

Title	不確定性を含むむだ時間システムに対するスミス制御器に関する研究
Author(s)	内藤, 浩行
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1148
Rights	
Description	Supervisor: 示村 悦二郎, 情報科学研究科, 修士

修士論文

不確定性を含むむだ時間システムに対するスミス制御器 に関する研究

指導教官 示村悦二郎

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

510085 内藤 浩行

1994年2月13日

目次

1	はじめに	2
1.1	研究の背景	2
1.2	従来研究	3
1.3	研究の目的	4
1.4	本稿の構成	5
2	準備	6
2.1	数学的準備	6
2.2	制御理論的準備	6
2.2.1	well-posedness	6
2.2.2	内部安定性	8
2.2.3	不確かさのブロック構造	8
2.2.4	構造化された不確かさをもつ閉ループ系の well-posedness と内部安定性	8
2.2.5	構造化特異値	9
3	スミス法	10
3.1	SISO のスミス法	10
3.2	MIMO のスミス法	11
4	問題設定	13
4.1	むだ時間システムの安定性	13
4.2	実用安定性	14
4.2.1	実用安定性の定義	14

4.2.2	不確かさの影響	15
4.3	スミス法の伝達関数行列の構造	15
4.4	不確かさ	17
4.4.1	スミス法のブロック線図	18
4.5	むだ時間システムの実用安定性	19
5	スミス制御系の実用安定定理	20
5.1	定理	20
5.2	準備	21
5.3	証明	22
6	数値例	30
7	まとめ	35
7.1	本研究のまとめ	35
7.2	以後の課題	35

表 目 次

2.1 記号表	7
---------------	---

第 1 章

はじめに

1.1 研究の背景

システムを制御するのに必要な情報は、物体、物質、あるいはエネルギーの移動によって伝達されるが、伝達に遅れをともなうシステムがある。そのような遅れをむだ時間といい、むだ時間を含むシステムをむだ時間システムという。むだ時間システムとしては、工学の分野では化学プロセス、製鉄における圧延プラントなどがあり、また、経済システムや生体システムの分野などでも見受けられる

むだ時間システムの特徴は、むだ時間の影響で制御入力の効果が即座に出力に反映しないことである。そのため、ある時刻におけるシステムの出力からの情報だけでは、システムの現時点での状態を一意に決定するために必要な情報を得られない。言い換えれば、ある時刻(むだ時間経過後の)から先のシステムのダイナミクスは、過去の入力だけでなく、むだ時間分過去から現時刻までのシステム自身のダイナミクスに依存するのである。よって、むだ時間システムに対する合理的な制御法は、むだ時間が経過した後に現われる制御入力の効果을予測しながら、制御入力を修正することになる。

一方、システムを制御することにおいて、最初に要求されることの一つにシステムの安定性の保証がある。通常、安定化はフィードバック制御によって実現される。そして、むだ時間を含むシステムに対して安定性を保証する有効なフィードバック制御法の一つとして、スミス法 [16][17] がある。スミス法は、制御装置内に制御対象のモデルを含むマイナーフィードバックを構成することで実現された、出力予測制御である。

スミス法による安定化手法は、実システムと数式モデルとの間のモデル化誤差を含まな

い，という仮定のもとに論じられている．

しかしながら，モデル化誤差などの不確かさを含まないようにモデル化を行うことは難しく，忠実にモデル化できたとしてもモデルの複雑さのために制御系の設計ができないことがある．また，制御系の経年変化，外部の変化などによってパラメータの変動が起き，数式モデルと実システムとの間に誤差や不整合などの不確かさが発生する．その結果，閉ループ系が制御特性を実現しないばかりか，安定性すら保証するとは限らない．

とくに，スミス法で制御されたむだ時間システム(以下ではスミス制御系と記述)は，スミス制御系の性質によりどんなに微小な不確かさに対しても閉ループ系の安定性を失う可能性がある [14] [18] ．

したがって，微小な不確かさが存在してもシステムの安定性を保証する実用安定性 [14][15][18][19] が，システムを設計する際に必要であり，スミス法における実用安定性の様々な研究が行われている．

現在得られているスミス制御系の実用安定性に対する研究成果は，一入力一出力(以下では，SISO と記述)の時は必要十分条件 [18] が示されてるいるが，パラメータが複数個ある，より実際のシステムに適用するには十分といえず，多入力多出力(以下では，MIMO と記述)のスミス制御系に関する実用安定性に対する研究が必要となっている．

1.2 従来研究

むだ時間システムに関する制御法であるスミス法が最初に提案されたのは，Smith による文献 [16][17] である．これらの文献 [16][17] で提案されている Smith 法は，むだ時間要素を一つだけ含む SISO のシステムに関する制御法である．

次に，SISO のスミス制御系に対する実用安定性に関する従来研究は，Palmor に文献 [14] や，Yamanaka らによる文献 [18] がある．文献 [14] では，SISO のスミス制御系に関する実用安定性が初めて定義され，閉ループ系が実用安定となるための必要条件が導かれている．また，文献 [18] では，SISO のスミス制御系の実用安定性に関する，必要十分条件が導出されている．その結果，実用安定性の本質はシステムの周波数特性に依存するということを導びいている．また，制御装置の設計法も示している．

また，MIMO のスミス制御系に対する実用安定性の研究結果は，文献 [20][15][19] があり，Alevisakis らの結果 [20] は，むだ時間要素を一つだけ含む MIMO のシステムに対して，スミス法を拡張している．Palmor らの結果 [15] は，MIMO のスミス制御系に関する

実用安定性の必要条件を導いている．この必要条件は伝達関数行列の係数を用いて計られ、文献 [14] で示された結果を用いて導出されたものである．Feng [19] は、Yamanaka らの結果と構造化特異値を用いて、MIMO のスミス制御系の実用安定性の定義とその十分条件について考案を行っている．また、むだ時間を含まない場合のフィードバック制御系での実用安定性の重要性を示している．

その上、文献 [14][19] で提案されたの制御対象の構造は、制御対象の伝達関数行列の要素にむだ時間要素が付随した形になっている．この形は、MIMO のむだ時間システムを表現する、ある構造の一つであり、文献 [14][19] の結果はその構造に対して導かれたものである．この構造をもつ実システムもあるが、また異なる構造をもつ MIMO のシステムも十分考えられる．

以上より、現在導かれている結果だけでは、様々な MIMO のむだ時間システムに関する問題に対して、結果を適用することを十分に考慮したとは言いがたい．

1.3 研究の目的

前節までの研究の背景や従来研究から、MIMO のスミス制御系の実用安定性に関する研究が、むだ時間を含む実システムに対して必要であり、安定論の分野において重要である．

よって、本研究では、MIMO のスミス制御系の実用安定性に関する研究を行う．

MIMO の制御対象の構造に関して、文献 [14][19] で提案された制御対象の構造では表現しにくい、異なった構造をもつ制御対象に対して実用安定性を導く．つまり、SISO のむだ時間システムを行列に拡張することで MIMO のむだ時間システムとするのではなく、むだ時間要素とむだ時間を含まない制御対象の伝達関数の双方を個別に行列へ拡張したものを MIMO のむだ時間システムとし、本研究の制御対象の構造とする．ただし、むだ時間伝達関数行列の構造は対角とする．

また、制御対象に含まれる不確かさは、むだ時間要素にのみ存在する時を考える．むだ時間システムを制御対象としている本研究において、不確かさを定義する際に、むだ時間要素に不確かさが存在するのは自然である．また、そこに存在する不確かさはむだ時間システムの実用安定性において一番重要な要素であると考えられる．なぜなら、むだ時間要素の不確かさは周波数に比例して誤差をひき起こし制御系に影響を及ぼすからである．

1.4 本稿の構成

本論文の構成を述べる．

第1章では，研究の背景をのべ，本研究を考察するに至った従来研究，目的と概要についてまとめている．

第2章の以降の節では，本論文に用いられる記号の説明およびいくつかの定義を行う．ほとんどは，一般的な事柄であり個々の詳細については参考文献などの参照願います．

第3章では，スミス法に関してまとめている．

第4章では，本研究の問題設定を行う．つまり，MIMOの制御対象の構造に関して文献[14][19]で定義された制御対象の構造と異なった構造をもつ制御対象を定義し，むだ時間システムの安定性を考える．むだ時間伝達関数行列の構造は本稿では対角とし，むだ時間要素にのみ不確かさが存在する時を考える．また，これらの定義を用いて実用安定性を定義し，本研究の問題を定式化する．

第5章では，第4章で設定した問題，MIMOのスミス制御系の実用安定性の定理を導出している．

第6章では，前章で得られた定理を用いて，簡単なシュミレーションを行っている．

そして，最後に，第7章では本研究のまとめを行う．

第 2 章

準備

2.1 数学的準備

本節では，本論文に使用される用語の表記と必要ならば簡単な定義を与える．

本小節では，本文において一般的に使用される用語と記号を表記する．本論文では，基本的にはスカラーは小文字で，ベクトルは太小文字で表し，行列は太大文字で表すことにする．具体的には，それぞれ(スカラーの例 a, b, c)，(ベクトルの例 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$)，(行列の例 A, B, C)である．それ以外に使用する記号は標準的なものであり，表 2.1 にまとめている．ほとんどの用語の説明は参考文献などにあげた書籍などに，解説があるため省く．しかし，本文で定義と説明が必要と思われる場合は，現われた時に行う．

2.2 制御理論的準備

この節では，本研究で使用する制御理論の概念である，well-posedness，内部安定，不確かさのブロック構造，構造化特異値について定義する．

2.2.1 well-posedness

定義 2.1 [26][27] 図 2.1 のシステムのように $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ ， $K(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ が与えられた時，外部入力 u_1, u_2 から， y_1, y_2 までの閉ループ伝達関数がプロパーならば，そのシステムは *well-posed* であるという． ■

表 2.1: 記号表

\mathcal{R}	実数体 .
\mathcal{C}	複素数体 .
$\mathcal{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 実行列の集合 .
$\mathcal{C}^{m \times n}$	$m \times n$ 複素行列の集合 .
\mathcal{E}	むだ時間伝達関数の集合 .
$\bar{\mathcal{C}}_+$	虚軸を含む複素右半平面 .
\mathcal{C}_+	虚軸を含まない複素右半平面 .
\mathcal{RH}_∞	安定プロパーな実有理伝達関数 .
I_n	n 次元単位ベクトル .
A^{-1}	行列 A の逆行列; $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$.
$\det A$	行列 A の行列式; $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$.
$\sigma(A)$	行列 A の最大特異値 .

