する。隔軸自在継手には、2つのタイプ、Type-A と Type-B が考えられる。これらが示す挙動は同じであるが、構成要素が異なる。Type-A の特徴は、構成要素が線対称性を保つ対称型であり、Type-B の特徴は、構成要素に突起部と穴部を持つ方向性を持つものがある一方向型である。この違いは組み立ての際に顕著に表れ、対称型は構成要素の形状のまま、組み立て可能であり、一方向型はそのままでは嵌め合いが不可能であるため、突起部を着脱可能としておく等の工夫を要する。いずれも挙動を示す継手として有用であると考えられる。各タイプの隔軸自在継手に見られる構成要素・機構特性・構造特性について、以下に詳細を示す。

隔軸自在継手 Type-A

Fig.3-5 に隔軸自在継手 Type-A の組立図を示す。隔軸自在継手とは、一節点に対し、複数の軸部材が接続される接合部において、任意の軸部材が隣接する軸（＝隣軸）にある部材の軸方向まわりに回転可能であり、隣軸と同角度を保ちつつ、ひとつ飛ばした軸（＝隔軸）にある部材となす角度を自由に变化できる継手機構である。変形過程において、節点と材軸が常に一致するため、節点に曲げモーメントが発生しない特徴を持つ。したがって、節点は、常に部材の回転中心点と一致し、Fig.3-5 に示される継手の中心に配される球形状部材(ボール)の中心位置に常に存在する。

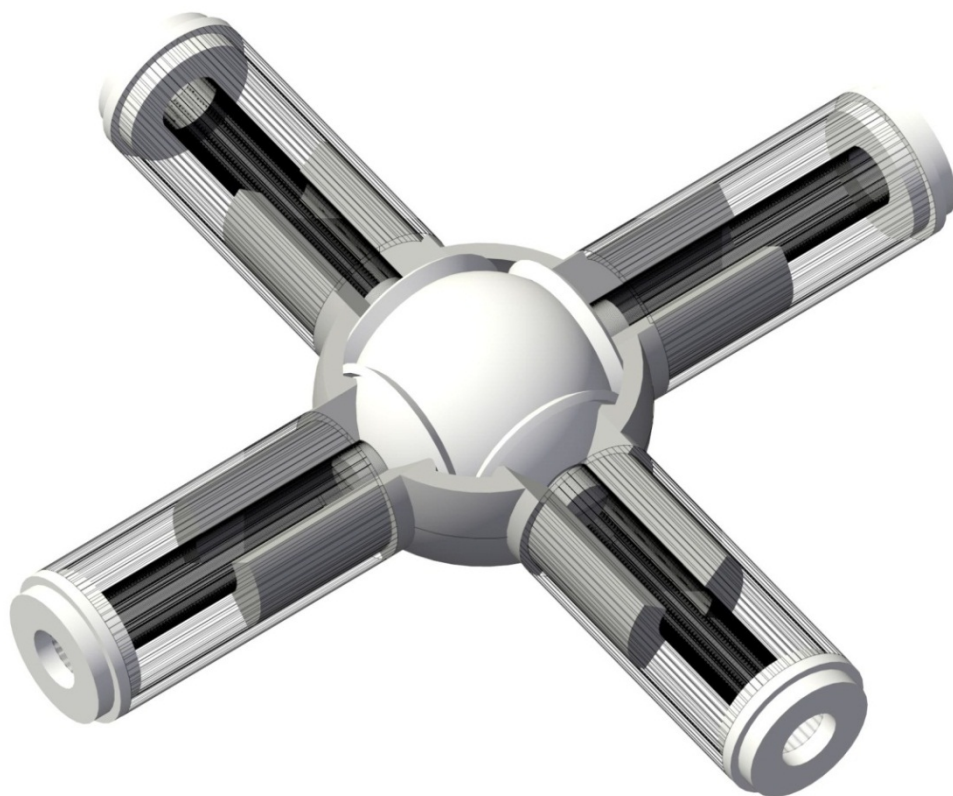


Fig.3-5 隔軸自在継手 Type-A 組立図

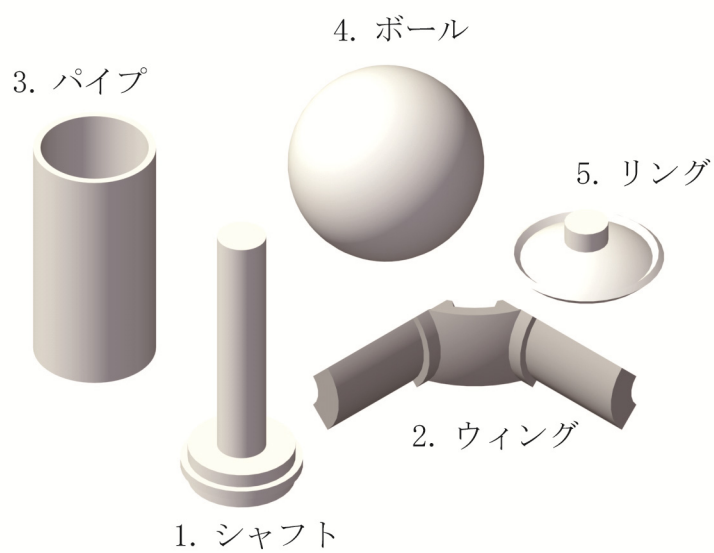


Fig.3-6 隔軸自在継手 Type-A 各構成要素

<隔軸自在継手 Type-A の構成要素>

Fig.3-6 に示される隔軸自在継手 Type-A に必要な構成要素は以下のとおりである。

1. 各軸の軸方向に配設される軸棒部材 (=シャフト)。
2. シャフトまわりに配設される扇形断面をした V 形状部材 (=ウィング)。節点付近となる V 字の交差部は剛で接合されている必要がある。
3. 各軸にシャフトとウィングを内包し、配設される円筒部材 (=パイプ)。
4. 節点を中心位置とし配設される球形状部材 (=ボール)。
5. 隣接する 2 つのウィングをボール近傍にて繋ぎ止めるために、配設される輪状部材 (=リング)。

可変の原理は上記 1~3 で満たされる。構造部材である場合、圧縮力および引張力の伝達を考慮すると、4、5 を必要とする場合がある。また、構成要素に関する特徴を以下に箇条書きで列挙する。

- ・各構成要素は、すべてが独立している必要はなく、一体化されている方がよい関係がある。一例として、パイプとシャフトは変形過程で位置関係がずれないように、一体化されている方がよい場合があれば、リングとシャフトも一体化されていてもよい。これらは、嵌め合わせ可能かどうかの問題を考慮し、製作過程で配設する順序や接合される組み合わせによる。

- ・パイプとウィングの間には、軸に働く引張力を伝達するための引っ掛かり (突起と溝) を用意する必要がある、パイプ側が突起、ウィング側が溝である方が部材厚を考慮すると都合がよい。

- ・リングは、変形過程で軸が開くことを抑制する効果を持つ。円錐型の形状が基本型となる。各ウィングすべてを繋ぎ止めることで、ボールまわりにテンションリングが形成され、軸部材に引張力が働く際に、抵抗する。また、ボールの外周面に全リングが内接するように設計することで、各構成要素の相対的な大きさがほぼ決定できる。

- ・ボールは、回転の中心体となると同時に、軸部材同士で圧縮力を伝達するために配設される。また、ボールは変形過程で継手から外れないようリング部材で支えることになる。リング径が小さい場合は、ボールが継手から外れる危険性が伴う。

- ・継手の基本構成部材は 1~5 となるが、継手同士をつなぐパイプと同径となるようなつなぎ軸部材を用いることで構造体に拡張することができる。

- ・軸数は、Fig.3-5 に示される 4 軸構成の他に、Fig.3-7 に示される 6 軸構成などが考えられる。軸数を増加すると可動域が小さくなる傾向にある。

- ・初期形状が必ずしも、平面系である必要がなく、立体系で構成されることも可能である。錐型や鞍型を初期形状とする立体系も可能である。

<隔軸自在継手 Type-A の機構特性>

隔軸自在継手 Type-A に見られる機構特性は以下のとおりである。

- Fig.3-8 に示される軸部断面のとおり，シャフトの円柱外面とウイングの短弧状面とが面で接触し，パイプの円筒内面とウイングの長弧状面とが面で接触しており，変形過程において，シャフトとパイプをレールの役割とし，ウイングが軸まわりに回転しながらすべるように変形する（＝回転すべり対偶）．ウイングは隣軸につなぐように配設されているため，隣軸の変形も同時に起きる．また，Fig.3-8 のように，可動域が許容される限り，2 本以上のウイングを入れることも可能である．

- パイプ内部にコイルを導入することで復元力をもった機構や粘性流体を導入することで，減衰効果をもった機構が可能と考えられる．

- ボールの大きさと軸部材の径の相対関係，ウイング断面の扇形状（中心角の大きさ）などにより継手の可動域が変化する．

- ヒンジジョイント（蝶番）に置換できる機構を持つ．ウイングの角度は剛となっているため，ウイングと同一平面に面を張り，シャフトが面の回転中心と想定すれば，ヒンジジョイントと同様であることがわかる．

- 初期形状が平面系の場合，平面状態が最も安定状態，またはテンションリング効果が高いため，平面状態近傍で動作に要する力が大きくなる．これに対し，立体系は常に不安定状態であるため，動作に要する力は比較的小さくなる．

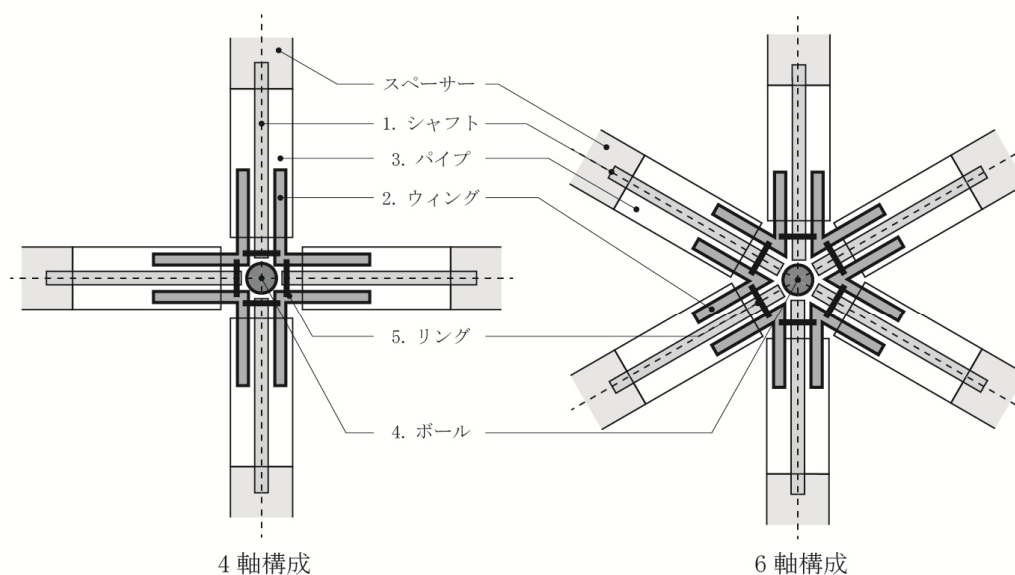


Fig.3-7 隔軸自在継手 Type-A の 4 軸構成と 6 軸構成

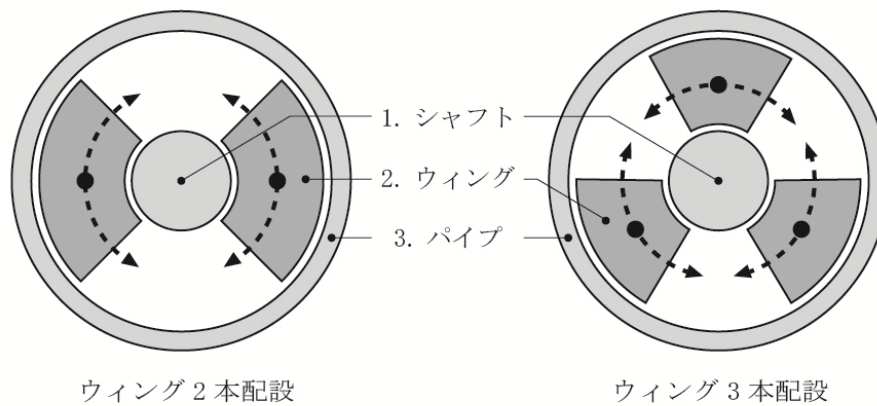


Fig.3-8 隔軸自在継手 Type-A の軸部断面図

<隔軸自在継手 Type-A の構造特性>

隔軸自在継手 Type-A に見られる構造特性は以下のとおりである。

- ・リングは、変形過程で軸が開くことを抑制する効果を持つ。各ウイングすべてを繋ぎ止めることで、ボールまわりにテンションリングが形成され、軸部材に引張力が働く際に、抵抗する。
- ・ボールは圧縮力を伝達する効果を持つ。
- ・軸部材の引張力に対して、ウイング部材の二面せん断で抵抗する。
- ・パイプとウイングの間には、軸に働く引張力を伝達するための引っ掛かり（突起と溝）を用意する必要がある。パイプ側が突起、ウイング側が溝である方が部材厚を考慮すると都合がよい。

隔軸自在継手 Type-B

Fig.3-9 に隔軸自在継手 Type-B の組立図を示す。隔軸自在継手 Type-B は、Type-A と同様の挙動を示すことが可能であり、また多軸自在継手に拡張することも可能である。構成要素の特徴に、突起部と穴部を持つ、非対称で方向性を持つことから強度が大きい部分と小さい部分を併せ持つことになる。また、嵌め合いの困難さが生じることになる。このような短所を克服すれば、少ない構成要素で構成できる点は有意性がある。

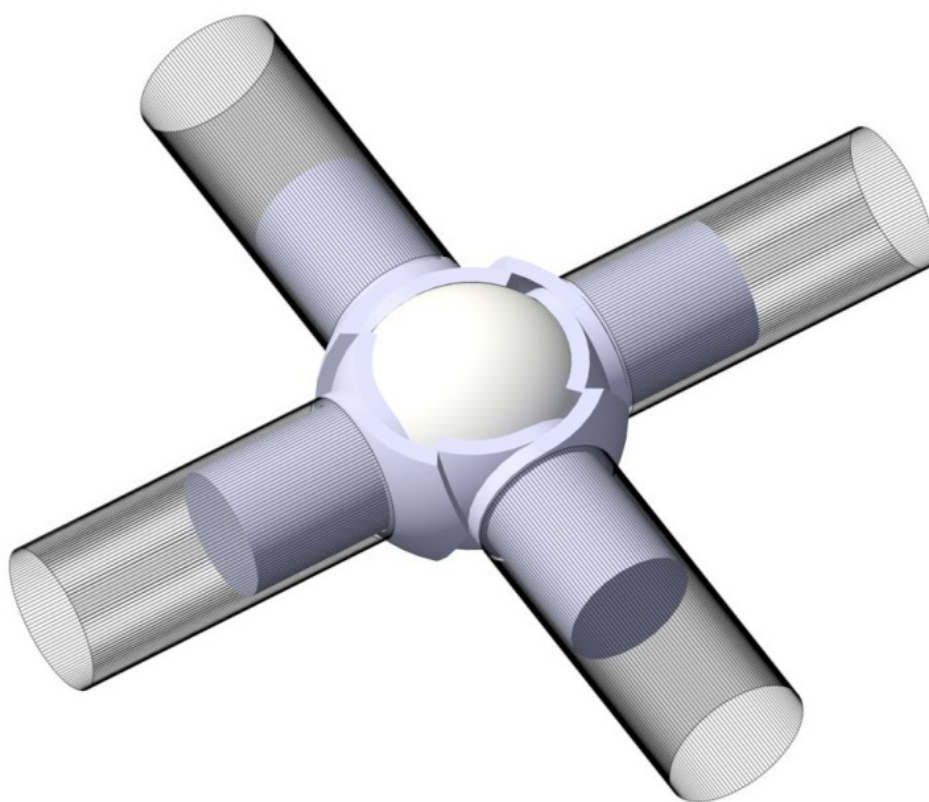


Fig.3-9 隔軸自在継手 Type-B 組立図

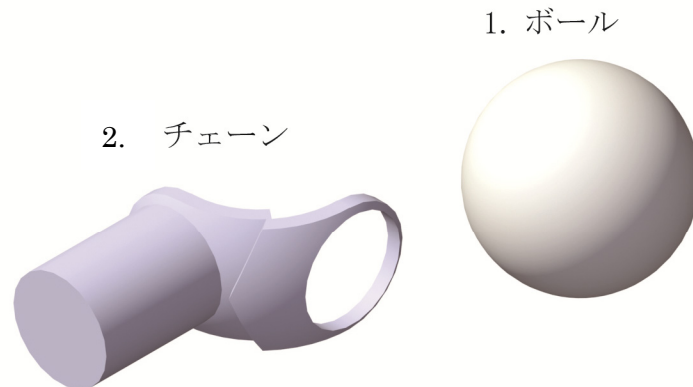


Fig.3-10 隔軸自在継手 Type-B 各構成要素

<隔軸自在継手 Type-B の構成要素>

Fig.3-10 に示される隔軸自在継手 Type-B に必要な構成要素は以下のとおりである。

1. 節点を中心位置とし配設される球形状部材 (=ボール)。
 2. 連結すると環状になる鎖部材 (=チェーン)。円柱状の突起部に軸部材が接続する。
- また、構成要素に関する特徴を以下に挙げる。

- ・ Type-A と比較して、シンプルな構成であるが、チェーン部材の嵌め合わせが困難であるため、嵌め合わせのために、突起部を切断しておき、嵌め合わせ後にねじ締めするような工夫が必要となる。

- ・ Fig.3-9 のように、チェーンはボールまわりに直列で接続され、始点の部材と終点の部材が接続されることで完結する。

<隔軸自在継手 Type-B の機構特性>

隔軸自在継手 Type-B に見られる機構特性は以下のとおりである。

- ・ ボールとチェーンが回転すべり対偶の関係にある。
- ・ 可動域は Type-A より確保しやすい。
- ・ Type-A と比較して、部材数が少ないため、製作精度は高くなると思われる。

<隔軸自在継手 Type-B の構造特性>

隔軸自在継手 Type-B に見られる構造特性は以下のとおりである。

- ・ 軸部材の引張力に対して、チェーン部材の一面せん断で抵抗する。
- ・ 想定されるねじ締め部に強度低下が生じると考えられる。
- ・ 引張力に対する抵抗力を増すために、チェーン部材の輪状部の断面の確保が必要となる。

- ・チェーン部材そのものが、ボールまわりにテンションリングを形成する。

3.2.2 多軸自在継手

Fig.3-11 に多軸自在継手の組立図を示す。多軸自在継手とは、隔軸自在継手の原理を応用したもので、軸数を増やし隔軸を隣軸と見立て、実際には隣軸である軸は最小化することにより、見立ての隣軸とのなす角を自在に変化することができる多軸の自在継手である。

Fig.3-11 に示される長い軸同士がそれぞれ、隣軸として機能し、短い軸は、可変機能を満たすために設けられたもので、実際には軸部材が接続することはない。

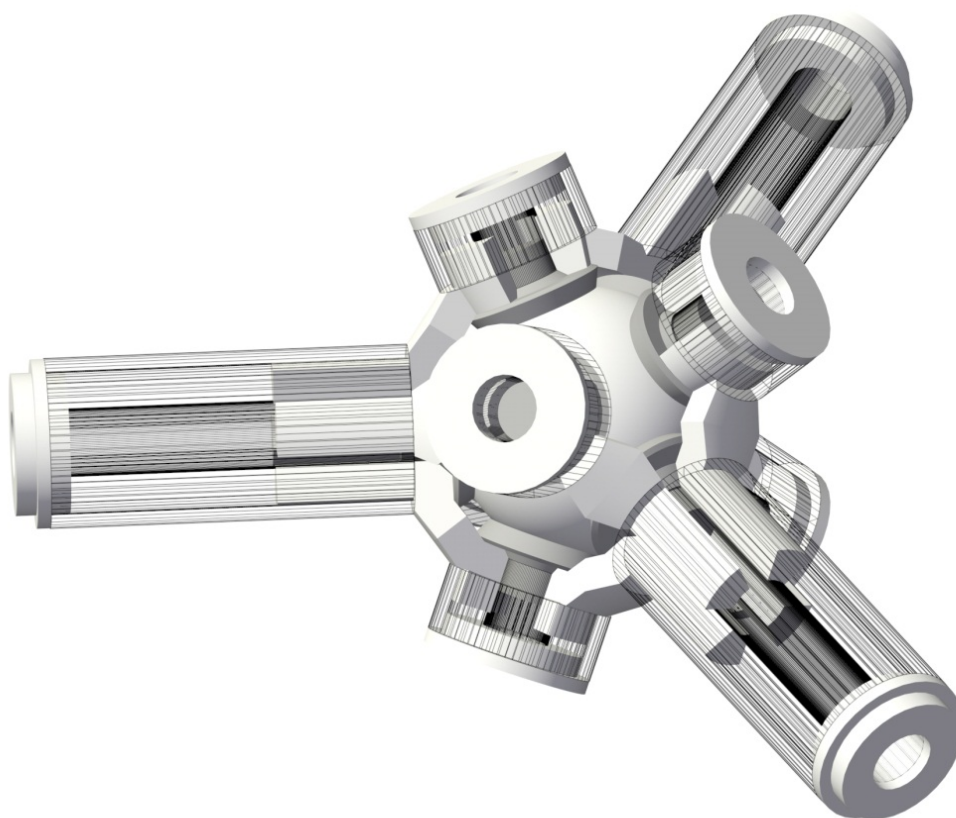


Fig.3-11 多軸自在継手組立図

<多軸自在継手の構成要素>

多軸自在継手の構成要素は、隔軸自在継手と同様である。以下に多軸自在継手に特有の構成要素の特徴を示す。

- ・多軸自在継手は、Fig.3-11 の組立図に見られるように、3本の軸を自在に動かす場合、構

成軸数を最小化した軸を含め、2倍や3倍とする必要がある。Fig.3-11は、3倍とした計9本となる。この場合、最小化した軸は、ボールが継手から外れないように支えることになる。したがって、2倍でも機構としての機能を満たすが、ボールを支える最小化した軸は少ないため、この点を克服する必要がある。

- ・ 隔軸自在継手と比較し、多軸自在継手はパイプとシャフト挟まれるウィングの数は増える。したがって、扇形断面形状の角度を小さくする必要があり、可動の安定性は隔軸自在継手より低くなる。

- ・ Type-Bを用いる場合に関しては、Fig.3-11のような軸構成を考えれば、ボールまわりに並列で接続されることになるため、両側が穴部となる構成部材が必要である。

<多軸自在継手の機構特性>

多軸自在継手に見られる機構特性は以下のとおりである。

- ・ 平面配置の軸構成であれば、それ以上軸を広げることができないため、三次元的に配置しなおす必要がある。すなわち、3軸を多軸自在継手とするために、2倍の6軸と構成軸数を増やす場合、6軸を平面で構成してはいけない。
- ・ 可動域の限界は、ウィング同士の接触や最小化した軸同士の接触が挙げられる。

<多軸自在継手の構造特性>

多軸自在継手に見られる構造特性は以下のとおりである。

- ・ 隣軸とのなす角を自在に変化できるだけでなく、多軸ピン接合を可能とする。
- ・ 多軸自在継手を継手として用いたトラス状可変構造は、継手同士を接続する軸部材には、伸縮する必要性が伴う。
- ・ 軸に引張力が働く場合、ボールより一回り大きい位置で釣合おうとする現象が起きる。

Fig.3-12～13にFig.3-11で示されたものと同様、3軸で構成された多軸自在継手の変形の様子を示す。この模型は、ウィング部とリング部、シャフトの一部を3Dプリンタで制作し、ボール、パイプ、シャフトは既製品を用いている。各部材の接触面積が隔軸自在継手よりも多くなるため、精度が正確でなければ、部材同士の摩擦により、スムーズな変形を行うことは困難であるため、ワセリンで滑らかな変形となるように、工夫を施している。

Fig.3-12の両手で持っている軸の角度を小さくする方向に力を加えることで、変形を起こす。模型による検討から、各軸はボールの中心点を回転中心点として、変形している様子がわかる。現状の可動域は、±20度程度であるが、各構成要素の相対的な大きさを変化させることで、可動域を大きくすることは可能である。また、可動域の調整は、構造強度と合わせて検討していく必要がある。



Fig.3-12 多軸自在継手の変形前

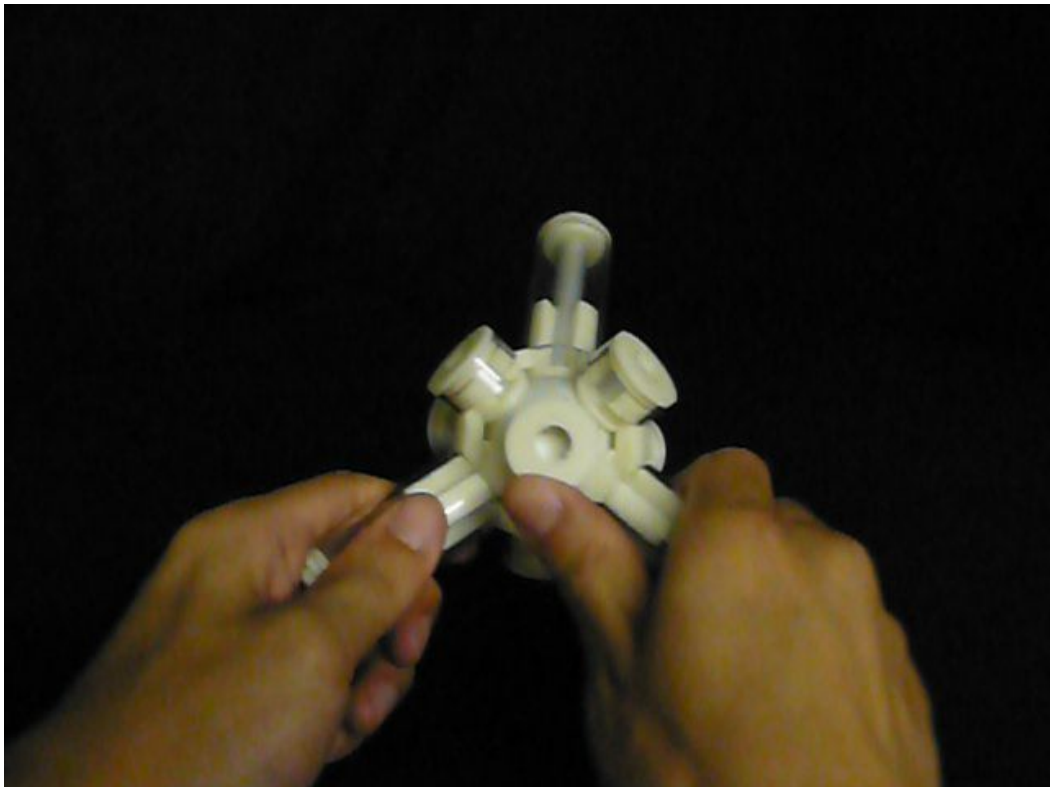


Fig.3-13 多軸自在継手の変形後

<多軸自在継手の問題点>

多軸自在継手は、模型での挙動を確認したコンセプチュアルな段階にあるため、今後、実用化するためには、問題点を整理する必要がある。

ひとつは、ウィングの切削加工が困難である。金属部品を用いるならば、切削加工で削り出せる部材であれば、強度の高い無垢の金属から削り出すことが可能で、精度も高くなると思われる。提案されているウィング部は、2つの扇型断面の部材が鋭角に継ぎ合わされている形状をしている。この形状は一般の切削加工では困難である。したがって、鋳造加工で製作することが想定されるが、この場合、特に引張強度が弱くなるか、精度が落ちるといった問題点が考えられる。

もうひとつは、確保される可動域を厳密に推定する必要がある。可動域には、ジョイントの可動域と可変構造体物全体の可動域の両方が考えられる。多軸自在継手は部材同士が接触するまで変形することは可能であるが、一度接触してしまえば接触点を起点にジョイントの構成部材に曲げ応力が働くことになる。これは、十分な断面を確保することで、曲げに抵抗することも考えられるが、断面を増やすことで、可動域が狭くなる可能性がある。このような可動域と断面パラメータの相対関係を整理し、ジョイントの可動域を厳密に推定することで、構造体全体の可動域を調整する必要がある。

構成部材同士の接触面が多いことから、摩擦抵抗の問題が考えられる。用途に応じて、改善する必要がある。

最後に、特異点の可能性を考える。ジャイロスコープなどに搭載されている3軸のジンバルは、2軸が同一平面上に揃ってしまうとジンバルロックと呼ばれる3軸の自由度から2軸の自由度へと陥る現象が起こる。三次元の可動機構を扱おうとするとこのような特異点を持った現象が起きる可能性がある。

