

Title	超多自由度マニピュレータの適応制御に関する研究
Author(s)	伊藤, 知規
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1169
Rights	
Description	Supervisor: 示村 悦二郎, 情報科学研究科, 修士

修士論文

超多自由度マニピュレータの適応制御に関する研究

指導教官 示村悦二郎 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

伊藤 知規

1998年2月13日

要旨

本稿では、超多自由度マニピュレータの動力学パラメータの値が未知である状況においても、形状トラッキング制御を達成することのできる制御法として、適応形状トラッキング制御法を提案する。また、この制御則の各リンクに対する再帰的な表現を求め、シミュレーションにより制御則の有効性を検証する。

目次

1	はじめに	1
2	超多自由度マニピュレータの運動学	4
2.1	超多自由度マニピュレータの機械的モデル	4
2.2	超多自由度マニピュレータの関節変位とリンク位置	5
2.2.1	関節変数の定義	6
2.2.2	作業変数の定義	7
2.3	各座標系の設定法	8
2.3.1	リンク座標系の設定法	8
2.3.2	関節座標系の設定法	8
2.4	各座標間の関係	9
2.5	幾何ヤコビ行列と静力学	10
2.5.1	幾何ヤコビ行列	10
2.5.2	マニピュレータのリンク速度間の関係	11
2.5.3	異なる座標系で表した等価な力	13
3	超多自由度マニピュレータの動力学	16
3.1	動力学パラメータ	17
3.2	マニピュレータの運動方程式の導出	19
3.2.1	ラグランジュの運動方程式による定式化	19
3.2.2	ニュートン・オイラーの運動方程式による定式化	23
3.3	リグレッサを用いたダイナミクスの記述	27
3.3.1	ラグランジェの運動方程式に基づいたリグレッサ行列の導出	28

3.3.2	ニュートン・オイラーの運動方程式に基づいたリグレッサ行列の記述	30
4	形状トラッキング制御	33
4.1	目標曲線	34
4.2	形状ヤコビアン	35
4.3	形状トラッキング制御の問題設定	36
4.4	マニピュレータと曲線パラメータ推定器を含んだシステムダイナミクス	36
4.5	逆動力学法に基づいた形状トラッキング制御則	38
4.6	リアプノフ法に基づいた形状トラッキング制御則	39
5	適応形状トラッキング制御	43
5.1	準備	44
5.2	逆動力学法に基づいた適応形状トラッキング制御則	44
5.3	リアプノフ法に基づいた適応形状トラッキング制御則	49
6	制御則の再帰的表現	54
6.1	仮想参照軌跡を含んだリグレッサ行列	55
6.2	制御則の各リンク単位の再帰的表現	57
6.2.1	制御入力の再帰的表現	57
6.2.2	曲線パラメータ推定則の再帰的表現	58
6.2.3	動力学パラメータ推定則	58
7	シミュレーション結果	60
7.1	シミュレーション環境	60
7.2	シミュレーション結果	63
8	まとめ	71

目 次

2.1	超多自由度マニピュレータモデル	5
2.2	第 $i, i - 1$ リンクおよび関節	6
2.3	第 i リンク座標系	9
2.4	第 i 関節座標系	10
2.5	剛体上に固定された座標系	14
3.1	第 i リンクの動力学パラメータ	17
3.2	A forward recursion	23
3.3	A backward recursion	25
3.4	リンク i に作用する力とモーメントのついで	26
4.1	目標曲線	34
7.1	形状誤差	63
7.2	形状誤差の時間微分	64
7.3	マニピュレータへの入力トルク	64
7.4	推定曲線パラメータ	65
7.5	形状誤差	66
7.6	形状誤差の時間微分	67
7.7	マニピュレータへの入力トルク	67
7.8	推定曲線パラメータ	68
7.9	動力学パラメータ誤差	68

表 目 次

7.1	運動学パラメータ	61
7.2	動力学パラメータ	61
7.3	フィードバックゲイン	62

第 1 章

はじめに

現在，ロボットマニピュレータは産業界だけでなく医療や家庭内などの多くの分野でも利用されており，私たちの生活に欠かせないものとなっている．またその作業内容も多岐にわたっており，産業分野における溶接や塗装，建設現場での危険な作業などから医療福祉の分野での老人の介護ロボットや警備ロボットなど，様々な用途で使われている．

しかし，複雑な障害物を回避しながらの作業や，マニピュレータの形状全体を用いて物に巻き付くことによって物体を把持する作業などの複雑かつ高度な作業をロボットマニピュレータに課すには依然問題が残っている．それは，マニピュレータに与える作業の種類によるものである．従来型のマニピュレータに対して課せられる作業としては，たとえば溶接や塗装などの手先の位置，姿勢だけに対する作業がほとんどであった．上のような作業を達成させるためには，マニピュレータの手先位置，手先姿勢だけの制御で十分である．すなわち，その中間のリンクは考慮されない場合が多い．これは，対象物までの間に障害物が存在するときには，マニピュレータの中間のリンクを制御をすることができないため，制御を達成させることが困難である．以上のような理由によって，従来型のマニピュレータの作業能力には限界があるものと考えられる．実際，このような高度な作業を課す場合には，多くの自由度数が必要となり，また手先の位置，姿勢のみならずマニピュレータの形状全体も制御する必要性が生じてくる．

このような高度な作業を達成することが可能な制御法として，超多自由度マニピュレータの形状トラッキング制御法 [8] が提案されている．この形状トラッキング制御法は，3次元空間内に目標となる時変のパラメトリック曲線を与え，手先およびすべてのリンク位置をその目標曲線に追従させる制御である．この制御法により，高度な作業を達成させる

ことが可能となる．また，手先，各関節位置が到達すべき曲線上の位置に対応する曲線パラメータは，制御の過程の中で動的に推定することが大きな特徴である．

しかし，これらの制御を達成させるには，正確な動力学パラメータの値を必要とし，かつその値は変動しないことを前提としている．ここでの動力学パラメータとは，マニピュレータを構成する各リンクの慣性テンソル，質量中心位置，質量の3種類の物理量のことである．これらのパラメータを得る方法としては，ロボットマニピュレータを構成する各部位の設計データから計算したり，あるいはキャリブレーションなどにより同定することが考えられるが，以下のような問題により，あまり実用的ではない．

- 超多自由度マニピュレータは，多くの自由度数をもつロボットマニピュレータであるために，その動力学モデルに含まれるパラメータの個数も非常に多く，すべてのパラメータ値を算出することは非常に手間のかかる作業となる．
- また，実際にマニピュレータの動力学モデルに含まれるパラメータ値は，摩擦や外力などの要因により変動，もしくは誤差が生じるため，正確な値を得ることは困難である．
- マニピュレータ一部分が物体に接触するような作業中は，マニピュレータに外力が加わるために，マニピュレータの動特性が変化する．これは，動力学パラメータの変動と等価であり，ゆえに動的にパラメータを調整する必要がある．

以上のような理由から動力学パラメータの知識なしに制御を行ないたいという要求が生じてくる．このような不確定性に対処するために，ロバスト制御法や適応制御法などのマニピュレータへの応用 [14] が提案されている．ここで用いられている適応制御法とは，ロボットマニピュレータの運動方程式の形はわかっているが，それに含まれるパラメータの値が，正確にはわからないという状況において，ロボットマニピュレータを制御する1つの適応制御方式のことを指す．ロボットに適応制御の考えを導入したのは，Dubowskyらが最初である．しかし，そこではロボットのダイナミクスの相互干渉性は無視して，各リンクのダイナミクスを2次の線形系とみて各軸に独立に適応制御が適用されている．それから様々な改良が加えられ，1986,87年には Slotine らによってロボット特有の適応制御法が確立された．このロボット特有の適応制御手法としては，大きく2つに分けられる．1つは逆動力学に基づく適応制御法である．この手法はマニピュレータの各関節の角加速度，さらには慣性行列の逆行列を必要としており，実際の制御に適しているとは言い

難かった．しかし，スライディング面の概念を導入するリャブノフ法に基づいた適応制御方式は，それらの値を必要としない．その制御法は，マニピュレータの動力学モデルの特徴を取り入れ，追従性に優れた適応制御則を得ようとしたものである．本研究では，このSlotineらによって提案されたロボットマニピュレータ特有の適応制御法を用いて，動力学パラメータの値が未知であっても，超多自由度マニピュレータの形状制御問題を達成することのできる制御則である，適応形状トラッキング制御則を導く．

さらに，超多自由度マニピュレータの形状ヤコビ行列や運動方程式の性質などを用いることによって，得られた適応トラッキング制御則を各リンク単位の制御則に分解する．また，これらによって得られた計算アルゴリズムを用いてシミュレーションを行ない，制御則の有効性を確かめる．

以下に，本論文の構成を述べる．まず，第2章で超多自由度マニピュレータの運動学，そして，第3章で動力学について述べる．超多自由度マニピュレータの運動学，動力学は，従来までのマニピュレータのものとは，少々異なるものとなる．それは，超多自由度マニピュレータを構成する各関節はすべて2自由度を持つということから生じるものである．さらに，第5章で望山らによって提案された形状トラッキング制御則 [9] を示し，第6章でこの形状トラッキング制御則を slotineらによって提案されたロボットマニピュレータ特有の適応制御法に応用する．第7章では前章で得られた適応形状トラッキング制御則から，各リンク単位の分割された制御則を導出し，第8章でその制御則を用いたシミュレーション結果を示す．