また, この定義と等価な条件として次の補題が知られている [26][27] .

補題 2.1 [26][27] 図 2.1 のシステムのように $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $K(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ が与えられた時, システムが *well-posed* となるための必要十分条件は,

$$(I - M(\infty)K(\infty)) \text{ が invertible .} \quad (2.1)$$

である .

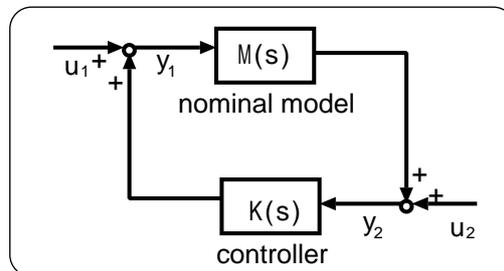


図 2.1: Internal stability analysis diagram.

2.2.2 内部安定性

次に内部安定性は，以下のように定義される．

定義 2.2 [26][27] $K(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ の時，図 2.1 のシステムは

$$(I - M(s)K(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.2)$$

が成立する時，内部安定である． ■

2.2.3 不確かさのブロック構造

次に，不確かさのブロック構造を定義する．

定義 2.3 [26][27] 集合 Δ を次のように定義する．

$$\Delta_1 := \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1} \dots \delta_s I_{r_s}] : \delta_i \in \mathcal{C}, \sum_{i=1}^s r_i = n_1\} \quad (2.3)$$

$$\Delta_2 := \{\text{diag}[\Delta_1 \dots \Delta_F] : \Delta_j \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}, \sum_{j=1}^F m_j = n_2\} \quad (2.4)$$

$$\Delta := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} : \Delta_1 \in \Delta_1 \subset \mathcal{C}^{n_1 \times n_1}, \Delta_2 \in \Delta_2 \subset \mathcal{C}^{n_2 \times n_2} \right\} \subset \mathcal{C}^{n \times n} \quad (2.5)$$

■

そして，安定な有理伝達関数 \mathcal{RH}_∞ の要素で， Δ の構造を持つブロック対角行列の集合を $\mathcal{M}(\Delta)$ として定義する．

定義 2.4 [26][27]

$$\mathcal{M}(\Delta) := \{\Delta(\cdot) \in \mathcal{RH}_\infty : \Delta(s_0) \in \Delta, \forall s_0 \in \bar{\mathcal{C}}_+\} \quad (2.6)$$

■

2.2.4 構造化された不確かさをもつ閉ループ系の well-posedness と内部安定性

ここでは，不確かさが \mathcal{RH}_∞ の閉ループ系の well-posedness と内部安定性を定義する．

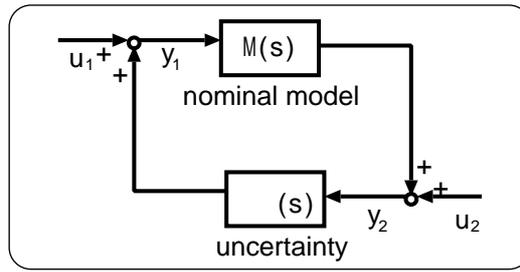


図 2.2: loop for stability analysis.

定義 2.5 [26][27] $\forall \Delta(\cdot) \in \mathcal{M}(\Delta)$, $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ の時, 図 2.2 が, *well-posed* で内部安定であるとは

$$\forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+ \cup \{\infty\} \text{ において } (I - M(s)\Delta(s)) \text{ が } invertible . \quad (2.7)$$

が成立する事である . ■

2.2.5 構造化特異値

ここでは, 構造化特異値を, 定義する .

定義 2.6 ブロック構造 Δ が与えられているとする . このとき, $M \in \mathcal{C}^{n \times n}$ に関して, $\mu_\Delta(M)$ は以下のように定義される .

$$\mu_\Delta(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (2.8)$$

ただし, $\det(I - M\Delta) = 0$ となる $\Delta \in \Delta$ が存在しない場合には, $\mu_\Delta(M) := 0$ である . ■

第 3 章

スミス法

フィードバック制御は、目標入力と制御対象の出力の偏差をよりどころとして、出力偏差を小さくするように、制御対象の入力を修正する方法である。制御入力や出力にむだ時間があると、出力には制御入力の修正に必要な情報、つまり、その時刻まで加えた制御入力の効果あるいは、その兆候が見られない。よって、むだ時間系を合理的に制御するには、むだ時間経過後に現われるであろう出力を予測しながら、制御入力を修正することである。この方法を最初に実現したのがスミス法であり、その制御法について、SISO のむだ時間システムに対するスミス法について概略を述べ、そして、MIMO のむだ時間システムのスミス法をまとめる。

3.1 SISO のスミス法

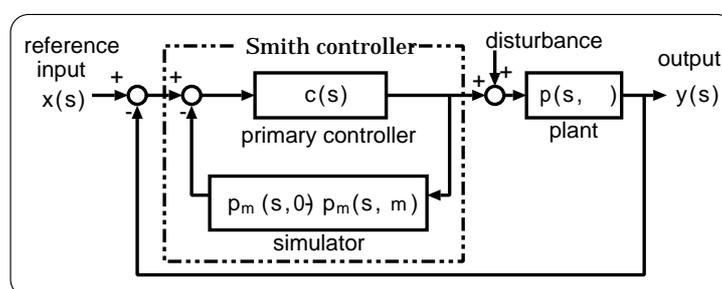


図 3.1: SISO Smith method.

入力あるいは出力にむだ時間 θ を持つ漸近安定なプラント $p(s, \theta)$ に対し，図 3.1 のような制御を行うのがスミス法である．スミス法は，遅れ型むだ時間を含むプラント出力の予測に基づく制御法で，閉ループ系のむだ時間要素が等価的に閉ループから外されることが特徴である．それぞれの伝達要素については， $c(s)$ は主制御器であり，その周りの局所フィードバック要素 $p_m(s, 0) - p_m(s, \theta_m)$ はむだ時間補償要素である． θ_m はむだ時間 θ のモデルであり， $p_m(s, 0)$ はむだ時間を含まないプラントのモデル， $p_m(s, \theta_m)$ はプラントのモデルである．

そして，要素 $p_m(s, 0)$ が，むだ時間経過後に現われる実際の制御対象の出力の予測値を発生し，この値に対して制御入力主制御器により決定される．そして，もう一方の要素である $p_m(s, \theta_m)$ が制御対象のモデルとなり，実際の出力 $y(s)$ を打ち消すことで予測に影響を与えない．

だが，スミス制御系においてモデル化誤差や不確かさ等が存在しない時，つまり， $p(s, \theta) = p_m(s, \theta_m)$ ，ならば，目標値 $r(s)$ から制御量 $y(s)$ までの伝達関数 $g(s)$ は以下のような遅れ型有理関数となる．

$$g(s) = \frac{c(s)p(s, \theta)}{1 + c(s)p(s, 0)} \quad (3.1)$$

その結果，特性方程式は

$$1 + c(s)p(s, 0) = 0 \quad (3.2)$$

となり，むだ時間 θ の項が特性多項式から消去される．その結果，むだ時間の無い制御系に対する設計法が図 3.1 の閉ループ系に適用できる．

しかしながら，モデル化誤差や不確かさ等がある場合の特性方程式は

$$1 + c(s)p_m(s, 0) + c(s)p(s, \theta) - c(s)p_m(s, \theta_m) = 0 \quad (3.3)$$

となり，システムは無限個の極をもつことになる．

3.2 MIMO のスミス法

次に，本研究の対象となっている，SISO のスミス法の拡張版である，MIMO のスミス法について簡単にまとめる．

対象となるシステムの概要は，SISO のスミス制御系と同様である．ただし，入出力はベクトルとなり，伝達要素は行列となる．よって，図 3.2 のような MIMO システムのスミ

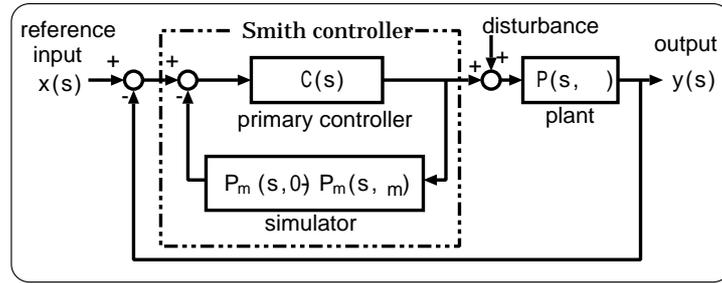


図 3.2: MIMO Smith method.