本論文で提案する多軸自在継手はジンバルのような軸が重なる程の可動域を持たないため、このような現象は起こりえないが、複数の部材が絡み合っているため、何等かの要因で特異点へと陥り、動作に影響を及ぼす現象が存在する可能性があると考えられる。現在、最も危惧している問題は、部材に引張力が生じたときに、ある歪の限界を超える(最小化した軸部を支えるウィングかシャフトの局部座屈)と、ボールより一回り大きい位置で釣合おうとする可能性がある。これは、最小化した軸部が、一直線上に並ぼうとすることから生じうる。この点は、詳細な検討、もしくは更なる改良を必要とする。

3.3 可変構造体

3.3.1 剛体モデル

可変構造の剛体モデルについて説明する。剛体モデルと呼ぶ所以は、後述する軸部直動

モデルと比較して、変形過程において、軸部の強制的な伸縮を伴わないことが理由である。本論文で紹介する可変構造の剛体モデルは、軸部材や面材で構成された多面体の集合が接点や接辺を起点とした部材の回転変形により変形する構造体である。このような多面体を本論文では、可変多面体と呼ぶ。多面体をひとつのユニットとして基準面の2方向に連結することで、変形可能な板ができ、曲面を構成することが可能となる。Fig.3-14は、左図に見られるひとつのユニットを4つ連結することで、右図のような構造体が構成される。このような可変多面体にはいくつかのバリエーションが存在し、Fig.3-15にて紹介する。上は斜図で、下は上面図である。これらのバリエーションは、連結することで平面を敷き詰められる平面充填型の幾何的特徴を持つ。

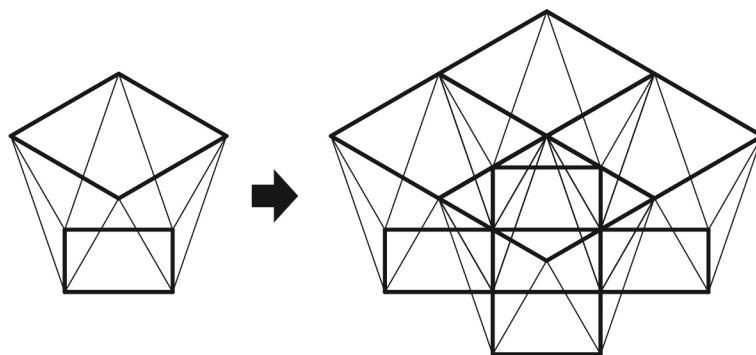


Fig.3-14 可変多面体ユニット

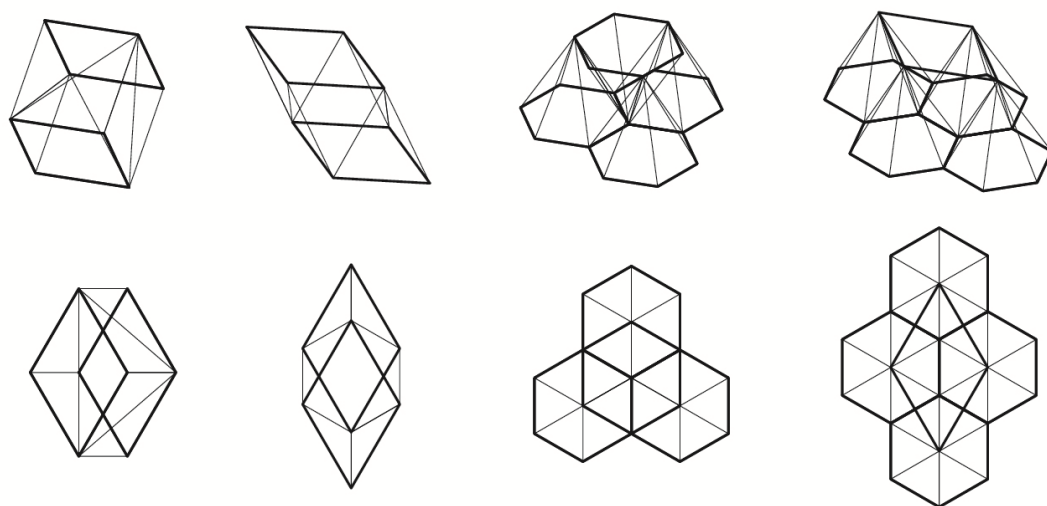


Fig.3-15 可変多面体ユニットのバリエーション

曲面が構成できる仕組みは、上下構面は四辺形や六角形で構成され、剛構面ではない不

安定性を生み出している点にある。ここでは，変形過程を経て，目的の形状が形づくられた後にケーブル等を導入し，上下構面を固定し構造物として安定状態を得ることを想定している。なお，可変多面体は面で構成することも可能である。三角形トラス部を三角平面とし，点ではなく辺を基点とした回転機構，つまりヒンジジョイントで置換することが可能である。これはまた，軸部材で構成された可変構造を想定したときに，多軸自在継手のような隣接する軸となす角を自在にする必要はなく，隔軸自在継手で置換できることを意味する。

本論文の剛体モデルは，建築構造に応用することを考えている。複雑な任意曲面構造 (Fig.3-16, 3-17) を同サイズの軸部材で構成することが可能となり，施工性や効率性の向上が期待され，柔軟で適応性・汎用性が高い構造物が構築できると考えられる。Fig.3-16 は，軸部材で構成された剛体モデルである。可変多面体ユニットの自由度が限定されているため，完全な任意曲面は困難であるが，ダイナミックな空間を構成できる。二重構面を持つ立体トラス構造は，せん断力を効率よく伝達できるため，力学的に有効と思われる。Fig.3-17 は，面部材で構成された剛体モデルである。面構成，軸構成のいずれの剛体モデルでも，同じ可変多面体ユニットであれば，同様の挙動を示す。また，これらの模型は，著者が東京藝術大学に在籍時，卒業制作として制作したものである。

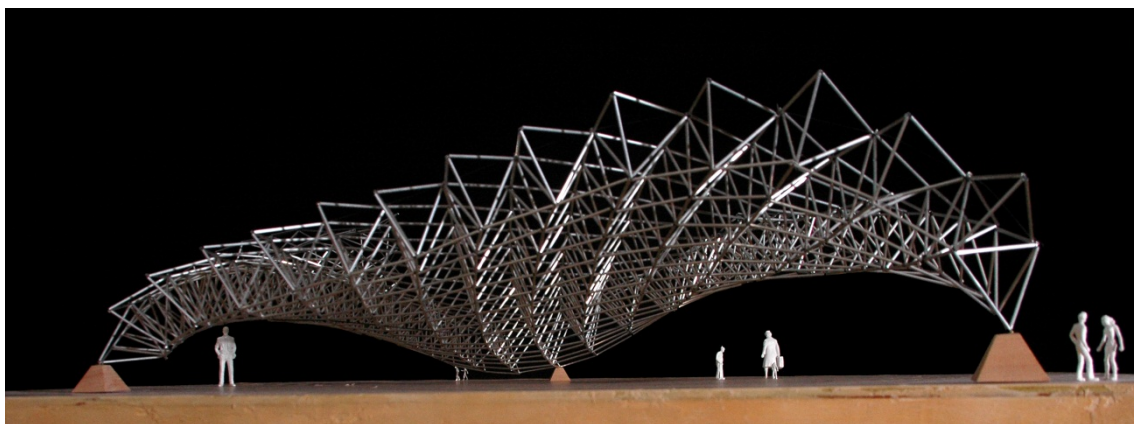


Fig.3-16 可変構造体の軸構成による剛体モデル 1

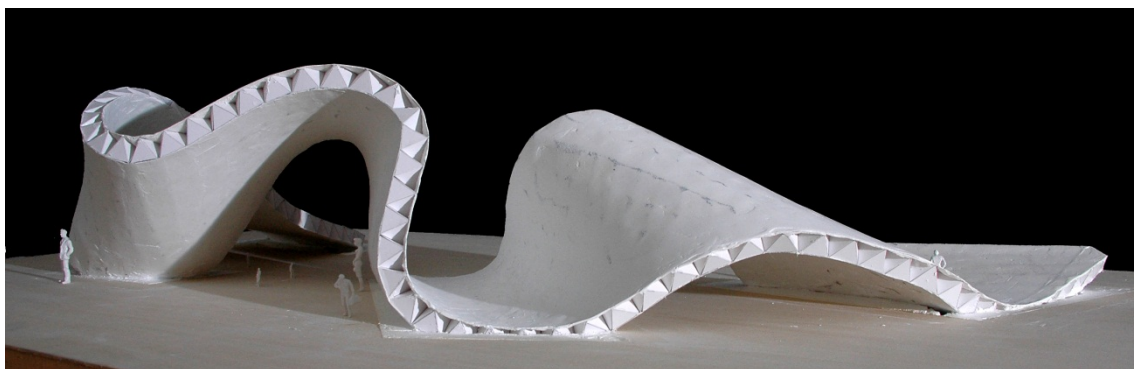


Fig.3-17 可変構造体の面構成による剛体モデル 2

このような大空間の曲面構造は、その歴史的背景から、幾何学的、及び力学的な合理性に適った形態が多く採用されてきた。これらは、優れた構造特性を併せ持つことになるが、反面、意匠性における自由度は限定されてくる傾向がある。あるいは、意匠性に自由度をあげようとする、使用される部材長が多様化してしまう傾向があるため、そのような選択肢をとらない(近年の構造解析技術やNC加工の進展で改善されつつある)。

本研究で提案する多軸自在継手を用いた可変構造では、同サイズ、もしくは数種類のサイズの部材で意匠性に、ある程度自由度を持った曲面構造を形作ることが可能となる。

このような新規性は、現代の新規性の傾向より、むしろ古い概念の踏襲に近いように考えられる。Richard Buckminster Fuller[21,22]の Geodesic dome や Konrad Wachsmann の開発したジョイント(通称ワックスマン・ジョイント)[23]といった建築における大量生産の黎明期に活躍したエンジニアや思想家の概念や夢に近い。しかし、ジョイント機構の革新は根底の革新であり、デザインや機能空間の革新の可能性が拡がると考えている。

本研究の可変構造の剛体モデルを建築構造物として想定している意義は、実現可能性を示すことができれば、規模の小さな機械部品であれば、成立する可能性が高いためである。

3.3.2 軸部直動モデル

剛体モデルの変形は、不安定で、かつ節点や接辺が回転自由であることに起因している。必ずしも隣接する軸同士のなす角が自由である必要がないため、隔軸自在継手を用いた構成で挙動を実現できる。一方、直動するアクチュエータの導入により、軸部材の伸縮が伴う場合、任意の軸部材の隣軸となす角が自由となる必要がある。このような構造体は、VGT やパラレルリンク機構(並列リンク機構)などに見られ、剛体モデルと比較して、より複雑な挙動を生み出しうる。

工作機、産業ロボット分野では、パラレルリンク機構は、従来のシリアルリンク機構(多関節リンク機構)より、高精度化・高出力・高速化・省力化できる可能性を持っており、製品化も進められている。このような構造体は、アクチュエータを制御するために、確かな運動解析が必要となる。

従来技術では節点オフセットを考慮した解析が必要となり、複雑な計算を要する[10]。誤差の影響も受ける。しかし、節点オフセットを解消することができれば、理想的なトラスとして解析を実行できる。すなわち、多軸自在継手を導入すれば、このような可変構造の軸部直動モデルの運動解析に有効であると考えられる。

本論文では、アメリカ航空宇宙局 NASA のゴダード宇宙飛行センターにある研究チーム ANTS (Autonomus Nano Technology Swarm)で主に開発研究されている Tetrahedral Walker (Fig.3-21,3-22) に焦点をあてる。これらのロボット技術は ART (Addressable Reconfigurable Technology—アドレスブル再構成可能技術)として知られている [24,25]。ART は、モジュール化された冗長系にセンサーやアクチュエータなどの可変制御機構を導

入し，状況に応じてアクティブに構造体形状を変化させ，様々なタスクの要求に応える技術を指す．Fig.3-18 に示される一事例である Tetrahedral Walker は，無人探査ロボットとして宇宙，軍事分野での応用が期待されている．



Fig.3-18 可変構造体軸部直動モデル(Tetrahedral Walker— <http://ants.gsfc.nasa.gov/>)

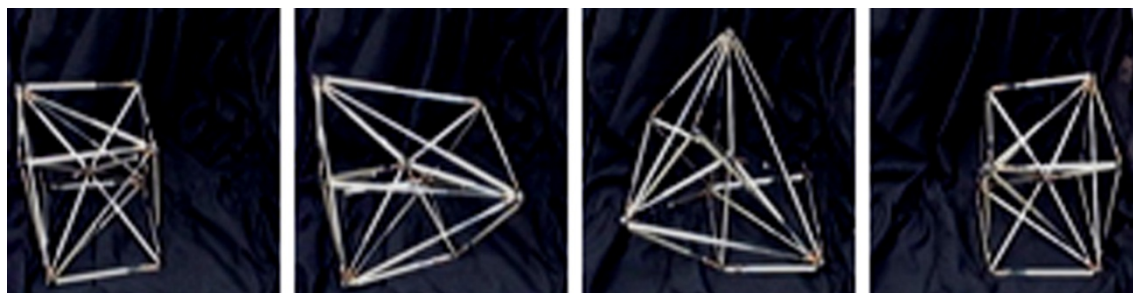


Fig.3-19 可変構造体軸部直動モデルの変形過程[25]

Tetrahedral Walker は構造体形状が変化することで，重心位置を進行方向へ移動させ，ころがりながら駆動する仕組みを持つ．この Tetrahedral Walker は軸部材の伸縮が伴うため，軸部直動モデルといえる．Fig.3-19 は，ころがり駆動の様子を示している．

これらの技術はまだ実用には至らず研究段階と思われるが，紹介されているコンセプトモデルを見るとピン接合型多軸自在機構で構成されていることがわかる．理想的なトラスを再現するには多軸自在継手の応用が考えられる．

次章の可変構造の形態解析において，本章で対象とした可変構造体をモデルとした解析事例の数値解析を行う．

第 4 章

可変構造の形態解析

本章では，可変構造の形態解析について述べる．前章では，節点オフセットが生じない多軸自在継手の提案と多軸自在継手を用いた可変構造体のモデルを示した．本章では，これらの可変構造におけるムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた形態解析手法を提案する．また，可変構造の形態解析にあたり，物質定義を明確化し，多次元要素への拡張を行うことで，面積一定変位を実現する．さらに全長一定変位へ拡張し，多彩な可変構造の挙動を，数値解析事例により紹介する．

4.1 可変構造の形態解析の概要

可変構造の形態解析では，非圧縮性や偏差応力が発生しないとした仮定を考慮することで，扱う要素(一次元要素や二次元要素など)に応じて，剛体変位，面積一定変位といった異なる現象を示す．これを利用し，目的に応じた構造体の挙動を表す．これらの物質の現象は，必ずしも実態を伴った現象とならない場合もある．例えば，面積を一定としたまま変形を許容する三角形二次元要素は，実在する現象と結びつけにくい．したがって，物質の定義を明確化することが重要となる．

また，可変構造の形態解析に必要となる各定義式は，連続体力学や有限要素法を基礎として行う．このような特別な事象を扱っている問題を極力，一般的な議論の対象とすることを目的とする．しかし，一般論の枠組み，つまり一般的な有限要素法では語れない定義の仕方が存在する．本論文では，その点を明らかとし，箇条書きとして後述する．

4.2 物体の記述方法—Lagrange 記述—

本論文の可変構造においては，Lagrange 記述による構造体(あるいは物体)の運動の様子を静的な基礎方程式を用いて追跡する増分解析，すなわち準静的な解析を行う．したがって，静的な方程式を基礎式とする．本論文では，解析済みの既知配置を参照する updated Lagrange 法の立場をとる(Fig.4-1)．なお，本論文では，可変構造における歪は，微小歪を用いた定式化を行う．これは，増分区間において，線形解析を行うためと非圧縮性を考慮する際に歪や伸びに相当する量を 0 と仮定するためである．しかし，線形化により解析時間が進行するにつれ誤差が蓄積される傾向にある．これは，高次項を導入する，または不

釣合い力を求めることにより，さらに正確な解を得られることが知られている[6,26].

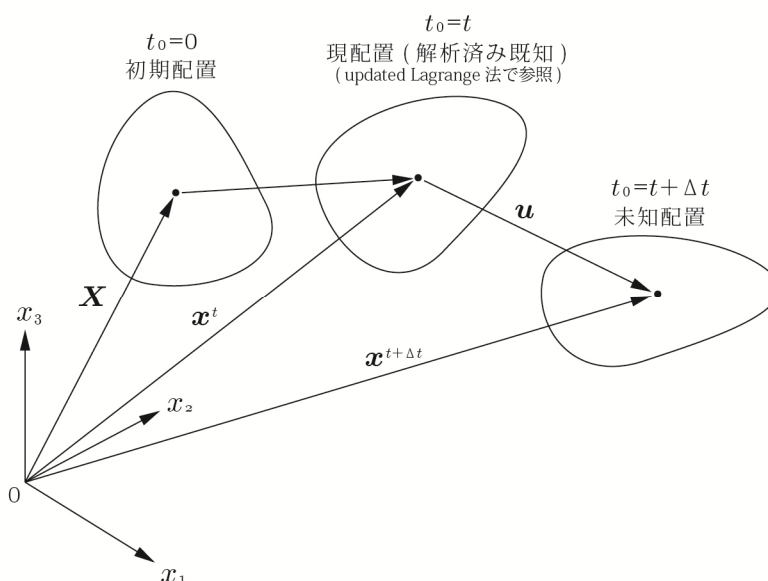


Fig.4-1 updated Lagrange 法の記述方法

4.3 構造体と要素の領域について

有限要素法では連続体の支配領域を Ω として定義することが一般的である[2,3]. 本論文で対象とする可変構造は各要素(一次元要素や二次元要素)が持つ領域を Ω_k の各成分とし, 可変構造体全体を Ω_k の連立と捉えることで支配方程式の積分領域を明確に区別する. すなわち, 各要素を $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ と添字をつけて領域を区別する. 以下, 各要素の領域と構造体への拡張を示す. ここで, m は構造体の要素数である.

各要素の領域: Ω_k

$$\text{構造体全体: } (\Omega_k)_{k=1,2,\dots,m}^T = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_k \\ \vdots \\ \Omega_m \end{bmatrix}$$

4.4 要素座標における支配方程式

本論文では, 可変構造に用いられる基礎式を導出するにあたり, 一般的な有限要素法との違いを明確化するために, 有限要素法に用いられる記述形式や考え方を基に定式化を行っていく. このような定式化は, 節点外力に関する任意性を排除することや, 境界条件の与え方を考察する意味あいをもつ. また, どの積分レベルで変位-歪関係式と釣合式の間

で、反傾関係が成立しているか、ということを示すことになる。
以下に、有限要素法との違いの概要を述べる。

- a) 要素毎の積分和により領域全体の大域的な近似解を与える有限要素法と比較して、本論文では、支配方程式やその要素毎の積分を連立して解くことで、局所的な近似解を与える。この場合、与えられる連立方程式が長方形列となるので、ムーア・ペンローズ一般逆行列の利用が前提とされている。このように、有限要素法の重ねあわせの概念と比較し、部分領域に分けて離散化方程式を連立することは貼りあわせの概念とも呼ばれている[27]。また、解析事例によっては要素毎の積分和を用いる場合もあるが、これは、該当する領域に対して、全長一定、表面積一定といった事象を扱うこととなり、この定義は、有限要素法において定義されている要素毎の積分和の考え方とは異なる。
- b) 本論文で対象としている物質を構成方程式に表すと、応力が圧力や平均応力の独立変数として表される。応力を変位や歪の関数で表すことが困難となり、仮想仕事の原理等の変分原理に基づく定式化ができない。したがって、流体問題の有限要素法で用いられる重み付き残差法を用いて、離散化のための基礎式を導出する。むしろ、本論文で扱う物質の構成方程式が流体に近いものとなるため、自然な適用と捉える。構成方程式については、本章 4.6 節にて後述する。
- c) 本論文では、支配方程式の離散化にあたり、重み関数の補間関数として、形状関数を用いた重み付き残差法を用いる。一般的な有限要素法では、重み付き残差法や変分原理を用いることで、適当な補間関数を用いて離散化の手段を与えることと、2階微分を1階微分に変更する弱形式化を導くこと、さらに表面力に関する境界条件を与えられるという3つの重要な意味がある。

本論文では、応力が独立変数となるため、変位に関する2階微分の支配方程式とはならない。また、要素毎の積分和で表さず、各要素を連立することから、重み付き残差法は、要素毎で適用する。この場合、重み付き残差法は、離散化のための手段を与えることに意味があり、同時に、外力に境界条件の表面力を与えられることに意味がある。

重み付き残差法による基礎式の導出については、本章 4.7 節にて詳細に示す。
- d) 本論文では、基礎式から導出される離散化方程式は正方の連立方程式とはならない。これは、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いることで解が得られるが、この場合、物質の現象を正確に捉えるためには、変位-歪(あるいは体積歪)関係式と釣合式の間に関係が成立していることと解の存在条件を満たしている必要がある。
- e) 本論文で扱う要素は、一次元要素や二次元要素を三次元空間に配する問題を扱う。この場合、要素座標と全体座標の次元数が一致しないため、なんらかの幾何学的処理を行う必要がある。一般的には、曲面論やテンソルの概念を必要とする[28]。本論文では、微分連鎖則による座標変換を提案し、ここでもムーア・ペンローズ一般逆行列を用いている。基礎式の座標変換については、本章 4.10 節で示し、形状関数の座標変換について

は、本章 4.12 節で示す。

- f) 構造問題に関する有限要素法では変位に関する境界条件を与えることで、変位の解が得られ、未知の反力が求められることになるが、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いれば、境界条件を与えることなく、解を得ることができる。一方で、変位を拘束する場合は、変位-歪関係行列から該当する自由度の列ベクトルを削除することになる。この場合、反傾原理から、未知の反力に対応する行ベクトルが消えることになる。このように境界条件を考慮する。

以上の点を踏まえ、基礎式や離散化方程式を導出する。

まずは、物体の変位-歪関係式と釣合方程式を与える。本論文では、連続体力学で用いられる支配方程式の記述から説明を行う。以下、総和規約を用いて表式を行う。

要素座標 r_i 、変位ベクトル u_i 、微小歪テンソル ϵ_{ij} として、変位-歪関係式は以下となる[2,3]。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right) = \epsilon_{ij} \quad (4-1)$$

また、応力テンソル σ_{ij} 、物体力ベクトル b_i 、釣合式は以下となる。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + b_i = 0 \quad (4-2)$$

上式は、Cauchy の運動方程式から加速度項を除いた静的な状態を想定している。

4.5 境界条件

境界条件には、以下の関係を用いる[2,3]。各要素の境界領域を Γ_k とする。変位 u_i とし、変位境界条件 \tilde{u}_i として、変位境界領域を Γ_{ku} とする。

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{ku} \quad (4-3)$$

上式を幾何学的境界条件と呼ぶ。

また、表面力 t_i とし、荷重境界条件 \tilde{t}_i として、荷重境界領域を $\Gamma_{k\sigma}$ とする。

$$t_i = \tilde{t}_i \quad \text{on } \Gamma_{k\sigma} \quad (4-4)$$

上式を力学的境界条件と呼ぶ。

本論文では、必要に応じて、変位に関する境界条件として、以下を想定する。

$$u_i = \tilde{u}_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_{ku} \quad (4-5)$$

なお、変位境界条件の与え方については、後述する離散化方程式の B マトリクス関連の中で、上式を満たすように操作をする。荷重境界条件は、本論文の数値解析事例の中には、想定されないが、荷重条件を導入できるように定式化を進める。

また、一般逆行列理論による形態解析手法の特徴は、境界条件を与えることなく解を得られる点にある。後述する本章の数値解析事例のすべてにおいて、変位に関する境界条件が十分に与えられていない問題である。

4.6 構成方程式

本論文で対象とする可変構造は、面積が一定のまま、要素の変形を許容する現象など実在する物質にはあまり見られない現象を扱うことも想定する。このような物質に、扱う要素の次元数によらず「等方的な応力が発生し、応力の偏差成分は発生しない非圧縮性を有する物質」と仮定する。以下では、このような物質の構成方程式を導出する。

連続体力学では物質を規定するものに構成方程式がある[2,3,29]。ここで、Newton 流体の構成方程式は以下のように表される。Newton の仮定は、応力は歪速度の 1 次まで採用することを意味する。 ϵ_{ij} は速度場を与えたときの歪速度である。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (4-6)$$

p は静水圧、 λ は第 2 粘性率、 μ は粘性率と呼ばれる。

また、弾性体の構成方程式は以下となる。弾性体では、応力と歪の関係が線形同次の仮定となる。 ϵ_{ij} は変位場を与えたときの歪である。

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (4-7)$$

弾性論では、 λ, μ は Lamé 定数と位置づけられる。

本論文で対象とする可変構造の物質は、Newton 流体の構成方程式に対して、非圧縮性と偏差応力が発生しないことを仮定する。弾性体に見られる線形同次の仮定は与えず、 ϵ_{ij} は変位場に対する歪とする。

非圧縮性を有するということは、体積歪が 0 となる。ここで、式(4-6)の構成方程式のトレースをとって、体積歪 ϵ_{kk} が 0 となることから、

$$\sigma_{kk} = -3p + 3\lambda\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{kk} = -3p \quad (4-8)$$

となる。また、偏差応力 σ'_{ij} は一般的に以下の形で表される。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である。

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (4-9)$$

式(4-8)を考慮し、本論文で扱う物質における偏差応力が発生しない仮定から、偏差応力 σ'_{ij} は以下となる。

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} = 0 \quad (4-10)$$

以上のことから、本論文で対象とする可変構造の物質の構成方程式は、以下となる。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (4-11)$$

上記の導出は、非圧縮性を仮定して、偏差応力が発生しないことを仮定する流れで説明を行ったが、仮定する順番を逆にしても同様に示すことができる。

また、式(4-11)で表現される圧力 p は非決定応力(不定静水圧)と呼ばれる。物体の変形の履歴、つまり歪の分布状態から応力が決定されないことを意味する。流体解析で行われる原始変数法と同様、圧力 p を独立変数とし、変位と共に未知量として求める手法は、同じく非

圧縮性を仮定した超弾性体の解析に有用な混合型有限要素法で扱われる。この場合、超弾性体の構成方程式に圧力 p が含まれる [30]。

また、応力を歪の関数とみた構成方程式の定数項、つまり 0 次の弾性係数で表現される物質を、膜構造の形状解析の文脈では、0 次弾性体と呼ぶ[31,32]。0 次弾性体では、応力を歪によらず一定値で与え、自然状態の形状から等応力状態の形状を与える。この場合、応力は既知量となり、形状を未知量とした形状解析を行っている。座標値を未知量とした有限要素法定式化手法も提案されている[33]。

本論文でも、構成方程式の定数項を用いていることになり、0 次弾性体に準ずる物質といえ、非圧縮性と等方的応力のみを仮定するが、応力は一定値ではなく、圧力 p の独立変数とした扱いとしている。

4.7 重み付き残差法による基礎式の導出

本論文では、構成方程式より、応力を独立変数として扱うため、以下に示す重み付き残差法による手法を採用する。また、各要素領域 Ω_k で積分して重み関数をかけることで、離散化のための形状関数を与えることになる。ここで、式(4-2)の釣合式を再録すると、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + b_i = 0 \quad (4-12)$$

である。上式に重み付き残差法を適用して基礎式を導く。導出については、参考文献[3]を参考とする。重み関数 w_i を両辺にかけて、要素領域 Ω_k で積分すると以下となる。

$$\int_{\Omega_k} w_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + b_i \right) dV = 0 \quad (4-13)$$

ここで、

$$\frac{\partial (\sigma_{ij} w_i)}{\partial r_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial r_j} + w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} \quad (4-14)$$

と表すことができる。上式より、

$$w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} = \frac{\partial (\sigma_{ij} w_i)}{\partial r_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial r_j} \quad (4-15)$$

となる。これを式(4-13)に代入すると、

$$\int_{\Omega_k} \left(-\sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial r_j} + \frac{\partial (\sigma_{ij} w_i)}{\partial r_j} + w_i b_i \right) dV = 0 \quad (4-16)$$

ここで、以下の Gauss の発散定理を用いて、要素の境界を Γ_k で表す。 c_i は任意のベクトルである。

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial c_i}{\partial r_i} dV = \int_{\Gamma_k} n_i c_i dS \quad (4-17)$$

上記、Gauss の発散定理を用いると、式(4-16)の左辺第 2 項は以下となる。

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial(\sigma_{ij}w_i)}{\partial r_j} dV = \int_{\Gamma_k} n_i(\sigma_{ij}w_i) dS = \int_{\Gamma_k} w_i(\sigma_{ji}n_i) dS = \int_{\Gamma_k} w_i t_i dS \quad (4-18)$$

式(4-18)は以下の Cauchy の公式より与えられる.

$$t_i = \sigma_{ji}n_i \quad (4-19)$$

以上より, 式(4-16)の各要素における基礎式は以下となる.

$$\int_{\Omega_k} -\sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial r_j} dV + \int_{\Gamma_k} w_i t_i dS + \int_{\Omega_k} w_i b_i dV = 0 \quad (4-20)$$

また, 上式を書き換えて,

$$\int_{\Omega_k} -w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} dV + \int_{\Gamma_k} w_i t_i dS + \int_{\Omega_k} w_i b_i dV = 0 \quad (4-21)$$

となる. こうして与えられる表面力は, 全体の領域から見ると, 隣接する要素で打ち消し合うことになるが, 境界部で既知の表面力を与える場合に考慮することになる. 未知の表面力については, 変位境界を考慮する際に, 後述する \mathbf{B} マトリクス関連を操作することにより, 削除されることになる.