第 2 章

超多自由度マニピュレータの運動学

マニピュレータの手先位置・姿勢を制御するような従来型の作業に対する運動を記述する場合，マニピュレータの各関節の回転変位と手先位置，姿勢との関係を示すだけで十分である．しかし，超多自由度マニピュレータの形状トラッキング制御を行なうためには，超多自由度マニピュレータを構成するすべてのリンク位置・姿勢の正確な情報が必要となる．そこで，本章では，超多自由度マニピュレータ特有の運動学の特徴を説明し，以降で必要となる準備を行なう．

まず最初に，本研究で用いる超多自由度マニピュレータの機械的なモデルを示し，各リンクの位置と姿勢の表示法として各リンクに固有の座標系を設定する方法を示す．次に，それらの各リンク間の関係を示し，各リンク座標系で表されたリンク位置や速度などを示す．

次に関節速度と各リンク速度の関係を表現するために，ヤコビ行列の概念を導入し，与えられた各リンクの速度を実現する各関節の速度を求める方法，およびヤコビ行列の静力学問題への応用について説明する．

2.1 超多自由度マニピュレータの機械的モデル

図 2.1 に本研究で用いる超多自由度マニピュレータのモデル図を示す．本研究で扱う超多自由度マニピュレータのモデルは， $n + 1$ 個の剛体と n 個の関節を直列に連結することにより形成される図 2.1 のような開ループシリアルリンク型のマニピュレータである．

リンク 0 は台座 (Base) に固定されており，台座寄りのリンクより，リンク $1, 2, \dots, n$ と

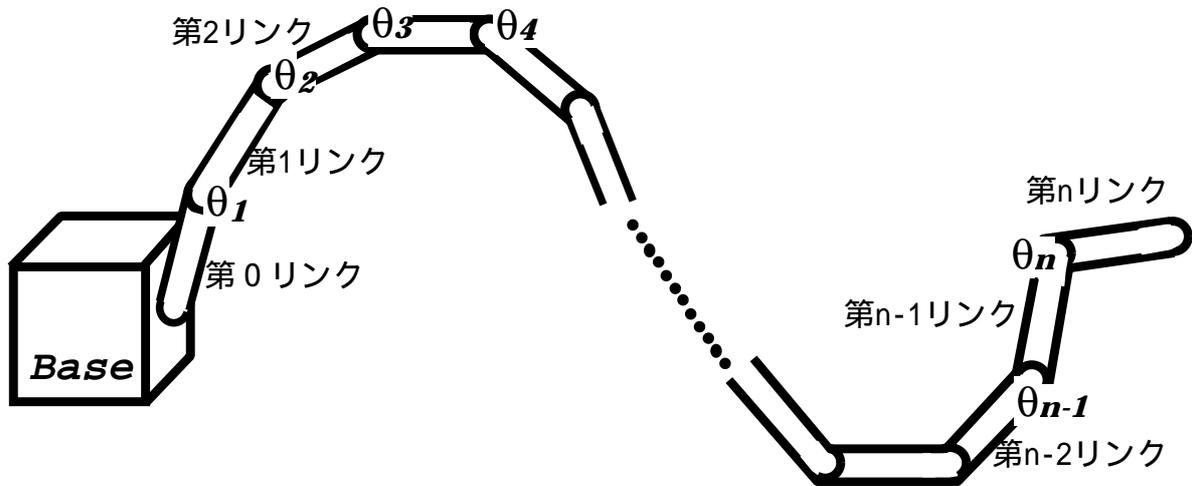


図 2.1: 超多自由度マニピュレータモデル

し，同様に，台座寄りの関節より関節 $1, 2, \dots, n$ とする．従来型のマニピュレータとの相違点は，マニピュレータの各リンクを接続する関節が2自由度有していることである．これは，3次元空間内の任意の曲線上にマニピュレータのすべてのリンク位置を到達させるためには，1関節が少なくとも2自由度の回転関節を持っていることが必要である [8] という事実によるものである．ゆえに， n 自由度の超多自由度マニピュレータが持つ総自由度数は $2n$ であり，すべての関節は回転関節である．

2.2 超多自由度マニピュレータの関節変位とリンク位置

ここでは，超自由度マニピュレータの各関節の関節変位とリンク位置との関係について述べる．

従来型のマニピュレータに課される作業は，手先効果器を用いるものが多い．この場合，作業変数は手先位置と姿勢に関する変数から構成され，3次元空間の場合を考えると，その次元は多くても6である．ゆえに，手先効果器を用いて作業を行うマニピュレータの場合，関節変数の次元が6以上，すなわち，マニピュレータが6自由度以上有すると運動学的に冗長ということになる．それに対して，超多自由度マニピュレータに課される作業は，マニピュレータの形状に対して与えられるものである．すなわち，マニピュレータのすべてのリンクの位置から構成される変数によって定義される空間が作業空間となる．こ

れは，同じく 3 次元空間内を考えると，その次元は $3n$ である．超多自由度マニピュレータの総自由度数は $2n$ であるので，運動学的に自由度数が欠落していることになる．

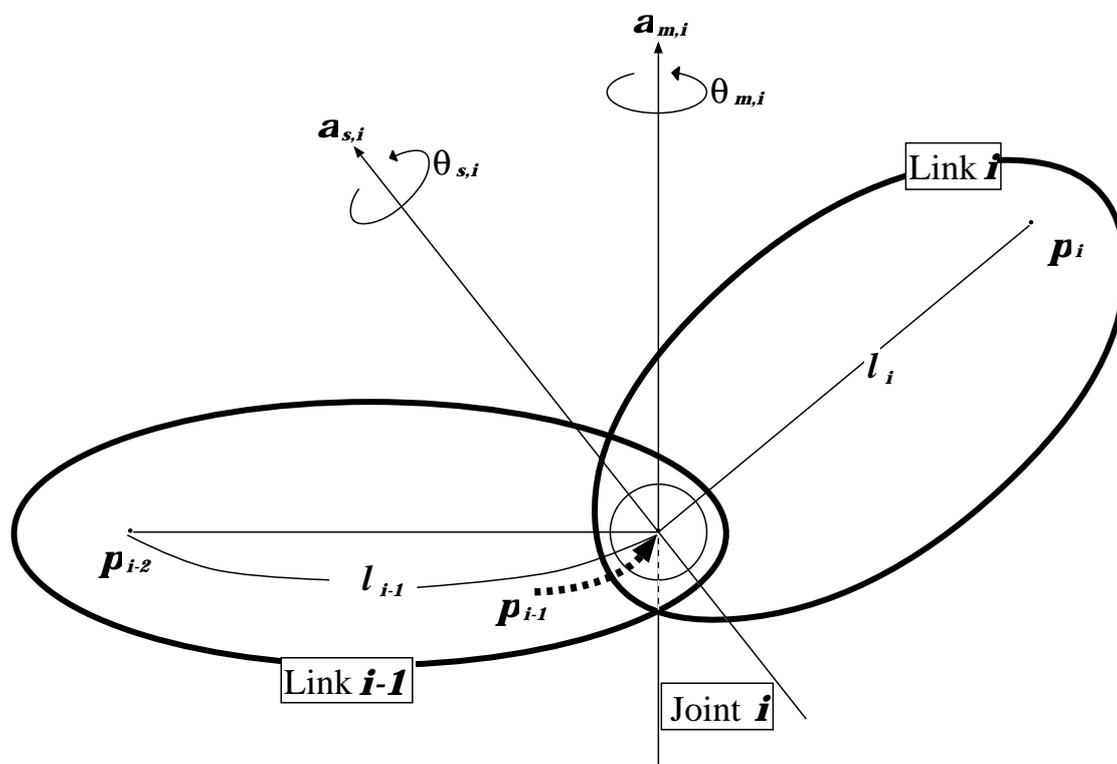


図 2.2: 第 $i, i - 1$ リンクおよび関節

2.2.1 関節変数の定義

次に，超多自由度マニピュレータの各関節についての説明を行なう．図 2.1 のように台座側の関節より関節 $1, 2, \dots, n$ と番号をつけ，さらに図 2.2 のように第 i 関節の 2 つの関節軸のうち， $i - 1$ 番目寄り関節軸を第 i 関節の sub axis としその向きを $a_{s,i} \in \mathbb{R}^3$ ，また， $i + 1$ 番目寄り関節軸を第 i 関節の main axis としその向きを $a_{m,i} \in \mathbb{R}^3$ とする．ここで第 i 関節の sub axis まわりの回転変位を $\theta_{s,i} \in \mathbb{R}$ ，第 i 関節の main axis まわりの回転変位を $\theta_{m,i} \in \mathbb{R}$ し，第 i 関節の回転変位 $\theta_i \in \mathbb{R}^2$ を以下のように定義することにより，これを第 i 関節の関節変位とする．

$$\boldsymbol{\theta}_i := \begin{bmatrix} \theta_{s,i} \\ \theta_{m,i} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

また，これらをまとめて超多自由度マニピュレータの関節変数ベクトル $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}$ を

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

によって定義する．

2.2.2 作業変数の定義

一方，リンクに関しても図 2.2 より同様に，台座寄りのリンクより，リンク $0, 1, 2, \dots, n$ と番号をつけ，第 i リンクの手先寄りの関節の位置を $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^3$ と定義し，第 i リンクのリンク位置とする．ここで，第 $i-1$ リンクのリンク位置から第 i リンクのリンク位置までの距離を第 i リンクの長さ $l_i \in \mathbb{R}$ と定義する．関節変数と同様に，これらをまとめて各リンク位置を表すベクトルを

$$\boldsymbol{p} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

とする．この関節変数 \boldsymbol{p} ，作業変数 $\boldsymbol{\theta}$ の関係はマニピュレータの機構によって定まり，一般に以下のように非線形となる [1]．

