Title	構成的数学における距離空間の連結性に関する研究
Author(s)	吉田，聡
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1161
Rights	
Description	Supervisor:石原 哉，情報科学研究科，修士

構成的数学における距離空間の連結性に関する研究

吉田 聡

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1997 年 2 月 13 日

キーワード： BHK-解釈、可算選択公理、連続、点列連続、連結、C-連結、強連結 .

距離空間の連結性は互いに素な開 (閉) 部分集合の和集合として表されることはないような集合についての概念であり, 例えば, 複素平面上で定義される微分可能関数や積分可能関数はそのような集合を定義域とすることから, それは複素解析学等の基礎として重要な概念である。

本研究では, 距離空間 (metric space) の連結性について３通りの定義を行い, それぞれの定義における連結な空間の性質とそれぞれの定義の関係の考察を構成的数学の立場で行った。以下では, まず構成的数学を説明し, 距離空間を定義した後, 距離空間の連結性についての述べる。

構成的数学は通常の数学が古典論理によって形式化されるに対し直観主義論理 (参照：[4]) によって形式化される数学である. 実際の特徴は次のような BHK(Brouwer-Heyting-Kolmogorov)-解釈と呼ばれる論理演算子の解釈に見ることができる (詳しくは [3], [4] を参照).

- $A \wedge B$の証明は, A の証明と B の証明を与えることである.
- $A \vee B$の証明は, A の証明か Bの証明を与えることである.
- $A \Rightarrow B$の証明は, A の証明から Bの証明への変換を与えることである.
- $\neg A$ の証明は, A の証明が与えられたとして矛盾を導くことである.
- $\forall x A(x)$ の証明は, 任意に与えられた d から $A(d)$ の証明を構成することである.
- $\exists x B(x)$ の証明は, d の構成と $A(d)$ の証明を与えることである.

この解釈は通常の数学における解釈よりも制限されたものである. 実際, 通常の数学において $A \vee B$ の証明は $\neg A \wedge \neg B$ から矛盾を導くことでも十分であるが, 構成的数学では, 上記の解釈から少なくとも A もしくは B のいずれか一方の証明を与えなくてならない. また, 通常の数学では $\exists x A(x)$ の証明は $\forall x \neg A(x)$ から矛盾を導くことでも十分であるが, 構成的数学では $A(d)$ を満たす d を明示しなくてはならない. つまり, 構成的数学は変換や手続き等に対してアルゴリズム的なものとそうでないもの, 特に存在について計算可能なものとそうでないものに対す区別を明確に与えるものであると言える.

さて, この解釈の下では証明を与えることができない, すなわち構成的数学では成立しないが、しかし, 通常の数学では成立する命題が存在する. 例えば, 排中律 (the Principle of Excluded Middle) $A \vee \neg A$ について, BHK-解釈の下では未解決問題 A に対しては A の証明も $\neg A$ の証明も与えることはできないため, $A \vee \neg A$ は構成的数学では成立しない. そして, 通常の数学で認められている選択公理 (Axiom of choice)

$$\forall S \subset A \times B[\forall x \in A \exists y \in B((x, y) \in S) \Rightarrow \exists f : A \to B \forall x \in A((x, f(x)) \in S)]$$

は排中律を導くことから, 構成的数学ではそれは認められない. しかし, 上記の式における集合 A を自然数の全体から成る集合 $\mathbf{N}$ に制限した可算選択公理 (Axiom of countable choice) は認める.

ところで, 構成的数学には Bishop の構成的数学, Brouwer の直観主義数学そして Markov の構成的数学という３つの代表的な学派が知られている。そのうち, Bishop の構成的数学は BHK-解釈のもとで可算選択公理を認めるというものであり, それに対して, Brouwer 直観主義数学は Bishop の構成的数学に独特の公理を加えた体系と見なすことできる. そして, Markov の構成的数学は Bishop の構成的数学に Church テーゼ (全ての自然数列は計算可能である) と Markov の原理

MP $\forall (\alpha_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}[\neg\neg\exists n(\alpha_n = 1) \Rightarrow \exists n(\alpha_n = 1)]$

を加えた体系と見なすことができる. つまり, 他の構成的数学は Bishop の構成的数学の拡張であり, さらに, 構文論的には通常の数学は Bishop の構成的数学に排中律を加えた体系であることから, 通常の数学も Bishop の構成的数学の拡張である. そして, 他の構成的数学は通常の数学と矛盾するが, 一方, Bishop の構成的数学は無矛盾である (構成的数学やそれらと通常の数学との関係について詳しくは [1], [3], [4]). そのようなことから, 本研究では Bishop の構成的数学の立場での考察を行う. 以降,「構成的数学」とは Bishop の構成的数学を意味する.