上式は一般的な重み付き残差法による基礎式と積分領域を各要素領域 Ω_k で行っている点が異なる.

4.8 構成方程式を考慮した基礎式

式(4-2)の釣合式を式(4-11)の構成関係を用いて, 圧力を用いた釣合式は以下となる.

$$-\frac{\partial p}{\partial r_i} + b_i = 0 \quad (4-22)$$

上式は, 静水圧平衡と呼ばれる. また, 平均応力 σ_m を用いれば, 釣合式は以下となる.

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} + b_i = 0 \quad (4-23)$$

$$\sigma_m = \sigma_{11} \quad (\text{一次元要素の場合}) \quad (4-24)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (\text{二次元要素の場合}) \quad (4-25)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (\text{三次元要素の場合}) \quad (4-26)$$

p, σ_m はそれぞれスカラー量で表される. また, これらは座標の取り方によらない不変量と呼ばれる性質を持つ[30].

ここで, 構成方程式を考慮した式(4-23)の釣合式表現を用いて, 応力勾配項と外力項を分けて表現すれば, 式(4-21)の基礎式は以下となる.

$$\int_{\Omega_k} w_i \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} dV = \int_{\Gamma_k} w_i t_i dS + \int_{\Omega_k} w_i b_i dV \quad (4-27)$$

上式により，本論文で対象とする可変構造の「等方的な応力が発生し，応力の偏差成分は発生しない非圧縮性を有する物質」の要素座標における基礎式が導出されたことになる。

4.9 要素座標における変位－体積歪関係式

一般的に，変位－歪関係式は，式(4-1)で表されるように，歪のテンソルで表現される[2,3]。本論文で扱う可変構造における変位－歪関係式は，スカラーで表される平均応力 σ_m で表される釣合式(4-23)との対応関係をとるために，体積歪を用いて表すこととする。体積歪 e として，

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = e \quad (4-28)$$

となる。一般に体積歪は以下の意味合いを持つ。

$$e = \frac{\Delta dL}{dL} \quad (\text{一次元要素の場合}) \quad (4-29)$$

$$e = \frac{\Delta dA}{dA} \quad (\text{二次元要素の場合}) \quad (4-30)$$

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} \quad (\text{三次元要素の場合}) \quad (4-31)$$

上式の右辺で表される量は，体積変化率と呼ばれる。体積歪 e は物質の圧縮性を示す量となり，体積歪 e が0となる場合は，非圧縮性を考慮していることになる。

変位－歪関係式に式(4-28)の表現を用いて，釣合式に式(4-22)，あるいは式(4-23)の表現を用いれば，後述する離散化方程式の中で，釣合式と変位－体積歪関係式の係数行列に反傾関係が成立する。反傾関係，あるいは反傾原理については，第2章2.4節を参照されたい。

4.10 全体座標における支配方程式

本論文で対象とする可変構造の数値解析では，一次元要素や二次元要素を三次元空間に配する問題を考える。したがって，全体座標での釣合式を考える。本来，物体力は，扱う要素に応じて同次元の物体力が存在することになるため，全体座標で表現するためには，座標変換を行わなければならない。

本論文では以下のように，釣合式と変位－体積歪関係式に変換を与える。

$$\frac{\partial c_j}{\partial x_j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial r_i} c_j \quad (4-32)$$

上式は微分の連鎖則を適用したもので， c_j は任意のベクトルであり，スカラーの場合でも同

様に与えることが可能である[34].

ここで、物体力はポテンシャル V_p の勾配で与えられる保存力と考え、以下のように座標の関数として表される[35].

$$b_i = \frac{\partial V_p}{\partial r_i} \quad (4-33)$$

ここで、ポテンシャル V_p はスカラー量である。これを、式(4-23)に代入し、両辺に $\partial r_i / \partial x_j$ をかけて、

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} + \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_p}{\partial r_i} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_j} + \frac{\partial V_p}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_j} + \bar{b}_j = 0 \quad (4-34)$$

となる。ここで、 \bar{b}_j は、全体座標で表される物体力である。表面力 \bar{t}_j も同様に導出できる。式(4-34)により、本論文で対象とする可変構造の全体座標における支配方程式が得られた。これを基に、次節にて全体座標における基礎式を導出する。また、変位－体積歪関係式にも同様の変換をするために、変位ベクトルと微分演算子を分けて、以下のように定義する。

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial r_i} u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = e \quad (4-35)$$

式(4-35)では、体積歪 e も平均応力 σ_m と同様不変量であり、その性質を踏まえている。また、本論文では、体積歪を0と仮定するが、以降においても物理量を明確にするため、体積歪 e や体積歪の積分量を残した形で定式化を進める。

なお、ここでは要素座標の次元数を添字 i 、全体座標の次元数を添字 j と、区別して表現しているが、以降では、全体座標 $x_i (i = 1, 2, 3)$ で表記する。

4.11 全体座標における変位－体積歪関係式・基礎式

前節の座標変換を踏まえて、全体座標 x_i における変位－体積歪関係式は式(4-35)から、以下となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = e \quad (4-36)$$

全体座標 x_i における基礎式は、式(4-27)、式(4-34)を基に、以下となる。

$$\int_{\Omega_k} w_i \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} dV = \int_{\Gamma_k} w_i \bar{t}_i dS + \int_{\Omega_k} w_i \bar{b}_i dV \quad (4-37)$$

ここで、表面力に関しても、全体座標で表した \bar{t}_i を用いる。以下、上2式を基に、離散化方程式を導出する。

4.12 要素離散化と離散化方程式

4.12.1 一次元要素

本節では、一次元要素(トラス要素)の離散化を行う。可変構造に用いられる一次元要素は、剛体変位や全長が一定となる変位を扱うことを想定している。剛体変位であれば、軸歪を0とし、全長一定の変位では、伸びの総和が0となることを仮定する。したがって、いずれも一次元要素における軸歪を定義する必要がある。

式(4-36)の変位-体積歪関係式を用いて、軸歪を定義する。本手法の場合、軸歪は以下のよう考えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = e = \frac{\Delta dL}{dL} = \varepsilon \quad (4-38)$$

上式は、体積歪は、二次元要素や三次元要素では、面積や体積の変化率を意味する。ただし、上式のように、一次元要素に縮退した状態では、微小要素体積 dV の代わりに微小要素長さ dL を用いることで、工学歪の意味合いを持つ。すなわち、一次元要素において、体積歪と定義していたものは、軸歪と同様に与えられる。一次元要素では、上式を変位-歪関係式とする。

以下、変位-体積歪関係式の離散化を行う。有限要素法で用いられる形状関数を用いて離散化を行うが、微分の連鎖則によって、自然座標(本論文では要素座標に該当する)における形状関数の偏微分値から全体座標における形状関数の偏微分値、すなわち空間微分値に変換する操作を行う。本手法では、この座標変換にムーア・ペンローズ一般逆行列を用いる点が、通常の有限要素法とは異なる。次に、全体座標における形状関数の偏微分値を用いることによって、式(4-38)の変位-体積歪関係式の離散化を行う。

ここで、全体座標系 x_1, x_2, x_3 に一次元要素が配されるとする (Fig.4-2)。離散化する際に用いる形状関数は、一次元要素二節点のアイソパラメトリック要素により定義する。アイソパラメトリック要素に用いられる自然座標を r_1 ($-1 < r_1 < 1$)、形状関数 $N^{(k)}$ を用いて変位 $u_i^{(k)}$ と要素内座標 $x_i^{(k)}$ を補間する($k = 1, 2, i = 1, 2, 3$)。

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r_1) \quad (4-39)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r_1) \quad (4-40)$$

$$u_i = N^{(1)}u_i^{(1)} + N^{(2)}u_i^{(2)} \quad (4-41)$$

$$x_i = N^{(1)}x_i^{(1)} + N^{(2)}x_i^{(2)} \quad (4-42)$$

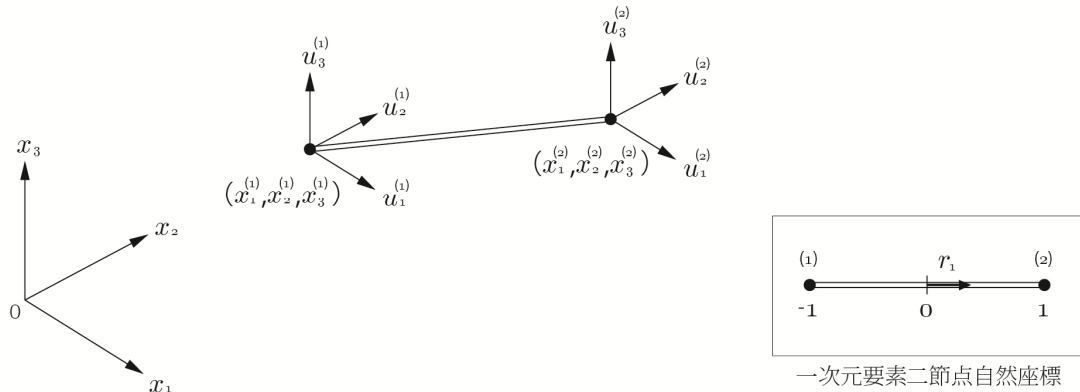


Fig.4-2 一次元要素

自然座標 r_1 による形状関数 $N^{(k)}$ の微分値は

$$\frac{dN^{(1)}}{dr_1} = -\frac{1}{2} \quad (4-43)$$

$$\frac{dN^{(2)}}{dr_1} = \frac{1}{2} \quad (4-44)$$

で与えられる。ここで、形状関数の全体座標 x_1, x_2, x_3 の偏微分値は、微分の連鎖則により、以下の過程で得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(k)}}{dr_1} &= \frac{dx_1}{dr_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dr_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dr_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dr_1} & \frac{dx_2}{dr_1} & \frac{dx_3}{dr_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{dN^{(1)}}{dr_1} x_1^{(1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr_1} x_1^{(2)} \quad \frac{dN^{(1)}}{dr_1} x_2^{(1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr_1} x_2^{(2)} \quad \frac{dN^{(1)}}{dr_1} x_3^{(1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr_1} x_3^{(2)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_{k=1}^2 \frac{dN^{(k)}}{dr_1} x_1^{(k)} \quad \sum_{k=1}^2 \frac{dN^{(k)}}{dr_1} x_2^{(k)} \quad \sum_{k=1}^2 \frac{dN^{(k)}}{dr_1} x_3^{(k)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \tilde{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4-45) \end{aligned}$$

\tilde{J} は3次元行ベクトルである。 \tilde{J} は本来ヤコビ行列に相当するが、ここでは正則行列ではな

いため~記号を付す. したがって, ヤコビアン¹の演算は定義できないが, 劣決定問題におけるムーア・ペンローズ一般逆行列を用いれば, 第2章2.3節の式(2-14)より, 全体座標による形状関数の微分値の一般解は下式となる. $\tilde{\mathbf{J}}^+$ は, $\tilde{\mathbf{J}}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列を示し, 3次元列ベクトルである.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{J}}^+ \frac{dN^{(k)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{\mathbf{J}}^+ \tilde{\mathbf{J}}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \quad (4-46)$$

一次元トラス要素を用いる場合, $\tilde{\mathbf{J}}$ は行ベクトルになるため, ムーア・ペンローズ一般逆行列 $\tilde{\mathbf{J}}^+$ は以下で求めることができる.

$$\tilde{\mathbf{J}}^+ = \frac{\tilde{\mathbf{J}}^T}{\tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{J}}^T} \quad (4-47)$$

また, ここでの $\tilde{\mathbf{J}}^+$ は本章4.10節で与えた微分の連鎖則によって与える座標変換の作用素の意味を持つ. $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ は任意の3次元列ベクトルである. $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ の決定方法については本章4.16節にて後述する.

ひとつの要素における節点変位ベクトル $\mathbf{u}^T = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\}$ で表し, 本離散化手法で得られる一次元要素の変位-歪関係式は以下となる. N_e は 3×6 の形状関数マトリクス, B_e は 1×6 の要素毎の変位-歪関係行列である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} N_e \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_3} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &\equiv B_e \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4-48)$$

上式が, 一次元要素における要素毎の変位-歪関係式の離散化方程式となる. 次に, 式(4-36)の変位-体積歪関係式を一次元要素において, 両辺長さに対して積分した式を与える.

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dL = \int_{\Omega_k} e dL \quad (4-49)$$

要素長さ l とすれば, 以下となる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} l = e l \quad (4-50)$$

また, 上式の左辺についてみると,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} l = l B_e \mathbf{u} \equiv B_e^l \mathbf{u} \quad (4-51)$$

となり, 右辺についてみると,

$$el = \frac{\Delta dL}{dL} l = \Delta l \quad (4-52)$$

となる．ここで単位面積伸びを Δl としている．変位－体積歪関係式を両辺長さに関して積分した場合，変位－単位面積伸び関係式となり，以下となる．

$$B_e^l \mathbf{u} = \Delta l \quad (4-53)$$

次に，式(4-36)の変位－体積歪関係式を体積積分した場合，断面積 a ，伸び Δ として，

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV &= \int_{\Omega_k} e dV \\ \Rightarrow a \int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dL &= a \int_{\Omega_k} e dL \\ &\Rightarrow a B_e^l \mathbf{u} = a \Delta l \\ &\Rightarrow B_e^v \mathbf{u} = \Delta \end{aligned} \quad (4-54)$$

となる．

ここで，式(4-37)の基礎式の離散化を考える．重み関数 w_i に関して，変位や座標と同様，形状関数 $N^{(k)}$ や節点値 $w_i^{(k)}$ を用いて補間する．

$$w_i = N^{(1)} w_i^{(1)} + N^{(2)} w_i^{(2)} \quad (4-55)$$

重み関数 w_i ，表面力 \bar{t}_i ，物体力 \bar{b}_i について以下に示す節点値ベクトルで表す．

$$\mathbf{w}^T = \{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_3^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, w_3^{(2)}\} \quad (4-56)$$

$$\bar{\mathbf{t}}^T = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3\} \quad (4-57)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^T = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\} \quad (4-58)$$

これらを用いて，式(4-37)の基礎式に代入して，以下が得られる．

$$\mathbf{w}^T \int_{\Omega_k} B_e^T \sigma_m dV = \mathbf{w}^T \int_{\Gamma_k} N_e^T \bar{\mathbf{t}} dS + \mathbf{w}^T \int_{\Omega_k} N_e^T \bar{\mathbf{b}} dV \quad (4-59)$$

w_i の任意性や，次元要素における断面積 a や要素長さ l が定数で与えられ，形状関数の分布性状を考慮すると，体積積分は以下となる．

$$al B_e^T \sigma_m = a N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (4-60)$$

ここで，両辺，体積で割ると，下式となる．

$$\begin{aligned} B_e^T \sigma_m &= \frac{1}{l} N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{2} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \\ &\Rightarrow B_e^T \sigma_m = \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (4-61)$$

右辺の表面力と物体力をまとめて，外力 \mathbf{f}_e としている．上式は，式(3-58)の変位－歪関係式と反傾原理が成立している．

また，式(4-60)の両辺，断面積 a で割ると，下式となる．

$$\begin{aligned}
lB_e^T \sigma_m &= N_e^T \bar{t} + \frac{l}{2} N_e^T \bar{b} \\
\Rightarrow (B_e^l)^T \sigma_m &= N_e^T \bar{t} + \frac{l}{2} N_e^T \bar{b} \\
\Rightarrow (B_e^l)^T \sigma_m &= f_e
\end{aligned} \tag{4-62}$$

上式は、式(4-53)の変位－単位面積伸び関係式と反傾関係が成立している。
式(4-60)の体積積分のまま考えると、

$$\begin{aligned}
a(B_e^l)^T \sigma_m &= aN_e^T \bar{t} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{b} \\
\Rightarrow (B_e^l)^T \sigma_m &= f_e
\end{aligned} \tag{4-63}$$

上式は、式(3-64)の変位－伸び関係式と反傾関係が成立している。
ここで、一次元要素の働く軸力 n は以下のように表すことができる。

$$a\sigma_m = n \tag{4-64}$$

したがって、以下の変位－歪関係式と釣合式、及び変位－単位面積伸び関係式と要素長さで積分した釣合式の間に関係が成立する。

$$\begin{aligned}
aB_e^T \sigma_m &= \frac{a}{l} N_e^T \bar{t} + \frac{a}{2} N_e^T \bar{b} \\
\Rightarrow B_e^T n &= f_e
\end{aligned} \tag{4-65}$$

$$\begin{aligned}
a(B_e^l)^T \sigma_m &= aN_e^T \bar{t} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{b} \\
\Rightarrow (B_e^l)^T n &= f_e
\end{aligned} \tag{4-66}$$

また、構造体全体に拡張する。本手法の場合、有限要素法で用いられる要素の積分和ではなく、要素を連立して全体行列を作成する。したがって、変位－歪関係式を例にとり、要素数 $m=3$ 、自由度 $n=12$ 、要素全体の変位ベクトル \mathbf{d} として、行列で表現すると、

$$\begin{bmatrix} B_{1(1 \times 6)} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & B_{2(1 \times 6)} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & B_{3(1 \times 6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1(1 \times 6)} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & B_{2(1 \times 6)} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & B_{3(1 \times 6)} \end{bmatrix} \mathbf{d}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{4-67}$$

となる。上式の例は3つの要素における全体行列となる。

このように変位－歪関係式と釣合式の全体行列を作成すると、以下となる。 \mathbf{B} は $m \times n$ 、 m は要素数、 n は自由度数の変位－歪関係行列、 \mathbf{d} は n 次元の変位ベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は m 次元の歪ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}_m$ は m 次元の平均応力ベクトル、 \mathbf{f} は n 次元の節点外力ベクトルである。

$$\mathbf{Bd} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4-68}$$

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{f} \tag{4-69}$$

$$\mathbf{f}_e = \frac{1}{l} N_e^T \bar{t} + \frac{1}{2} N_e^T \bar{b} \tag{4-70}$$

また、変位－単位面積伸び関係式と要素長さで積分した釣合式の全体行列を作成すると、

以下となる． B^l は $m \times n$ の変位－単位面積伸び関係行列， Δl は m 次元の単位面積伸びベクトルである．

$$B^l d = \Delta l \quad (4-71)$$

$$(B^l)^T \sigma_m = f \quad (4-72)$$

$$f_e = N_e^T \bar{t} + \frac{l}{2} N_e^T \bar{b} \quad (4-73)$$

また，変位－伸び関係式と要素体積で積分した釣合式の全体行列を作成すると，以下となる． B^v は $m \times n$ の変位－伸び関係行列， Δ は m 次元の伸びベクトルである．

$$B^v d = \Delta \quad (4-74)$$

$$(B^v)^T \sigma_m = f \quad (4-75)$$

$$f_e = a N_e^T \bar{t} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{b} \quad (4-76)$$

ここで，軸力ベクトル n を用いて全体行列を作成すると，以下のように表すことができる．

$$B^T n = f \quad (4-77)$$

$$f_e = \frac{a}{l} N_e^T \bar{t} + \frac{a}{2} N_e^T \bar{b} \quad (4-78)$$

$$(B^l)^T n = f \quad (4-79)$$

$$f_e = a N_e^T \bar{t} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{b} \quad (4-80)$$

このように，扱う問題に応じて，どの積分レベルの離散化方程式を選ぶか，選択する必要がある．その場合，既知量として与える節点外力に関して，同様に注意を払う必要がある．任意の節点外力でなく，物理量が与えられている状態では，特に注意が必要と思われる．

また，境界条件については，本章 4.5 節のように与える．変位に関する拘束を与える場合が多く，この場合，有限要素法では，拘束を与えた境界に関して，表面力に関する境界条件が反力となり，未知数となる．本論文では，変位に関する拘束を与える場合，変位－歪関係式などに現れる B マトリクスの該当する自由度の列ベクトルを消去するように与える．この場合，反力に関する未知数に該当する B マトリクスも同時に消去されることになる．

4.12.2 二次元要素

二次元要素の離散化を行う．一次元要素と同様に，離散化を行っていく．本論文で，二次元要素を用いる解析事例は，面積一定の変位を扱う．この場合，面積変化率を 0 とすることで，実現することが可能となり，変位－体積歪関係式を用いて，以下のように表せる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = e = \frac{\Delta d A}{d A} \quad (4-81)$$

以下，上式の変位－体積歪関係式を用いて離散化を行う。

全体座標系 x_1, x_2, x_3 に二次元要素が配されるとする (Fig.4-3). 離散化する際に用いる形状関数は，二次元三節点要素により定義する. 自然座標を $r_1(0 < r_1 < 1)$, $r_2(0 < r_2 < 1)$ 形状関数 $N^{(k)}$ を用いて変位 $u_i^{(k)}$ と要素内座標 $x_i^{(k)}$ を補間する($k = 1, 2, 3, i = 1, 2, 3$).

$$N^{(1)} = r_1 \quad (4-82)$$

$$N^{(2)} = r_2 \quad (4-83)$$

$$N^{(3)} = 1 - r_1 - r_2 \quad (4-84)$$

$$u_i = N^{(1)}u_i^{(1)} + N^{(2)}u_i^{(2)} + N^{(3)}u_i^{(3)} \quad (4-85)$$

$$x_i = N^{(1)}x_i^{(1)} + N^{(2)}x_i^{(2)} + N^{(3)}x_i^{(3)} \quad (4-86)$$

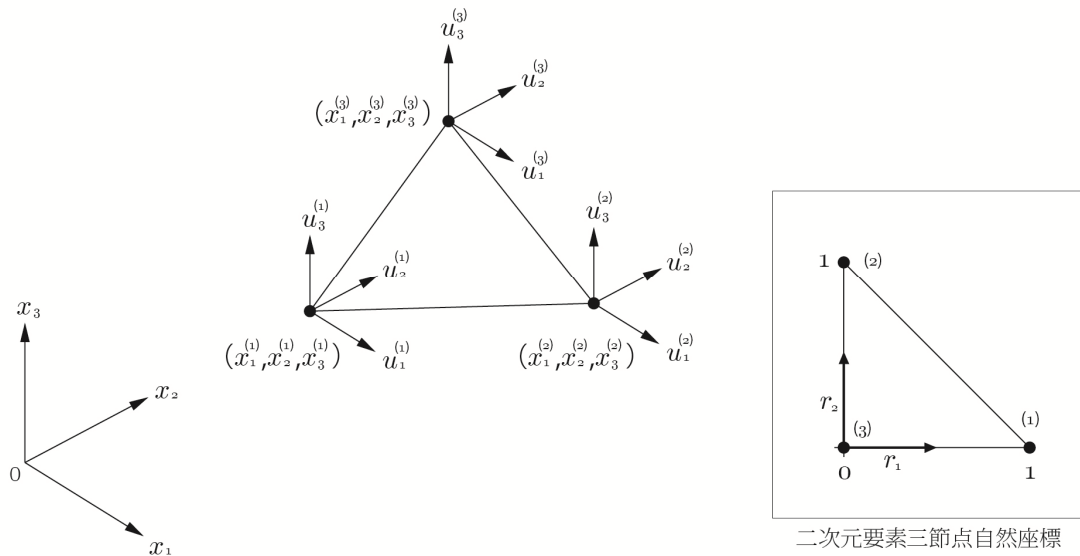


Fig.4-3 二次元要素

自然座標 r_1, r_2 による形状関数 $N^{(k)}$ の微分値は，

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} = 1, \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} = 0, \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} = -1 \quad (4-87)$$

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} = 0, \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} = 1, \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} = -1 \quad (4-88)$$

で与えられる. 形状関数の全体座標 x_1, x_2, x_3 の微分値は，微分の連鎖則により，以下の過程で得られる.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} x_1^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} x_2^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} x_3^{(k)} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} x_1^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} x_2^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} x_3^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4-89)
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{J}}$ は 2×3 の行列である。したがって、一次元要素と同様、全体座標による形状関数の微分値を求める問題は、劣決定問題となり、一般解は第2章2.3節式(2-14)より、次式となる。 $\tilde{\mathbf{J}}^+$ は、 $\tilde{\mathbf{J}}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列を示し、 3×2 の行列である。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{J}}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + [I_3 - \tilde{\mathbf{J}}^+ \tilde{\mathbf{J}}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \quad (4-90)$$

$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ は任意の3次元列ベクトルである。 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ の決定方法については、本章4.16節にて後述する。なお、解析空間を二次元平面とする場合は、 $\tilde{\mathbf{J}}$ は正則となるため、 $\tilde{\mathbf{J}}^+$ は通常の逆行列となる。この場合、余解は生じない。

離散化した形状関数の全体座標による偏微分値を用いて、二次元要素における体積歪を導出する。ひとつの要素における変位ベクトル $\mathbf{u}^T = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}\}$ で表す。本離散化手法で得られる二次元要素の変位-体積歪関係式は以下となる。 N_e は 3×9 の形状関数マトリクス、 B_e は 1×9 の要素毎の変位-体積歪関係行列である。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 & 0 & N^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} N_e \mathbf{u} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_3} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_3} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
&\equiv B_e \mathbf{u} = e \quad (4-91)
\end{aligned}$$

上式が、二次元要素における要素毎の変位-体積歪関係式の離散化方程式となる。

次に、式(4-81)の変位-体積歪関係式を二次元要素において、辺々面積に対して積分した式を与える。

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA = \int_{\Omega_k} e dA \quad (4-92)$$

要素面積 a とすれば、以下となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} a = ea \quad (4-93)$$

また、上式の左辺についてみると、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} a = a B_e^a u \equiv B_e^a u \quad (4-94)$$

となり、右辺についてみると、

$$ea = \frac{\Delta dA}{dA} a = \Delta a \quad (4-95)$$

となる。ここで単位厚さあたりの変形量を Δa としている。変位－体積歪関係式を辺々面積に関して積分した場合、変位－単位厚さ変形量関係式となり、以下となる。

$$B_e^a u = \Delta a \quad (4-96)$$

次に、式(4-81)の変位－体積歪関係式を体積積分した場合、要素厚さ h 、変形量 Δ として、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV &= \int_{\Omega_k} e dV \\ \Rightarrow h \int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA &= h_e \int_{\Omega_k} e dA \\ &= h B_e^a u = h \Delta a \\ &\Rightarrow B_e^v u = \Delta \end{aligned} \quad (4-97)$$

となり、変位－変形量関係式となる。

ここで、式(4-37)の基礎式の離散化を考える。重み関数 w_i に関して、一次元要素と同様に補間する。式(4-59)と同様となり、以下となる。

$$\mathbf{w}^T \int_{\Omega_k} B_e^T \sigma_m dV = \mathbf{w}^T \int_{\Gamma_k} N_e^T \bar{\mathbf{t}} dS + \mathbf{w}^T \int_{\Omega_k} N_e^T \bar{\mathbf{b}} dV \quad (4-98)$$

w_i の任意性や、二次元要素における要素厚さ h や要素面積 a が定数で与えられ、形状関数の分布性状を考慮すると、体積積分は以下となる。ただし、 $l^{(k)}$ は要素辺の長さを表し、 k は表面力の境界が与えられる辺とする。

$$ah B_e^T \sigma_m = \frac{l^{(k)} h}{2} N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{ah}{3} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (4-99)$$

ここで、両辺、体積で割ると、下式となる。

$$\begin{aligned} B_e^T \sigma_m &= \frac{l^{(k)}}{2a} N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{3} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \\ \Rightarrow B_e^T \sigma_m &= \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (4-100)$$

右辺の表面力と物体力をまとめて、外力 \mathbf{f}_e としている。上式は、式(3-101)の変位－体積歪関係式と反傾原理が成立している。

また、式(4-99)の両辺、要素厚さ h で割ると、下式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \frac{l^{(k)}}{2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{a}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \\ \Rightarrow (\mathbf{B}_e^a)^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \frac{l^{(k)}}{2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{a}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \\ \Rightarrow (\mathbf{B}_e^a)^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (4-101)$$