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3, \dots, \boldsymbol{\theta}_i) \quad (2.4)$$

各リンク，関節に適当な座標系を固定し，これらのリンク間の関係をうまく記述することによって，この $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})$ を系統的に与えることができ，また，演算をより容易に行なうことができる．次章ではこの超多自由度マニピュレータ特有の座標設定方法について述べる．

2.3 各座標系の設定法

[8] 本節では各リンク，各関節軸に固定された座標系をそれぞれ定める．座標系の設定方法としては，様々な方法があるが，リンク座標系原点の取り方によって2種類に分類できる．1つは，リンクの台座側関節軸上に原点を持ち，その z 軸がそのリンクの運動を直接引き起こす関節軸となる場合であり，もう一つは，リンクの手先側関節軸上に原点を置き，その z 軸がそのリンクに結合されたリンクの運動をひきおこす関節軸となるように設定する方法である．前者の中での代表的な座標系の設定方法としては，Denavit-Hartenberg[3] の記法がある．これは，リンクパラメータと呼ばれる4つの変数によって，リンク機構を記述する方法である．しかしこの記法の短所は，マニピュレータの各リンク位置を正確に表現することができないということである．それは，Denavit-Hartenbergの記法が，手先の位置，姿勢だけを記述することだけを目的とするということに起因する．しかし，超多自由度マニピュレータの形状トラッキング制御を達成させるには，手先位置だけではなく，すべてのリンク位置を正確に表現する必要がある．よって本稿では，後者の部類の設定法に含まれる，すべてのリンク位置を正確に記述することのできる超多自由度マニピュレータ特有の座標系の設定法を定義する．

2.3.1 リンク座標系の設定法

まず最初に，それぞれのリンクに固定されるリンク座標系の設定方法について説明する．図 2.3.1 は，第 i リンクに設定されたリンク座標系 $\Phi_i \in SO(3)$ を表している．この図に示すように，リンク i の座標系 Φ_i の原点はリンク i の手先側関節軸上，すなわち関節軸 $i+1$ 上にとる．その x 軸 x_i は，第 $i-1$ リンク位置 p_{i-1} と第 i リンク位置 p_i を結んだ直線上に一致させ，方向は第 $i-1$ リンク位置から第 i リンク位置に向かう方向とする．なお，リンク 0 の座標系 Φ_0 の姿勢，リンク n の座標系 Φ_n は任意とする．以上でリンク $1..n$ についてリンク座標系が定まる．

2.3.2 関節座標系の設定法

また，図 2.3.2 に示すように各関節軸に関してもそれぞれの座標系が設定される．第 i 関節の座標系原点は，sub axis と main axis の交点にとり，それぞれ座標系の z 軸である $z_{s,i}$ と $z_{m,i}$ は，第 i 関節の2つの関節軸である $a_{s,i}$ と $a_{m,i}$ の方向にそれぞれ一致さ

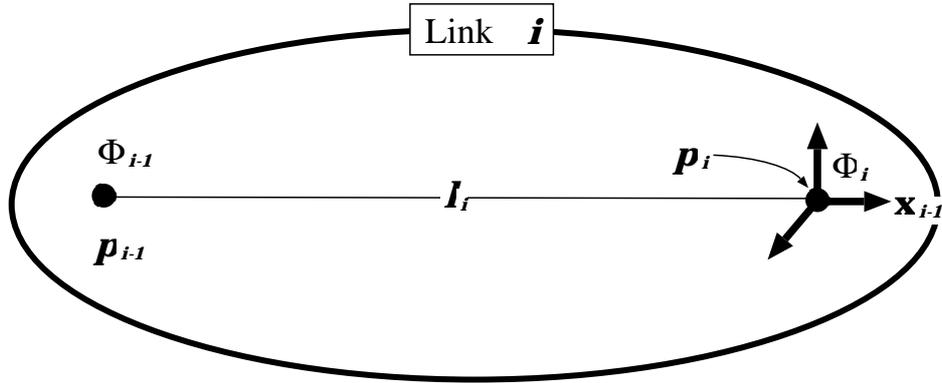


図 2.3: 第 i リンク座標系

せる．以上で関節 $1..n$ についての関節座標系が定まる．

2.4 各座標間の関係

[2] 以下に，本稿で用いる座標系，座標系原点，関節軸などの主な関係を示す．

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} R_{w,i} \quad (2.5)$$

式 (2.5) は，*sub axis* に関する回転運動と *main axis* に関する回転運動両方を考慮に入れた，リンク座標系 $i - 1$ からリンク座標系 i への座標変換を表している．ここで， $R_{w,i} \in SO(3)$ は以下の式で与えられる．

$$R_{w,i} = R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) R(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{a}_{s,i} := \mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

$$\mathbf{a}_{m,i} := \mathbf{Q}_{m,i}^T \mathbf{e}_z \quad (2.8)$$

式 (2.7) , (2.8) は，第 i 関節の 2 つの関節軸である $\mathbf{a}_{s,i}$ と $\mathbf{a}_{m,i}$ を，それぞれ座標系 Φ_i , Φ_{i-1} で記述した場合，両者とも定数ベクトルとなることを示している．

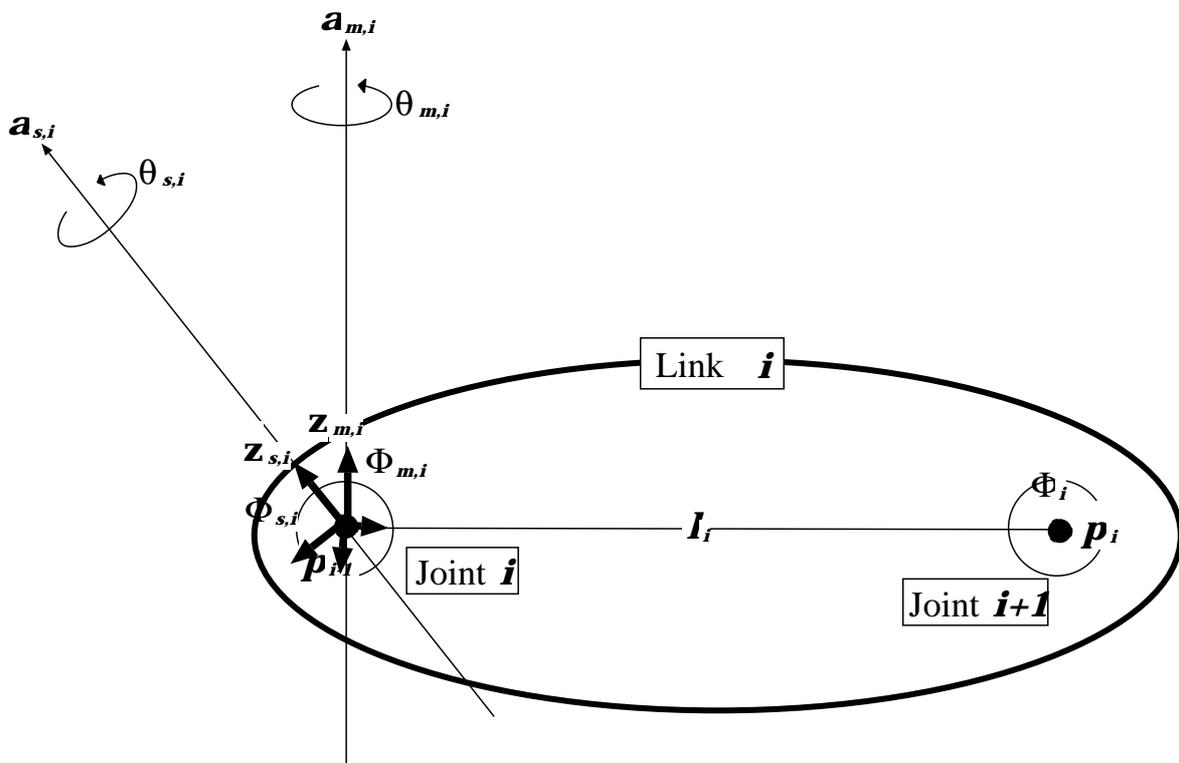


図 2.4: 第 i 関節座標系

$$p_i = p_{i-1} + l_i \Phi_i e_x \quad (2.9)$$

式 (2.9) は, 第 i リンク位置 p_i と第 $i-1$ リンク位置 p_{i-1} の関係式である.

これらの式によって, 超多自由度マニピュレータの運動学を記述することが可能となる.