ス制御系は、遅れ時間を θ と表し、むだ時間を含むプラントの伝達関数行列は $P(s, \theta)$ 、そのモデルは $P_m(s, \theta_m)$ と表す。また、 $C(s)$ 、 $P(s, \theta)$ 、 $P_m(s, \theta_m)$ はそれぞれ、主制御器、むだ時間を含まないプラント、むだ時間を含まないプラントのモデル、を伝達関数行列とする。

SISO のスミス法と同様に $P(s, \theta) = P_m(s, \theta_m)$ の時、MIMO のスミス制御系の目標値ベクトル $R(s)$ から制御量ベクトル $Y(s)$ までの伝達関数行列 $G(s)$ は以下のようになる。

$$G(s) = P(s, \theta)[I + C(s)P(s, \theta)]^{-1}C(s) \quad (3.4)$$

また、特性方程式は

$$\det[I + P(s, \theta)C(s)] = 0 \quad (3.5)$$

となり、SISO のスミス制御系と同様に、むだ時間の無い制御系に対する設計法が図 3.1 の閉ループ系に適用できる。

そして、むだ時間にのみ不確かさを含む場合の伝達関数行列は、

$$G(s) = P(s, \theta)[I + C(s)\{P(s, \theta) - P(s, \theta_m) + P(s, \theta_m)\}]^{-1}C(s) \quad (3.6)$$

となり、不確かさを含む場合の特性方程式は

$$\det[I + \{P_m(s, \theta_m) + P(s, \theta) - P_m(s, \theta_m)\}C(s)] = 0 \quad (3.7)$$

となる。

第 4 章

問題設定

本章では，本研究の対象となる問題の定式化を行う．最初に，むだ時間システムのもつ無限個の極のつらなり [28] を考慮した，むだ時間システムの安定性を定義し，実用安定性の概念を定義する．そして，実用安定性の重要性を数値例を用いて示す．さらに，MIMO のスミス制御系の構造を定義する．そのあとに，むだ時間システムに表れる微小な不確かさを定義し，最後に問題である，微小な不確かさが存在する MIMO のスミス制御系での安定性である，実用安定性を定義する．

4.1 むだ時間システムの安定性

むだ時間システムの安定性を考える上で重要なことは，むだ時間要素を含まないシステムと違い，極の数が無限にあるということである．また，その無限の極がチェーンのようにつながり虚軸に漸近していく [28]．よって，むだ時間を含まないシステムの安定性と異なる，定義が必要となる．この節では，むだ時間を含む閉ループ系の安定性を定義する．

定義 4.1 [18][19] むだ時間を含む閉ループの特性多項式を $f(s)$ とし，

$$\Sigma := \{\sigma : \sigma = \operatorname{Re} s, f(s) = 0\} \quad (4.1)$$

と仮定する．その時閉ループ系が安定であるというのは，集合 Σ が負の上限をもつことである． ■

この定義と等価なものとして，以下の補題を示す．

補題 4.1 むだ時間を含む閉ループの特性多項式を $f(s)$ とし, その時閉ループ系が安定であるというのは,

$$\exists R > 0, \bar{C}_+(R) := \{s \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} s \geq -R\}, f(s) \text{ が invertible.} \quad (4.2)$$

が成立することである. ■

4.2 実用安定性

本節では, 本研究で取り扱う安定性の概念である, 実用安定性についてまとめる. 実用安定性はロバスト安定より弱い条件ではあるが, ロバスト安定性の必要条件となる. つまり, 微小な不確かさが存在するだけでシステムの安定性が保証できないシステムに対して, まずは, 実用安定性を考えることがロバスト安定性を考える上で必要になる場合があると解釈できる.

最初に, 実用安定性の概念を述べ, むだ時間システムの数値例を用いて実用安定性の重要性を考える.

4.2.1 実用安定性の定義

実用安定性について考える前に, まず実用不安定性について考える.

モデルが理想的な状況, 制御対象とモデルの間でモデル化誤差が無く不確かさが存在しない時, そのシステムが安定となるように制御系を設計することはたやすい. しかし, このモデルと制御対象の間には僅かながらも不確かさをもち, その結果, 設計されたシステムは安定性を失うかも知れない. ノミナルケースでは安定だが, 不確かさの存在でシステムが不安定になるとき, 実用不安定という.

以下に上記の概念を定義する.

定義 4.2 [14] ノミナルシステムでは安定だが, 任意の小さな不確かさがに対して不安定となるシステムを, 実用不安定という. ■

つまり, この概念の逆を実用安定性といい, 以下に定義する.

定義 4.3 [14] ノミナルシステムでは安定だが, 任意の小さな不確かさがに対して安定となるシステムを, 実用安定という. ■

次に数値例を利用して実用安定性の必要性を以下に示す.

4.2.2 不確かさの影響

スミス制御系の数値例を考える．これは，文献 [18] の結果を使用して，コントローラを導出している．まず，制御対象を以下のようにする．

$$p(s, \theta) = \frac{(\delta_1 s^2 + \delta_1 s + 1)e^{-(\theta + \delta_1)s}}{(\delta_1 s + 1)(s^2 + 2s + 1)} \quad (4.3)$$

また， δ_1 を不確かさとする．ただし， $\delta_1 > 0$ となる十分小さいパラメータである．

局所フィードバック要素のむだ時間を含まない部分のモデルは以下のようになり，

$$p_m(s) = \frac{e^{-\theta s}}{(s^2 + 2s + 1)} \quad (4.4)$$

不確かさを考慮せずノミナルシステムを安定にするコントローラを以下の式のようにおく．

$$c(s) = \frac{1.25s^2 + 2.5s + 1.25}{s} \quad (4.5)$$

上記の条件に対して，不確かさが存在しない時のノミナルシステムでの単位ステップ入力の出力は，(図 4.1) のようになる．

しかしながら，不確かさの存在によって出力は，(図 4.2) のようになる．以下では不確かさが $\delta_1 = 0.01$ の場合である．

よって，上記の数値例でわかるように微小な不確かさが存在しても，システムの安定性を保証する実用安定性について考えることが必要である．

4.3 スミス法の伝達関数行列の構造

本研究で用いる MIMO のスミス制御系は図 3.2 のように構成されたシステムである．また，問題を簡単にするため，図 3.2 で使用される伝達関数行列は n 行 n 列の伝達関数行列とする．そして，図 3.2 で使用される $P(s, \theta)$ ， $P_m(s, \theta_m)$ を以下のような構造とする．

$$P(s, \theta) := \Theta(s)P(s, 0) \quad (4.6)$$

$$P_m(s, \theta_m) := \Theta_m(s)P_m(s, 0) \quad (4.7)$$

つまり，むだ時間要素伝達関数行列はむだ時間要素をふくまないプラントの伝達関数行列の後に存在する (図 4.3 を参照) ．

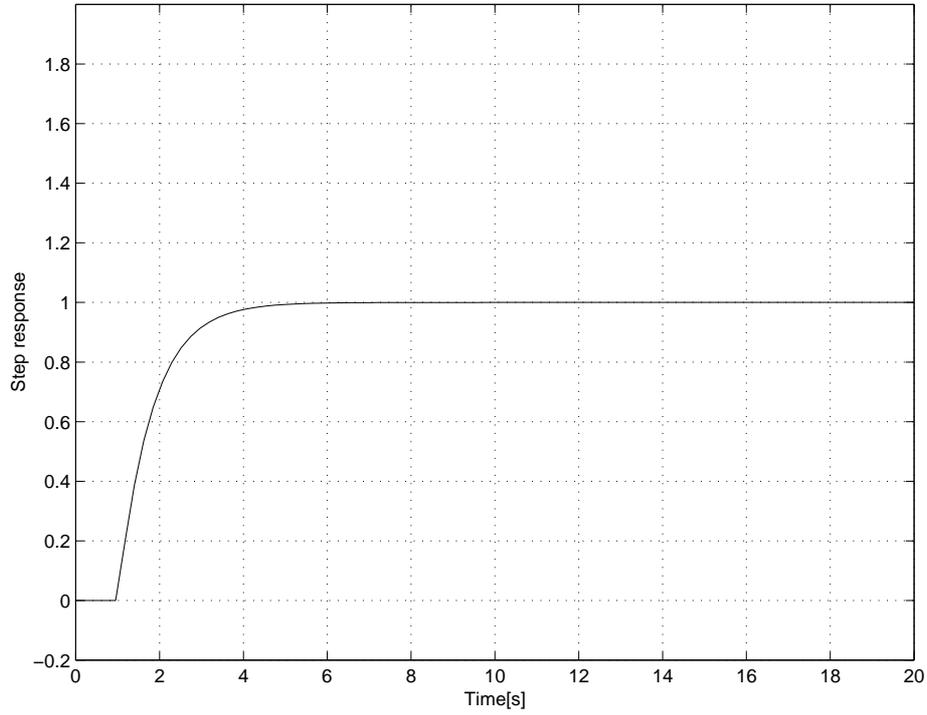


図 4.1: $u=0$ の場合のノミナルシステム

次に, $P(s, \rho)$, $P_m(s, \rho)$, $C(s)$, $\Theta_m(s)$, $\Theta(s)$ については以下のような要素をもつ構造とする.

$$[P(s, \rho)]_{ij} := p_{ij}(s) \quad (4.8)$$

$$[P_m(s, \rho)]_{ij} := p_{m_{ij}}(s) \quad (4.9)$$

$$[C(s)]_{ij} := c_{ij}(s) \quad (4.10)$$

$$\Theta(s) := \text{diag}[e^{-\theta_i s}] \quad (4.11)$$

$$\Theta_m(s) := \text{diag}[e^{-\theta_{m_i} s}] \quad (4.12)$$

ただし, $p_{ij}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $p_{m_{ij}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $c_{ij}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. $e^{-\theta_i s}$, $e^{-\theta_{m_i} s}$ はむだ時間要素伝達関数. θ_i , θ_{m_i} はむだ時間を表す正の実数, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ である.