さて, 次に挙げる命題も構成的数学では証明が不可能な命題である.

LPO(the Least Principle of Omniscience)

$$\forall (\alpha_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}[\exists n(\alpha_n = 1) \vee \neg\exists n(\alpha_n = 1)].$$

LLPO(the Lesser Principle of Omniscience)

$$\forall (\alpha_n), (\beta_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}[\neg(\exists n(\alpha_n = 1) \wedge \exists n(\beta_n = 1)) \Rightarrow \neg\exists n(\alpha_n = 1) \vee \neg\exists n(\beta_n = 1)].$$

実際, 意味論的にこれらの命題を偽にするモデルをつくることができるから, 直観主義論理に関する健全性により証明が与えられないことが示される (詳しくは [4]). また, MP も同様に証明が与えられない. しかし, 明らかに通常の数学においてこれらは成立する.

構成的数学において与えられた命題が成立しないとは, その命題の否定を証明するか、もしくはその命題を仮定したとき LPO, LLPO, MP 等の命題が導けることをいう.

次に実数を定義する. その前に有理数や有理数の全体からなる集合上の演算や 2 つの有理数の同等性などについては既知のこととする.

有理数列 (a_n) は任意の正の整数 m と n に対して $|a_m - a_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$を満たすとき正規 (regular) であるという. この正規な有理数を実数と呼び, その全体からなる集合を $\mathbf{R}$ と表す.

実数の性質について, 例えば $a < b$ なる任意の 2 つの実数 a と b, そして任意の実数 r に対して, $a < r \vee r < b$ は成立するが, 任意の実数 r と s に対して $r < s \vee r \geq s$ は LPO と同値であることが示される. しかしながら, $\neg(a > b)$ ならば $a \leq b$ は成立する.

次に距離空間を定義する.

集合 Xに対して関数 $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R^{0+}}$が次の条件を満たすとき, (X, d) を距離空間 (metric space) と呼ぶ: $x, y, z \in X$に対して, (1) $d(x, y) = 0$ かつそのときのみ $x = y$, (2) $d(x, y) = d(y, x)$, (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. この d は省略して Xを距離空間と呼ぶこともある.

次に, $B(x, r) := \{y \in X | d(x, y) < r\}$ として定義される $B(x, r)$ を距離空間 (X, d) の点 x における半径 $r(> 0)$ の開球 (open ball) と呼ぶ. そして, $A^i := \{x \in X | \exists r > 0(B(x, r) \subset A)\}$ そして $A^- := \{x \in X | \forall r > 0(B(x, r) \cap A$ は元を持つ$)\}$ として定義される A^i と A^- を それぞれ Xの部分集合 A の開核 (interior), 閉包 (closure) と呼び, $A = A^i$を満たすとき A は距離空間 Xにおける開集合 (open set) であると言い, $A = A^-$を満たすとき A は Xおける閉集合 (closed set) であるという.

次に, 距離空間 Xから距離空間 Yへの写像 fが任意の Xの点 x と 任意の正の実数 ϵ に対してある 正の実数 δ が存在して $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ を満たすとき, fは連続 (continuous) であるという. そして, X上の点列 (x_n) が x に収束する (converge) とは, 任意の正の実数 ϵ に対して ある正の整数 N が存在して $n \geq N$ なる 全ての正の整数 n に対して $d(x_n, x) < \epsilon$ を満たすことであり, このとき, $x_n \rightarrow x$ と表す. さらに, 写像 $f : X \rightarrow Y$ が任意の $x \in X$と任意の X 上の点列 (x_n) に対して $x_n \rightarrow x$ ならば $f(x_n) \rightarrow f(x)$ を満たすとき, fは点列連続 (sequentially continuous) であるという.

このとき, 写像 $f : X \rightarrow Y$について, fは連続 $\Rightarrow$ fは点列連続 $\Rightarrow$ [任意の Yの閉集合 Fに対して $f^{-1}(F)$ は Xの閉集合] $\Rightarrow$ [任意 Xの部分集合 A に対して $f(A^-) \subset f(A)^-$] が示される.

ところで, 構成的数学において距離空間上の連続写像は点列連続であるがその逆は成立

しないことが知られている (参照 [2]).

次に連結な距離空間を定義する.