2.5 幾何ヤコビ行列と静力学

2.5.1 幾何ヤコビ行列

[16] 式 (2.4) より, 関節変数ベクトル $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ と作業変数ベクトル $p \in \mathbb{R}^{3n}$ の間には,

$$p = f(\theta) \quad (2.10)$$

の関係が成立する．いま，以下のような下三角ブロック行列 $J_r \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$ を考える．

$$J_r = \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (2.11)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_{12} & J_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} & 0 & \dots & 0 \\ J_{14} & J_{24} & J_{34} & J_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{1n} & J_{2n} & J_{3n} & J_{4n} & \dots & J_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

この行列を用いることにより，超多自由度マニピュレータの各リンク位置速度と関節角速度の関係が以下のように簡潔に表現できる．

$$\dot{p} = J_r(\theta)\dot{\theta} \quad (2.13)$$

この行列 $J_r \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$ を後に説明する形状ヤコビ行列と区別するために，超多自由度マニピュレータの幾何ヤコビ行列と呼ぶ．実際 J_r は， p の θ に関するヤコビ行列であり，シリアルリンクマニピュレータの場合，その構造より一般に下三角ブロック行列になる．

2.5.2 マニピュレータのリンク速度間の関係

位置 p の関節変位 θ に対する変化の割合は幾何ヤコビ行列 J_r によって与えられる．ここでは，姿勢の時間に対する変化の割合を計算する．

いま，連続する2つの座標系 Φ_{i-1} ， Φ_i の相対的移動速度について考える．基準座標系を Φ_{Base} からみた O_{i-1} のベクトルを p_{i-1} ， O_i のベクトルを p_i とする．また， O_{i-1} から O_i へのベクトルは基準座標系で， $l_i \Phi_i e_z$ と表せる．ここで， $l_i \in \mathbb{R}$ は，第 $i-1$ リンク座標系の原点位置から第 i リンク座標系の原点位置までの長さを表しており， $e_z \in \mathbb{R}^3$ は， z 軸方向の単位ベクトルであり， $e_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ で与えられる．このとき，基準座標系で表した第 i リンク座標系の原点位置 p_i の位置ベクトルは，

$$p_i = p_{i-1} + l_i \Phi_i e_z \quad (2.14)$$

で与えられる．いま， $x_{i,x}$ ， $y_{i,y}$ ， $z_{i,z} \in \mathbb{R}^3$ をそれぞれ座標系 $\Phi_i \in SO(3)$ の x 軸， y 軸， z 軸の方向を表すものとする，第 i リンク座標系 Φ_i は以下のように記述することがで

きる .

$$\Phi_i = [x_{i,x} \ y_{i,y} \ z_{i,z}] \quad (2.15)$$

このリンク座標系 Φ_i の時間微分は次のようにあらわされる .

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_i}{dt} &= \left[\frac{dx_{i,x}}{dt} \ \frac{dy_{i,y}}{dt} \ \frac{dz_{i,z}}{dt} \right] \\ &= [\omega_i \times x_{i,x} \ \omega_i \times y_{i,y} \ \omega_i \times z_{i,z}] \\ &= \omega_i \times [x_{i,x} \ y_{i,y} \ z_{i,z}] \\ &= \omega_i \times \Phi_i \\ &= [\omega_i \times] \Phi_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで , $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ は第 i リンクの角速度をあらわすベクトルである . $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i$ とおき , 上の関係を考慮して式 (2.14) の時間微分を行うと ,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i \frac{d}{dt} \Phi_i \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i (\omega_i \times \Phi_i) \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \omega_i \times (l_i \Phi_i \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

を得る . 回転角速度に関しても同様に , 基準座標系からみた Φ_{i-1} , Φ_i の回転角速度を ω_{i-1} , ω_i とする . このとき次の関係が成立する .

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{i-1} + \Phi_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + \Phi_i \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} \\ &= \omega_{i-1} + \Phi_i \mathbf{A}_i \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

ゆえに , 基準座標系からみた Φ_i と Φ_{i+1} の並進速度および回転速度の関係が (2.18), (2.17) で与えられることがわかった . さらに , (2.18), (2.14) を時間微分することによって連続するリンク座標系間の相対的加速度の関係を導くことができる .

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_i &= \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \frac{d}{dt} \{ \omega_i \times (l_i \Phi_i \mathbf{e}_z) \} \\ &= \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times (l_i \Phi_i \mathbf{e}_z) + \omega_i \times \left(l_i \frac{d\Phi_i}{dt} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times (l_i \Phi_i \mathbf{e}_z) + \omega_i \times \{ \omega_i \times (l_i \Phi_i \mathbf{e}_z) \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \Phi_i \mathbf{A}_i \ddot{\theta}_i + \frac{d\Phi_i}{dt} \mathbf{A}_i \dot{\theta}_i$$

$$= \dot{\omega}_{i-1} + \Phi_i A_i \ddot{\theta}_i + \omega_i \times (\Phi_i A_i \dot{\theta}_i) \quad (2.20)$$

式(2.17), (2.20) が連続するリンクの加速度間関係である。ただし, $\omega_i = [\omega_{i,x} \ \omega_{i,y} \ \omega_{i,z}]^T$ であり, $A_i \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ は第 i 関節の 2 つの関節軸の方向を表す以下のような行列である。

$$A_i := \begin{bmatrix} R_{w,i}^T \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{a}_{m,i} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

なお, $[\omega \times] \in SO(3)$ であり, この行列は以下のように表される。

$$[\omega_i \times] := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{i,z} & \omega_{i,y} \\ \omega_{i,z} & 0 & -\omega_{i,x} \\ -\omega_{i,y} & \omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

この歪み対称行列 $[\omega \times]$ を用いることにより, ベクトル積を線形な作用素 $[\omega \times]$ に置き換えることが可能となる。

2.5.3 異なる座標系で表した等価な力

図 2.5.3 に示すようにある剛体上に 2 つの座標系 Φ_i と Φ_j が固定されているとする。この剛体がある基準座標系 Φ_{Base} に対して移動するとき, この基準座標系 Φ_{Base} で表した Φ_i の移動速度と Φ_j の移動速度の間には, (2.17), (2.20) より

$$\omega_j = \omega_i \quad (2.23)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_j = \dot{\mathbf{p}}_i + \omega_i \times \{ \Phi_i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \} \quad (2.24)$$

が成立する。これらを局所的なリンク座標系 Φ_i, Φ_j に関するものに変換すると,

$$\begin{aligned} {}^j\omega_j &= \Phi_j^T \omega_i \\ &= \Phi_{ji} {}^i\omega_i \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} {}^j\dot{\mathbf{p}}_j &= \Phi_j^T \left[\dot{\mathbf{p}}_i + \omega_i \times \{ \Phi_i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \} \right] \\ &= \Phi_j^T (\Phi_i {}^i\dot{\mathbf{p}}_i) + \Phi_j^T \Phi_i \left[{}^i\omega_i \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \right] \\ &= \Phi_{ji} {}^i\dot{\mathbf{p}}_i + \Phi_{ji} \left\{ {}^i\omega_i \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \right\} \\ &= \Phi_{ji} {}^i\dot{\mathbf{p}}_i + \Phi_{ji} \left\{ - \left[(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \right] {}^i\omega_i \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

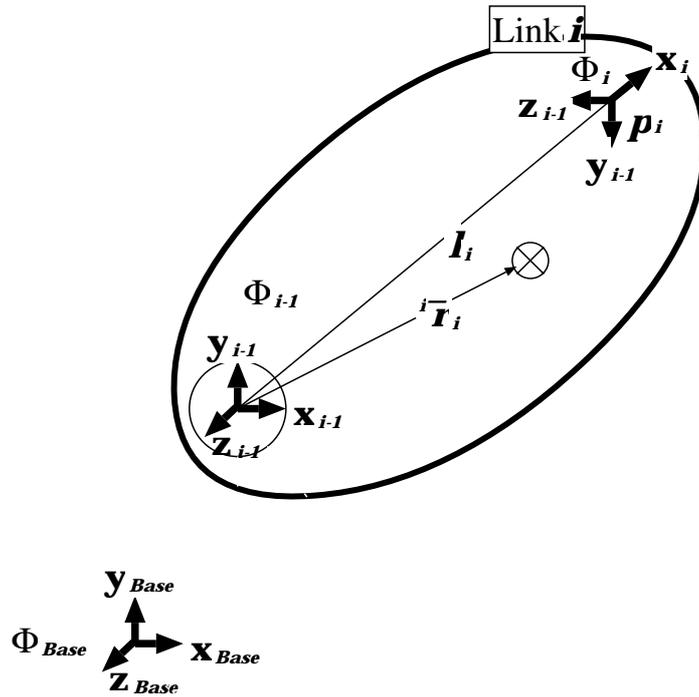


図 2.5: 剛体上に固定された座標系

さらに 2 式を行列の形にまとめると,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} {}^j\dot{p}_j \\ {}^j\omega_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{ji} & -\Phi_{ji} [({}^j p_j - {}^j p_i) \times] \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Phi_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i\dot{p}_i \\ {}^i\omega_i \end{bmatrix} \\
 &= Ad_{ij} \begin{bmatrix} {}^i\dot{p}_i \\ {}^i\omega_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

と書ける．ここで行列 $Ad_{ij} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ は，随伴行列とよばれ [16]，座標系 Φ_i に対する Φ_j と Φ_j の移動速度を関係づける行列である．一方， Φ_i の原点に作用する力とモーメント f_i, n_i に等価な， Φ_j の原点に作用する力とモーメント f_j, n_j の関係は

$$f_i = f_j \tag{2.28}$$

$$n_i = n_j + (p_j - p_i) \times f_j \tag{2.29}$$

である．さらに， Φ_i, Φ_j それぞれの局所座標系に関するものに変換すると，

$${}^i f_i = \Phi_i^T f_j$$

$$= \Phi_{ij} f_j \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} {}^i n_i &= \Phi_i^T \{ n_j + (p_j - p_i) \times f_j \} \\ &= \Phi_i^T \Phi_j^j n_j + \Phi_i^T \Phi_j \{ ({}^j p_j - {}^j p_i) \times {}^j f_j \} \\ &= \Phi_{ij}^j n_j + \Phi_{ij} [({}^j p_j - {}^j p_i) \times] {}^j f_j \end{aligned} \quad (2.31)$$