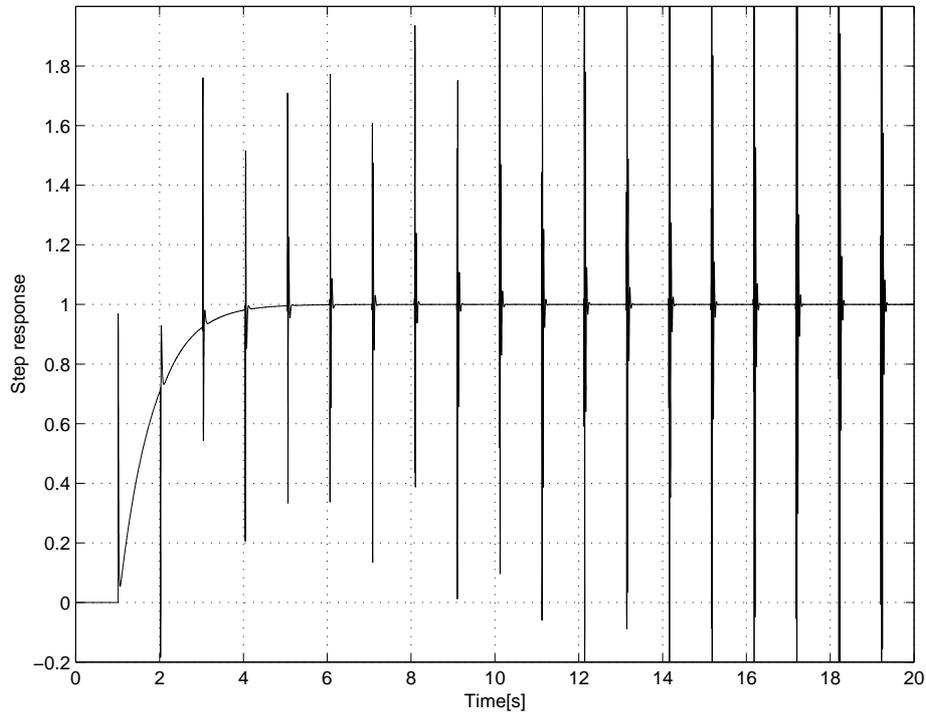


図 4.2: $u=0.01$ の場合のシステム

4.4 不確かさ

より実際的な状況において、制御対象とモデルの間には不確かさが存在する．とくに、モデル化が難しい制御対象のむだ時間要素とそのモデルの間には、不確かさが含まれやすく、また、そこに存在する不確かさはむだ時間システムの実用安定性において一番重要な要素であると考えられる．なぜならば、システムに対する不確かさの影響が周波数にそって、指数関数的に増大するからである．

よって、本研究では、むだ時間要素伝達関数行列にのみ不確かさが含まれる場合について考察を行う．本節では、前節で定義した、MIMO のスミス制御系の伝達関数行列の定義を用い、その閉ループ系に存在するむだ時間要素のモデルに含まれる不確かさを考慮して、再度、MIMO のスミス法のブロック線図を捉え直す．

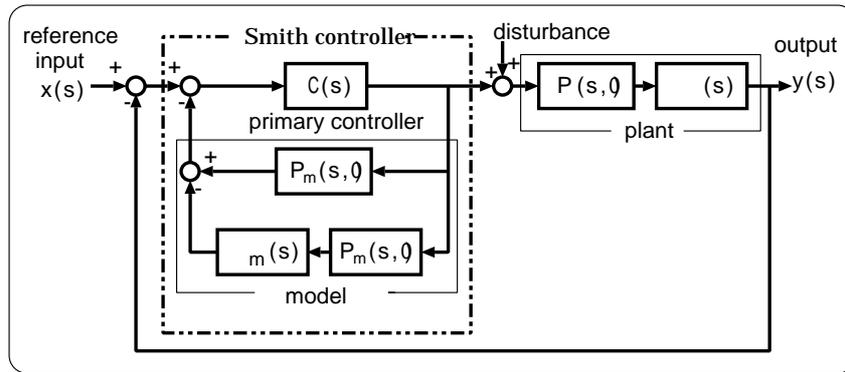


図 4.3: MIMO Smith method for decomposition plants.

4.4.1 スミス法のブロック線図

前節で定義した伝達関数行列を用いて，微小な不確かさが制御対象のむだ時間要素伝達関数とそのモデルの間に，存在すると仮定する．

仮定 4.1

$$\exists V, \forall \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

■

この仮定に対して，MIMO のスミス法のブロック線図の等価変換を行う．その結果，図 (3.2) は以下のようなブロック線図となる．ここで， $W(s)$ から $Z(s)$ までの伝達関数行

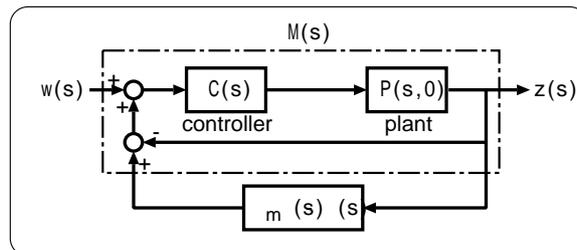


図 4.4: Uncertainty-Nominal loop for Smith method.

列は以下ようになる．

$$Z(s) = M(s)W(s) \quad (4.14)$$

$$M(s) := P(s, 0)[1 + C(s)P(s, 0)]^{-1}C(s) \quad (4.15)$$

ただし， $C(s)$ に関して，以下のような仮定を行う．

仮定 4.2 $C(s)$ は

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{C}(s)\mathbf{P}(s, 0)) \neq 0, \quad s \in \bar{\mathcal{C}}_+(R) \quad (4.16)$$

を満たすように設計されたとする。 ■

(4.16) 式は不確かさが含まれない時のスミス制御系の特性方程式と一致する。

以上の仮定より、むだ時間要素にのみ不確かさを含むスミス制御系の特性方程式は、

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)(\boldsymbol{\Theta}_m(s) - \boldsymbol{\Theta}(s))) = 0 \quad (4.17)$$

となる。(4.17) 式の $\boldsymbol{\Theta}_m(s) - \boldsymbol{\Theta}(s)$ によって実用安定性が特徴づけられ、問題の多変数性の本質は $M(s)$ によって定まる。

4.5 むだ時間システムの実用安定性

ここまで定義を用いて、本節ではむだ時間要素にのみ不確かさを含む MIMO のスミス制御系の実用安定性を定義する。

定義 4.4 [15][19] MIMO のスミス制御系が実用安定であるとは、

$$\begin{aligned} \exists R > 0, \exists V > 0, \forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+(R) \cup \{\infty\}, \forall \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V, i = 1, \dots, n, \\ \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)(\boldsymbol{\Theta}(s)_m - \boldsymbol{\Theta}(s))) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

が成立することである。 ■

この定義を満たす、MIMO のスミス制御系の必要十分条件を示すことが、主題となる。

注釈 4.1 実用安定はプラントの微小な不確かさのみを考慮しているがゆえに、通常のリバースト安定より弱い概念となる。しかしながら、実用安定は特別な場合のリバースト安定に必要となる。

注釈 4.2 *feng* の実用安定性の定義は、制御対象の誤差も含んでいるため、本研究の定義より一般的である。

第 5 章

スミス制御系の実用安定定理

この章で、本研究における主要な結果を示す。不確かさがむだ時間要素伝達関数行列にのみ存在する時の、MIMO のスミス制御系における実用安定性に対する必要十分条件を示す。

5.1 定理

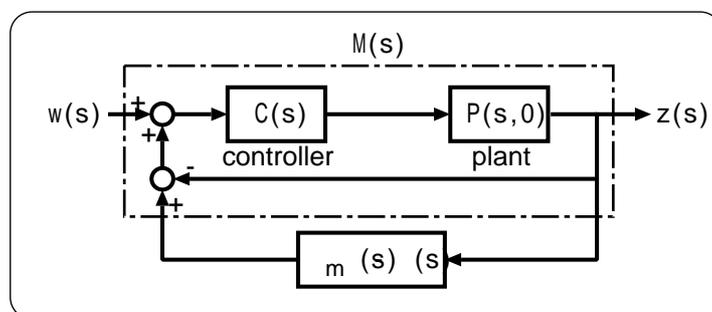


図 5.1: Uncertainty-Nominal loop for Smith method.