上式は、式(4-96)の変位－単位厚さ変形量関係式と反傾関係が成立している。式(4-99)の体積積分のままで考えると、

$$\begin{aligned} h(\mathbf{B}_e^a)^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \frac{l^{(k)}h}{2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{ah}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \\ \Rightarrow (\mathbf{B}_e^v)^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (4-102)$$

上式は、式(4-97)の変位－変形量関係式と反傾関係が成立している。

一次元要素と同様に構造体全体に拡張する。変位－体積歪関係式と釣合式の全体行列を作成すると、以下となる。 \mathbf{B} は $m \times n$ 、 m は要素数、 n は自由度数の変位－歪関係行列、 \mathbf{d} は n 次元の変位ベクトル、 \mathbf{e} は m 次元の体積歪ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}_m$ は m 次元の平均応力ベクトル、 \mathbf{f} は n 次元の節点外力ベクトルである。

$$\mathbf{B} \mathbf{d} = \mathbf{e} \quad (4-103)$$

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{f} \quad (4-104)$$

$$\mathbf{f}_e = \frac{l^{(k)}}{2a} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (4-105)$$

また、変位－単位厚さ変形量関係式と要素面積で積分した釣合式の全体行列を作成すると、以下となる。 \mathbf{B}^a は $m \times n$ の変位－単位厚さ変形量関係行列、 $\Delta \mathbf{a}$ は m 次元の単位厚さ変形量ベクトルである。

$$\mathbf{B}^a \mathbf{d} = \Delta \mathbf{a} \quad (4-106)$$

$$(\mathbf{B}^a)^T \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{f} \quad (4-107)$$

$$\mathbf{f}_e = \frac{l^{(k)}}{2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{a}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (4-108)$$

また、変位－変形量関係式と要素体積で積分した釣合式の全体行列を作成すると、以下となる。 \mathbf{B}^v は $m \times n$ の変位－変形量関係行列、 Δ は m 次元の変形量ベクトルである。

$$\mathbf{B}^v \mathbf{d} = \Delta \quad (4-109)$$

$$(\mathbf{B}^v)^T \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{f} \quad (4-110)$$

$$\mathbf{f}_e = \frac{l^{(k)}h}{2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{ah}{3} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (4-111)$$

以上、一次元要素と二次元要素について、離散化方程式の定式化を進めてきたが、三次

元要素に関しては、全体座標と自然座標(要素座標)の次元数が一致しており、むしろ上記のような複雑さはない。同様の関係式を用いれば、三次元要素の場合は、体積一定の変位を実現できることになるが、本論文では、解析対象として扱わない。

次節において、これまでに導出した構造体全体に拡張した離散化方程式を用いて、剛体変位・面積一定変位の求解方法を述べる。

4.13 剛体変位・面積一定変位

本論文では、一次元要素に用いる解析に、剛体変位と全長一定変位を扱う。ここで、第2章 2.6 節の可変構造に課される条件を用いる。剛体変位の場合、歪 ϵ 、単位面積伸び Δl 、伸び Δ のいずれを 0 としても、剛体変位が可能となる。本論文では、歪 ϵ の表現を用いる。したがって、式(4-68)の変位-歪関係式と式(4-69)の釣合式を離散化方程式として考える。以下に、再録する。

$$Bd = \epsilon \quad (4-112)$$

$$B^T \sigma_m = f \quad (4-113)$$

本論文では、変位に関する境界条件が不足した構造体を想定し、 B マトリクスは要素数 m 、自由度数 n として、 $m \times n$ ($m < n$) の長方形となる変位-歪関係行列である。したがって、式(4-112)で変位を求める場合、劣決定問題となる。ここで、非圧縮性を仮定しているため、体積歪は 0、すなわち式(4-48)の関係から、歪は 0 ということになり、

$$Bd = 0 \quad (4-114)$$

となる。ここで、第2章 2.3.3 節よりムーア・ペンローズ一般逆行列の性質から、連立一次方程式の同次方程式の解は、式(2-23)の余解を用いて、以下のように表すことができる。

$$d = [I_n - B^+ B] \alpha \equiv H \alpha \quad (4-115)$$

I_n は $n \times n$ の単位行列、 B^+ は $n \times m$ のムーア・ペンローズ一般逆行列、 α は任意の列ベクトル、 H は $n \times n$ の剛体変位モード行列 (零空間への正射影行列) である。正射影行列については、第2章 2.5 節参照。なお、文献[5,6]等では、正射影行列から線形独立なモードのみを抽出している。本論文では、後述する流体問題で、正射影行列の性質を活用するために、可変構造においても、正射影行列のまま扱うこととする。 α の決定には、安定化移行解析[5,35]を用いる。これは、外力ポテンシャルが停留する過程で、ポテンシャルの最大勾配方向に対して、 α を設定することになる。変形後のポテンシャルエネルギーを以下とする。

$$\Pi_{t+\Delta t} = \Pi_t + \Delta \Pi_t \quad (4-116)$$

ここで、外力に関する増分ポテンシャルエネルギーを以下とする。

$$\Delta \Pi_t = -d^T f \quad (4-117)$$

内部の歪エネルギーに関しては、歪を 0 と仮定しているため、考慮しない。

上式に式(4-115)を代入すると、以下となる。

$$\Delta \Pi_t = -(H\alpha)^T f \quad (4-118)$$

増分ポテンシャルエネルギーの減少の割合が最大である向きに α だけ移行することを考えれば、最大傾斜方向、すなわち勾配を α とし、以下となる。

$$\alpha = -\frac{\partial \Delta \Pi_t}{\partial \alpha} = \alpha H^T f \quad (4-119)$$

ここで、スカラーで表される α は、任意のスカラー量で、増分パラメータである。こうして、設定された任意の列ベクトル α は、増分パラメータ α を正にとれば、必ず増分ポテンシャルエネルギーが減少する方向となる。この α を式(4-115)に代入し、 $H = HH^T$ となる正射影行列 H の性質を考えれば、変位ベクトルは、以下となる。

$$d = \alpha HH^T f = \alpha H^T f \quad (4-120)$$

この外力ポテンシャルを停留する過程で、増分ポテンシャルエネルギーの最大傾斜方向をとるように α を決定する方法は、剛体変位だけでなく、全長一定、面積一定の場合も同様とする。

面積一定変位の場合、扱う要素は二次元要素となる。面積一定変位の場合、体積歪 e 、単位厚さ変形量 Δa 、変形量 Δ のいずれを0としても可能となる。本論文では、体積歪 e の表現を用いる。したがって、式(4-103)の変位－体積歪関係式と式(4-104)の釣合式を離散化方程式として考える。以下に、再録する。

$$Bd = e \quad (4-121)$$

$$B^T \sigma_m = f \quad (4-122)$$

以下、一次元要素と同様に変位ベクトルを求めることができる。

4.14 応力の算出

一次元要素、二次元要素共に平均応力は以下のように、得られる。

$$\sigma_m = (B^+)^T f \quad (4-123)$$

ここで、以下に示される第2章2.3節の式(2-16)の関係を用いている。

$$(B^T)^+ = (B^+)^T \quad (4-124)$$

なお、ここで与えられる平均応力は、 B^T が縦長の行列を持つことから、余解は考慮する必要がなく、与えられる解はノルム最小かつ最小二乗解の特徴を持つ。また、平均応力が正確な解を得るためには、第2章2.3節の式(2-15)の解の存在条件を満足する必要がある。本論文で対象とする解析事例では、変形過程の中では、解の存在条件を満たすことはなく、安定状態に達したときに満足する。

ここで与えられる解は、平均応力、あるいは圧力に類するもので、一次元要素では、そのまま応力として与えられることになるが、二次元要素では、応力の各方向成分は求められないことに注意を要する。

4.15 全長一定変位

前節までは離散化した各要素をそれぞれひとつの要素(一領域)として捉えていた. 全長一定変位を考慮する場合, これらの離散化した要素のうち該当する領域を包含し, 複数要素を一領域と捉えることで, すなわち, 複数要素を一本の方程式で表すことで, 全長一定変位の解析を実現する(Fig.4-4). この場合, 包含した複数要素の一領域を以下のように表す. g は複数要素数とする.

$$\text{複数要素の領域} : \sum_{k=1}^g \Omega_k$$

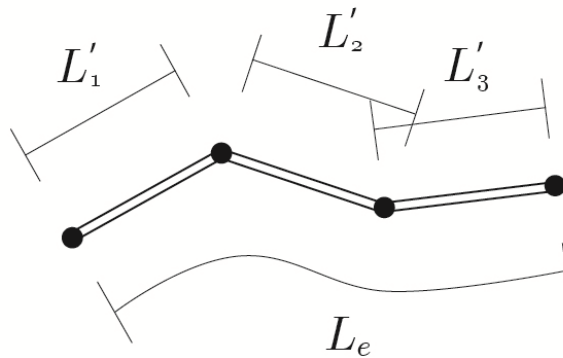


Fig.4-4 全長一定変位の領域

複数要素を一領域と捉え, これらの分割点を節点とし, 自由度を与えることとする. 包含された一領域の伸び Δl と複数要素の各伸び $\Delta l'_k (k=1 \sim g)$ の関係は以下のとおりである[37].

$$\Delta l = \sum_{k=1}^g \Delta l'_k \quad (4-125)$$

式(4-49), (4-53)を用いて, 各要素 dL' の伸びを表すと, 以下となる. 複数要素の各長さ l' で積分する.

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dL' \approx B_e u l' \equiv B_e' u = \Delta l' \quad (4-126)$$

式(4-125), (4-126)を用いて, 全体に拡張する, すなわち包含された一領域で拡張すると, 以下のように, 一本の方程式が成立する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^g \int_{\Omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dL' &= \sum_{k=1}^g \Delta l'_k \approx \left[B_1^{l'(1)} \quad B_1^{l'(2)} + B_2^{l'(1)} \quad \dots \quad B_{g-1}^{l'(2)} + B_g^{l'(1)} \quad B_g^{l'(2)} \right] \mathbf{d} \\ &\equiv B^{*l} \mathbf{d} = \Delta l \end{aligned} \quad (4-127)$$

上式の B_e' の分解方法については、以下の関係を用いている。

$$B_e' = \begin{bmatrix} B_k'^{(1)} & B_k'^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4-128)$$

式(4-127)は構造系が開いた形状を想定しているが、閉じた形状の場合は、 $B_1'^{(1)} + B_g'^{(2)}$ となる。また、複数要素の各節点は自由に動いてよいことになるため(節点の滑動)、複数要素の各長さ l が0とならないように注意を要する。式(4-127)は、全長一定変位を実現するための離散化方程式と考える。

なお、こうして伸び量を用いる理由は、歪は変化率で表されるため、複数要素で足し合わせるができないためである。

以下、剛体変位と同様に、本章 4.13 節の安定化移行解析の過程を経て、変位ベクトルを求めることが可能となる。また、二次元要素に適用すれば、表面積一定変位が実現可能となる。

4.16 $\gamma^{(k)}$ の決定について

4.16.1 一次元要素

本章 4.12 節で用いられる形状関数の偏微分値に関する座標変換の処理において、任意の列ベクトル $\gamma^{(k)}$ が導出された。これについての考察を述べる。一次元要素の事例から説明を行う。

式(4-46)より、形状関数の全体座標の偏微分値の一般解は以下のように表された。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \bar{J}^+ \frac{dN^{(k)}}{dr_1} + [I_3 - \bar{J}^+ \bar{J}] \gamma^{(k)} \quad (4-129)$$

また、ここで、それぞれの形状関数の偏微分値において、座標を架け渡すための満たすべき条件は以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \quad (4-130)$$

右辺の係数は微分の連鎖則による座標変換とみなすことができる。右辺の係数に形状関数を用いて、表すと以下となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} r_1^{(k)} \\ \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} r_1^{(k)} \\ \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} r_1^{(k)} \end{bmatrix} \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \quad (4-131)$$

ここで、両辺に式(4-129)の一般解を代入する。

$$\begin{aligned} \left[\tilde{J}^+ \frac{dN^{(k)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \right] &= \left[\sum_{k=1}^2 \left(\tilde{J}^+ \frac{dN^{(k)}}{dr_1} r_1^{(k)} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} r_1^{(k)} \right) \right] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \\ &\Rightarrow [\tilde{J}^+] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \\ &= \left[\left(\tilde{J}^+ \frac{dN^{(1)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \right) r_1^{(1)} + \left(\tilde{J}^+ \frac{dN^{(2)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \right) r_1^{(2)} \right] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \end{aligned} \quad (4-132)$$

ここで、 $r_1^{(1)} = -1$, $r_1^{(2)} = 1$ より、

$$[\tilde{J}^+] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \left[-\tilde{J}^+ \frac{dN^{(1)}}{dr_1} + \tilde{J}^+ \frac{dN^{(2)}}{dr_1} \right] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \quad (4-133)$$

上式を整理すると、

$$[I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \left[-\tilde{J}^+ \frac{dN^{(1)}}{dr_1} + \tilde{J}^+ \frac{dN^{(2)}}{dr_1} \right] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} - [\tilde{J}^+] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} \quad (4-134)$$

ここで、 $dN^{(1)}/dr_1 = -0.5$, $dN^{(2)}/dr_1 = 0.5$ であるため、上式は、以下となる。

$$[I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = [\tilde{J}^+] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} - [\tilde{J}^+] \frac{dN^{(k)}}{dr_1} = \mathbf{0} \quad (4-135)$$

したがって、 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ は0ベクトルとなることがわかる。

この場合、特解のみを採用すれば、座標変換として満たすべき条件を満たしていることになる。本論文では、 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ を0ベクトルとして、特解のみを採用する。

4.16.2 二次元要素

式(4-90)より、形状関数の全体座標の偏微分値の一般解は以下のように表された。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + [I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J}] \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \quad (4-136)$$

ここで、それぞれの形状関数の偏微分値において、座標を架け渡すための満たすべき条件は以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} r_1^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} r_2^{(k)} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} r_1^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} r_2^{(k)} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} r_1^{(k)} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} r_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-137)$$

ここで、両辺に式(4-136)の一般解を代入する。なお、 $I_3 - \tilde{J}^+ \tilde{J} \equiv \tilde{H}$ とする。

$$\begin{aligned} & \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \\ &= \left[\sum_{k=1}^3 \left(\tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} r_1^{(k)} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} r_1^{(k)} \right) \right] \sum_{k=1}^3 \left(\tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} r_2^{(k)} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} r_2^{(k)} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-138)$$

ここで、 $r_1^{(1)} = 1, r_1^{(2)} = 0, r_1^{(3)} = 0, r_2^{(1)} = 0, r_2^{(2)} = 1, r_2^{(3)} = 0$ より、

$$\tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \left[\tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \quad \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-139)$$

ここで、 $\partial N^{(1)}/\partial r_1 = 1, \partial N^{(1)}/\partial r_2 = 0, \partial N^{(2)}/\partial r_1 = 0, \partial N^{(2)}/\partial r_2 = 1$ であるため、上式の右辺は、以下となる。

$$\left[\tilde{J}^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \quad \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-140)$$

$$= \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + [\tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \quad \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-141)$$

式(4-139)、式(4-141)から、下式となる。

$$\tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} + [\tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \quad \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} - \tilde{J}^+ \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-142)$$

$$\Rightarrow \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = [\tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \quad \tilde{H} \boldsymbol{\gamma}^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (4-143)$$

上式から、 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ は0ベクトルとなることは明らかである。本論文では、二次元要素におい

て $\gamma^{(k)}$ を0ベクトルとして、特解のみを採用する。

4.17 数値解析事例

4.17.1 懸垂線

上記定式化を検証するために、自重を受けるケーブルの懸垂形状を数値解析により求める。懸垂曲線は、解析的に求めることができるため、数値解析手法の検証を行う問題として、適している。懸垂形状を数値解析により求める手法として、真柄ら[38,39]により、変位と軸力を未知数とする混合法を用いた手法がある。最小ポテンシャルエネルギーの停留条件に部材長不変の条件を与え、ラグランジュ未定乗数法により解くものであり、ケーブルをリンク機構とし、剛体変位のみを追跡するものである。また、半谷、川口ら[5,6,40]によるムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた不安定架構の形態解析でも、同様の問題を数値解析により求めている。

本論文は、一次元要素において、半谷、川口らによる手法に準じているが、変位-伸び関係行列の与え方が異なり、半谷、川口らによる手法では方向余弦を用いて構成されており、本手法では、形状関数の偏微分値を用いて構成している点が異なる。以下に数値解析事例を示す。Fig.4-5 に示されている0 stepを初期形状とし、各節点に鉛直下向きに荷重を与えることで、徐々に懸垂形状を描いていく。Fig.4-5では対称形のため、左半分のみを表現している。

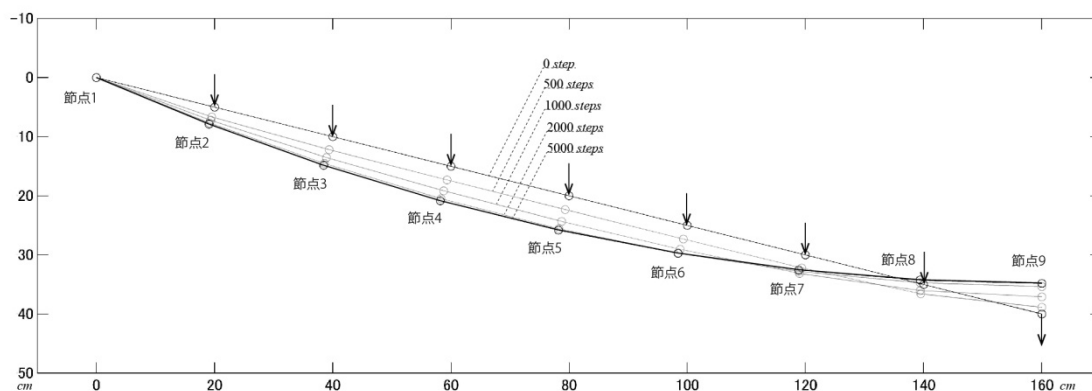


Fig.4-5 自重を受けるケーブルの解析結果

次の Fig.4-6 では、収束後の各節点における座標値を示す。

節点 番号	提案手法		真柄らによる手法		解析的手法	
	(x)	(y)	(x)	(y)	(x)	(y)
2	19.05	7.88	19.04	7.88	19.05	7.87
3	38.45	14.85	38.45	14.85	38.46	14.82
4	58.18	20.84	58.17	20.87	58.18	20.80
5	78.19	25.81	78.18	25.81	78.19	25.76
6	98.43	29.73	98.42	29.72	98.43	29.67
7	118.85	32.55	118.84	32.54	118.85	32.48
8	139.39	34.25	139.39	34.24	139.39	34.18
9	160.00	34.82	160.00	34.81	160.00	34.75

Fig.4-6 各解析手法における節点座標値

上記結果から、懸垂形状を表す座標値は、真柄らの手法や解析的手法とよく適合しているため、提案手法の妥当性が判断できる。

4.17.2 剛体モデル

本節では、第 3 章 3.3.1 項で述べた可変構造の剛体モデルを一次元要素の剛体変位(本章 4.13 節)を用いて、数値解析を行った。第 3 章の Fig.3-14 の基本ユニットで構成された可変構造を想定している。ここでは、Fig.4-7 は初期形状を示しており、節点外力として、構造体の四隅にそれぞれ上下の外力を与えている。本来、構造物は変位境界条件を与えることが前提となっているが、ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いれば、このような変位境界条件が設定されていない状態でも解析可能である。以下、Fig.4-7~13 に解析結果として各ステップの形態を示す。

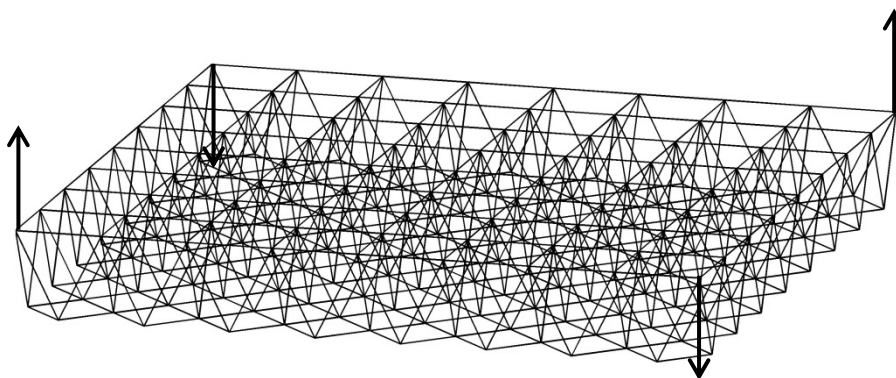


Fig.4-7 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=0)

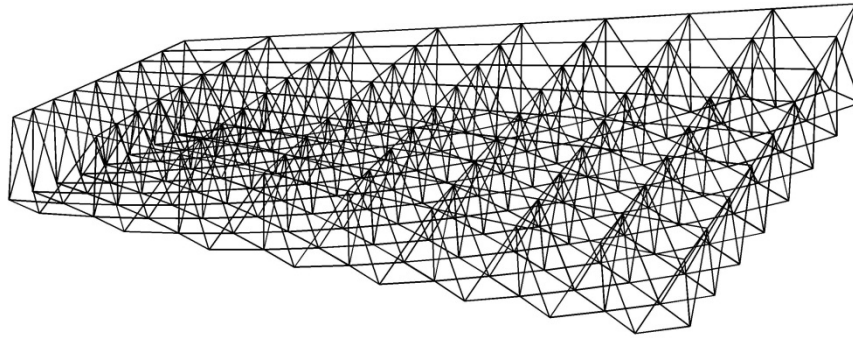


Fig.4-8 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=200)

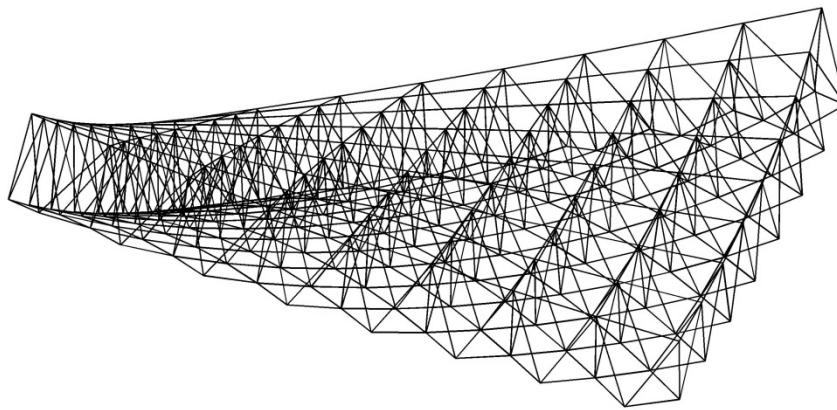


Fig.4-9 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=400)

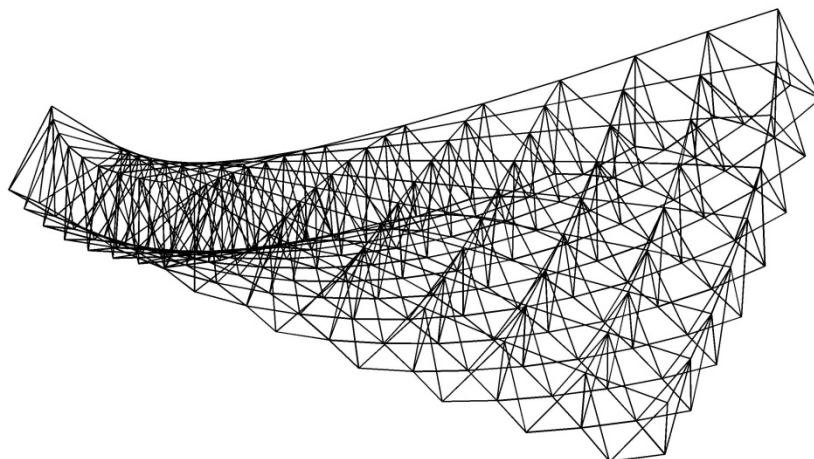


Fig.4-10 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=600)

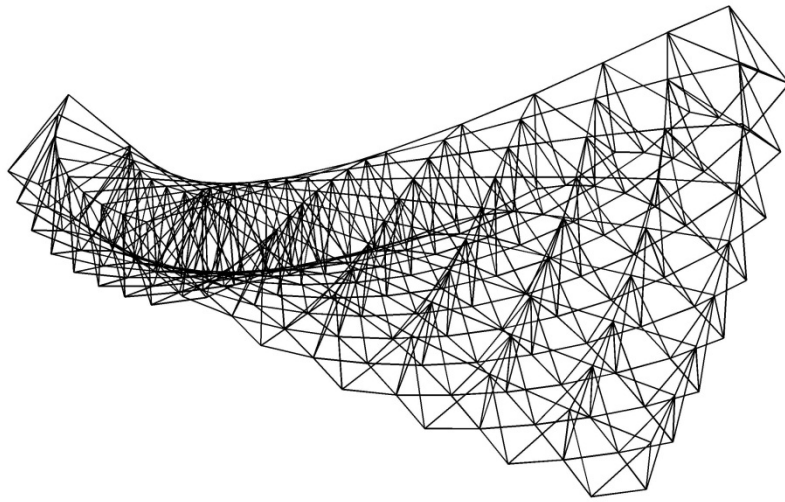


Fig.4-11 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=800)

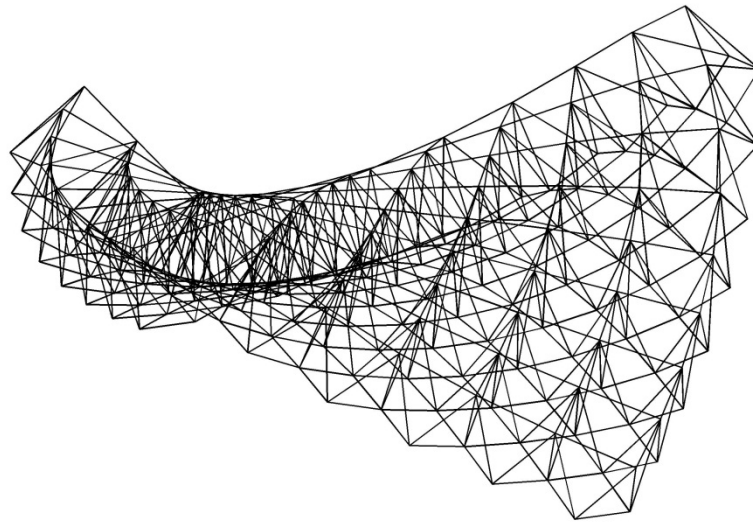


Fig.4-12 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=1000)

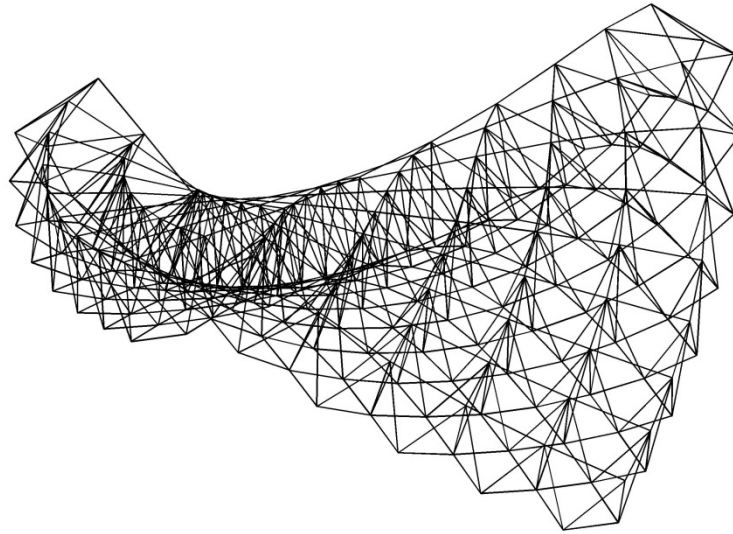


Fig.4-13 可変構造体剛体モデルの解析結果(Step=1200)

解析中，スムーズな形態変化をしている様子がわかる．最終的に得られた形態が導入した節点外力に対して，釣合う形態となっている．上記で想定した節点外力を与えると提案した可変構造体は HP 曲面の形状を得る．

4.17.3 軸部直動モデル

軸部直動モデルは，多自由度で冗長な系であるため，なんらかの拘束を与える必要がある．本論文では，第3章 3.3.2 節で紹介した **Tetrahedral Walker** を水風船が坂を転がるような物理現象に似ていることから，以下のような解析モデルの近似化を行う．領域内部では体積が一定で，領域境界部では表面積が一定とする拘束を与える．これにより，形状が破たんすることなく釣合状態を追跡できると考える．なお，簡略化のため，解析空間を二次元平面と想定し，構造体領域内部の面積が一定，構造体領域境界部の全長が一定とする．