これらの式をまとめて，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^i f_i \\ {}^i n_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{ij} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ [(p_j - p_i) \times] \Phi_{ij} & \Phi_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j f_j \\ {}^j n_j \end{bmatrix} \\ &= Ad_{ij}^T \begin{bmatrix} {}^j f_j \\ {}^j n_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

が得られる．以上の式からわかるように Φ_i , Φ_j の速度を関係づける行列 Ad_{ij} の転置行列が Φ_j , Φ_i の力とモーメントを関係づける行列となる．

第 3 章

超多自由度マニピュレータの動力学

超多自由度マニピュレータの動力的な特性を解析するためには，その運動方程式を導出する必要がある．一般にマニピュレータの運動方程式は，各リンク位置，速度，加速度などの運動学的情報とリンク長，慣性テンソル，質量中心位置，質量などの物理的パラメータから構成される．この導出法としては，ラグランジュの運動方程式を用いる方法とニュートン・オイラーの運動方程式を用いる方法が代表的である．

前者は式の誘導にロボットマニピュレータ全体の運動エネルギーと位置エネルギーに関係したラグランジュ関数という概念を用いるため，導出過程が直接的には理解しにくいという難点がある．さらに，リンク相互の内部拘束力を考慮しなくてもよい反面，冗長な計算が多くなる．しかし結果的には物理的にわかりよい簡潔な方程式が得られるので，これが十数年の間，マニピュレータの運動方程式を定式化する標準的な方法として用いられてきた．

しかし近年，ロボットマニピュレータの高速化，高精度化に対する要求が高まり，運動方程式を実時間で制御入力の計算に使うことが考えられるようになった．後者のニュートン・オイラー法による定式化は，このようなケースに向いている．それは，リンク相互の拘束力や相對運動をベクトル量として取り扱うため，力とモーメントのつりあいを考慮する必要があるが冗長な計算が少ないというメリットがあるためである．そのような点で，ニュートンオイラー法は必要計算量の点で前者より優れており，順動力学モデルを使う計算機シミュレーションなどにおいても有効な方法である．

本研究を進める上でさらに重要な性質として，ロボットマニピュレータの運動方程式が，マニピュレータを構成する各リンクの慣性テンソル，重心位置，質量から構成される

動力学パラメータに対して線形に表すことができるという性質である．その点に着目して，超多自由度マニピュレータの運動方程式をある線形行列方程式に書き表すことが可能である．このような線形行列方程式の形で超多自由度マニピュレータの運動方程式を表現することによって，動力学パラメータが陽に現れるのため，その動力学パラメータの扱いが非常に容易になるという長所がある．またこれは，パラメータの不確定性などを扱うロボットマニピュレータの適応制御やロバスト制御などにおいては，有用な表現である．

本章では，まず初めにマニピュレータの運動方程式の中に現れる物理パラメータの中から，動力学パラメータを定義し，それらの性質について説明する．次に，ラグランジュの運動方程式，ならびにニュートン・オイラーの運動方程式を利用した超多自由度マニピュレータの運動方程式を示す．最後に，リグレッサ行列を用いた超多自由度マニピュレータの運動方程式を導出する．

3.1 動力学パラメータ

超多自由度マニピュレータモデルに含まれる物理パラメータは，大きく2つに分類できる．1つはリンク長や関節軸の情報などを指す運動学に関するパラメータ，そしてもう1つは各リンクの慣性テンソル，質量中心位置，質量などから構成される動力学に関するパラメータである．後者の3種類の物理量を動力学パラメータという．本節では，この動力学パラメータについての説明を行う．

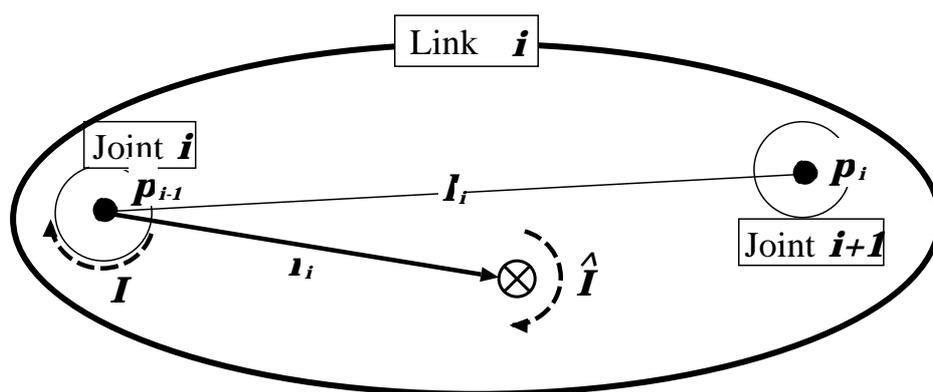


図 3.1: 第 i リンクの動力学パラメータ

図 3.1 に第 i リンクに関する動力学パラメータの幾何的意味を示す．ここで， $m_i \in \mathfrak{R}$

は第 i リンクの質量 $r_i \in \mathfrak{R}^3$ は第 i リンクの質量中心位置, $\hat{I}_i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ は第 i リンクの質量中心まわりの慣性テンソル, $I_i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ は第 i リンク座標系原点まわりの慣性テンソルの要素をあらわすものであり, それぞれは以下のように定義する.

$$\mathbf{I}_i := \begin{bmatrix} I_{i,xx} & I_{i,xy} & I_{i,xz} \\ I_{i,xy} & I_{i,yy} & I_{i,yz} \\ I_{i,yz} & I_{i,yz} & I_{i,zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}_i := \begin{bmatrix} \hat{I}_{i,xx} & \hat{I}_{i,xy} & \hat{I}_{i,xz} \\ \hat{I}_{i,xy} & \hat{I}_{i,yy} & \hat{I}_{i,yz} \\ \hat{I}_{i,yz} & \hat{I}_{i,yz} & \hat{I}_{i,zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_i := [r_{i,x} \quad r_{i,y} \quad r_{i,z}]^T \quad (3.2)$$

$\hat{I}_i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ と $I_i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ の間には, 並行軸の定理より以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \hat{I}_i &= I_i + m_i [\mathbf{r}_i \times]^T [\mathbf{r}_i \times] \\ &= I_i - m_i [\mathbf{r}_i \times]^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

また, 第 i リンクの慣性テンソル I_i は対称行列であるので, すべての $\omega \in \mathfrak{R}^3$ に対して, 以下のように書き改めることができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\omega &= \begin{bmatrix} \omega_x & 0 & 0 & 0 & \omega_z & \omega_y \\ 0 & \omega_y & 0 & \omega_z & 0 & \omega_x \\ 0 & 0 & \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{yz} \\ I_{zx} \\ I_{xy} \end{bmatrix} \\ &:= \left[[\omega_i \bullet] \mid [\omega_i \diamond] \right]^i \mathbf{i}_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし, 行列 $[\omega_i \bullet] \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, $[\omega_i \diamond] \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, およびベクトル $\mathbf{i}_i \in \mathfrak{R}^6$ は,

$$[\omega_i \bullet] := \begin{bmatrix} \omega_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{i,z} \end{bmatrix}, \quad [\omega_i \diamond] := \begin{bmatrix} 0 & \omega_{i,z} & \omega_{i,y} \\ \omega_{i,z} & 0 & \omega_{i,x} \\ \omega_{i,y} & \omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{i}_i := [I_{xx} \quad I_{yy} \quad I_{zz} \quad I_{yz} \quad I_{zx} \quad I_{xy}]^T \quad (3.6)$$

で与えられる．

また，これらのパラメータはそのリンク座標系で表すことにより，定数になることが知られている．以上の準備より，本稿では第 i リンクの動力学パラメータベクトル $\rho_i \in \mathfrak{R}^{10}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\rho_i &:= \left[{}^i i_{iyz} \ m_i {}^i r_{iz} \ m_i \right]^T \\ &= \left[I_{ixx} \ I_{iyy} \ I_{izz} \ I_{iyz} \ I_{ixz} \ I_{iyz} \ m_i r_{ix} \ m_i r_{iy} \ m_i r_{iz} \ m_i \right]^T\end{aligned}\quad (3.7)$$

${}^i m_i \in \mathfrak{R}$ は第 i リンクの質量， $m_i {}^i r_i \in \mathfrak{R}^3$ は第 i リンクの一次モーメント， ${}^i i_i \in \mathfrak{R}^6$ は第 i リンク座標系原点まわりの第 i リンクに関する慣性テンソルの要素であり，これらのパラメータはすべて第 i リンク座標系で表したものであり，定数パラメータベクトルとなる．さらに，動力学パラメータベクトル $\rho \in \mathfrak{R}^{10n}$ を以下のように定義する．

$$\rho := \left[\rho_1^T \ \rho_2^T \ \rho_3^T \ \dots \ \rho_n^T \right]^T \quad (3.8)$$

3.2 マニピュレータの運動方程式の導出

3.2.1 ラグランジュの運動方程式による定式化

いま， $2n$ 自由度の超多自由度マニピュレータの関節変数が一般化座標

$$\theta = [\theta_{s,1}, \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}] \in \mathfrak{R}^{2n}]^T \quad (3.9)$$

によって表されるものとすれば，このマニピュレータの運動方程式は，ラグランジュの運動方程式より以下のように記述される．

$$\mathbf{u} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (3.10)$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta) \quad (3.11)$$