定理 5.1 図 5.1 の MIMO のスミス制御系が実用安定であるとは、

$$\exists \Omega > 0, \forall \omega > \Omega, \mu_{\Delta}(M(j\omega)) < \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

が成立することである。ただし、 μ は構造化特異値、 $M(s)$ は $M(s) := P(s, 0)[1 + C(s)P(s, 0)]^{-1}C(s)$ である。不確かさのブロック構造は $\Delta = \{\Delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_n] : \delta_i \in \mathcal{C}\}$ ■

5.2 準備

この定理を導くために以下のような複素平面上のある領域の記法を与える .

$$\exists R > 0, \exists \Omega > 0$$

$$\mathcal{C}_o(\Omega, R) := \{s \in \mathcal{C} : |\operatorname{Im} s| > \Omega, |\operatorname{Re} s| > R\} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{C}_i(\Omega, R) := \{s \in \mathcal{C} : |\operatorname{Im} s| \leq \Omega, |\operatorname{Re} s| \leq R\} \quad (5.3)$$

(5.2) 式を図で表すと図 5.2 のようになり , (5.3) 式を図で表すと図 5.3 のようになる .

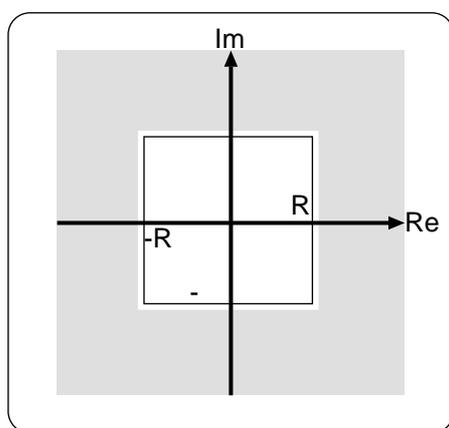


図 5.2: location of the zeros of (5.2) equation.

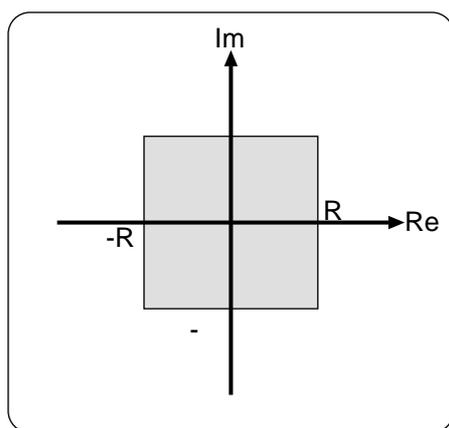


図 5.3: location of the zeros of (5.3) equation.

また , 図 5.1 の $M(s)$ について μ の値を

$$\exists R > 0, \forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+(R) \cup \{\infty\}, \mu_{\Delta}(M(s)) \leq k < \infty \quad (5.4)$$

前提として定理を示す．この前提は， $M(s)$ の安定性の仮定よりあきらかである．

また，不確かさの構造のクラスを $\Delta = \{\Delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_n] : \delta_i \in \mathcal{C}\}$ と定義する．

以上を定義した上で，MIMO のスミス制御系においてのむだ時間要素を構造化された不確かさとなる閉ループ系の実用安定性を導く．

5.3 証明

proof:necessity(\implies) 定理の必要性の対偶の

$$\forall \Omega > 0, \exists \omega > \Omega, \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \geq \frac{1}{2} \quad (5.5)$$

$$\implies \forall R > 0, \forall V > 0, \exists s \in \bar{\mathcal{C}}_+(R) \cup \{\infty\}, \exists \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V,$$

$$\det(\mathbf{I} - M(s)(\Theta(s)_m - \Theta(s))) = 0 \quad (5.6)$$

を示す．このために次を示す．

$$\forall \Omega > 0, \exists \omega > \Omega, \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \geq \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

$$\implies \forall V > 0, \exists \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V,$$

$$\exists \omega \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}, \det(\mathbf{I} - M(j\omega)(\Theta_m(j\omega) - \Theta(j\omega))) = 0 \quad (5.8)$$

すなわち (5.6) 式を満たす s を虚軸上に示す．上の命題は μ の定義より，

$$\forall \Omega > 0, \exists \omega > \Omega, \exists \Delta \in \Delta, \bar{\sigma}(\Delta) < 2, \det(\mathbf{I} - M(j\omega)\Delta) = 0 \quad (5.9)$$

$$\implies \forall V > 0, \exists \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V,$$

$$\exists \omega \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}, \det(\mathbf{I} - M(j\omega)(\Theta(j\omega)_m - \Theta(j\omega))) = 0 \quad (5.10)$$

と等しい．よって，(5.9) 式を満たす $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_n]$ ， $|\delta_i| < 2$ をもとに， $\forall V > 0$ に対して， $\exists \omega$ ， $\exists \theta_i$ ， $i = 1, \dots, n$ で

$$|\theta_{m_i} - \theta_i| < V \quad (5.11)$$

$$e^{-j\theta_{m_i}\omega} - e^{-j\theta_i\omega} = \delta_i \quad (5.12)$$

を満たすものを見付ければ良い．このような ω ， θ_i は (5.10) 式を満たす．ここで，

$\theta_i = \theta_{m_i} + \lambda_i$ とすれば，(5.11)(5.12) 式は

$$|\lambda_i| < V \quad (5.13)$$

$$e^{-j\theta_{m_i}\omega} - e^{-j(\theta_{m_i} + \lambda_i)\omega} = \delta_i \quad (5.14)$$

と等価になるから，これらを示せば良い．まずは， $\delta_i = 2p_i e^{jq_i}$ ， $0 \leq p_i < 1$ とおく．(ただし， p_i, q_i は実数である．) これより，

$$\begin{aligned} -e^{-\theta_{m_i} j \omega} (e^{-j \lambda_i \omega} - 1) &= 2p_i e^{jq_i} \\ e^{-j \lambda_i \omega} - 1 &= -2p_i e^{j(\theta_{m_i} \omega + q_i)} \\ \cos(\lambda_i \omega) - 1 - j \sin(\lambda_i \omega) &= -2p_i (\cos(\theta_{m_i} \omega + q_i) + j \sin(\theta_{m_i} \omega + q_i)) \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{cases} \cos(\lambda_i \omega) = -2p_i \cos(\theta_{m_i} \omega + q_i) + 1 \\ \sin(\lambda_i \omega) = -2p_i \sin(\theta_{m_i} \omega + q_i) \end{cases} \quad (5.15)$$

となる．ここで $z = \theta_{m_i} \omega + q_i$ とおけば上式は次のようになる．

$$\begin{cases} \cos(\lambda_i \omega) = -2p_i \cos(z) + 1 \\ \sin(\lambda_i \omega) = -2p_i \sin(z) \end{cases} \quad (5.16)$$

そして， z について整理する．

$$\begin{aligned} 1 &= 4p_i^2 \cos^2 z - 4p_i \cos z + 1 + 4p_i^2 \sin^2 z \\ 1 &= 4p_i^2 - 4p_i \cos z + 1 \\ 4p_i(p_i - \cos z) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

(5.17) 式を満たすためには，

$$\cos z = p_i \quad (5.18)$$

となれば十分である．そして， $z = \theta_{m_i} \omega + q_i$ だから，(5.18) 式を満たす ω は

$$\begin{aligned} \theta_{m_i} \omega + q_i &= \cos^{-1}(p_i) + 2\pi n, \quad n: \text{任意の整数} \\ &\left(0 \leq p_i < 1 \text{ より } 0 < \cos^{-1}(p_i) \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

となり， ω は

$$\omega = \theta_{m_i}^{-1} \{ \cos^{-1}(p_i) + 2\pi n - q_i \} \quad (5.20)$$

となる．次は， λ_i について解く．(5.18) 式を (5.16) 式に代入して，

$$\cos(\lambda_i \omega) = 1 - 2p_i^2, \quad (|1 - 2p_i^2| < 1 \text{ である}) \quad (5.21)$$

$$\lambda_i \omega = \cos^{-1}(1 - 2p_i^2) \quad (5.22)$$

ω は, (5.18) 式より,

$$\lambda_i = \frac{\cos^{-1}(1 - 2p_i^2)}{\theta_{m_i}^{-1}\{\cos^{-1}(p_i) + 2\pi n - q_i\}}$$

となる. よって n を

$$\left| \frac{\cos^{-1}(1 - 2p_i^2)}{\theta_{m_i}^{-1}\{\cos^{-1}(p_i) + 2\pi n - q_i\}} \right| < V \quad (5.23)$$

となるように十分大きくとればよい. 次に十分条件を考える.

proof:sufficiency(\implies) まず, 仮定 (5.1) 式より,

$$\begin{aligned} & \exists \Omega > 0, \exists R > 0, \forall s \in \mathcal{C}_o(\Omega, R) \cup \{\infty\} \text{ について,} \\ & \mu_{\Delta}(M(s)) \leq \frac{1}{2} - \frac{\eta}{2} < \frac{1}{2}, 0 < \exists \eta < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

である. つまり, (5.24) 式は図 5.4 の領域である.

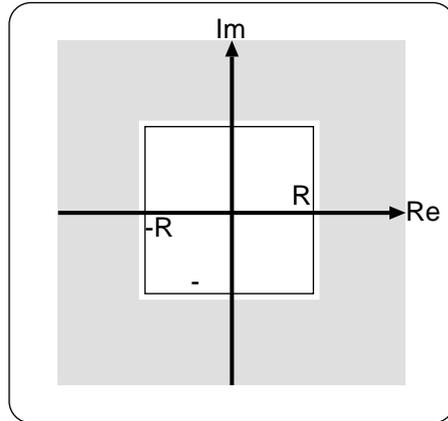


図 5.4: location of the zeros of (5.24) equation.