上記の近似化を基に Fig.4-14 に実モデルを想定した概要図を示す．

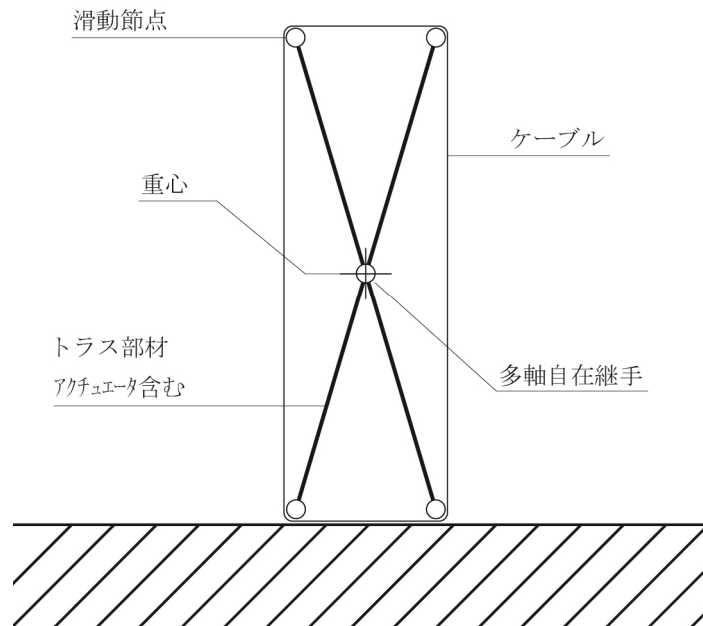


Fig.4-14 軸部直動モデル概要図

4本のトラス部材と外周に1本のケーブルが配される。トラス部材には直動アクチュエータが含まれる。トラスとケーブルが接する点は滑動節点とする。多軸自在継手により、回転機構を持つ。

ここで、構造体領域内部とは、トラスとケーブルで形作られる4つの三角領域にあたり、それぞれの三角形の面積を一定とした拘束を与える。したがって、解析上は、構造体領域内部は三角形定ひずみ要素を用い、要素境界をトラスと見立てている。構造体領域境界部はケーブルに相当し、全長一定の拘束を与える。

軸部直動モデルはアクチュエータによる強制変位で運動を行うことになるが、解析上では各節点に外力を与えることで三角形要素が変形し、運動がはじまる。本報では、進行方向の斜め下向きに外力を与える。また、足元と地面の境界条件は、前脚はピン支持、後脚はローラー支持とし、重心位置が前脚より前方に移動した際、後脚のローラー支持を解放し、ころがり開始される。次に地面に接する点(遊脚)が地面に接すると、前脚、後脚の関係が切り替わり、境界条件も同様に切り替わる。

初期形状が縦長の長方形をしている理由は、正方形のような安定形状を与えた場合、内部領域に変形する余地がないため、釣合が保たれる。また、境界条件を変化させるフェーズに移行する前に、すなわち重心が前脚より前方に移動する前に、釣合状態になると運動は止まる。初期形状で不安定性を備えておく必要がある。以下、形態解析事例を示す。

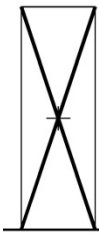


Fig.4-15 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=0)

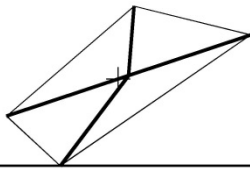


Fig.4-16 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=240)

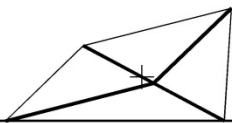


Fig.4-17 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=480)

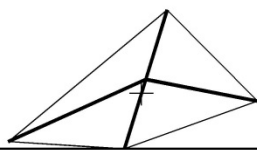


Fig.4-18 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=720)

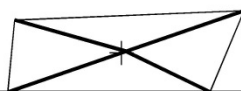


Fig.4-19 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=960)

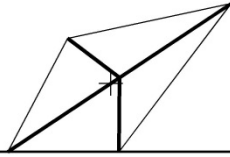


Fig.4-20 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=1200)

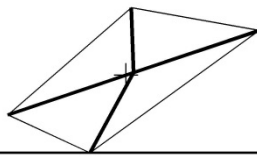


Fig.4-21 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=1440)

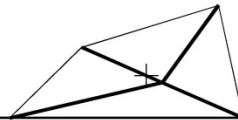


Fig.4-22 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=1680)

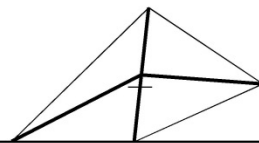


Fig.4-23 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=1920)

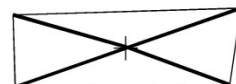


Fig.4-24 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=2160)



Fig.4-25 可変構造体軸部直動モデルの解析結果(Step=2400)

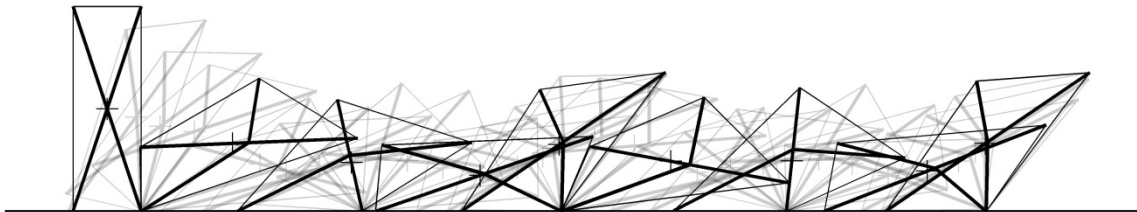


Fig.4-26 可変構造体軸部直動モデルの解析過程

Fig.4-15～25は軸部直動モデルのTetrahedral Walkerを模した解析モデルの事例である。面積一定の拘束と全長一定の拘束を連立して解いている。準静的な運動である。Tetrahedral Walkerはすべての軸部材が可変となっている。この解析モデルでは、外周はケーブルで覆われているため、運動は近似されているが、ころがり駆動する挙動は再現できる。

実際には、運動エネルギーの影響を考慮する必要がある。解析値の軸部の長さをアクチュエータの入力値として実モデルを制御することで、同様の運動が可能と考えられる。

4.17.4 曲面構造の最適形状

本章 4.17.2 項で示した解析事例に見られる可変構造から形づくられる曲面構造に対して、構造体の変形する過程は追跡できるが、曲面全体が力学的に合理的な曲面構造となっている保障はない。そこで、曲面全体を調整する仮想的な構造体としての膜構造を導入し、剛体モデルと連成して曲面構造を形づくることを想定する。

ここでは、仮想的な膜構造を上記定式化による手法を用いて、形成することを趣旨とする。本論文では、領域内部の面積を一定とし、領域境界部の全長を一定とした数値解析により、膜曲面を形成する。なお、膜曲面は厳密には、平均曲率が0となる極小曲面を形成することがわかっている。本来、収束計算を用いて膜の形状解析を行うことになるが、本

論文では，逐次線形で求めていくことになる．この場合，初期形状や節点外力に対する依存度が高くなると思われる．しかし，適切な初期形状を選択すれば，このような膜曲面を形成できると考える．以下，解析事例を示す．

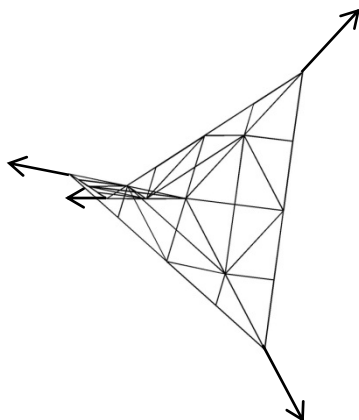


Fig.4-27 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=0)

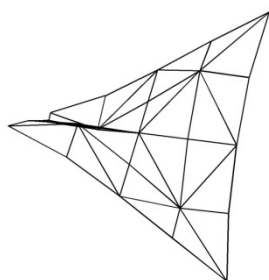


Fig.4-28 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=100)

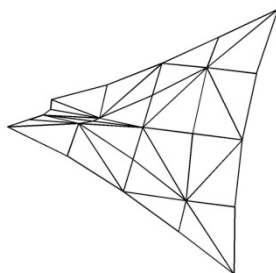


Fig.4-29 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=200)

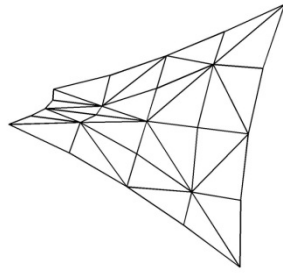


Fig.4-30 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=300)

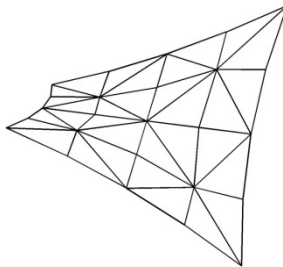


Fig.4-31 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=500)

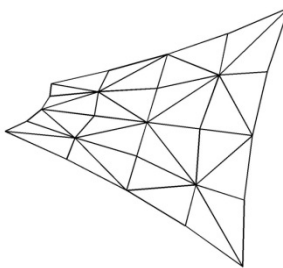


Fig.4-32 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=800)

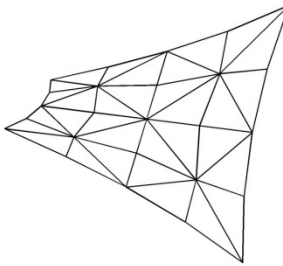


Fig.4-33 曲面構造の最適形状の解析結果(Step=1200)

Fig.4-27~33 の結果から，初期形状から徐々に曲面形状を形づくっていく様子が伺える。

本論文では，平均曲率が 0 となる判定を離散データから行うために，以下の手法を用いる[41,42]．メッシュモデルの頂点*i*に関して，エッジで連結された近傍頂点の集合*N(i)*，座標*p_i*，平均曲率*κ_i*，法線ベクトル*n_i*，ボロノイ面積を*A_i^{vol}*と置いて，離散平均曲率法線*κ_in_i*は以下の式で求められる．

$$\kappa_i \mathbf{n}_i = \frac{1}{4A_i^{vol}} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \quad (4-144)$$

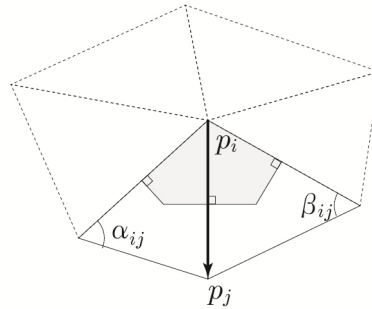


Fig.4-34 エッジで連結された近傍頂点の集合

上記，離散平均曲率法線が 0 となれば，その点の周囲では，平均曲率が 0 となる曲面であることがわかる．また，上式のボロノイ面積は，三角形メッシュが鈍角になると求めることが困難であるため，以下の式が零ベクトルであるかどうかを判定する．

$$\int_A \mathbf{K}_i dA = \frac{1}{2} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \quad (4-145)$$

\mathbf{K}_i は Laplace-Beltrami 演算子と呼ばれる．これを面積で積分したものとなる．

Laplace-Beltrami 演算子 \mathbf{K}_i と平均曲率法線 $\kappa_i \mathbf{n}_i$ とは以下の関係がある．

$$\mathbf{K}_i = 2\kappa_i \mathbf{n}_i \quad (4-146)$$

式(4-145)が零ベクトルとなる点は，平均曲率が 0 であることが言え，以下の強調表示された 5 点が零ベクトルとなる．

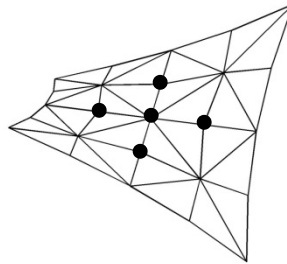


Fig.4-35 平均曲率 0 の点

この 5 点を除くほかの点については、式(4-145)の計算の際に、境界辺を含む領域を選択することになる。すなわち、本手法で与えられた曲面は、境界領域近傍では平均曲率が 0 とはならないと判断されるが、内部領域においては、平均曲率が 0 となっていることがわかる。ここでは、境界領域と内部領域にそれぞれ圧力差が生じているため、境界領域近傍に適切な表面張力を設定するといった工夫が必要であると考えられる。

今後、さらなる検討が必要と思われるが、以上より、このような仮想的な膜構造を可変構造と連成して解くことで、全体曲面形状を調整する可能性があることが示された。

4.18 悪条件連立方程式について

本手法で数値解析を行うときに、解が得られない場合が存在する。それは、連立一次方程式の条件数が大きい、すなわち悪条件の連立方程式となっている場合がある。本章 4.17.2 項で示した剛体モデルの数値解析は、このような悪条件となっている。以下に、剛体モデルの条件を変えて、構成される可変多面体ユニット数を変更したときの条件数の表を以下に示す。表の横軸と縦軸はそれぞれ、X 方向、Y 方向のユニット数に対応する。

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4.59	5.99	8.70	12.29	17.04	23.25	31.30	41.58
3		7.78	12.83	20.56	32.08	48.60	71.51	102.40
4			5.16e+15	4.32e+15	6.00e+15	8.64e+15	7.96e+15	1.15e+16
5				7.85e+15	1.29e+16	8.30e+15	2.26e+16	1.98e+17
6					2.08e+16	2.80e+18	8.19e+16	2.72e+16
7						6.12e+16	2.58e+16	2.67e+16
8							1.94e+16	1.35e+16
9								1.55e+16

Fig.4-36 可変多面体ユニット数と条件数

単純にユニット数が増えると条件数が増加するというわけではない。4×4 型以降の条件数が大きく増加する。以降、1e+16 程度の条件数であることは変わらず、条件は悪い状態である。Graycolor セルは、条件数が 1e+16 を超えたものになり、これらの事例では、可変構造は静止したままとなる。また、初期形状での値が 1e+16 を超えずとも変形過程で条件数が大きくなり、静止したままになるものもある。

ここでは、打開策として、ムーア・ペンローズ一般逆行列の近似計算手法を用いる[5,6]。

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (A^T A + \delta I)^{-1} A^T \quad (4-147)$$

ただし、 $\delta > 0$ で

$$|A^T A + \delta I| \neq 0 \quad (4-148)$$

ここで、 δ を小さくするほどに、精度がよくなるが、 $(A^T A + \delta I)^{-1}$ の計算中にランク落ちが起こりうる点に注意する。この近似計算手法は、条件が悪い連立方程式にも有効といえる。精度は悪くなるが、工学的に問題ない場合も多く、なにより現象をとらえることでは、有効といえる。

4.19 まとめ

本章では、可変構造の形態解析手法を提案し、第3章で紹介した可変構造体モデルの形態解析を行った。

可変構造の形態解析手法では、物質定義を明確化し、多次元要素に拡張できるよう、定式化を行い、これにより二次元要素の面積一定変位を示した。座標変換に微分連鎖則を用いた手法を提案し、これにより要素座標と全体座標の次元数が一致しない場合の自然な座標変換を提案した。また、剛体変位による懸垂線の数値解析を行うことで、提案した可変構造の形態解析手法の妥当性を確認した。

さらに、全長一定変位が実現できることを示し、可変構造に多彩な挙動が可能となることを示した。また、初期形状の依存度が高いものの曲面構造の最適形状の問題に応用できることを示唆した。

物質の定義から、本論文で対象としている可変構造は、流体の定義に近い物質であることが明らかとなった。なお、現時点では、可変構造に応力の偏差成分を考慮した物質は規定していない。今後、この点を考慮したモデルの検討も必要と思われる。

第 5 章

非圧縮性流体の非定常粘性流れの流体解析

本章では、一般逆行列理論を用いた非圧縮性流体の非定常粘性流れの流体解析について述べる。第 4 章では、可変構造の形態解析にムーア・ペンローズ一般逆行列を用いた数値解析を行った。連立方程式における同次方程式の解を求めることができる性質を利用して、剛体変位、面積一定変位、全長一定変位を定義づけた。本章では、この性質を利用して、流体解析を行う。第 4 章で定義した可変構造では、非圧縮性の物質を仮定しており、流体との親和性があることがわかる。しかし、本章との大きな違いは、物質の記述方法の違いであり、第 4 章では、Lagrange 記述を基に物質の準静的な問題を扱っていたが、本章では、流体解析でよく用いられる Euler 記述を基に流体を記述する。また、第 4 章の数値解析事例では、境界条件が不足した問題を扱っており、流体解析においても境界条件が不足した問題でも有用性があることを示す。

5.1. 流体解析の背景

非圧縮性流体の非定常粘性流れの解析においては Navier–Stokes 方程式と連続の式をそれぞれ満たして解く必要がある。これらは速度や圧力が未知変数として記述される。しかし、速度計算に用いる式を Navier–Stokes 方程式、圧力計算に用いる式を連続の式とすると、連続の式には圧力が陽に含まれていないため、困難を要する。この困難を克服するため、非圧縮性流体の解析に様々な工夫が施されたアルゴリズムが提案されており、ペナルティ関数法などは連続の式に圧力を陽に含める工夫を施したものといえる。一般に、よく用いられている手法といえば、分離解法である MAC 法の流れを汲むものといえる。分離解法は速度と圧力を分離し、順番に解くことで行列の規模を小さくするという考えがある。この場合、方程式をうまく組み合わせて圧力に関する Poisson 方程式を導き、圧力を求め、速度を計算するアルゴリズムとなる。

上記のような流体解析手法が数多く提案されている中で、一般逆行列理論を流体問題に応用するにあたり、非圧縮性の連続の式に注目する。Navier–Stokes 方程式と連続の式をそれぞれ満たす必要があり、分離解法では圧力に関する Poisson 方程式を解くことで連続の式を満たしている。一般逆行列理論によれば、連続の式のように方程式の右辺が 0 となる速度の解を提供する可能性を持つ。これは形態解析手法で言うならば、剛体変位モード行列と同様となる連続の式を満たす速度モード行列(本論文では、零空間ベクトルへの正

射影行列と同一視する)を求めることができる。また、圧力は連続の式の係数行列の一般逆行列を用いて表現することが可能であり、この速度モード行列と圧力を用いて、Navier-Stokes 方程式を表すことで、両式を満たす速度が得られることになる。

本手法は、毎ステップ Poisson 方程式を収束計算により解く分離解法と比較して、毎ステップ、行列とベクトルの内積計算のみで求めることができるため、効率的といえる。分離解法の場合、Poisson 方程式を解く際、誤差判定による収束計算が必要となるが、本手法は、厳密に連続の式を満たす。一方で、本手法は速度モードを算出する段階で、一般逆行列演算が必要となる。計算機メモリの負担が大きくなるが、Euler 記述であれば、一回の逆行列演算で済み、反復過程においては陽的に時間進行を行っていく。

5.2. 物体の記述方法－Euler 記述－

第4章の可変構造では、Lagrange 記述による手法を用いたが、本章では、Euler 記述による記述手法を採用する。一般的に流体の流れ場の計算によく用いられる手法で、本論文も、それに準ずる。Lagrange 記述は、ある物質点に着目して物体の状態量を座標や時間の関数で記述する方法である。一方、Euler 記述は、物体の状態量を固定した空間座標における座標や時間の関数として記述する手法である。

上記の記述方法の違いとして、任意の物理量 F (スカラー、ベクトル、テンソル) を考えたとき、 F の Euler 微分(空間時間導関数)と Lagrange 微分(物質時間導関数)の両方を考えることができる。 F に関する Lagrange 微分と Euler 微分の関係を以下に表す。また、空間に固定した物質点の速度 \mathbf{v} を用いている。

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F \quad (5-1)$$

左辺が Lagrange 微分、右辺第一項が Euler 微分である。右辺第2項は、移流項と呼ばれており、Euler 記述において現れる項である。以下、支配方程式では、Euler 微分を用いた表式を行っている。

5.3. 支配方程式

非圧縮性流体の非定常粘性流れの計算に用いられる Navier-Stokes 方程式と連続の式は以下のとおりである。速度 \mathbf{v} 、圧力 p 、物体力 \mathbf{X} 、として、記述を行う。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{X} \quad (5-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5-3)$$

ここで、 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数である。ここで、Navier-Stokes 方程式の左辺第一項は時間微分項、第二項は移流項である。移流項に関しては、未知の速度が掛け合わされているこ

とから非線形項とも呼ばれている。右辺第一項は圧力勾配項，第二項は拡散項，第三項は物体力項である。連続の式は，速度場の発散が 0 ということで非圧縮性を表している。

なお，第 3 章の可変構造の形態解析における支配方程式との関係を見れば，Navier-Stokes 方程式は釣合式，連続の式は変位-歪関係式と対応関係がある。したがって，圧力勾配項の係数行列と，連続の式の係数行列には，転置の関係が成立する可能性があることがわかる。この点については，離散化方程式を定義する際に考察する。

なお，上記，支配方程式を x 方向と y 方向に分けて記述する文献もあるが，本論文では， x 方向と y 方向をまとめてひとつのベクトルとして記述している。

5.4. 空間方向離散化—差分法—

本手法では，直交格子による解析空間を想定し，空間を固定した Euler 記述とし，スタガード格子(Fig.5-1)を用いて差分法により空間方向離散化を行う。

差分法は，流体解析において初期に提案された手法であるにも関わらず，現在においても幅広く適用されている。これまでに，解の近似精度に関する研究がさかんに議論されてきて，成熟している点にある。また，原理が理解しやすく，プログラム化しやすい点もある。ここでの差分法の原理とは，局所的に方程式を満たすように考えられている。この点は，第 4 章の可変構造の形態解析と共通性をもっており，本論文では，流体解析に差分法を用いることとする。また，スタガード格子を用いた差分法は，一般に有限要素法と比較して圧力振動が起きないとされている点も利点と考える。一方で，直交格子ではない非構造格子に対する適用は困難が生じる点もある。

差分法では，圧力の Poisson 方程式を解く際に，格子毎の Poisson 方程式を連立した全体行列を作成する。本論文では，連続の式を空間方向に離散化する。この際，一般的な差分法と同様に格子毎の方程式を連立した全体行列を作成する。

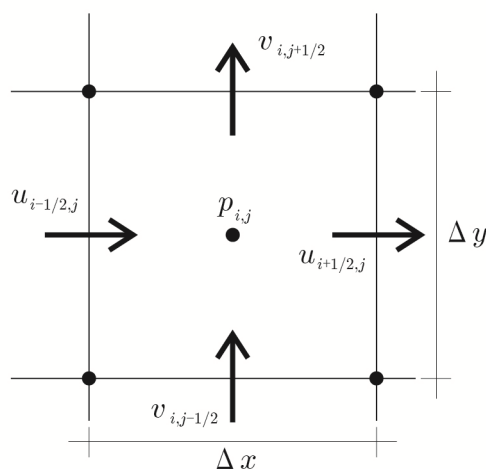


Fig.5-1 スタガード格子

解析空間を二次元平面とし, $x_1 = x, x_2 = y, v_1 = u, v_2 = v$ とする. また, ひとつの格子における速度ベクトルを $\mathbf{v}_e^T = \{u_{i-\frac{1}{2}j}, u_{i+\frac{1}{2}j}, v_{i,j-\frac{1}{2}}, v_{i,j+\frac{1}{2}}\}$ とする. これは, x 方向と y 方向をまとめた離散化方法となっている. 差分近似として x 方向に $\partial u / \partial x \approx (u_{i+\frac{1}{2}j} - u_{i-\frac{1}{2}j}) / \Delta x$ を与える. y 方向も同様とする. なお, こうして与えられる差分は, 一次精度の差分近似を与えていることになる. 精度向上のために, 2次精度中心差分といった手法が考えられる. 連続の式に基づくひとつの格子の離散化式は以下となる.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \approx \left[-\frac{1}{\Delta x} \quad \frac{1}{\Delta x} \quad -\frac{1}{\Delta y} \quad \frac{1}{\Delta y} \right] \mathbf{v}_e \equiv {}^{dm} \mathbf{B}_e \mathbf{v}_e \quad (5-4)$$

$\Delta x, \Delta y$ はひとつの微小な格子幅を表す. ${}^{dm} \mathbf{B}_e$ の添字 dm は第3章の \mathbf{B} マトリクスと区別して差分法を意味する. 格子全体に拡張すると,

$${}^{dm} \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (5-5)$$

${}^{dm} \mathbf{B}$ マトリクスは $m \times n$ ($m < n$), m は格子数, n は自由度数の長方形行列となる. 上式から, 速度ベクトルを求める問題は, 第2章 2.3.3 項の劣決定問題となる. 以下, 添字 dm は省略して表記する. ここで, 一般逆行列を用いて, 上式を満たす解は, 以下のように表される.

$$\mathbf{v} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}] \boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \quad (5-6)$$

\mathbf{I}_n は $n \times n$, n は自由度数の単位行列, \mathbf{B}^+ はムーア・ペンローズ一般逆行列, \mathbf{H} は連続の式を満たす速度モード行列(本論文では, 零空間ベクトルへの正射影行列), $\boldsymbol{\alpha}$ は任意の列ベクトルを表す. \mathbf{B} マトリクスを用いて圧力の勾配は下式となる.

$$\nabla \mathbf{p} = -\mathbf{B}^T \mathbf{p} \quad (5-7)$$

ここで, \mathbf{B} マトリクスの詳細を書き下す. 境界条件を考慮すると現実的ではないが, 例として, 2×2 の格子数の場合, 以下となる.