$L \in \mathfrak{R}$ はラグランジュ関数であり，マニピュレータの運動エネルギー $T \in \mathfrak{R}$ と位置エネルギー $U \in \mathfrak{R}$ の差として表現される．また， $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{2n}$ は一般化力であり，関節が回転関節だけから構成される超多自由度マニピュレータの場合，関節アクチュエータによる駆動トルクを表す．ここで，運動エネルギー T が関節速度ベクトル $\dot{\theta} \in \mathfrak{R}^{2n}$ の2次形式で表されることに着目すると，

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}. \quad (3.12)$$

と表せる．ここで $M(\boldsymbol{\theta}) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ はロボットマニピュレータの慣性行列とよばれ，正定対称行列である．いま (3.11), (3.12) より，ロボットマニピュレータのラグランジュ関数は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - U(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T M(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - U(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.13) 式のラグランジュ関数を (3.10) 式のラグランジュの運動方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \{T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - U(\boldsymbol{\theta})\} \\ &= \frac{d}{dt} \{M(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} U(\boldsymbol{\theta}) \right\} \\ &= M(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \dot{\boldsymbol{\theta}}^T M(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} U(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

これより，従来までのロボットマニピュレータの運動方程式と同じ形の超多自由度マニピュレータの運動方程式を得る．

$$\boldsymbol{u} = M(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.15)$$

ただし，

$$C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \dot{\boldsymbol{\theta}}^T M(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} U(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.17)$$

であり，それぞれの変数の物理的意味は以下の通りである．

- $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{R}^{2n}$: 関節駆動トルクベクトル
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^{2n}$: 関節変数ベクトル
- $\dot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathfrak{R}^{2n}$: 関節速度ベクトル
- $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathfrak{R}^{2n}$: 関節加速度ベクトル
- $M(\boldsymbol{\theta}) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$: マニピュレータの慣性行列
- $C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$: 遠心力およびコリオリ力に関する行列
- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathfrak{R}^{2n}$: 重力負荷を表すベクトル

(3.15) 式のロボットダイナミクスの式は，関節駆動トルク u ，関節変位 θ ，関節速度 $\dot{\theta}$ ，関節加速度ベクトル $\ddot{\theta}$ に関する $2n$ 個の 2 次非線型微分方程式の集合からなり，以下の ような性質がある．

性質 1(慣性行列の正定対称性)

行列 $M(\theta)$ は正定対称行列である．すなわち，すべての $\theta, x \in \mathfrak{R}^{2n}$ に対して，

$$x^T M(\theta) x \geq 0. \quad (3.18)$$

が成り立つ． □

性質 2(慣性行列の有界性)

慣性行列 $M(\theta)$ のノルム $\|M(\theta)\|$ は有界であり，任意の $\theta, x \in \mathfrak{R}^{2n}$ に対して，

$$M_m \leq \|M(\theta)\| \leq M_M. \quad (3.19)$$

が成り立つ．ただし， $M_m, M_M (\leq \infty)$ はそれぞれ，慣性行列 $M(\theta)$ の最小個有値，最大固有値をあらわす． □

性質 3(歪み対称性)

行列 $\dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta})$ は，歪み対称行列となる．すなわち，任意の $\theta, \dot{\theta}, x \in \mathfrak{R}^{2n}$ に対して，

$$x^T \{ \dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \} x = 0 \quad (3.20)$$

である． □

性質 4(リグレッサ行列)

マニピュレータのダイナミクス (3.15) は，適当な行列 $Y \in \mathfrak{R}^{2n \times 10n}$ を用いることにより，

$$\begin{aligned} u &= M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) \\ &= Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\rho \end{aligned} \quad (3.21)$$

と表すことが可能である．ここで， $\rho \in \mathfrak{R}^{r \times 1} (r \leq 10n)$ は，動力学パラメータベクトルであり，このとき行列 Y はリグレッサ行列と呼ばれる． □

性質 5

コリオリ, 遠心力に関する行列 $C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{R}^{2n}$, $\alpha \in \mathfrak{R}$ に対して,

$$C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x} \quad (3.22)$$

$$C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z} + \alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} + \alpha C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \quad (3.23)$$

である .

□

3.2.2 ニュートン・オイラーの運動方程式による定式化

ニュートン・オイラーの運動方程式を用いたマニピュレータの運動方程式の導出は、以下に述べる2種類の再帰的な計算によって求めることができる。

(1) A forward recursion

各関節の現在の角度 $\theta_i \in \mathbb{R}^2$, 角速度 $\dot{\theta}_i \in \mathbb{R}^2$, およびある目標加速度 $\ddot{\theta}_i \in \mathbb{R}^2$ などの各関節の運動運動を与え、このときリンク i の質量中心の並進加速度を算出するために、各リンク座標系からみた回転角速度 $\omega_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, 回転角加速度 $\dot{\omega}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, 並進速度 $\dot{p}_i \in \mathbb{R}^3$, および並進加速度 $\ddot{p}_i \in \mathbb{R}^3$ をリンク 0 からリンク n に向かって順に計算する。3自由度の場合の例を以下に示す。(図.3.2)

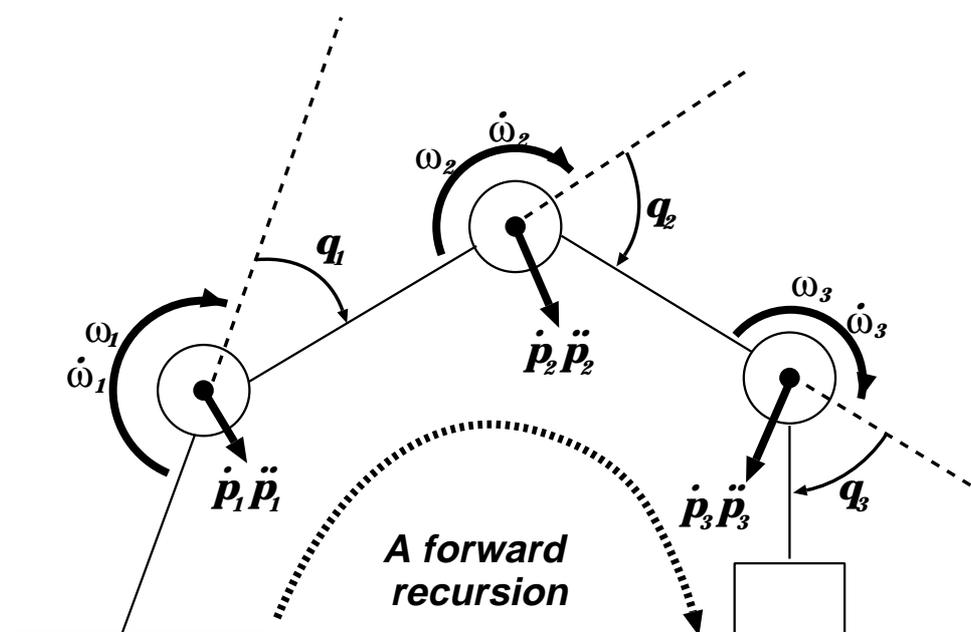


図 3.2: A forward recursion

一般には、(2.18) の ω_i , (2.14) の ppb_i , (2.20) の $domega_i$, (2.19) の $ddot{q}q_b_i$ を用いて forward recursion の式を計算するのだが、これらの式は各リンク座標系で表されていると都合がよい。そこで、これらの式を各リンク座標系で表したものに变形する。

(2.18) の ω_i , (2.20) の $domega_i$ に関しては、(2.25),(2.26) より以下の通りである

$${}^j\omega_j = \Phi_j^T \omega_i$$

$$= \Phi_{ji} {}^i\omega_i \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} {}^j\dot{\mathbf{p}}_j &= \Phi_j^T \left[\dot{\mathbf{p}}_i + \omega_i \times \left\{ \Phi_i (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \right\} \right] \\ &= \Phi_j^T (\Phi_i {}^i\dot{\mathbf{p}}_i) + \Phi_j^T \Phi_i \left[{}^i\omega_i \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \right] \\ &= \Phi_{ji} {}^i\dot{\mathbf{p}}_i + \Phi_{ji} \left\{ {}^i\omega_i \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \right\} \\ &= \Phi_{ji} {}^i\dot{\mathbf{p}}_i + \Phi_{ji} \left\{ - \left[(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \right] {}^i\omega_i \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

これらの式をさらに時間微分して以下の式を得る .

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = R_{w,i} {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times (l_i \mathbf{e}_z) + {}^i\omega_i \times \left\{ {}^i\omega_i \times (l_i \mathbf{e}_z) \right\} \quad (3.26)$$

$$\dot{\omega}_i = R_{w,i} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + A_i \ddot{\theta}_i + {}^i\omega_i \times (A_i \dot{\theta}_i) \quad (3.27)$$

基準座標系 Φ からみたリンク i の質量中心へのベクトルを $\mathbf{p}_{c,i}$, 第 $i-1$ リンク座標系原点から \mathbf{r}_i と定義すると ,

$$\mathbf{p}_{c,i} = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{r}_i \quad (3.28)$$

であり , さらに時間微分をとると ,

$$\dot{\mathbf{p}}_{c,i} = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{r}_i \quad (3.29)$$

ゆえに , リンク i の質量中心位置の加速度は , 以下のように求めることができる .

$$\ddot{\mathbf{p}}_{c,i} = \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_i) \quad (3.30)$$

式 (3.30) を同様に局所リンク座標系に変換すると ,

$$\ddot{\mathbf{p}}_{c,i} = R_{w,i} {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_i) \quad (3.31)$$

となる .