一方,

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}} \bar{\sigma}(\Theta_m(j\omega) - \Theta(j\omega)) \leq 2 \quad (5.25)$$

となり, $\Theta_m(j\omega) - \Theta(j\omega)$ が安定であるから, なるある $R_0 > 0$ が存在して,

$$\sup_{s \in \bar{\mathcal{C}}_+(R_0) \cup \{\infty\}} \bar{\sigma}(\Theta_m(s) - \Theta(s)) \leq \frac{4}{2 - \eta} < \frac{2}{1 - \eta} \quad (5.26)$$

とできる. (5.26) 式は図 5.5 の領域である.

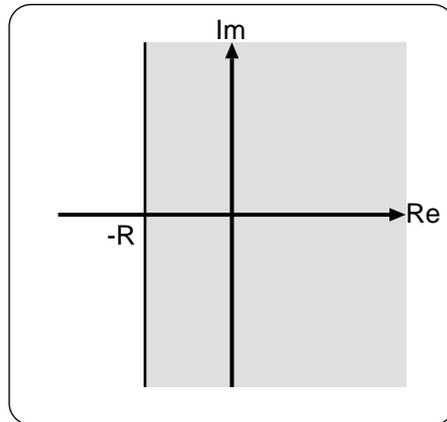


図 5.5: location of the zeros of (5.26)equation.

以上より,

$$\forall s \in (\bar{\mathcal{C}}_+(R_0) \cup \{\infty\}) \cap (\mathcal{C}_o(\Omega, R) \cup \{\infty\}),$$

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)(\Theta_m(s) - \Theta(s))) \neq 0 \quad (5.27)$$

が成立する. よって, 図 5.6の斜線の領域は MIMO のスミス制御系の零点が存在しない.

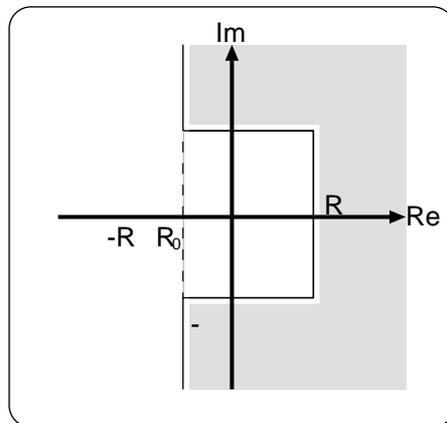


図 5.6: location of the zeros of (5.27)equation.

次に, 図 5.6の領域における零点について示す. $0 \leq \forall \omega < \Omega, \forall \theta_i : |\theta_{m_i} - \theta_i| < V,$
 $-R_1 \leq \forall r \leq R$ に対して

$$\bar{\sigma}(\Theta_m(r + j\omega) - \Theta(r + j\omega)) < \frac{1}{k} \quad (5.28)$$

となる $R_1 > 0, V > 0$ を見付ければ良い. ここで,

$$\theta_i = \theta_{m_i} + \lambda_i, |\lambda_i| < V, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.29)$$

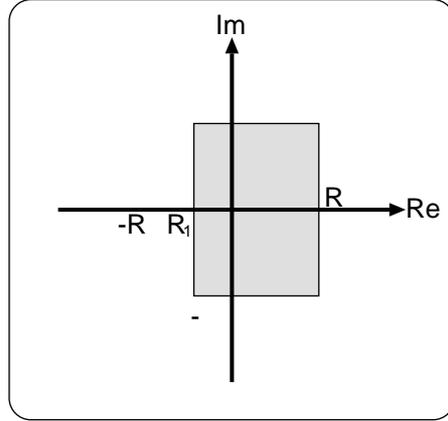


図 5.7: location of the zeros in a low frequency.

と記すと , (5.28) 式の右辺は

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}(\Theta_m(r+j\omega) - \Theta(r+j\omega)) &= \max_i |e^{-\theta_{m_i}(r+j\omega)} - e^{-\theta_i(r+j\omega)}| \\
 &= \max_i |e^{-\theta_{m_i}(r+j\omega)} - e^{-(\theta_{m_i}+\lambda_i)(r+j\omega)}| \\
 &= \max_i \{ |e^{-\theta_{m_i}(r+j\omega)}| |1 - e^{-\lambda_i(r+j\omega)}| \}
 \end{aligned}$$

となり , そして , $i = 1, \dots, n$ について

$$\begin{aligned}
 |e^{-\theta_{m_i}(r+j\omega)}| |1 - e^{-\lambda_i(r+j\omega)}| &= |e^{-\theta_{m_i}r}| |1 - e^{-\lambda_i(r+j\omega)}| , \quad (|e^{-j\theta_{m_i}\omega}| = 1 \text{ より}) \\
 &= |e^{-\theta_{m_i}r}| |e^{j\lambda_i\omega} - e^{-\lambda_i r}| , \quad (|e^{j\lambda_i\omega}| = 1 \text{ より}) \\
 &= |e^{-\theta_{m_i}r}| |1 - e^{-\lambda_i r} + e^{j\lambda_i\omega} - 1| \\
 &\leq |e^{-\theta_{m_i}r}| (|1 - e^{-\lambda_i r}| + |e^{j\lambda_i\omega} - 1|) \\
 &= e^{-\theta_{m_i}r} (|1 - e^{-\lambda_i r}| + |e^{j\lambda_i\omega} - 1|) \\
 &= e^{-\theta_{m_i}r} (|1 - e^{-\lambda_i r} - 1| + |1 - e^{-j\lambda_i\omega}|) , \quad (5.30) \\
 &\quad (|e^{j\lambda_i\omega}| = 1 \text{ より})
 \end{aligned}$$

となる .

$$\zeta = \min \left(\frac{1}{4k}, 1 \right) \leq 1 \quad (5.31)$$

となる正数 ζ を考える . この ζ は ,

- $\frac{1}{4k} \leq 1$ のとき

$$2\zeta(1 + \zeta) = 2(\zeta + \zeta^2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

• $\frac{1}{4k} \geq 1$ のとき

$$2\zeta(1 + \zeta) = 4 \leq \frac{1}{k} \tag{5.33}$$

となる . よって ,

$$2\zeta(1 + \zeta) \leq \frac{1}{k} \tag{5.34}$$

となるから , この ζ が $i = 1, \dots, n$ に対して ,

$$e^{-\theta_{m_i} r} < 1 + \zeta \tag{5.35}$$

$$|1 - e^{-\lambda_i r}| < \zeta \tag{5.36}$$

$$|1 - e^{-j\lambda_i \omega}| < \zeta \tag{5.37}$$

となれば

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(\Theta_m(r + j\omega) - \Theta(r + j\omega)) &\leq \max_i \{ e^{-\theta_{m_i} r} (|1 - e^{-\lambda_i r} - 1| + |1 - e^{-j\lambda_i \omega}|) \} \\
&< 2\zeta(1 + \zeta) \\
&< \frac{1}{k}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

となるので , (5.28) 式を満たす $R_1 > 0$, $V > 0$ が示される .

よって , (5.35) 式について

$$\begin{aligned}
e^{-\theta_{m_i} r} &< 1 + \zeta \\
e^{\theta_{m_i} r} &> \frac{1}{1 + \zeta} \\
\theta_{m_i} r &> \log \frac{1}{1 + \zeta} = -\log(1 + \zeta) \\
r &> -\frac{1}{\theta_{m_i}} \log(1 + \zeta)
\end{aligned}$$

したがって ,

$$0 < R_1 < \frac{1}{\theta_{m_i}} \log(1 + \zeta) \quad (5.39)$$

とすればよい . 一般性を失わずに $R_1 < R$ に選んでおく . 次に , (5.36) 式について .

$$\begin{aligned} |1 - e^{-\lambda_i r}| &< \zeta \\ -\zeta &< 1 - e^{-\lambda_i r} < \zeta \\ -1 - \zeta &< -e^{-\lambda_i r} < -1 + \zeta, (1 - \zeta \geq 0) \\ 1 - \zeta &< e^{-\lambda_i r} < 1 + \zeta \\ \log(1 - \zeta) &< -\lambda_i r < \log(1 + \zeta) \\ -\log(1 + \zeta) &< \lambda_i r < -\log(1 - \zeta) \end{aligned} \quad (5.40)$$

ここで , $R > R_1$ だから ,

$$\begin{aligned} -\log(1 + \zeta) &< -VR, \quad VR < -\log(1 - \zeta) \\ \log(1 + \zeta) &> VR, \quad VR < -\log(1 - \zeta) \end{aligned}$$

を満たすと $-VR < -VR_1 < \lambda_i r < VR$ より , (5.40) 式が成立する

$$VR < \min\{\log(1 + \zeta), -\log(1 - \zeta)\}, \quad (-\log(1 - \zeta) = +\infty \text{ のこと}) \quad (5.41)$$

となれば (5.36) 式が満たされる . そして , 最後に (5.37) は ,

$$\begin{aligned} |1 - e^{-j\lambda_i \omega}| &< \zeta \\ |1 - \cos(\lambda_i \omega) + j \sin(\lambda_i \omega)| &< \zeta \\ (1 - \cos(\lambda_i \omega))^2 + \sin^2(\lambda_i \omega) &< \zeta^2 \\ 1 - 2 \cos(\lambda_i \omega) + 1 &< \zeta^2 \\ \cos(\lambda_i \omega) &> 1 - \frac{\zeta^2}{2} \\ 0 \leq |\lambda_i \omega| &< \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right) \\ 0 \leq |\lambda_i| |\omega| &< \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\left(0 < \zeta < 1 \text{ より } 0 < \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(5.42) 式が, $0 \leq \forall \omega < \Omega$ について, 成立するためには

$$0 \leq |\lambda_i| \Omega < \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right)$$

で十分である. よって,

$$|\lambda_i| < \frac{1}{\Omega} \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right)$$

となる. したがって,

$$V = \frac{1}{\Omega} \cos^{-1} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right) \quad (5.43)$$

とする. よって, (5.39) 式, (5.41) 式, (5.43) 式より (5.38) 式が満たされ (5.28) 式は成立する. 以上より, 定理は成立する. \square

注釈 5.1 上記の証明によって実用安定性が導出されたわけであるが, 証明の途中で $\theta_{m_i} = 0$ になると証明に支障を来すところがある. しかしながら, 本研究の対象がむだ時間システムであるから θ_{m_i} は 0 にならないのは妥当である.