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 & 0 & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 & 0 & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0.5,1} \\ u_{1.5,1} \\ u_{2.5,1} \\ u_{0.5,2} \\ u_{1.5,2} \\ u_{2.5,2} \\ v_{1,0.5} \\ v_{2,0.5} \\ v_{1,1.5} \\ v_{2,1.5} \\ v_{1,2.5} \\ v_{2,2.5} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

上記, \mathbf{B} マトリクスの詳細から, $\mathbf{p}^T = \{p_{1,1}, p_{2,1}, p_{1,2}, p_{2,2}\}$ とすれば, 式(5-7)の圧力勾配項が成立していることがわかり, 連続の式と圧力勾配項の係数の間に, 転置の関係が成立していることがわかる. これは, 第2章 2.4 節で述べた反傾原理と同様といえる. したがって, 以下の関係を用いて,

$$(\mathbf{B}^T)^+ = (\mathbf{B}^+)^T \quad (5-9)$$

\mathbf{B} マトリクスのムーア・ペンローズ一般逆行列 \mathbf{B}^+ を用いて, 圧力 \mathbf{p} を求める可能性があるこ

とがわかる．ここに一般逆行列の有用性があると考えられる．圧力 \mathbf{p} の求め方については、後述する時間方向離散化の中で述べる．

5.5. 時間方向離散化—一般逆行列を用いた SMAC 法—

時間方向の離散化は SMAC 法にならって行う[11]．SMAC 法は、分離解法の代表例である MAC 法の流れを汲む手法であり、最もよく用いられており、常微分方程式の数値解法に用いられる予測子修正子法の応用といえる．SMAC 法は、Navier–Stokes 方程式を時間について離散化し、非圧縮条件を利用して、流れ場と圧力場に関する分離した式を導出し、それを解くことで近似解を求める．一般的には、圧力の増分量に関する Poisson 方程式を解くことになる．本論文では、Navier–Stokes 方程式の時間方向への離散化の手段として SMAC 法を用いている．必ずしも SMAC 法を用いる必要はないと考えられるが、代表的な手法として採用する．この場合、圧力は Poisson 方程式を解いて求めるわけではなく、連続の式と圧力勾配項の係数行列が転置の関係にあることを利用して、一般逆行列を用いて解く．

ここで、速度 \mathbf{v}^{n+1} の右肩の添字は t^{n+1} 時間ステップを表し、移流項、拡散項の係数行列を $\mathbf{A}(\mathbf{v}^n)$ 、 \mathbf{D} とする．式(5-7)を用いて式(5-2)の Navier–Stokes 方程式は下式となる．

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}(\mathbf{v}^n)\mathbf{v}^n = -(-\mathbf{B}^T \mathbf{p}^{n+1}) + \frac{1}{Re} \mathbf{D}\mathbf{v}^n \quad (5-10)$$

ここでは、物体力は作用しないと考え、レイノルズ数 Re を用いて解析対象に対する無次元化を行っている． n ステップは既知量であり、 \mathbf{p}^{n+1} が未知であるため、 \mathbf{p}^n と置き換える．

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}(\mathbf{v}^n)\mathbf{v}^n = -(-\mathbf{B}^T \mathbf{p}^n) + \frac{1}{Re} \mathbf{D}\mathbf{v}^n \quad (5-11)$$

$\tilde{\mathbf{v}}$ は \mathbf{v}^{n+1} の予測値となる．式(5-10)、(5-11)の辺々を引くと、下式となる．

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \mathbf{B}^T (\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n) \quad (5-12)$$

本来 SMAC 法では、上式から $\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n = \boldsymbol{\varphi}$ と置いて、 \mathbf{v}^{n+1} について整理し、非圧縮条件を示す連続の式に代入することで圧力の修正量 $\boldsymbol{\varphi}$ の Poisson 方程式を導く．

本論文では、 $\mathbf{v}^{n+1} \equiv \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}$ と置くことで、連続の式を満たすことができる．これを直接的に Navier–Stokes 方程式に代入することを考える．

まず、圧力 \mathbf{p}^{n+1} は下式で定義することができる．

$$\mathbf{p}^{n+1} = (\mathbf{B}^+)^T \left(\frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}(\mathbf{v}^n)\mathbf{v}^n - \frac{1}{Re} \mathbf{D}\mathbf{v}^n \right) \quad (5-13)$$

こうして得られる圧力 \mathbf{p}^{n+1} は、第 2 章 2.3.2 項優決定問題より、 \mathbf{B}^T が縦長の長方形行列を有することから、特解のみで補解は存在せず、与えられる解は、ノルム最小かつ最小二乗解が

得られることがわかる．式(5-6)，(5-13)を式(5-10)に代入して，下式が得られる．

$$\frac{H\alpha - \tilde{v}}{\Delta t} = B^T(B^+)^T \left(\frac{H\alpha - v^n}{\Delta t} + A(v^n)v^n - \frac{1}{Re} Dv^n \right) - B^T p^n \quad (5-14)$$

上式を整理すると，

$$(H - B^T(B^+)^T H)\alpha = \tilde{v} + B^T(B^+)^T \left(-v^n + \Delta t \left(A(v^n)v^n - \frac{1}{Re} Dv^n \right) \right) - \Delta t B^T p^n \quad (5-15)$$

を得る．ここで，左辺の α の係数を見て，正射影行列 H の性質(第2章2.5節)から以下の関係が成立する．

$$H - B^T(B^+)^T H = (I_n - B^T(B^+)^T)H = HH = H \quad (5-16)$$

また， H は特異行列でもあり，逆行列を定義できない．ただし，ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いると， $H^+ = H$ となる(2.5節参照)．したがって，任意の列ベクトル α は下式で表せる．

$$\alpha = H \left(\tilde{v} + B^T(B^+)^T \left(-v^n + \Delta t \left(A(v^n)v^n - \frac{1}{Re} Dv^n \right) \right) - \Delta t B^T p^n \right) \quad (5-17)$$

上式の右辺は，すべて既知量で表せる． α を式(5-6)に代入することで， v^{n+1} を求めることができる．こうして得られた v^{n+1} は，第2章2.3.3項より連続の式を厳密に満たしている．

また，定式化において，移流項と拡散項の係数行列と速度は分けて表現しているが，格子毎に各項を計算してベクトルで表現すると計算効率化が図れる．

5.6. 境界条件

本節では，境界条件の導入方法について説明を行う．本手法の特徴は，一般逆行列を用いることにより，境界条件が不足している場合においても，解を得ることができる点にある．一方で，誤った解を導出しないためにも，壁境界の設定においては，適切に境界条件を与える必要がある．本論文では，スタガード格子を用いており，スタガード格子の特徴も踏まえて，本論文における境界条件のうち，壁境界の導入方法を説明する．

境界条件の導入には，以下の2点を考慮する．

- 1) 境界上や壁内で与えられる速度の境界値を毎ステップ規定値に更新する．
- 2) Navier-Stokes 方程式の計算に B マトリクスやこれにより形成される各行列を用いるため， B マトリクスにおいても境界条件を満たす処理を施す．

上記2点を Fig.5-2 の具体例を基とし，速度の境界条件の与え方を示す．具体例に関して，本来，格子はより大きくなるが， B マトリクスの事例を示すために，Fig.5-2 が全格子を示すと考える．中央太線が壁境界上となり， X ， Y 方向の速度をそれぞれ0とする，すべりなし条件を与える．したがって， X 方向の速度は毎ステップ，以下のように更新される．

$$u_{1.5,1} = u_{1.5,2} = 0 \quad (5-18)$$

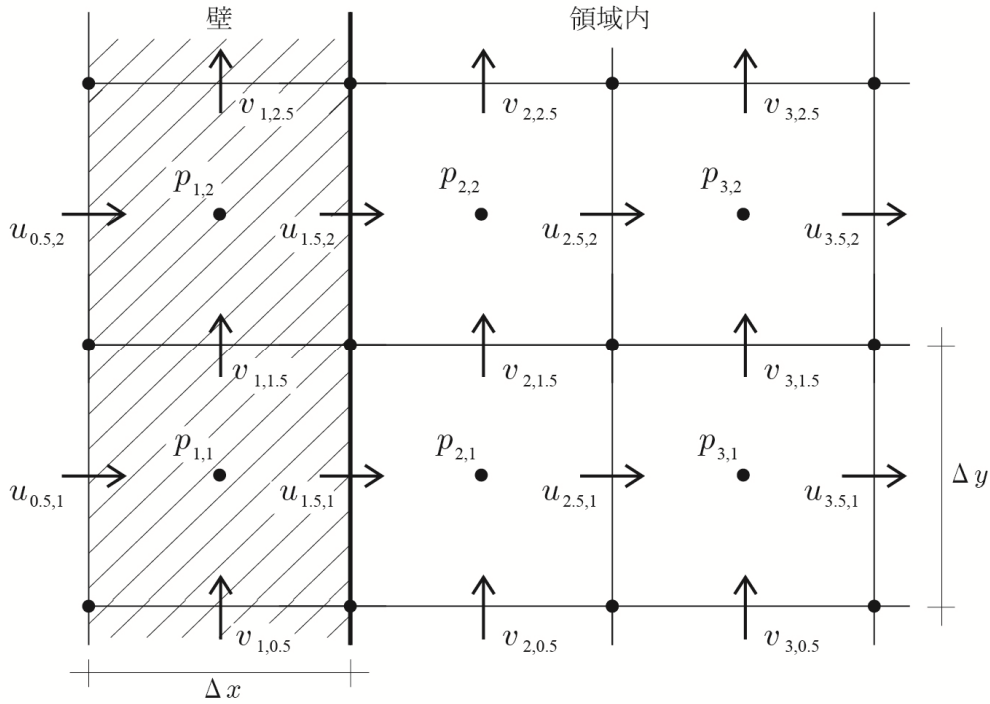


Fig.5-2 壁境界条件を与えたスタガード格子

壁内の X 方向速度は、領域内の値を用いて以下とする。

$$u_{0.5,1} = -u_{2.5,1}, u_{0.5,2} = -u_{2.5,2} \quad (5-19)$$

同様に Y 方向の速度を壁境界上で 0 とするために、壁内の速度を以下のように、領域内の値を用いて、更新する。

$$v_{1,0.5} = -v_{2,0.5}, v_{1,1.5} = -v_{2,1.5}, v_{1,2.5} = -v_{2,2.5} \quad (5-20)$$

次に、 B マトリクスの境界条件処理を考える。式(5-8)を基とし、ここでは等間隔格子を用いるため、 $1/\Delta x = 1/\Delta y = b$ とおくことで、 B マトリクスは以下となる。

$$\begin{bmatrix} -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

次に、上式に境界上の X 方向速度を 0 とする場合、 B マトリクスの中で該当する列ベクトルを 0 とするため、以下となる。ここでは、変更点を強調表示する。

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

次に、壁内垂直の X 方向速度の影響も B マトリクスの中で考慮し、 B_{bc} を境界上の速度に該当する列ベクトル(零ベクトル)として、以下のように与える。

$$B_{bc-1} = -B_{bc+1} \quad (5-23)$$

Y 方向速度を境界とする場合は、X 方向の格子列数 q として、

$$B_{bc-q} = -B_{bc+q} \quad (5-24)$$

上 2 式のいずれも、壁内速度に該当する列ベクトルを変更する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

B マトリクスの中では、壁内平行の速度、ここでは壁内 Y 方向の速度は考慮しない。これは、自動的に隣接する Y 方向速度同士で打ち消し合うことになる。また、適宜、境界条件処理として、零ベクトルとなる列ベクトルは削除することも可能であるが、本論文では、削除せずにそのまま実行している。

このように、壁内速度を境界条件として設定する必要があるのは、スタガード格子の特徴といえる。上記は、速度に関する境界条件の与え方となり、 B マトリクスの列ベクトルの操作を行った。圧力に関する境界条件は行ベクトルを操作することで与えることができる。

5.7. 収束判定

本論文では、次節において説明する Cavity 流れの数値解析を行う際に、定常解を得るために運動エネルギーによる収束判定を行う[43]。 m は格子数、 q, r は X, Y 方向の各格子列数、 $\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j}$ を格子中央点の平均速度として、運動エネルギーの総和 K は、下式となる。

$$K = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r [(\bar{u}_{i,j})^2 + (\bar{v}_{i,j})^2] \Delta x_i \Delta y_j \quad (5-26)$$

また，上記運動エネルギーの総和の変化率を用い，収束判定基準を e として，以下のように収束判定を行った．

$$\frac{(K^{n+1} - K^n)}{K^{n+1}} < e \quad (5-27)$$

なお，本論文では収束判定基準 e は 10^{-8} とした．この条件により，7桁以上収束したものと判断できる．

5.8. 数値解析事例

5.8.1 Cavity 流れ

これまでの定式化を基に，2次元 Cavity 流れの数値解析を行う．非圧縮性粘性場枯れのベンチマーク問題として扱われる解析事例である(Fig.5-3)．四方が壁で覆われていて，上面の壁が一定方向に一定速度で運動している内部流れを Cavity 流れと呼ぶ．レイノルズ数は，下式で与えられる．

$$Re = UL/\nu \quad (5-28)$$

なお， ν は動粘性係数である．

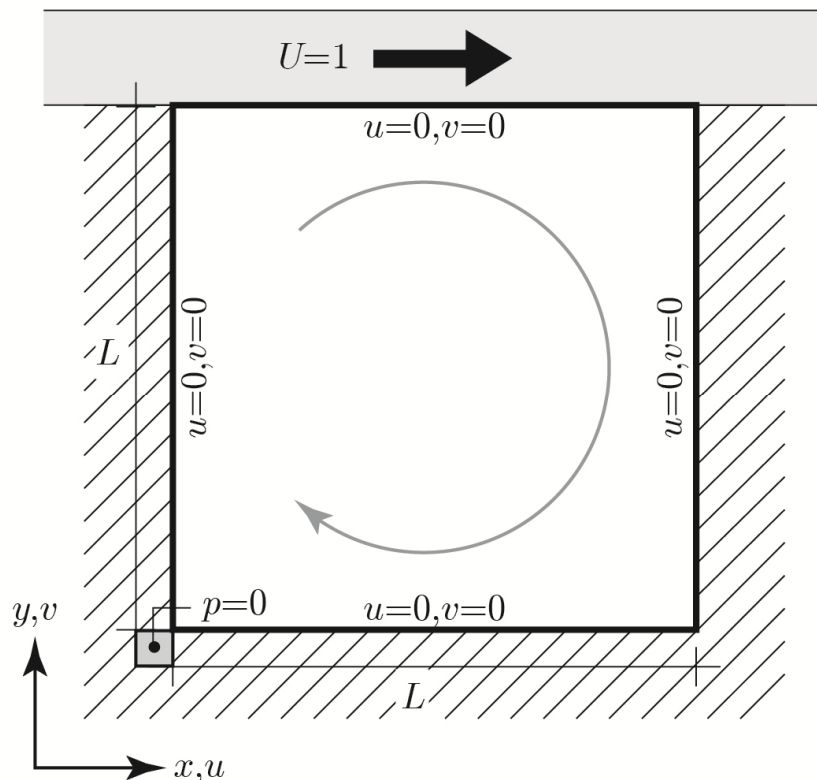


Fig.5-3 Cavity 流れの概略図

上記、境界条件の導入方法については、前節で説明したとおりである。

また、これまでの定式化を基に、移流項に三次精度風上差分、拡散項に二次精度中心差分、時間進行に三次精度の陽的時間進行を行う。

解析条件は、レイノルズ数を 100, 400, 1000 とし、レイノルズ数 100 の場合は、格子数を 20×20 , 40×40 , レイノルズ数 400, 1000 の場合は、 20×20 , 40×40 , 80×80 と変化させ、格子数による収束状況を比較しながら、解析を行った。レイノルズ数 1000 の数値解析事例における流れの様子を Fig.5-4 に示す。本手法による数値解析結果と Cavity 流れの正確な解とされる Ghia らの論文の結果[44]と比較を行うことで本手法の妥当性を検証する (Fig5-5~12)。

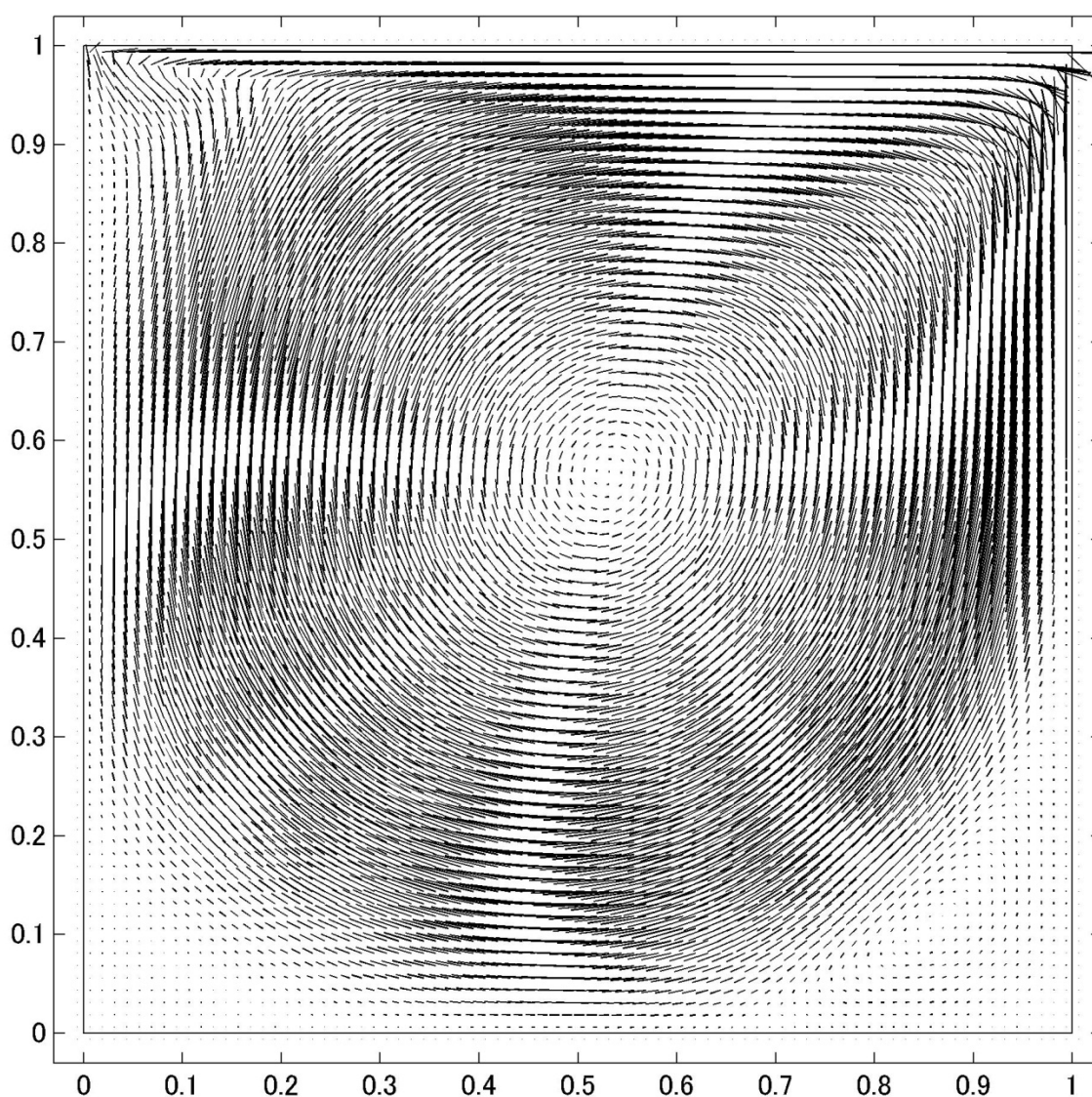


Fig.5-4 Cavity 流れの解析結果(Re=1000,格子数 80×80)

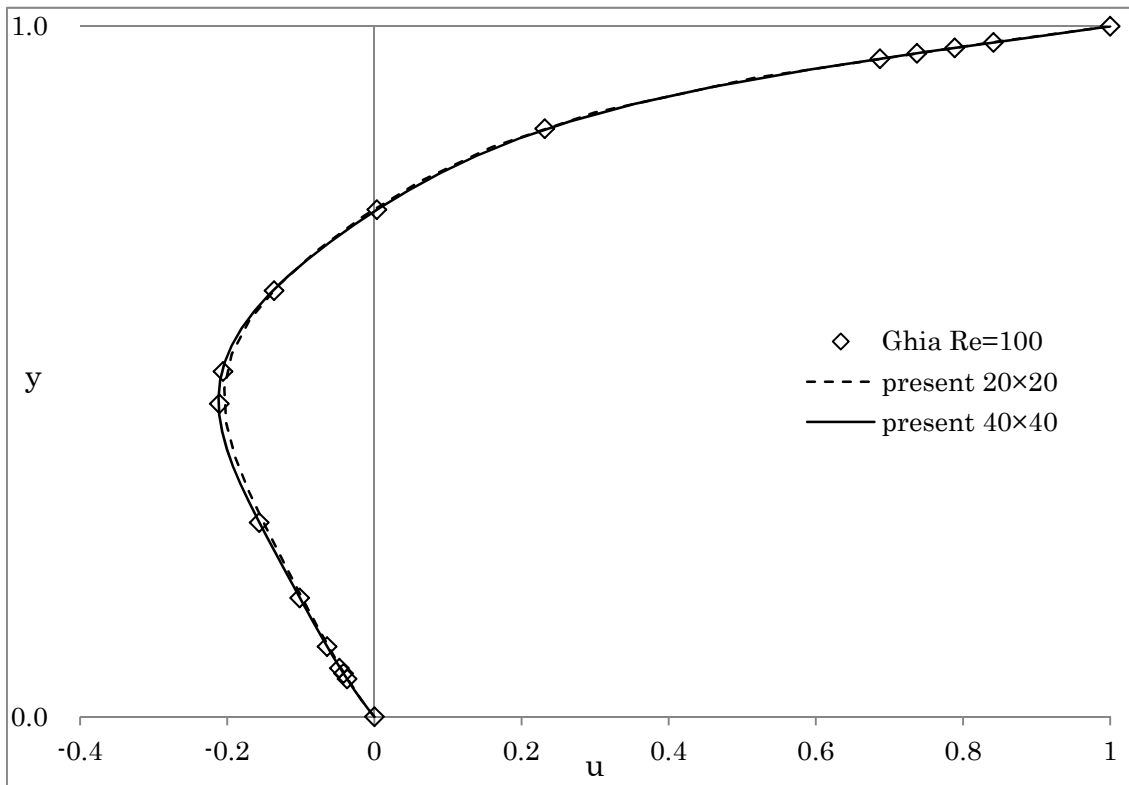


Fig.5-5 Cavity 流れ X 方向速度の解析結果(Re=100)

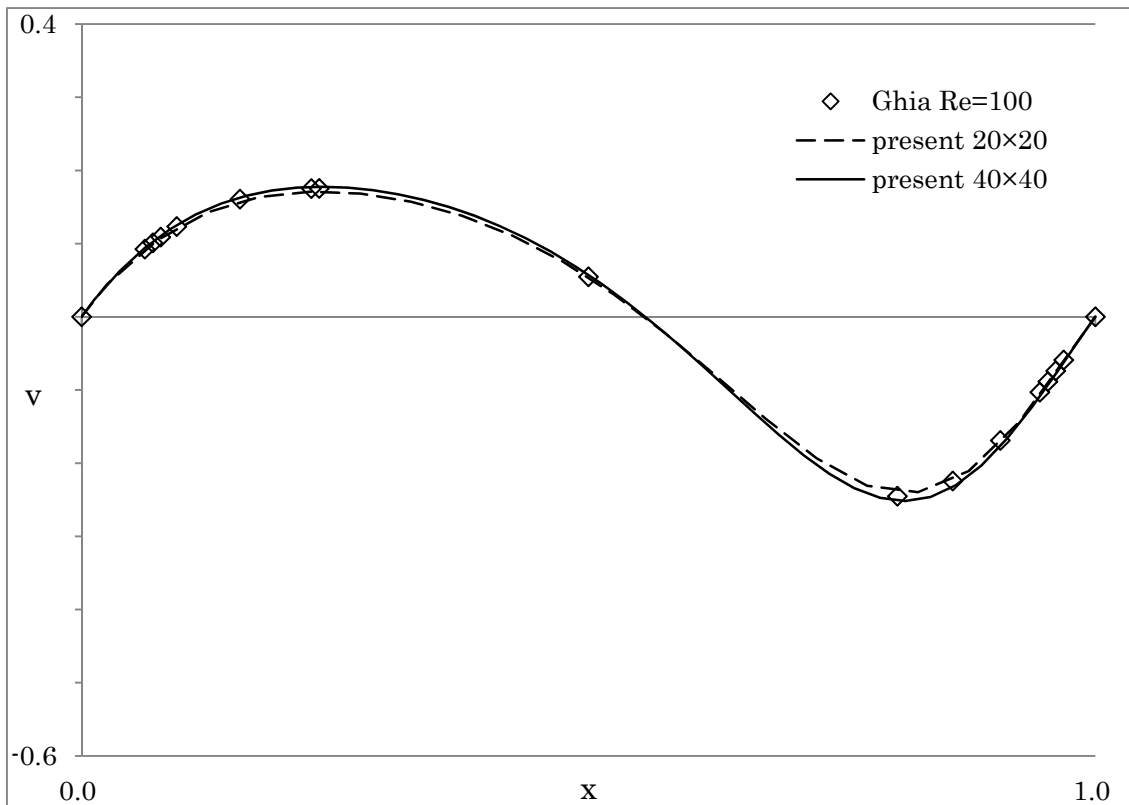


Fig.5-6 Cavity 流れ Y 方向速度の解析結果(Re=100)

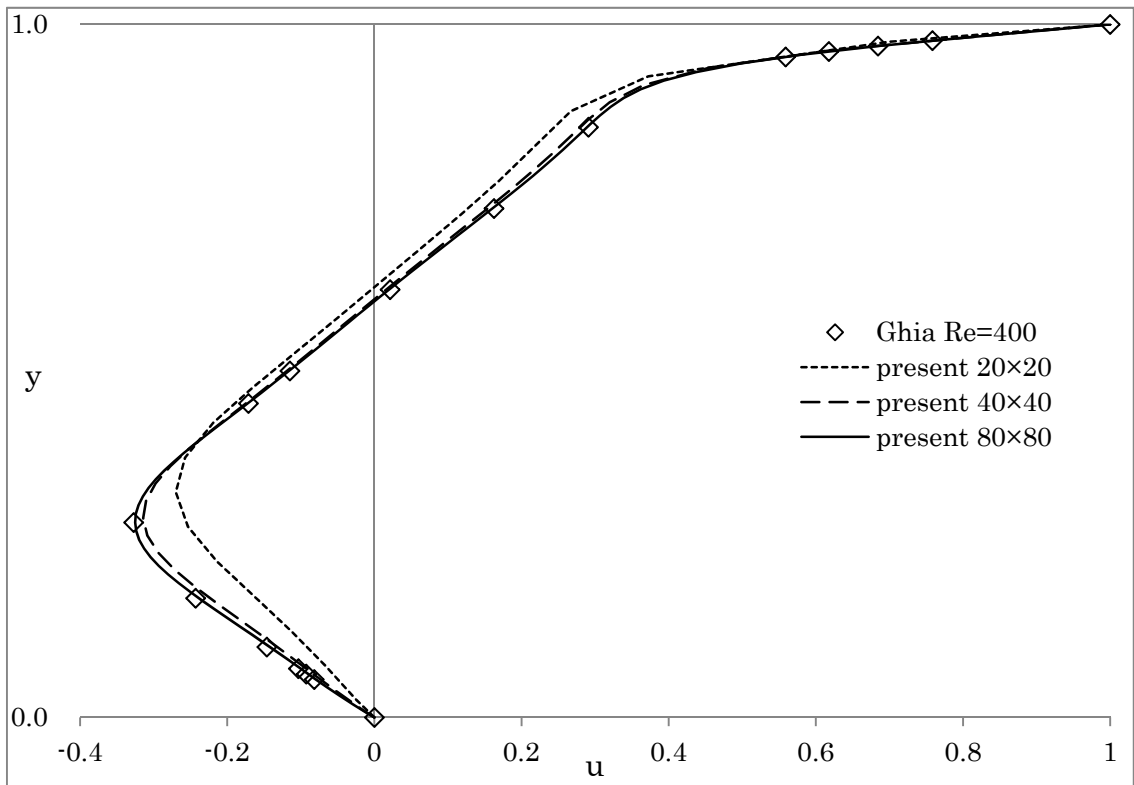


Fig.5-7 Cavity 流れ X 方向速度の解析結果(Re=400)

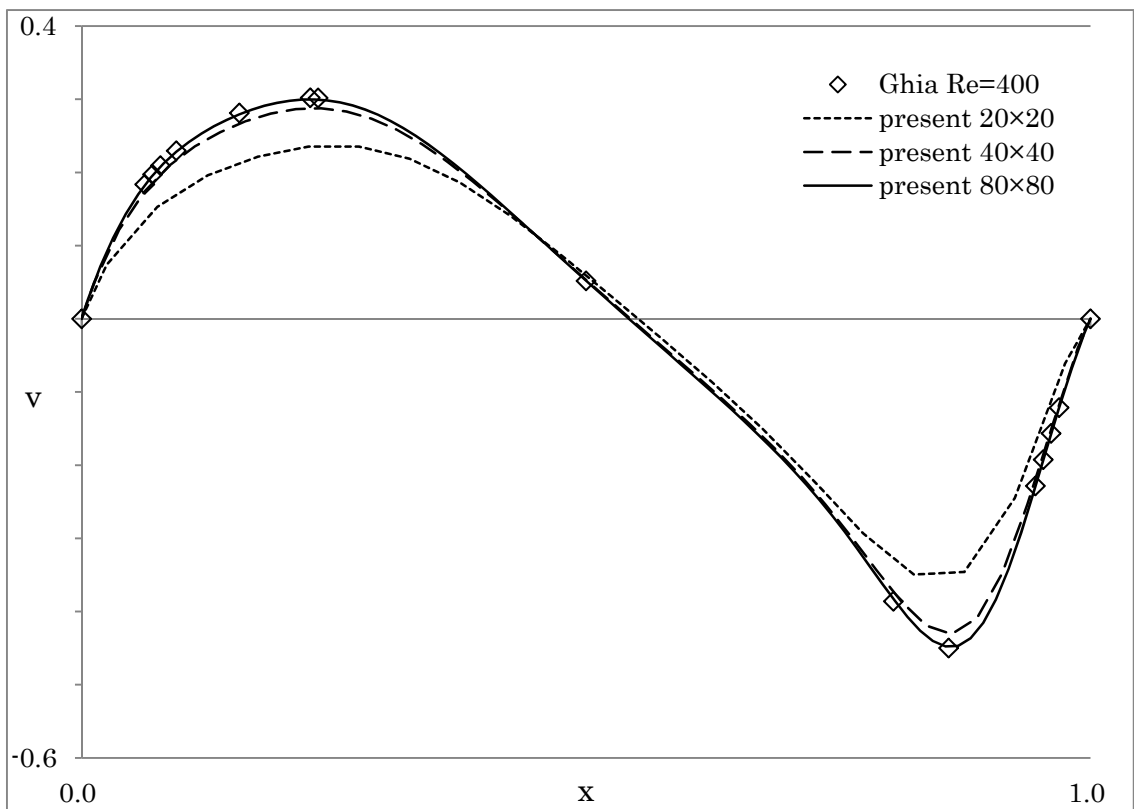


Fig.5-8 Cavity 流れ Y 方向速度の解析結果(Re=400)