以上より , 手続き forward recursion は , (2.26), (2.25), (3.27), (3.26) 式をリンク 0 からリンク n に向かって再帰的に計算していき , 最終的に式 (3.31) を用いて , 各リンクの質量中心位置の加速度 $\ddot{\mathbf{p}}_{c,i}$ を得る手続きである .

(2) A backward recursion

次に，各リンクが手続き (1) で求めた運動をするために，外部から質量中心に加えられなければならない並進力 f_i と回転モーメント n_i をそれぞれニュートンの運動方程式およびオイラーの運動方程式によって計算する．さらに，外力によって手先および各リンクに加わる力とモーメントが与えられたものとして，質量中心に作用する力とモーメントと等価な関節 $i + 1$ に作用する力 f_i モーメントを n_i を手先側 (Link n) からベース (Link 0) に向かって順に計算し，これを元に各関節加えられるべき関節駆動力 u_i を計算する．
(図.3.2.2)

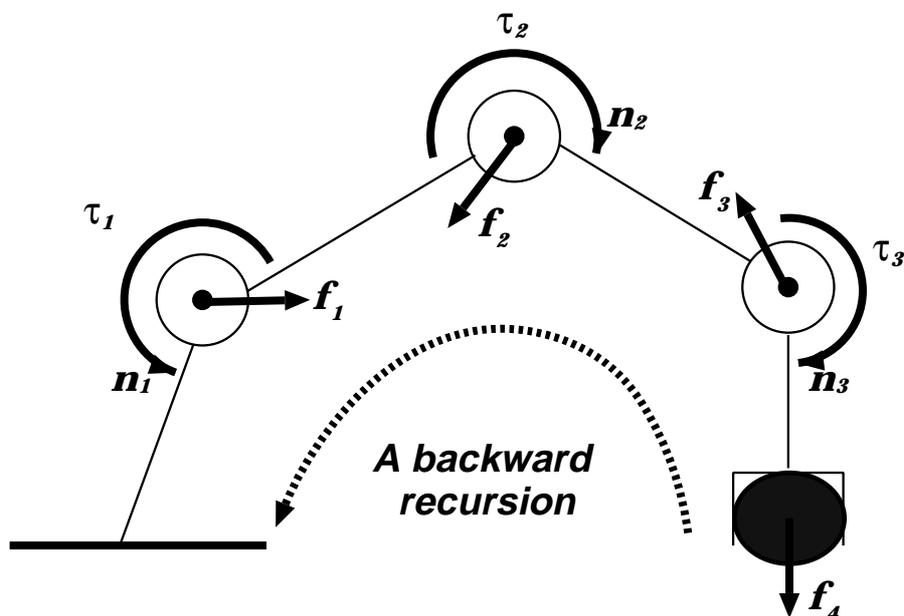


図 3.3: A backward recursion

以上の 2 種類の手続きが，ニュートンオイラーの運動方程式によるマニピュレータの運動方程式を導出する手続きである．手続き (1) の forward recursion で得た情報を利用することによって，超多自由度マニピュレータの運動方程式に関するニュートンの運動方程式，オイラーの運動方程式を導出することが可能となる．

図 3.2.2 は，リンク i に作用する力とモーメントを書き出したものである．この図において， $-f_{i+1}$ ， $-n_{i+1}$ はそれぞれ第 $i + 1$ リンクから受ける反作用の力，モーメントを表している．

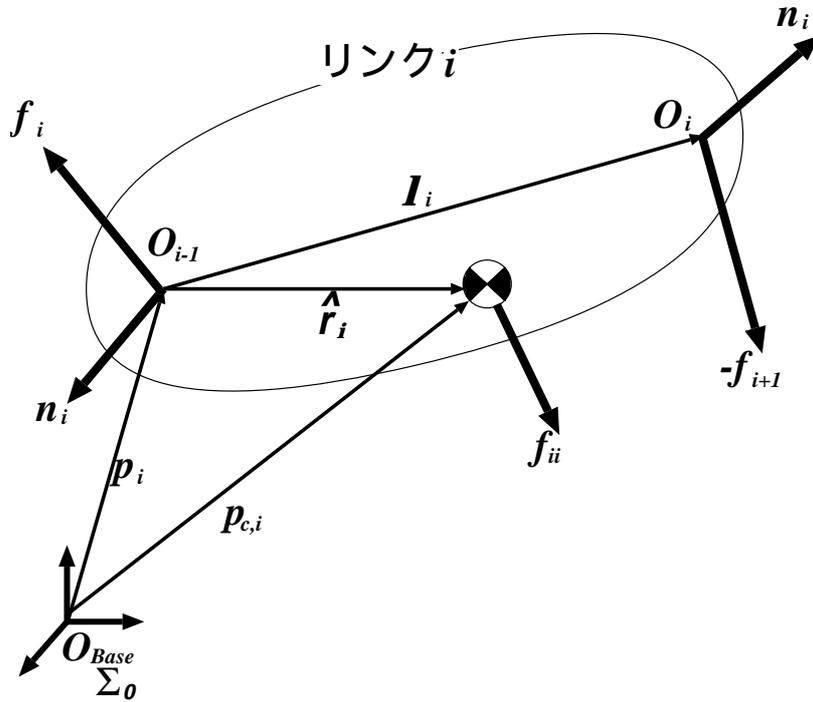


図 3.4: リンク i に作用する力とモーメントのついで

これより，リンク i の運動によりその質量中心に作用する力 f_i は，ニュートンの運動方程式より次式で表される．

$$m_i \ddot{\mathbf{p}}_{c,i} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} \quad (3.32)$$

また，リンク i の運動によりその質量中心まわりに生じるモーメント \mathbf{n}_i は，リンク i の質量中心まわりのオイラーの方程式により次式で表される．

$$\hat{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\hat{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = (-\mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_i + \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (l_i \Phi_i \mathbf{e}_x - \mathbf{r}_i) \times (-\mathbf{f}_{i+1}) \quad (3.33)$$

オイラーの運動方程式 (3.33) にニュートンの運動方程式 (3.32) を代入すると，

$$\begin{aligned} \hat{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\hat{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) &= -\mathbf{r}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{p}}_{c,i} + \mathbf{f}_{i+1}) + \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{r}_i - l_i \Phi_i \mathbf{e}_x) \times \mathbf{f}_{i+1} \\ &= -\mathbf{r}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{p}}_{c,i}) + \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} - l_i \Phi_i \mathbf{e}_x \times \mathbf{f}_{i+1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

さらに質量中心の並進加速度 (3.30) を式 (3.35) に代入し，平行軸の定理 (3.3) を適用し，質量中心まわりの慣性テンソル \hat{I}_i を原点まわりの慣性テンソル I_i に変換することによ

り，リンク i に以下の作用するモーメントのつりあいの式が求まる．

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{p}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times m_i \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times m_i \mathbf{r}_i) \quad (3.35)$$

ゆえに，第 i リンクの駆動トルクは，

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{n}_i \quad (3.36)$$

となる．これを 関節トルク対と呼ぶ．この関節駆動トルク \mathbf{u} も局所リンク座標系で表すと都合がよい．すなわち，

$${}^i \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{A}_i^{T_i} \mathbf{n}_i \quad (3.37)$$

となる．

以上，式(2.25)～(3.37)が超多自由度マニピュレータの運動方程式をを導出するための，ニュートン・オイラーの運動方程式である．

3.3 リグレッサを用いたダイナミクスの記述

一般にロボットマニピュレータの運動方程式は，動力学パラメータに対して線形である．その点に着目して，ロボットマニピュレータの動力学モデルをある線形行列方程式に書き表すことができる．すなわち，以下の超多自由度マニピュレータの運動方程式

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.38)$$

をリグレッサと呼ばれるマニピュレータの運動を記述する行列 $\mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^{2n \times 10n}$ と，動力学パラメータベクトル $\boldsymbol{\rho} \in \mathfrak{R}^{10n}$ を用いることにより，以下のような線形行列方程式に書き表すことができる．

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\rho} \quad (3.39)$$

このような形態で動力学モデルを表現することによって，動力学パラメータが陽に現れるので，その扱いが非常に容易になる．これは，パラメータの不確定性などを扱うロボットマニピュレータの適応制御やロバスト制御などにおいて，非常に有用な表現である．

ここでは，まずラグランジュ法，ニュートン・オイラー法によって，ロボットマニピュレータのリグレッサ行列を導出する．

3.3.1 ラグランジュの運動方程式に基づいたリグレッサ行列の導出

まずはじめに，リンク i の動力学パラメータベクトル $\rho_i \in \mathfrak{R}^{10 \times 1}$ を以下のように定義し直す．

$$\begin{aligned}\rho_i &= [I_{ixx} \ I_{iyy} \ I_{izz} \ I_{iyz} \ I_{ixz} \ I_{ixy} \ m_i r_{ix} \ m_i r_{iy} \ m_i r_{iz} \ m_i]^T \\ &:= [\rho_{i,1} \ \rho_{i,2} \ \rho_{i,3} \ \rho_{i,4} \ \rho_{i,5} \ \rho_{i,6} \ \rho_{i,7} \ \rho_{i,8} \ \rho_{i,9} \ \rho_{i,10}]^T\end{aligned}\quad (3.40)$$