注釈 5.2 上記の定理は, *Palomr* ら [15] の結果と違い, *MIMO* のスミス制御系のノミナルの行列の要素の大きさを計るのではなく, *MIMO* のスミス制御系のノミナル部分を構造化特異値を用いて計ることで, *MIMO* のスミス制御系の実用安定性が求まる. また, *Palmor* ら [15] の定理は必要条件である.

注釈 5.3 *Feng*[19] の結果は, 同じく構造化特異値を用いて, 導出している. また, 十分条件ではあるが, *Feng*[19] 不確かさの定義はより, 一般的であり, 制御対象の誤差も含めて定理を導出している.

第 6 章

数値例

この章では，前章で導いた定理を用いて，MIMO のスミス制御系の簡単なシュミレーションを行い，本研究の裏付けを行う．そのツールとして，matlab と simulink を使用した．

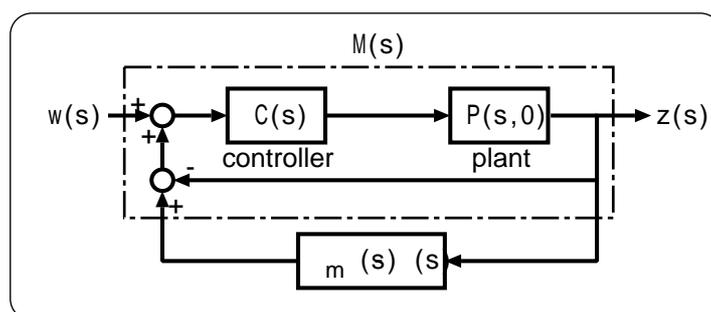


図 6.1: Uncertainty-Nominal loop for Smith method.

まずは，図 6.1 の $M(s)$ を以下のようにおく．

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{2.05s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+4} & \frac{s+1}{2.1s+1} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

次に，不確かさを含むむだ時間伝達関数要素の部分 $\Theta_m(s) - \Theta(s)$ を

$$\Theta_m(s) - \Theta(s) = \begin{bmatrix} e^{-s} - e^{-(1+\delta_1)s} & 0 \\ 0 & e^{-s} - e^{-(1+\delta_2)s} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

とする．今回は， δ_1, δ_2 を不確かさを表すパラメータとする．ただし，共に正数となる十分小さいパラメータである．図 6.2 より，

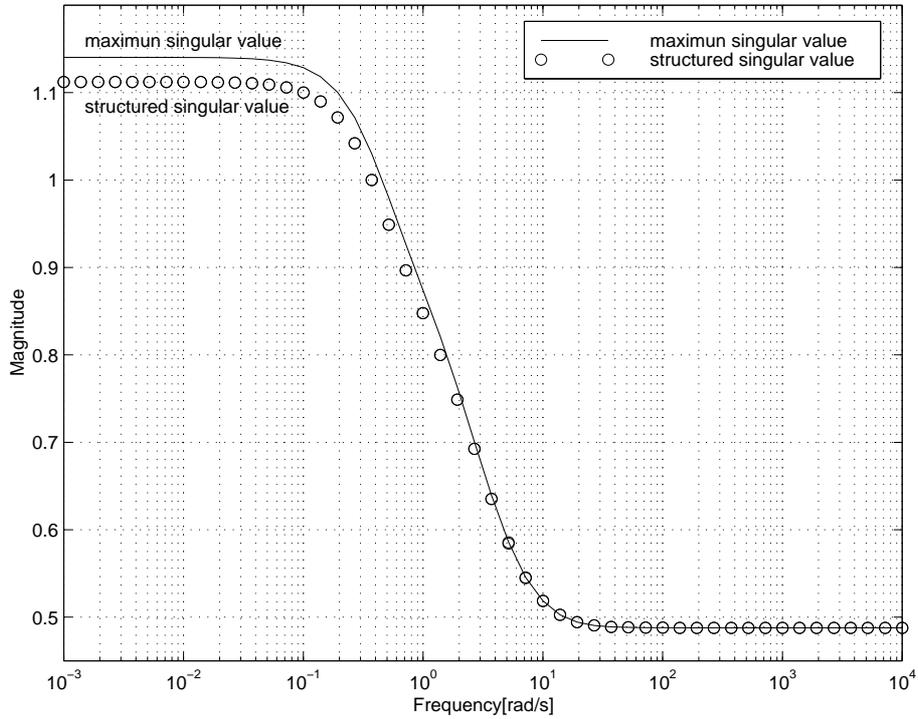


図 6.2: $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ and $\bar{\sigma}(M(j\omega))$.

$$\mu_{\Delta}(M(j\omega)) \rightarrow 0.4878 < \frac{1}{2}, \quad \omega \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

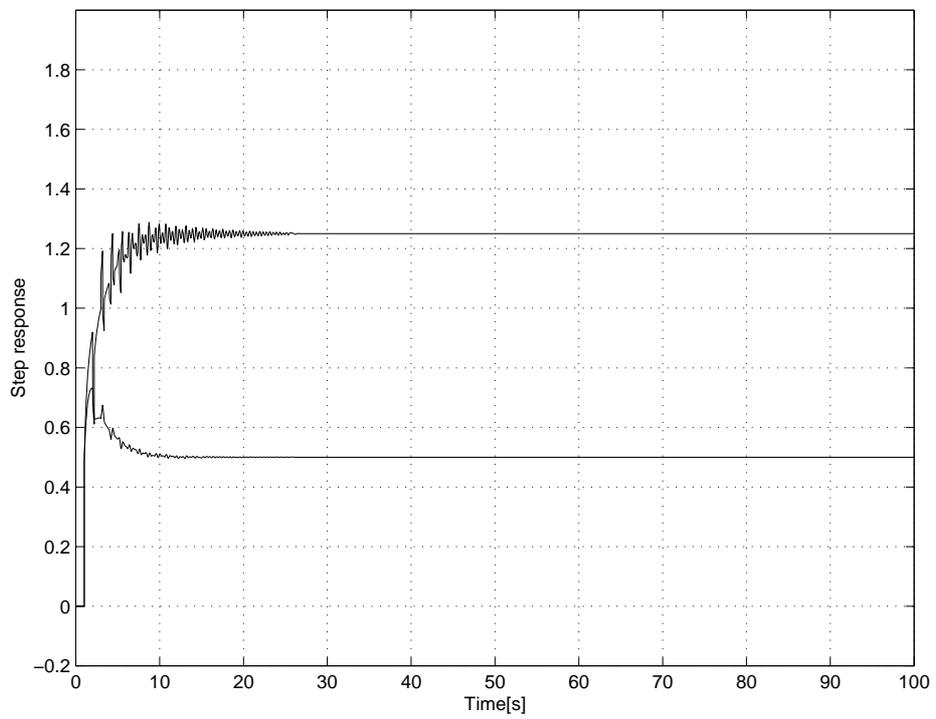
となるから，不確かさ $\delta_1 = 0.01$ ， $\delta_2 = 0.2$ が存在しても，単位ステップ入力の出力は以下の図 6.3 のようになり，閉ループ系は安定となる．次に， $M(s)$ を以下のようにする．

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{2.05s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+4} & \frac{s+1}{1.85s+1} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