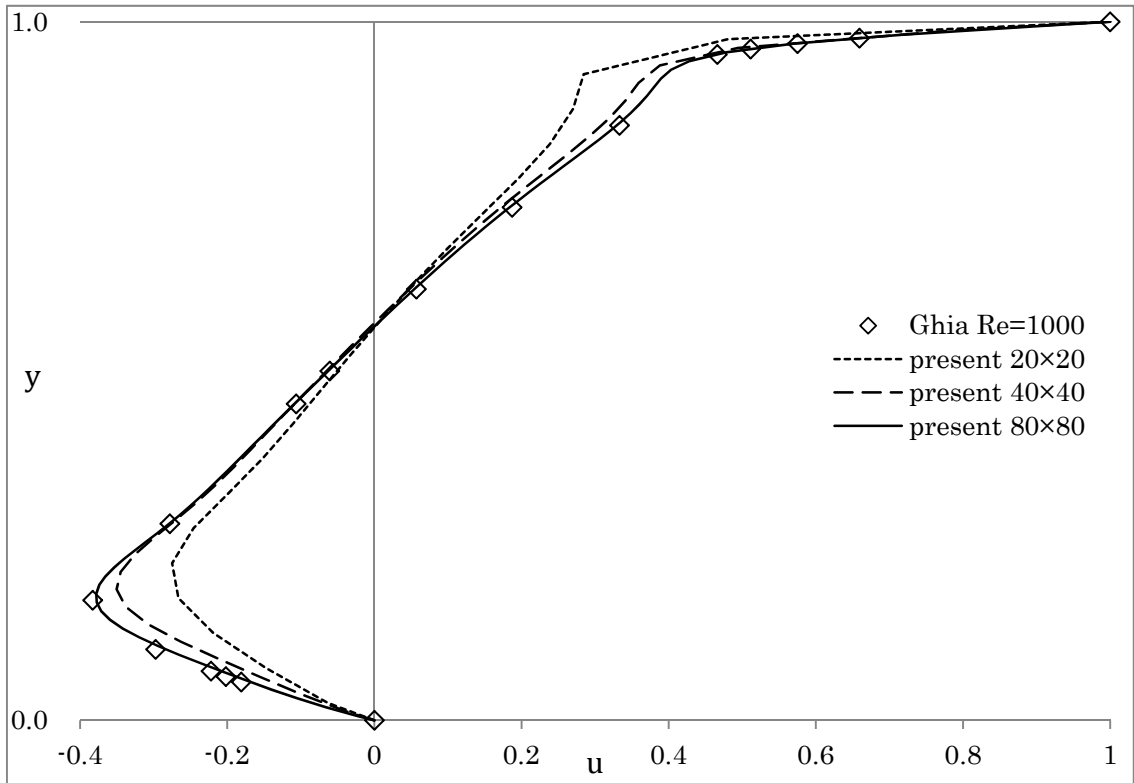


Fig.5-9 Cavity 流れ X 方向速度の解析結果(Re=1000)

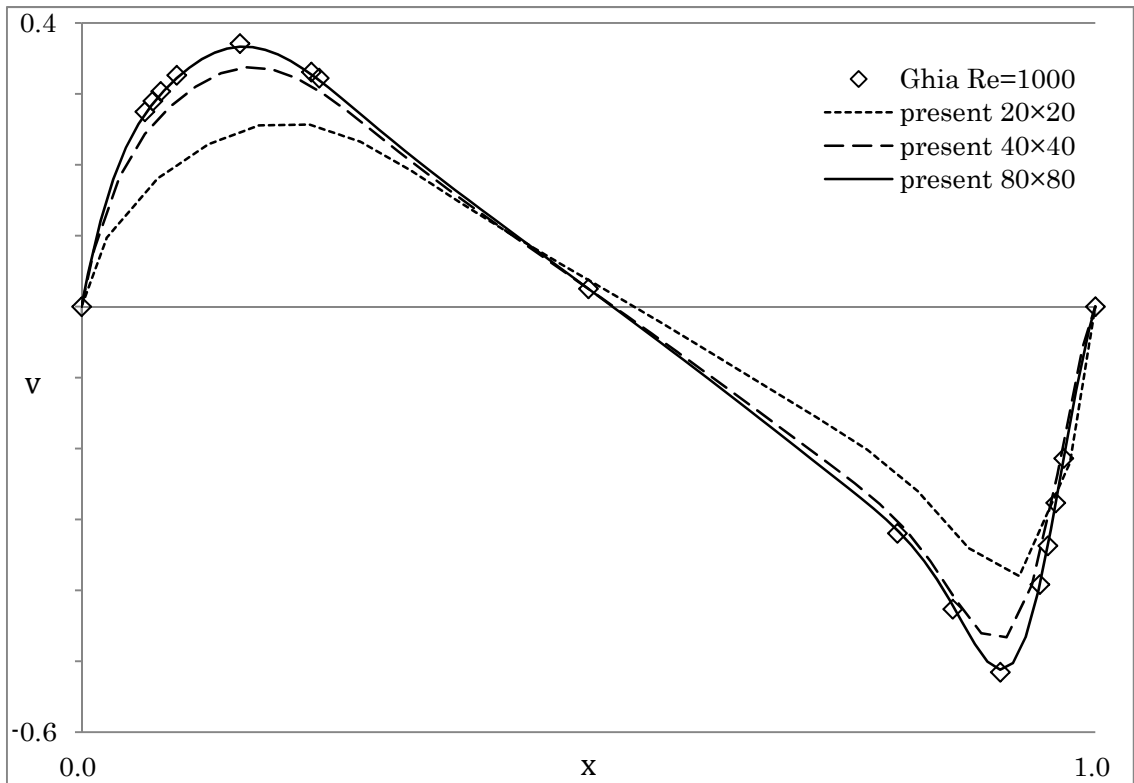


Fig.5-10 Cavity 流れ Y 方向速度の解析結果(Re=1000)

以上の結果から、レイノルズ数を変えた解析事例や、格子数を変えた解析事例のいずれも Cavity 流れの性状はよく表されており、格子数が増加し、格子幅が小さくなる程に Ghia の結果に収束してくる様子がわかる。Fig.5-5,6 から、レイノルズ数 100 に対しては、格子数 40×40 で十分収束に至ることがわかり、Fig.5-7~10 からレイノルズ数 400,1000 に対して、格子数 80×80 で良好な結果が得られていることがわかる。以上より、本手法における流体問題への一般逆行列理論の適用の妥当性は十分示されたと考えられる。

4.8.2 境界条件が不足した Cavity 流れ

前節で Cavity 流れを解析対象とすることで、本手法の流体解析としての妥当性がしめされた。本来、Cavity 流れは適切な境界条件を与えることにより、定常問題として解を得ることが可能である。一方で、本手法の特徴として、境界条件が不足した問題でも解を得ることが可能となることから、上面の壁境界を除いた Cavity 流れを解析対象とし、非定常問題として Cavity 流れを扱う。

一般的に、流体問題の数値解析事例において、計算領域が有限であるため、無限遠境界条件や周期境界条件といった流出に関する何等かの人工的な境界条件を設定せざるを得ない。本手法の特徴を生かし、境界条件を与えずに解を得ることが可能であれば、人工的な境界条件を与えることで解を得るより、むしろ自然な境界条件の設定と考えられる。また、実現象において流路に凹部が存在することにより、影響を与える流れ場の変化が関心対象であること等から、上面の壁境界は存在せず、この解析条件は有意性があると考えられる。このような背景を踏まえ、本節では、境界条件が不足した Cavity 流れの数値解析を試みる。

Fig.5-11 に示される境界条件設定を基に、レイノルズ数は 400 として、格子数は 40×40 とし、数値解析を行った。Fig.5-12 に式(5-27)による収束判定により、収束した流れ場の様子を示す。収束判定に関しては、前節と同様に運動エネルギーの変化率を用いるが、非定常問題とした本解析条件においては、運動エネルギーの増減が考えられるため、式(5-27)に絶対値を付けた収束判定式として、数値解析を行った。

Fig.5-13,14 に最終的に定常状態に至ったときの結果を Ghia らの結果と比較する。Fig.5-12 では、格子数 40×40 で解析を行ったが、精度を上げるため、ここでは 80×80 で解析を行う。また、本章 4.8.1 項における通常の Cavity 流れと境界条件が不足した Cavity 流れの比較を行うために反復ステップ数に応じた運動エネルギーの総和の変化率の収束状況を Fig.5-15 に示す。

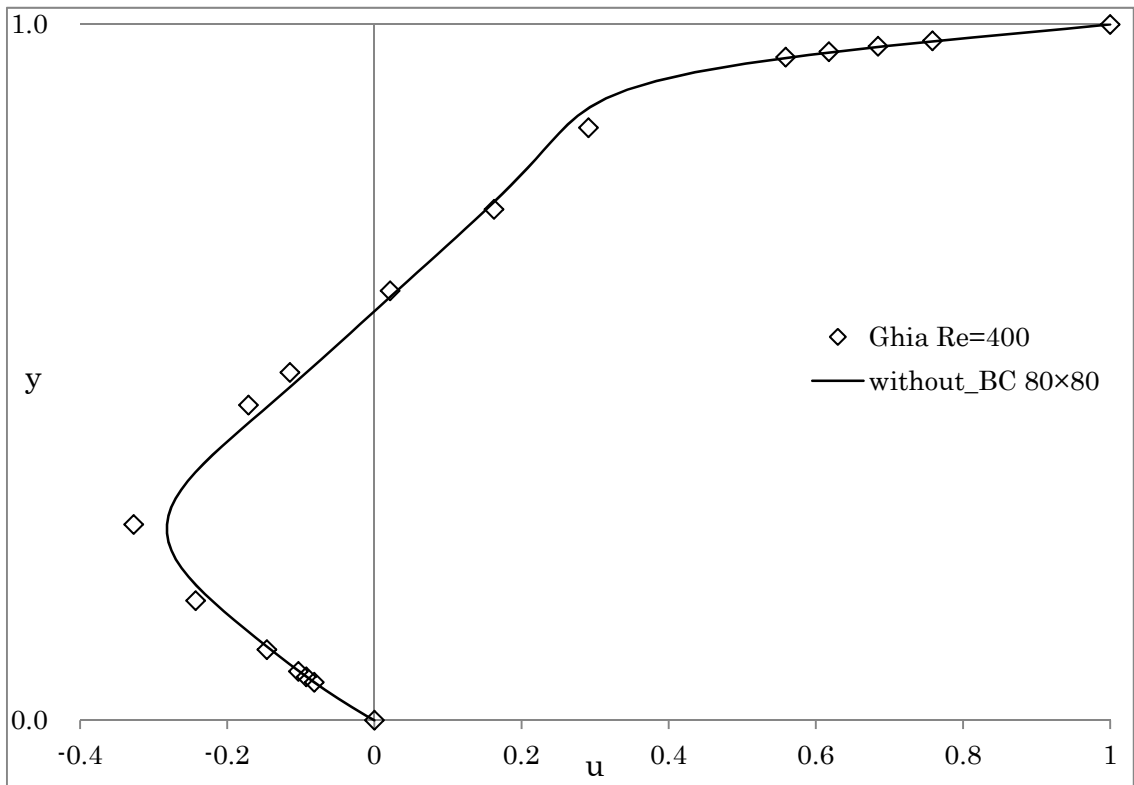


Fig.5-13 境界条件が不足した Cavity 流れの X 方向速度の解析結果(Re=400,80×80)

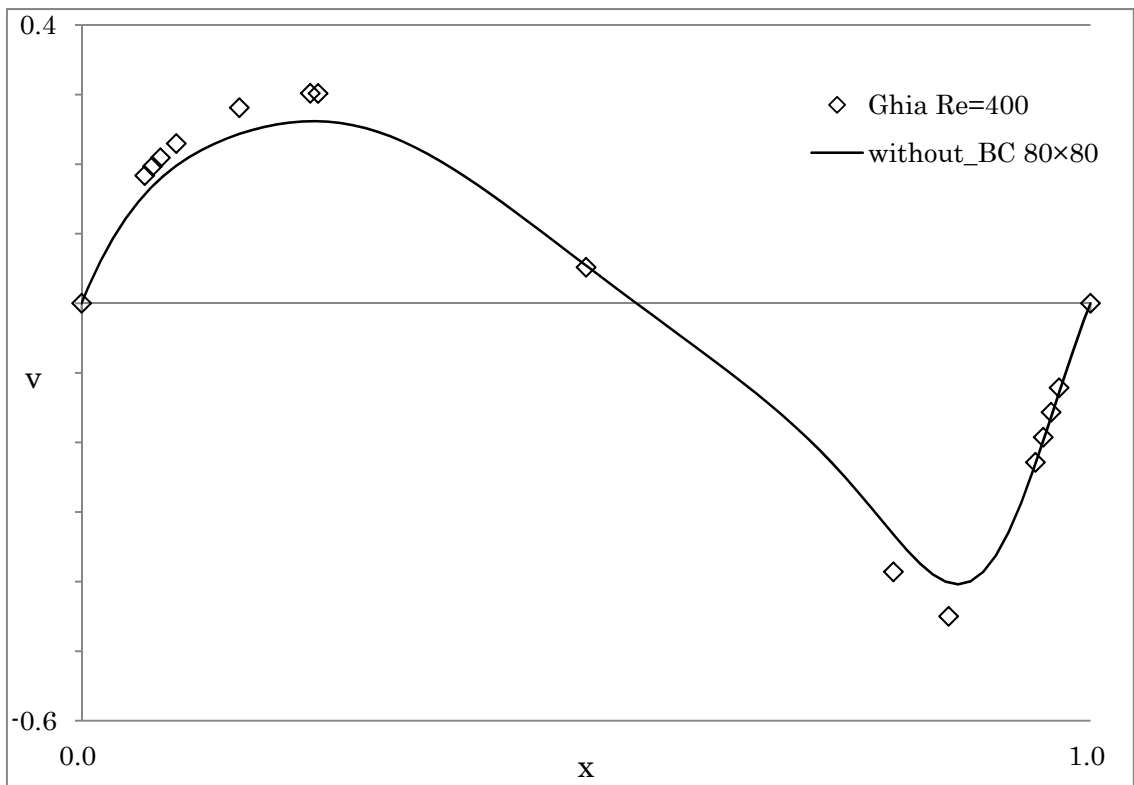


Fig.5-14 境界条件が不足した Cavity 流れの Y 方向速度の解析結果(Re=400,80×80)

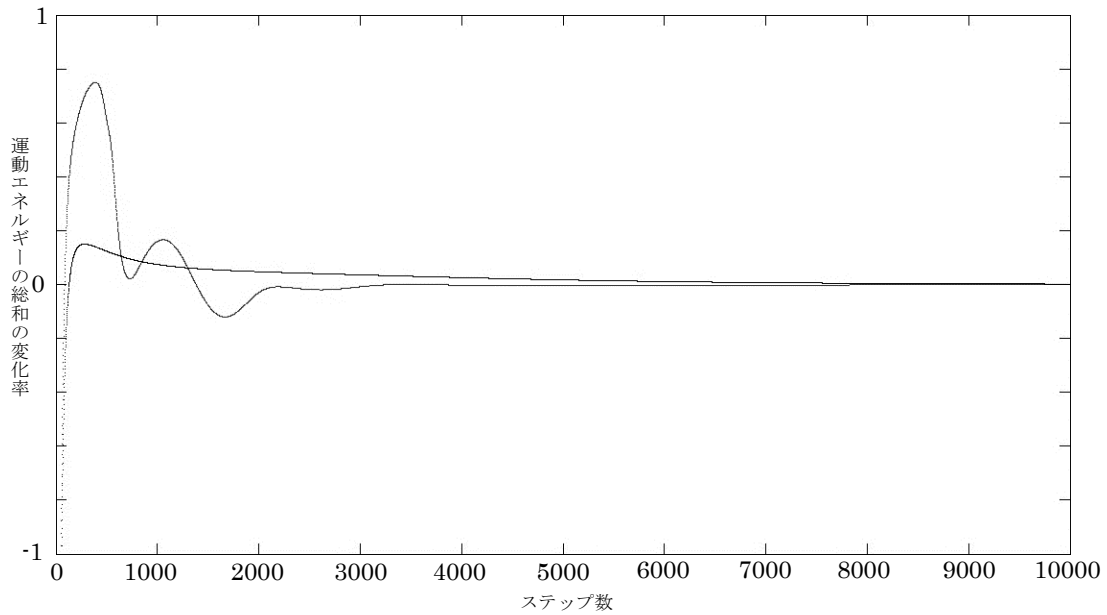


Fig.5-15 通常の Cavity 流れと境界条件が不足した Cavity 流れの収束状況(Re=400,40×40)

Fig.5-12 の流れ場の様子から、上面の壁境界を除いたため、上面付近に Y 方向の速度ベクトルが生じつつ、収束している様子が見てとれる。Fig.5-13,14 の結果から速度のピーク値の位相は Ghia の結果と一致し、Cavity 流れとしての性状は同様となることがわかるが、速度値は及ばないことがわかる。これは、境界条件が不足しているため、当然の結果といえる。また、Fig.5-15 の運動エネルギーの総和の変化率における収束状況では、大きく波打つような波形は境界条件が不足した Cavity 流れであり、ほぼ一定に減少していく波形は通常の Cavity 流れである。この結果から、通常の Cavity 流れでは、増減は小さく、緩慢に収束に進んでいくことに対し、境界条件が不足した Cavity 流れでは、増減が大きく、急激に収束に近づく様子が伺える。

これらの結果は、上面の壁境界を取り除くことで非定常問題とした Cavity 流れの数値解析を検討する際の基礎データとなりうる。以下に、本解析において、与えられた数値解を記載する。グレー表示されたセルが各方向速度のピーク値となる。

格子番号	XY 方向座標値	X 方向速度 u	Y 方向速度 v
5	0.05625	-0.0840825	0.1459358
10	0.11875	-0.1613044	0.2200838
15	0.18125	-0.2302653	0.2535224
19	0.23125	-0.2698648	0.2617652
20	0.24375	-0.2758444	0.2610505
22	0.26875	-0.2819560	0.2560819
25	0.30625	-0.2758988	0.2398693
30	0.36875	-0.2319468	0.1927325
35	0.43125	-0.1666555	0.1296850
40	0.49375	-0.0986218	0.0612831
45	0.55625	-0.0328419	-0.0066929
50	0.61875	0.0322949	-0.0737809
55	0.68125	0.0978087	-0.1444470
60	0.74375	0.1615749	-0.2293620
65	0.80625	0.2191218	-0.3348858
70	0.86875	0.2764718	-0.4038969
75	0.93125	0.4359278	-0.2871519
80	0.99375	0.9396531	-0.0232991

Fig.5-16 境界条件が不足した Cavity 流れの XY 方向速度の数値解 (Re=400,80×80)

5.9. まとめ

本章では、非圧縮性粘性流体の流れ場解析に一般逆行列理論を応用した手法を提案し、解の近似精度がよいとされている Ghia らの結果と比較検討した。比較検討した結果、Ghia らの結果とよく一致することがわかり、本提案手法の妥当性が判断された。また、一般逆行列を用いる特徴として、境界条件が不足した問題も解が得られることから、境界条件が不足した Cavity 流れを解くことで、非定常問題として Cavity 流れを解くことに成功した。

一方で、本提案手法は、連立方程式における疎行列の性質を失うことから、計算機メモリの負担が大きくなり、格子数を大きくすることが困難であることがわかった。したがって、現段階では、流体解析の主流となっている手法の代替手法であることを示すことは困難といえるが、圧力の Poisson 方程式を収束計算により解く必要がなく、毎ステップ、行列とベクトルの内積演算だけで進行できるアルゴリズムは、効率的な面を持っているといえ、安定性にも優れているといえる。また、境界条件を与える必要がなく解が得られる点も、人工的な境界条件を設定しなければいけない流体解析では重要な意味合いを持つと考えられる。

また，一般逆行列理論を用いることにより，連立方程式の形に縛られず全体行列を作成できることから，構造一流体連成問題への適用可能性が十分示されたと考えられる．

第 6 章

準静的な構造—流体連成解析

本章では, 第 4 章の定式化を基に Lagrange 記述による準静的な構造—流体連成解析を行う. 本論文で対象とする物理現象として, 膜構造と流体のポンディング現象を想定し, 基本性状を明らかとする. 連成式を定式化し, 数値解析を行い, 膜と流体の釣合形状を示す.

6.1. 膜構造と流体のポンディング現象について

張力膜構造では, 雨水や積雪, 融雪水が貯水となるポンディング現象が起き, 大きな荷重に進展する可能性が指摘されている. その発生メカニズムについては, 文献[45]等を参照されたい. ポンディング現象の興味深い点は, 貯水による膜面にかかる荷重分布, 荷重分布と釣合う膜形状が密接な関係にある. この関係性は下に凸の膜形状のライズスパン比が大きくなるように変位すれば, 貯水領域が狭まる, すなわち荷重分布が変化し, また荷重分布に応じて膜形状も再度変化するといった膜と流体が不可分な関係にある. さらに, 膜構造は面外の曲げ剛性が低いため, 荷重分布の変化に応じて剛体変位を含む不安定挙動も生じると考えられ, 弾性変形, 応力弛緩, クリーブ, 材料非線形性も考慮すると極めて複雑な現象となる.

本論文ではポンディング現象を流体と膜の連成問題と捉え, その基本性状を把握することを目的とする. そこで貯水領域を解析モデル化し, 不安定挙動が生じる膜との連成解析手法を提案する. 既往の研究では, 貯水体積から膜面にかかる荷重分布を求める必要があるが, 連成問題として解く場合は, 自然と流体形状が膜に適合し, 膜は流体の自重により形状が決定されると考える. 複雑な膜曲面においても本手法は有効と思われる. 本手法では, 基本性状を把握するため, 解析を簡略化し, 以下のような仮定を与える.

- a) 解析空間を二次元平面とする. 動的影響を考慮しない準静的な問題と考える.
- b) 外力ポテンシャルを停留する過程で, 逐次変化過程を求める. 釣合式から最終的な釣合形状の判定を行う.
- c) 膜はトラス要素とし, 弾性変形はせず不安定挙動のみを表す. 膜全長が一定の仮定と節点滑動を許容する.
- d) 膜の端部に膜の滑動を許容する支持点を設ける. これにより, 支点間の膜長さが変化するため, 面外変位が生じる.
- e) 膜の端点に一定の水平力を与え, 膜を引っ張る. 流体と膜形状が逐次変化することで,

最終的に釣合う水平力となる.

- f) 流体は, 完全流体の Lagrange 記述とし流体の移流速度は要素の移動速度と等価と仮定する.
- g) 流体界面の粘性応力と表面張力は無視できると仮定する.
- h) 流体要素は三角形一次要素とする.
- i) 流体要素の節点に自重に相当する等価な節点外力を与える.

6.2. 主要変数

本章では, 第 4 章可変構造の形態解析の 4.2 節と同様の物体記述方法の立場をとる. すなわち, Lagrange 記述において現時刻 $t_0 = t$ を基準配置(解析済みの既知)として時刻 $t_0 = t + \Delta t$ の配置を求める増分解析(updated Lagrange 法)を行う. この場合, 一般に次の関係式が成り立つ[21,22]. 全体座標 x_i , 変位速度 \dot{u}_i , 速度 v_i はそれぞれ現時刻 $t_0 = t$ の値を表す.

$$\dot{E}_{ij} = D_{ij} \quad (6-1)$$

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6-2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6-3)$$

Green-Lagrange 歪速度 \dot{E}_{ij} は速度形境界値問題で現れる物理量であり, 慣例的に物質点を固定した Lagrange 記述に対する問題で扱われ, 変形速度テンソル D_{ij} は空間を固定した Euler 記述に対する問題でよく扱われる. 本報では, 式(5-1),(5-2),(5-3)は, これらの問題を統一的に扱うひとつの架け橋として考える.

式(6-2),(6-3)から明らかのように, 現時刻 t を基準配置とする場合,

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \quad (6-4)$$

が成り立つが, 本手法では, 膜の主要変数として変位速度ベクトル $\dot{\mathbf{u}}$ を用い, 流体の主要変数として速度ベクトル \mathbf{v} を用いて表記を区別する. 位置ベクトル \mathbf{x} を持つ物体形状が $t \rightarrow t + \Delta t$ へ形状更新する際に, $\dot{\mathbf{u}}\Delta t = \Delta \mathbf{u}$ および $\mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t = \Delta \mathbf{u}$ の関係から

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \dot{\mathbf{u}}\Delta t = \mathbf{x}^t + \mathbf{v}\Delta t \quad (6-5)$$

で行う. また, 時刻 t は運動エネルギーの影響を無視できる緩慢に進む時間パラメータとする.

6.3. 膜要素の基礎式と離散化

二次元平面を解析空間とし, 膜をトラス要素とする. 以下, 本章の基礎式や離散化手法は, 速度で定義されるが, 基本的な考え方は第 4 章と同様の考え方である. 膜要素において, 以下のとおり歪速度と変位速度の関係は示される.

$$\dot{E}_{ii} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} = \dot{\epsilon} \quad (6-6)$$

上式は、体積歪速度 $\dot{\epsilon}$ であり、以下の関係がある。

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta d\dot{L}}{d\dot{L}} = \dot{\epsilon} \quad (6-7)$$

上式の関係から、トラス要素とすれば、体積歪速度と軸歪速度は同じになることがわかる。式(6-6)の変位速度－体積歪速度関係式を基礎式として、ひとつの要素における変位速度 $\dot{\mathbf{u}}^T = \{\dot{u}_{x_1}^{(1)}, \dot{u}_{x_2}^{(1)}, \dot{u}_{x_1}^{(2)}, \dot{u}_{x_2}^{(2)}\}$ で表し、全体座標による形状関数の微分値を用いて、式(6-6)の離散化を行うと以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} &\approx \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ &= \left[\frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} \right] \dot{\mathbf{u}} \equiv {}_s\mathbf{B}_e \dot{\mathbf{u}} = \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (6-8)$$

ここで与えられる全体座標による形状関数の微分値は第4章の4.12.1項で与えられた手法と同様に得られる。ここで ${}_s\mathbf{B}_e$ マトリクスの下添字 s は流体と区別し、構造を意味する。式(6-8)を全要素に拡張すれば、下式を得る。

$${}_s\mathbf{B}\dot{\mathbf{d}} = \dot{\epsilon} \quad (6-9)$$

${}_s\mathbf{B}$ マトリクスは $m_s \times n (m_s < n)$ 、 m_s は構造の要素数、 n は全体(連成する場合は流体も含む)の自由度数の長方形行列となる。全体の変位速度 $\dot{\mathbf{d}}$ とし、 n 次元列ベクトルとする。

本論文では、膜に全長一定変位および、節点の滑動を可能とする条件を与える。そのためには、式(6-9)では不十分であり、歪速度ではなく、単位面積伸び速度 Δi で定義する必要がある。 dL を現時刻 $t_0 = t$ における一領域とし、歪速度を領域内で積分する。

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} dL \approx {}_s\mathbf{B}_e \dot{\mathbf{u}} l = {}_s\mathbf{B}_e^l \dot{\mathbf{u}} = \Delta i \quad (6-10)$$

これを基に全長一定変位を与える。第4章と同様に与えられる。膜全体を一領域と捉える。この領域には複数の要素が包含されている。与えられた分割点を節点とし、自由度を与える。一領域(膜全体)の伸び速度 Δi と複数要素の各伸び速度 $\Delta i'_k$ の関係は以下のようになる。

$$\Delta i = \sum_{k=1}^g \Delta i'_k \quad (6-11)$$

式(6-10)を用いて、各要素 dL' の伸び速度を表すと、以下となる。要素の各長さ l' で積分する。

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} dL' \approx {}_s\mathbf{B}_e \dot{\mathbf{u}} l' = {}_s\mathbf{B}_e^{l'} \dot{\mathbf{u}} = \Delta i' \quad (6-12)$$

式(6-11)、(6-12)を用いて、全体(包含された一領域)に拡張すると、膜要素数 $m_s = 1$ となり、一本の方程式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Delta l'_i &= \left[{}_s B_1^{l'(1)} \quad {}_s B_1^{l'(2)} + {}_s B_2^{l'(1)} \dots {}_s B_{k-1}^{l'(2)} + {}_s B_k^{l'(1)} \quad {}_s B_k^{l'(2)} \right] \mathbf{d} \\ &\equiv {}_s \mathbf{B}^{*l} \mathbf{d} = \Delta l \end{aligned} \quad (6-13)$$

式(6-13)を膜の離散化方程式と考える。

ここで、釣合式を考える。伸び Δl を基に、第4章の式(4-71),(4-72)の関係から、反傾関係が成立している釣合式に平均応力を選べば、

$$({}_s \mathbf{B}^{*l})^T \sigma_m = {}_s \mathbf{f} \quad (6-14)$$

となり、想定される外力は以下となる。

$$\mathbf{f}_e = N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{l}{2} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (6-15)$$

第4章の式(4-79)の関係から、軸力 n とすれば、

$$({}_s \mathbf{B}^{*l})^T n = {}_s \mathbf{f} \quad (6-16)$$

となり、想定される外力は以下となる。

$$\mathbf{f}_e = a N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{al}{2} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \quad (6-17)$$

なお、本論文では、膜端点に作用する水平の外力ベクトルを ${}_s \mathbf{f}$ に与えることとする。外力 ${}_s \mathbf{f}$ は n 次元列ベクトルとする。 ${}_s \mathbf{B}^{*l}$ マトリクスにおいて、膜全体を一領域と捉えているため、平均応力 σ_m 、軸力 n はスカラーで表されることになる。