距離空間 Xの任意の２つの部分集合 Vと Wがそれぞれ元を持つ開集合で $V \cup W = X$を満たすとき $V \cap W$が元を持つならば, Xは連結 (connected) であるという. 距離空間 Xの部分集合 A が連結であるとは部分空間 A が連結であることである.

そして, 距離空間 Xの任意の a と b に対して $f(0) = a$ かつ $f(1) = b$ を満たすような連続写像 $f : [0, 1] \to X$が存在するとき, Xは弧状連結 (path-connected) であるという.

このとき, 連結な距離空間 Xの連続写像 fによる像 $f(X)$ は連結であることが示され, そして, 弧状連結集合は連結であることが示される.

また, 距離空間 Xの任意の２つの部分集合 Vと Wがそれぞれ元もつ閉集合で $V \cup W = X$を満たすとき $V \cap W$が元持つならば, Xを C-連結 (C-connected) であるいい, Yの任意の２つの部分集合 Sと Tがそれぞれ元もつ集合で $S \cup T = Y$を満たすとき $V^- \cap W$もしくは $V \cap W^-$が元もつならば, Yは強連結 (strongly connected) であるという.

このとき, "任意の X'の閉集合 Fに対して $f^{-1}(F)$ は Xの閉集合" を満たす写像 $f : X \to X'$による C-連結な距離空間 Xの像 $f(X)$ は C-連結であることが示され, "任意の Yの部分集合 A に対して $g(A^-) \subset g(A)^-$" を満たす写像 $g : Y \to Y'$による強連結な距離空間 Yの像 $g(Y)$ は強連結であることが示される. そして, 弧状連結な距離空間は C-連結でありかつ強連結であることが示される.

そして, 連結, C-連結, 強連結の関係について, 強連結な距離空間は連結でありかつ C-連結であることが示される.

ところで, 中間値の定理 (the intermediate value theorem) は LLPO を導く. したがって, 構成的数学ではそれは成立しないが, 一方, 後に示すその弱めた形の定理が成立する. ただし, 中間値の定理は次の命題を指す：
Xは連結な距離空間であるとし, $f : X \to \mathbf{R}$ は連続であるとする. そして, a と b を $f(a) < f(a)$ を満たす Xの２点とし, γを $f(a) \le \gamma \le f(b)$ を満たす実数とする. このとき, $f(c) = \gamma$を満たす Xの元 c が存在する.

さて, 以下ことが成立する.

Xは連結な距離空間であるとし, $f : X \to \mathbf{R}$ は連続であるとする. そして, a と b は $f(a) < f(b)$ を満たす Xの２点であるとし, γを $f(x) \le \gamma \le f(y)$ を満たす実数とする. このとき, 任意の正の実数ϵ に対し $|f(c) - \gamma| < \epsilon$ を満たす Xの元 c が存在する.

さらに, C-連結と強連結に関しても同様のことが示される.

Xは C-連結な距離空間であるとし, $f : X \to \mathbf{R}$ は "任意の $\mathbf{R}$ の閉集合 Fに対して $f^{-1}(F)$ は Xの閉集合" を満たすとする. そして, a と b は $f(a) < f(b)$ を満たす Xの２点とし, γは $f(a) \le \gamma \le f(b)$ を満たす実数であるとする. このとき, 任意の正の実数ϵ に対し $|f(c) - \gamma| < \epsilon$ を満たす Xの元 c が存在する.

また, Yは強連結な距離空間であるとし, $g : Y \to \mathbf{R}$ は "任意の Yの部分集合 A に対して $g(A^-) \subset g(A)^-$" を満たすとする. そして, x と yを $g(x) < g(y)$ を満たす Yの２点

とし, ω を $g(x) \leq \omega \leq g(y)$ を満たす実数とする. このとき, 任意の正の実数 ϵ に対して $|g(z) - \omega| < \epsilon$ を満たす Y の元 z が存在する.

これらのことの系として, $a < b$ なる実数 a と b に対して, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ が "任意の X の部分集合 A に対して $f(A^-) \subset f(A)^-$" を満たすとき, $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ を満たす実数γと任意の正の実数 ϵに対して $|f(c) - \gamma| < \epsilon$を満たす $a \leq c \leq b$ なる c が存在することが分かる.

参考文献

[1] D. Bridges and F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, 1987.

[2] H. Ishihara, *Continuity Properties in Constructive Mathematics*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 57 (1992), no. 2, pp. 557-565.

[3] 石原 哉, 構成的数学とその周辺-解析学を中心として-, 日本数学会 1997 年度秋季総合分科会

[4] A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics An Introduction I, II*, North-Holland, Amsterdam, 1988.