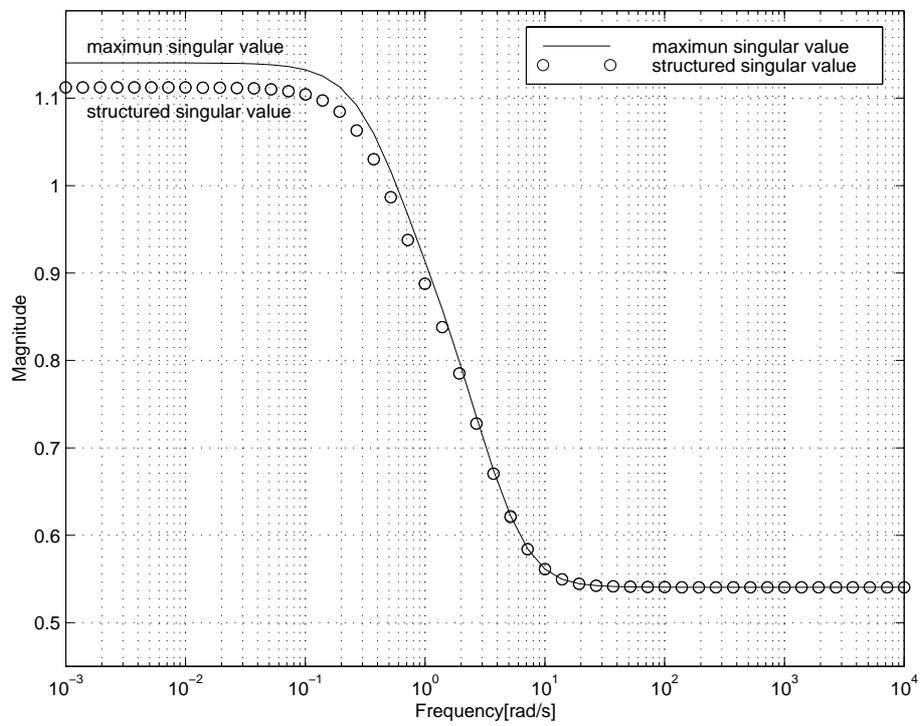
次に，不確かさを含むむだ時間伝達関数要素の部分 $\Theta_m(s) - \Theta(s)$ は先程と同様であるが，図 6.4 より，

$$\mu_{\Delta}(M(j\omega)) \rightarrow 0.5405 > \frac{1}{2}, \quad \omega \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

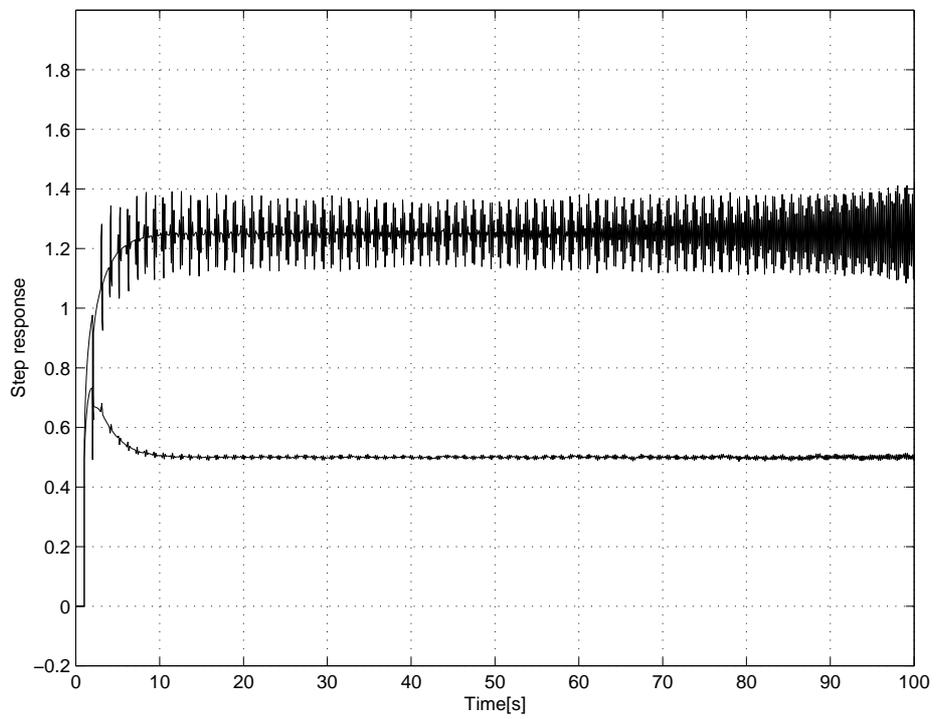
となり，これは，前節の定理を満たさないから，不確かさ $\delta_1 = 0.00535$ ， $\delta_2 = 0.107$ の存在によって出力は，図 6.5 のようになり，閉ループ系は不安定となる．先程と同様に，入力 は単位ステップ入力である．



⊠ 6.3: step response.



⊠ 6.4: $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ and $\bar{\sigma}(M(j\omega))$.



⊠ 6.5: step response.

第 7 章

まとめ

7.1 本研究のまとめ

本研究では，以下に示すことを行った．

制御対象のむだ時間要素伝達関数行列とそのモデルの間に存在する微小な不確かさを含む，むだ時間システムが不安定になる原因を研究した．そして，実用安定性の従来研究では行われていない，MIMO の構造で実用安定性を定義し，微小な不確かさを含む，むだ時間システムの安定を保つための必要十分条件を導いた．

さらに，実用安定性は高周波数域における不確かさに依存することを導出した．また，数値例を示した．

7.2 以後の課題

本研究は Palmor と Halevi[15] らや Feng[19] の MIMO の構造を異なるものとしているが，今回の研究で用いた実用安定性の定義に関しては，両者と同様の定義でのみの実用安定性の考察しか行えなかった．

また，実用安定性のみの議論に終止した．制御則の導出も残っている．

むだ時間が対角にしかない場合についての必要十分条件をもとめたわけであるが，むだ時間要素が対角でない場合のシステムに対して，実用安定性を考えることも，重要であると考えられる．

また，むだ時間要素以外の伝達要素に不確かさが含まれる場合の実用安定性に関する条

件を考察したい。

 実用安定性では不確かさの大きさを考えていないが，このことについても，考えてみたい。

参考文献

- [1] 示村, “ むだ時間を含む系の最適問題 ”, 計測と制御, vol . 8 , no . 8 , pp . 526-536 , 1969 .
- [2] 示村, 山中, “ むだ時間を含むシステムの諸問題 ”, 計測と制御, vol . 19 , no . 11 , pp . 1051-1056 , 1980 .
- [3] 示村, “ 混合パラメータシステムの制御理論 ”, 計測と制御, vol . 26 , no . 10 , pp . 880-886 , 1987 .
- [4] システム制御学会編, “ むだ時間システムについて ”, システムと制御, vol . 28 , no . 5 , 1984 .
- [5] 渡部, むだ時間システムの制御, 計測自動制御学会, コロナ社, 1993 .
- [6] 伊藤, 自動制御概論, 昭晃堂, 1983 .
- [7] 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック, 基礎編, pp . 763-764 , 1983 .
- [8] 美多, \mathcal{H}_∞ 制御, 昭晃堂, 1994 .
- [9] 細江, 荒木(偏), 佐伯, 藤田, 他(著), 制御系設計- \mathcal{H}_∞ 制御とその応用-, システム制御情報学会, 朝倉書店, 1994 .
- [10] 前田, 杉江, アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報学会, 朝倉書店, 1990 .
- [11] 示村, 線形システム解析入門, コロナ社, 1987 .
- [12] 示村, 自動制御とは何か, コロナ社, 1990 .

- [13] , 児玉, 須田, システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, コロナ社, 1978 .
- [14] Z . Palmor , “ Stability properties of smith dead-time compensator controllers ”, *Int . J . Control* , vol . 32 , no . 6 , pp . 937-949 , 1980 .
- [15] Z . J . Palmor and Y . Halevi , “ On the design and properties of multivariable dead time compensators ”, *Automatica* , vol . 19 , no . 3 , pp . 255-264 , 1983 .
- [16] O . J . M . Smith , “ A controller to overcome dead time ”, *ISA J .* , vol . 6 , no . 2 , pp . 28-33 , 1959 .
- [17] O . J . M . Smith , “ Closed control of loops with dead time ”, *Chem . Engng . Prog .* , vol . 53 , no . 5 , pp . 217-219 , 1957 .
- [18] K . Yamanaka and E . Shimemura , “ Effects of mismatched Smith controller on stability in systems with time-delay ”, *Automatica* , vol . 23 , no . 6 , pp . 787-791 , 1987 .
- [19] Weng Feng , “ On practical stability of linear multivariable feedback systems with time-delay ”, *Automatica* , vol . 27 , no . 2 , pp . 389-394 , 1991 .
- [20] G . Alevisakis and D . E . Seborg , “ An extension of the Smith Predictor method to multivariable linear systems containing time delays ”, *Int . J . Control* , vol . 25 , no . 3 , pp . 543-551 , 1973 .
- [21] A . L . Tits and K . H . Fan , “ On the Small- μ Theorem ”, *Automatica* , vol . 31 , no . 8 , pp . 1199-1201 , 1995 .
- [22] A . Packard and J . C . Doyle , “ The Complex Structured Singular Value ”, *Automatica* , vol . 29 , no . 1 , pp . 71-109 , 1993 .
- [23] J . C . Doyle , B . A . Francis and A . Tannenbaum , *Feedback Control Theory* , Macmillan Publishing Company , 1992 (藤井 (監訳) , フィードバック制御の理論 , コロナ社 , 1996)
- [24] G . J . Balas , J . C . Doyle , K . Glover , A . Packard and R . Smith , *μ -Analysis and Synthesis Toolbox* , MUSYN Inc . , 1995 .

- [25] S . Skogestad and I . Postlethwaite , *Multivariable FeedBack Control: Analysis and Design* , John Wiley & Sons , 1996 .
- [26] K . Zhou . and J . C . Doyle and K . Glover , *Robust and Optimal Control* , Prentice Hall , 1995 .
- [27] K . Zhou . and J . C . Doyle , *Essentials of Robust Control* , Prentice Hall , 1998 .
- [28] R . Bellman . and K . L . Cooke , *Differential-Difference Equations* , Academic Press , 1963 .