ここで、連成する際に、流体と構造で選ぶべき積分レベルを何に揃えるかで、想定される外力や与えられる応力の次元が異なってくることに注意を要する。本論文では、構造では、式(6-16)の軸力表記を採用し、流体では、圧力(平均応力と同じ次元)で表記することとする。この場合、想定される外力が構造と流体で次元が異なってくることになるが、本論文で想定している問題では影響はないと考える。

6.4. 流体要素の基礎式と離散化

非圧縮性の連続の式を満たす速度を与えることで、流体要素が移動することを仮定する。したがって、連続の式を基礎式として離散化方程式を与える。密度変化のない非圧縮性流体の連続の式は、以下のとおり表すことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv L_{ii} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = D_{ii} = 0 \quad (6-18)$$

ここで速度勾配テンソル L_{ij} と変形速度テンソル D_{ij} の対角成分の和は同じ値となることを用いている。三角形一次要素を用いて、形状関数により離散化を行う。解析空間が二次元平面であるため、全体座標と要素座標が一致しているため、一般的に有限要素法で用いられる離散化と同様となる。

ひとつの要素の速度 $\mathbf{v}_e^T = \{v_{x1}^{(1)}, v_{x2}^{(1)}, v_{x1}^{(2)}, v_{x2}^{(2)}, v_{x1}^{(3)}, v_{x2}^{(3)}\}$ で表し、式(6-18)を表すと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial x_i} &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \mathbf{v}_e \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \mathbf{v}_e \\
&\equiv {}_f \mathbf{B}_e \mathbf{v}_e = 0
\end{aligned} \tag{6-19}$$

ここで ${}_f \mathbf{B}_e$ マトリクスの下添字 f は流体を意味する。

全要素に拡張すれば、下式を得る。

$${}_f \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \tag{6-20}$$

膜要素と流体要素の節点が共有されている節点も存在するため、速度 $\dot{\mathbf{d}}$ は構造と統一した記述としている。 ${}_f \mathbf{B}$ マトリクスは $m_f \times n (m_f < n)$ 、 m_f は流体要素数、 n は全体(連成する場合は構造を含む)の自由度数の長方形行列、 $\dot{\mathbf{d}}$ は膜の場合と同様、 n 次元列ベクトルとする。

第4章の式(4-103), (4-104)の関係から、反傾関係が成立している釣合式に平均応力を選ぶ。

$${}_f \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m = {}_f \mathbf{f} \tag{6-21}$$

想定される外力は以下となる。

$$\mathbf{f}_e = \frac{l^{(k)}}{2a} N_e^T \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{3} N_e^T \bar{\mathbf{b}} \tag{6-22}$$

なお、平均応力 $\boldsymbol{\sigma}_m$ と圧力 p の関係から、釣合式は以下となる。

$${}_f \mathbf{B}^T (-p) = {}_f \mathbf{f} \tag{6-23}$$

圧力は m_f 次元列ベクトル、外力は n 次元列ベクトルである。上式の左辺は圧力の勾配を意味する。したがって、上式は静止流体の釣合式を意味する。

6.5. 連成方程式

流体と膜の連成を定式化する。流体要素は、連続の式を満たす速度を導出できるが、運動方程式を満たすとは限らない。本論文では、膜と流体の釣合形状が得られればよく、移動中、運動方程式を満たす必要はないと考える。したがって、最終的に式(5-21), (5-23)で表される釣合式を満足することで釣合形状が得られると考える。

上記の定式化から式(6-13), (6-20)を連立して連成式を与える。

$$\begin{bmatrix} {}_f \mathbf{B} \\ {}_s \mathbf{B}^{*l} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \equiv {}_{mix} \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \tag{6-24}$$

ここで、一般逆行列を用いて、上式を満たす解は、以下のように表される。

$$\dot{\mathbf{d}} = [I_n - {}_{mix} \mathbf{B}^+ {}_f \mathbf{B}] \boldsymbol{\alpha} \equiv H \boldsymbol{\alpha} \tag{6-25}$$

I_n は $n \times n$ 、 n は自由度数の単位行列、 ${}_{mix} \mathbf{B}^+$ はムーア・ペンローズ一般逆行列、 $\boldsymbol{\alpha}$ は任意の n 次元列ベクトルを表す。 $\boldsymbol{\alpha}$ は外力ポテンシャルを停留する過程において、膜と流体の形状を逐次変化させながら、求めることができる。第4章の4.13節と同様である。

流体の圧力と膜を置換したトラス要素における軸力は以下のように求めることができる。ただし、移動中誤差を含むと考える。これは、求められる圧力や軸力は、移動中、釣合式の解の存在条件を満たしていないためである。

$$\begin{bmatrix} -P \\ n \end{bmatrix} = ({}_{mix}B^T)^+ [{}_f f + {}_s f] \equiv ({}_{mix}B^T)^+ {}_{mix} f \quad (6-26)$$

本論文では、釣合式を用いて収束判定を行う。以下の式を満たすことで流体と膜の釣合形状が得られることを意味する。

$${}_{mix} B^T \begin{bmatrix} -P \\ n \end{bmatrix} - {}_{mix} f = {}_{mix} B^T ({}_{mix} B^T)^+ {}_{mix} f - {}_{mix} f \approx \mathbf{0} \quad (6-27)$$

6.6. 数値解析事例

上記定式化を基に Fig.6.1 に示された解析条件により、数値解析を行った。

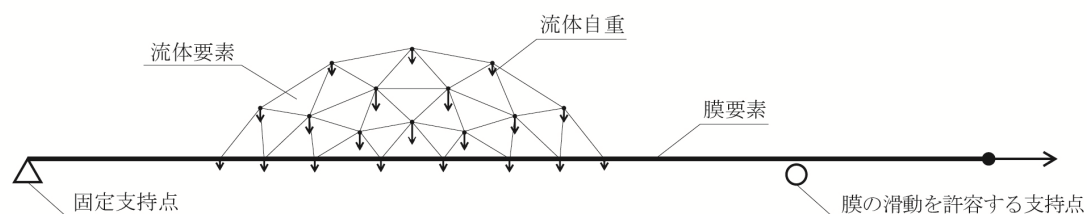


Fig.6-1 膜—流体連成解析解析条件

Fig. 6-2~9 に解析結果を示す。Step=5000 でほぼ釣合状態となっている。水平力の大きさを変えることによって、膜の垂れ下がり具合は調整できる。Fig. 6-10 のグラフは釣合式の収束判定を行っている。式(6-27)で表される量のノルムを計算している。これを釣合誤差ノルムと呼ぶことにする。



Fig.6-2 膜—流体連成解析結果(step=0)

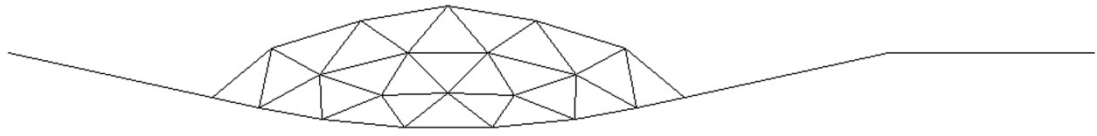


Fig.6-3 膜-流体連成解析結果(step=250)

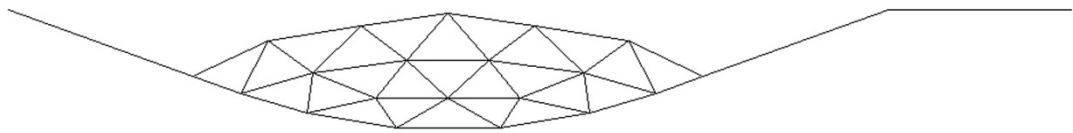


Fig.6-4 膜-流体連成解析結果(step=500)

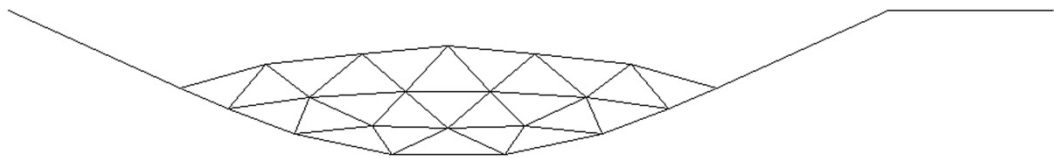


Fig.6-5 膜-流体連成解析結果(step=750)

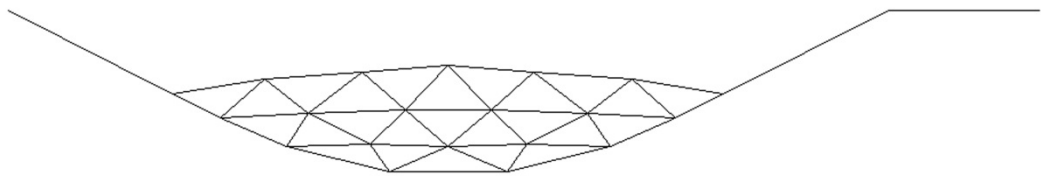


Fig.6-6 膜-流体連成解析結果(step=1000)

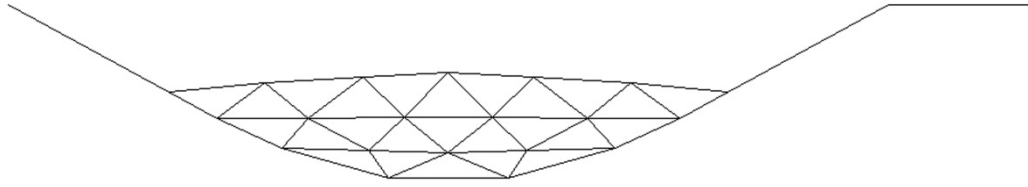


Fig.6-7 膜一流体連成解析結果(step=1250)

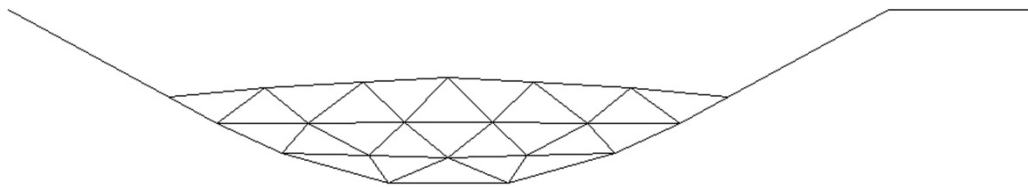


Fig.6-8 膜一流体連成解析結果(step=2000)

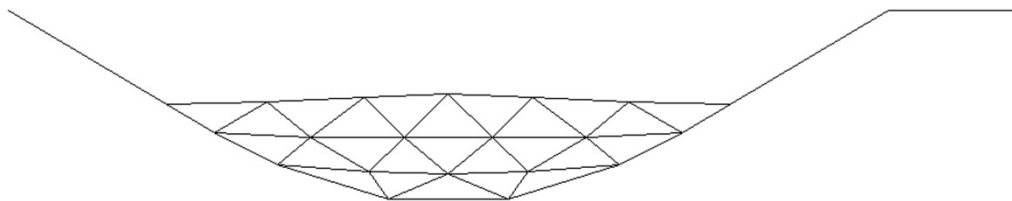


Fig.6-9 膜一流体連成解析結果(step=5000)

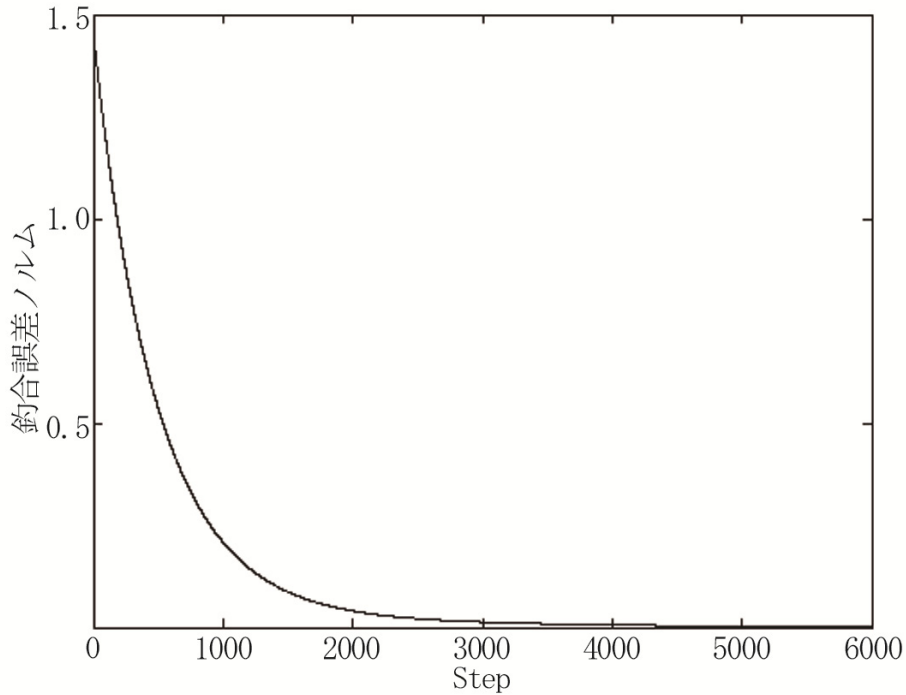


Fig.6-10 釣合誤差ノルム

上記，数値解析事例から，最終形態において，おおむね水面が水平を描いており，釣合形態に至った時点で，釣合式の解の存在条件が満たされる．これは，次のように考えられる．式(6-27)の右辺を見て， ${}_{mix}B^T({}_{mix}B^T)^+$ が単位行列に近づけば，釣合誤差ノルムは0に漸近する．また，第2章2.3.1項の式(2.15)から，釣合式の解の存在条件は以下となる．

$$\left(I_n - {}_{mix}B^T({}_{mix}B^T)^+ \right) {}_{mix}f = 0 \quad (6-28)$$

したがって，ここでの釣合誤差ノルムによる収束条件と釣合式の解の存在条件は，同時に満たされることになる．以上より，膜と流体の釣合形状が導出されていることが判断できる．

6.7. まとめ

本章では，第4章の可変構造の定式化を基に，膜と流体のポンディング現象を例にとり，Lagrange 記述による準静的な構造－流体連成問題の数値解析手法を提案した．これにより，本手法の場合，構造と流体をそれぞれ定義して，単純に連立することで解が提供できることが示された．一方で，静的な釣合式を用いて，定式化を行っているため，今後，運動方程式を用いた定式化による検討の必要がある．

また，構造－流体連成問題を扱う場合，それぞれの伝統的な記述方法に違いがあるため，

困難が生じる。本手法の場合、記述方法を **Lagrange** 記述に統一したものであるため、扱いやすさがあり、本来、構造一流体連成問題では、流体は流れ場を **Euler** 記述とする場合が多い。この点は、今後、構造一流体連成問題を解く場合、慎重に選択すべき点である。

第 7 章

結論

7.1. 結論

本研究では、一般逆行列理論の有用性を用いて、構造問題として可変構造の形態解析手法を提案し、流体問題として非圧縮性粘性流体の流れ場の数値解析手法を提案した。また、構造一流体連成問題の一事例として **Lagrange** 記述による準静的な構造一流体連成問題として、膜と流体のポンディング現象における数値解析手法を提案した。いずれも、数値解析を実行し、解の妥当性の検証を行った。これらの数値解析手法から、一般逆行列理論を用いた構造一流体連成問題の適用可能性は十分示された。

なお、本論文の目的として想定した以下の点について、それぞれの見解を示すと共に、結論とする。

- a) 解析挙動と実挙動の適合を実現するために、可変構造において、多軸自在継手の存在は不可欠であり、模型を製作することにより、節点オフセットが生じない挙動を示せることを確認した。一方で、多軸自在継手はコンセプチュアルな段階であり、乗り越えるべき工学的問題は多数存在する。
- b) 可変構造に用いられる物質に「非圧縮性を仮定し、等方的な応力が働き、応力の偏差成分は無視された物質」として、構成方程式を考慮することで、多次元への自然な拡張を行うことが可能となった。これにより、一次元要素では、剛体変位、二次元要素では、面積一定変位が実現できることが示された。また、本論文で扱う数値解析において、有限要素法と異なる点は、要素毎の積分和は行わず、要素毎に支配方程式を連立することで、全体行列を作成し、これにより形態解析が可能であることを示した。
- c) 本論文では、全長一定変位の解析を行うことで、節点の滑動が許容され、多彩な挙動を示す形態解析が可能であることを示した。これは、体積一定・表面積一定を組み合わせることで、さらなる発展につながることも示唆される。
- d) ムーア・ペンローズ一般逆行列を活用した微分の連鎖則による座標変換が可能であることを示した。このような定義は、余解が発生するが、本論文では $\gamma^{(k)}$ の決定方法を示すことで、特解を用いることの妥当性を示した。
- e) 第 4 章の 4.18 節において、悪条件連立方程式を取り上げ、条件数が大きくなる問題が存在し、条件数が大きくなると解が得られないことを明らかとした。また、第 4 章 4.17.2 項の数値解析事例によって、ムーア・ペンローズ一般逆行列の近似解法が有効な手段で

あることを示した.

- f) 一般逆行列理論を流体問題に応用できることを示した. 一方で, 計算機メモリの負担が大きいこともあり, 現在の流体解析の主流に代替できる手法とは, 現時点では言えないが, 連立方程式の型にとらわれず, 連立できることから, 連成問題への応用が可能であることを示した.
- g) 境界条件が不足した **Cavity** 流れを解析事例として, 一般逆行列理論の特徴である境界条件が不足した問題も解けることを示した. これにより, 非定常問題とした **Cavity** 流れを解くことに至る.
- h) **Lagrange** 記述による準静的な構造一流体連成問題を取り扱うことで, 本手法の様々な問題に応用できる可能性を示した. 一方で, 第 4 章で定義された各支配方程式の中から, どの積分レベルで反傾原理が成立しているかに注意が必要であり, 想定される外力を正しく入れることが必要であることが示された.

本論文では, 構造と流体問題をそれぞれ別に扱って示しているが, 記述方法を除けば, 支配方程式や構成方程式, 全体行列の作成方法等を見ると, お互いの区別はあまりないように思われる. これは, 共通して非圧縮性を仮定した物質問題を扱っているためである. 一般逆行列が線形問題に対して有効であることも, お互いの違いを覆い隠していることになる. しかし, 非圧縮性という仮定が, 物事を簡略化して表現していることに興味を感じられ, さらに, 非圧縮性と一般逆行列理論の相性がよいことを物語っている.

7.2. 今後の課題

以下, 今後の課題として, 考えられることを列挙する.

多軸自在継手はコンセプト的な段階であり, 乗り越えるべき問題は多数存在する. 現在, 国際特許申請中であり, **JST**(科学技術振興機構)による国際特許出願支援を受け, さらなる展開が期待される.

可変構造において, 応力の偏差成分を考慮した場合は, 本論文では想定していない. これは, 二次元要素の剛体変位問題を取り扱う場合に必要となるが, 特異行列か悪条件となり, 解が得られない場合が存在する. この打開策として, 本論文に示した全体座標による形状関数の偏微分値の余解の扱い(第 4 章 4.16 節)を工夫することが有効と考えている.

流体問題において, 計算機メモリの負担を軽減する検討を要する. 行列の規模を小さくする手法を導入するか, 蓄えておく行列を減らす定式化等が考えられる.

構造一流体連成問題を解析対象とすることで, 本手法の有用性が認識されると考えられ, そのために, 物体の記述方法を検討する必要がある. これには, 慎重な検討が必要といえるが, 構造を **Euler** 記述で表現することに可能性があると考えている. この場合, 構造を移流計算する必要があるが, メッシュの不均一性が解消されると考えている.

謝辞

本研究を行うにあたり，終始ご指導を賜った松澤照男教授に深く感謝いたします。

また，審査委員をお引き受けいただいた本学 浅野哲夫教授，本学 井口寧教授，本学 前園涼准教授，鹿児島大学 本間俊雄教授には，本論文を執筆するにあたり多大な助言をいただきました。深く感謝いたします。

多軸自在継手の研究において有益なご助言・ご指導をいただきました，鹿児島大学 本間俊雄教授に感謝いたします。

研究に関する興味・関心を引出してくださり，一般逆行列理論の研究においても有益なご助言をいただきました，東京大学 川口健一教授に感謝いたします。

日頃より，構造や数値解析において，有益なご助言や多面に渡って励ましていただいた昭和女子大学 安宅信行名誉教授，昭和女子大学 森部康司講師，(株)性能計画及び昭和女子大学 鈴木俊男非常勤講師，また日頃より励ましいただいた昭和女子大学環境デザイン学科の諸先生方に感謝いたします。

空間構造の世界を魅力的に紹介し，可変構造のきっかけを示された東京藝術大学 坪井善昭名誉教授，構造設計と接合部の考え方を学ばせていただいた **Structured Environment** 代表 アラン・バーデン氏に改めて感謝いたします。

多軸自在継手の研究にご支援いただき，日頃有益なご助言・ご提案をいただきました JST(科学技術振興機構)特許化支援事務所(東海)特許主任調査員 生野逸夫氏に感謝いたします。

多軸自在継手の PCT 出願につきまして，科学技術振興機構における JST 外国特許出願支援制度によりご支援いただきました。ここに記して謝意を表します。

最後に，研究にあたって日頃よりご助言いただきました石川キャンパス，東京キャンパスの松澤研究室の諸兄に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] A. Cemal Eringen, *Mechanics of Continua*, Krieger Publishing Company, 1967
- [2] 中村喜代次・森教安, *連続体力学の基礎*, コロナ社, 1998
- [3] 竹内則雄・寺田賢二郎・樫山和男, *計算力学—有限要素法の基礎*, 日本計算工学会編, 森北出版, 2003
- [4] 斎藤正彦, *線型代数入門(基礎数学 1)*, 東京大学出版会, 1966
- [5] 半谷裕彦, 川口健一, *形態解析—一般逆行列とその応用—*, 培風館, 1991
- [6] 川口健一, *一般逆行列と構造工学への応用*, コロナ社, 2011
- [7] C.ラグリシュナ=ラオ・S.K.ミトラ, 渋谷政昭・田辺国土訳, *一般逆行列とその応用*, 1973
- [8] 有本卓, 関本昌紘, “巧みさ”とロボットの力学, *毎日コミュニケーションズ*, 2008
- [9] 新井康平, *応用線形代数*, 近代科学社, 2006
- [10] 花原和之, *可変形状トラス(VGT)の多彩な動作*, *システム/制御/情報*, Vol45, No.2, pp.82-89, 2001
- [11] 中山司, *流れ解析のための有限要素法*, 東京大学出版会(2008)
- [12] 平岡久司, *有限要素法による Navier-Stokes 方程式の数値計算*, 日本建築学会大会学術講演論文集, 1983
- [13] Adi Ben-Israel, *The Moore Of The Moore-Penrose Inverse*, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, A publication of the International Linear Algebra Society, Volume9, pp.150-157, 2002
- [14] 近藤慎輔・川口健一, *シザーズ型展開構造の単層ラチスドームへの適用に関する研究*, *生産研究*, 52 巻 4 号, 2000
- [15] Emilio Perez Pinero, *Three Dimensional Reticular Structure*, *United States Patene* 3.185.164.1965
- [16] Robert L.Williams II, *Kinematic Modeling of a Double Octahedral Variable Geometry Truss (VGT) as an Extensible Gimbal*, *NASA Technical Memorandum* 109127, 1994
- [17] Koryo Miura, *Variable Geometry Truss Concept*, *The Institute of Space and Astronautical Science*, Report No.614, 1984
- [18] 樫村幸辰・寺門純, *パラレルリンク機構に関する研究—球ジョイントの最適配置—*, *山梨講演会講演論文集*, 2001
- [19] Tomohiro Tachi, *Generalization of Rigid Foldable Quadrilateral Mesh Origami*, *Proceeding of the International Association for Shell and Spatial Structure(IASS) Symposium 2009*

- [20] Paul BOSSCHER, etc. : A Novel Mechanism for Implementing Multiple Collocated Spherical Joints Proceeding of the 2003 IEEE ICRA, pp.14-19 ,2003
- [21] R.バックミンスター・フラー, 梶川泰司, コズモグラフィ—シナジェティクス原理—, 白揚社, 2007
- [22] ジェイ・ボールドウィン, 梶川泰司, バックミンスターフラーの世界—21 世紀エコロジー・デザインへの先駆, 美術出版社, 2001
- [23] Alan Burden, 構造家列伝 第9回コンラッド・ワックスマン, 彰国社, 建築文化(595), pp.157-160, 1996
- [24] Steven CURTIS, et al., Tetrahedral Robotics for Space Exploration, IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE, JUNE 2007 ,pp.22–30
- [25] P.E.Clarks,etc. Mining Amorphous Transporter Exploration(MATE) for Far North Mining Operations (<http://ants.gsfc.nasa.gov/publications.html>)
- [26] 川口健一, 半谷裕彦, 不安定剛体トラスの形状決定解析における高次項の導入, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1988
- [27] 本間俊雄, 登坂宜好, 非保存性外力を受ける弾性棒の動的安定解析, 日本建築学会構造系論文集, 第461号, pp.37-46, 1994
- [28] 坪井善勝, 連続体力学序説, 産業図書, 1977
- [29] Kohei Takeuchi, 構成方程式と等方性, http://www.u.tsukuba.ac.jp/~s0830078/note/Constitutive_equation_and_Isotropy.pdf
- [30] 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善株式会社, 1996
- [31] 安宅信行, 構造の形態理論に関する研究, 名古屋大学学位請求論文, 1989
- [32] 安宅信行, 構造における形態の理論について, 昭和女子大学大学院生活機構研究紀要, Vol.4, pp.29-52, 1995
- [33] 本間俊雄, 安宅信行, 座標値を未知量とした有限要素法による張力構造の解析と評価, 膜構造論文集, No.18, pp.15-21,
- [34] 三木優彰, 三項法と双対推定による構造物の釣合形状の探索, 東京大学学位請求論文, 2012
- [35] 田中喜久昭, 長岐滋, 井上達雄, 弾性力学と有限要素法, 大河出版, 1995
- [36] 川口健一, 半谷裕彦, 不安定剛体トラスの安定化移行解析過程における最適移行条件, 日本建築学会学術講演梗概集, 1987
- [37] 山村智則, 安藤正英, 服部真子, 大森博司: 節点の滑動を許すケーブルネットの構造解析に関する研究 その1, 日本建築学会学術講演梗概集, 2005
- [38] 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也, 混合法によるケーブルネットの解析その(1)不安定架構の性質およびリンク機構の解析, 日本建築学会論文報告集, 第218号, 1974
- [39] 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也, 混合法によるケーブルネットの解析その(2)幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第220号, 1974

- [40] 半谷裕彦, 不安定構造理論と形状決定問題への応用, 昭和 63 年度科学研究費補助金(一般研究 B) 研究成果報告書, 1989
- [41] 増田宏, 吉岡康博, 古川慈之, 形状特徴を保存するインタラクティブなメッシュ変形操作, (<http://www.nakl.t.u-tokyo.ac.jp/~masuda/papers/gcad06.pdf>)
- [42] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, et al., Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds, 2001
- [43] 梶島岳夫, 不等間隔格子に適合する対流項の差分法, 日本機械学会論文集(B 編), 65 巻, 633 号, 1999
- [44] U.Ghia,K.N.Ghia, and C.T.Shin,High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method,Journal of Computational Physics,48,387-411,1982
- [45] 宮田真紀, 斎藤公男他, 張力膜構造のポンディング現象に関する基礎的研究, 日本建築学会関東支部研究報告集, 2002

本研究に関する発表論文

査読付き論文

- [1] 横須賀洋平, 松澤照男, 一般逆行列の流体問題への応用—Lagrange 記述と Euler 記述による手法—, 膜構造研究論文集 2012, pp.93-98

査読付き国際会議

- [1] Yohei Yokosuka, Tetsuo Asano, and Teruo Matsuzawa, Shape-finding Analysis Based on Steepest Descent Method for Variable Geometry Structures Formed by a Multilink Spherical Joint, The Seventh China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Huangshan, June, 18-21, 2012, China

国内会議

- [1] 横須賀洋平, 松澤照男, 多軸自在継手を用いた可変構造の一般逆行列による数値解析, 「第 8 回生体工学と流体工学に関するシンポジウム」, 金沢, 2012.2
- [2] 横須賀洋平, 定積条件を仮定した可変構造の形態解析, 「コロキウム構造形態の解析と創生 2012」, 奈良, 2012.10
- [3] 横須賀洋平, 松澤照男, 一般逆行列を用いた非圧縮性粘性流体の数値解析について, 「第 9 回生体工学と流体工学に関するシンポジウム」, 金沢, 2013.2

特許

- [1] 松澤照男, 横須賀洋平, 北陸先端科学技術大学院大学, 「自在継手及び可変構造体」, 出願日(国内)2012.11.05, PCT 出願日(国際出願)2012.5.7 国際番号 WO 2012153698A1(特許申請中)