ここで重要なことは，第 i リンクの運動エネルギー T と位置エネルギー U は，第 i リンクの動力学パラメータ集合 ρ_i に関して線形であるという事実である．実際，図.3.2.2より，超多自由度マニピュレータの第 i リンクの運動エネルギー T_i は，以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned}T_i &= \frac{1}{2} \{ \omega_i^T \hat{I}_i \omega_i + m_i \dot{\mathbf{p}}_{c,i}^T \dot{\mathbf{p}}_{c,i} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \omega_i^T (\mathbf{I}_i - m_i [\mathbf{r}_i \times]^2) \omega_i + m_i (\dot{\mathbf{p}}_i + [\mathbf{r}_i \times] \omega_i)^T (\dot{\mathbf{p}}_i + [\mathbf{r}_i \times] \omega_i) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \omega_i^T \mathbf{I}_i \omega_i + m_i \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i + 2m_i \mathbf{r}_i^T [\mathbf{p}_i \times] \omega_i \} \\ &= \frac{1}{2} \{ {}^i \omega_i^T \mathbf{I}_i {}^i \omega_i + m_i {}^i \dot{\mathbf{p}}_i^T {}^i \dot{\mathbf{p}}_i + 2m_i {}^i \mathbf{r}_i^T [{}^i \mathbf{p}_i \times] {}^i \omega_i \} \\ &= \frac{1}{2} [{}^i \omega_i^T [[\omega_i \bullet] [\omega_i \diamond]] \quad 2[{}^i \mathbf{p}_i \times] {}^i \omega_i \quad {}^i \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i] \rho_i\end{aligned}\quad (3.41)$$

また，位置エネルギー U_i は，

$$\begin{aligned}U_i &= -m_i \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{p}_{c,i} \\ &= -\hat{\mathbf{g}}^T (m_i \mathbf{p}_i + \Phi_i m_i \mathbf{r}_i) \\ &= -\hat{\mathbf{g}}^T [\mathbf{o}_6 \ \Phi_i \ \mathbf{p}_i] \rho_i\end{aligned}\quad (3.42)$$

と表すことができる．ただし， $\hat{\mathbf{g}}$ は基準座標系で表した重力ベクトルを表す．

以上，(3.41)，(3.42) より，第 i リンクの運動エネルギーと位置エネルギー両方が，第 i リンクの動力学パラメータの集合 ρ_i に関して線形であることが理解できる．すなわち，(3.10) のラグランジュの運動方程式に対しても動力学パラメータは線形に影響することになる．それらを以下に示す．

いま，運動エネルギー T ，位置エネルギー U は，以下のように記述することができる．

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial T}{\partial \rho_{i,j}} \rho_{i,j}\quad (3.43)$$

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial U}{\partial \rho_{i,j}} \rho_{i,j} \quad (3.44)$$

ゆえに，ラグランジェ関数も以下のように表せる．

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial T}{\partial \rho_{i,j}} \rho_{i,j} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial U}{\partial \rho_{i,j}} \rho_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho_{i,j}} - \frac{\partial U}{\partial \rho_{i,j}} \right) \rho_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial \rho_{i,j}} \rho_{i,j} \end{aligned} \quad (3.45)$$

よって，(3.45) 式のラグランジュ関数は，

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \boldsymbol{\rho} \quad (3.46)$$

となる．これをラグランジュの運動方程式に代入しても，動力学パラメータの線形性は保存されるので，マニピュレータの運動方程式 (3.15) は，(3.39) 式のようなリグレッサを用いての表現が可能である．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \boldsymbol{\rho} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \boldsymbol{\rho} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \right] \boldsymbol{\rho} \\ &= \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\rho} \end{aligned} \quad (3.47)$$

行列 $\Phi \in \mathbb{R}^{2n \times 10n}$ はリグレッサ行列と呼ばれる．また，関節 i に生じるトルクは，リンク i から n までの動力学パラメータから構成される関数であるので，行列 \mathbf{Y} は，以下のような構造をもつ上三角ブロック行列となる．

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}^T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & \cdots & Y_1 \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & \cdots & Y_{2n} \\ 0 & 0 & Y_{33} & Y_{34} & \cdots & Y_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & \cdots & Y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

実際に，ラグランジェの運動方程式に基づいて，リグレッサ行列を導出する場合，運動エネルギーや位置エネルギーの動力学パラメータベクトルに対する偏微分が必要となる．これは，計算機シミュレーションなどにはあまりふさわしくなく，直感的な物理的意味がわかりづらくなるという欠点がある．そこで，次にニュートン，オイラーの運動方程式によりリグレッサ行列を導出する．

3.3.2 ニュートン・オイラーの運動方程式に基づいたリグレッサ行列の記述

動力学パラメータベクトル ρ は，ニュートンオイラーの運動方程式によって，関節変数 θ ，駆動力 f ，駆動トルク n と関係づけられる．

ここで，(2.25)～(3.37) 式より，リンク i の運動によりリンク座標系 Φ_i の原点に作用する力 ${}^i\hat{f}_i$ とそのまわりのモーメント ${}^i\hat{n}_i$ は，次のように求まる．

$$\begin{aligned} {}^i\hat{f}_i &= m_i {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times m_i {}^i\mathbf{r}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times m_i {}^i\mathbf{r}_i) \\ &= m_i {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i + [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times] m_i {}^i\mathbf{r}_i + [{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times]^2 m_i {}^i\mathbf{r}_i \\ &= m_i {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i + \{ [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times]^2 \} m_i {}^i\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} {}^i\hat{n}_i &= {}^iI_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^iI_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i) + m_i {}^i\mathbf{r}_i \times {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i \\ &= [[{}^i\boldsymbol{\omega}_i \bullet] \mid [{}^i\boldsymbol{\omega}_i \diamond]] {}^i\mathbf{i}_i + [{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times] [[{}^i\boldsymbol{\omega}_i \bullet] \mid [{}^i\boldsymbol{\omega}_i \diamond]] {}^i\mathbf{i}_i - [{}^i\ddot{\mathbf{p}}_i \times] m_i {}^i\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (3.50)$$

ここで ${}^i\hat{f}_i$ ， ${}^i\hat{n}_i$ は，リンク i の運動のみによって関節 i に生じる並進力，モーメントである．以上の式 (6.2),(3.50) は，以下のように単一の行列方程式で表すことができる．

$$\begin{bmatrix} {}^i\hat{f}_i \\ {}^i\hat{n}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times] + [\boldsymbol{\omega} \times]^2 & [\dot{\mathbf{p}} \times] \\ [\boldsymbol{\omega} \bullet] + [\boldsymbol{\omega} \times][\boldsymbol{\omega} \bullet] & [\boldsymbol{\omega} \diamond] + [\boldsymbol{\omega} \times][\boldsymbol{\omega} \diamond] & -[\dot{\mathbf{p}} \times] & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_i \quad (3.51)$$

これを以下のように簡潔に表現する．

$$\begin{bmatrix} {}^i \hat{\mathbf{f}}_i \\ {}^i \hat{\mathbf{n}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{B}_i \boldsymbol{\rho}_i \quad (3.52)$$

ここで， $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 10}$ はリンク i の運動を記述する行列であり， $\boldsymbol{\rho}_i$ はリンク i の動力学パラメータベクトルである．以上の式より，リンク i の運動方程式はリンク i の動力学パラメータベクトル $\boldsymbol{\rho}_i$ に関して線形であることがわかる．

一方，リンク $j (j > i)$ の運動によってリンク i に作用する等価な力 \mathbf{f} ， \mathbf{n} は，式(2.32)より，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^i \mathbf{f}_i \\ {}^i \mathbf{n}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{ij} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ [(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times] \boldsymbol{\Phi}_{ij} & \boldsymbol{\Phi}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j \mathbf{f}_j \\ {}^j \mathbf{n}_j \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}d_{ij} \begin{bmatrix} {}^j \mathbf{f}_j \\ {}^j \mathbf{n}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

で与えられる．ゆえに，関節 i で発生する全力・全トルクは，先端寄りのリンクで発生する力・トルクが，中間の関節を介して関節 i に伝達されることにより決定されるので，関節 i で発生する最終的な力 \mathbf{f}_i およびモーメント \mathbf{n}_i は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^i \mathbf{f}_i \\ {}^i \mathbf{n}_i \end{bmatrix} &= \mathbf{B}_i \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{A}d_{i,i+1} \mathbf{B}_{i+1} \boldsymbol{\rho}_{i+1} + \dots + \mathbf{A}d_{i,n} \mathbf{B}_n \boldsymbol{\rho}_n \\ &= \sum_{j=i}^n \mathbf{A}d_{ij} \mathbf{B}_j \boldsymbol{\rho}_j \end{aligned} \quad (3.54)$$

で与えられる．よって，リンク i に働くモーメントは，

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{n}_i &= {}^i \mathbf{n}_{ii} + (\mathbf{n}_{ii} + \mathbf{n}_{ii+1} \dots \mathbf{n}_{in}) \\ &= [0 \quad E_3] \left[\begin{pmatrix} {}^i \mathbf{f}_{ii} \\ {}^i \mathbf{n}_{ii} \end{pmatrix} + \sum_{j=i+1}^n \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1} \dots \mathbf{R}_{j-1} \begin{pmatrix} {}^j \mathbf{f}_{jj} \\ {}^j \mathbf{n}_{jj} \end{pmatrix} \right] \\ &= [0 \quad E_3] \sum_{j=i}^n \mathbf{A}d_{ij} \mathbf{B}_j \boldsymbol{\rho}_j \end{aligned} \quad (3.55)$$

と表現できる．ここで，関節軸 $\mathbf{a}_{s,i}$ ， $\mathbf{a}_{m,i}$ まわりのトルク \mathbf{u}_i は，

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{A}_i^{T_i} \mathbf{n}_i \\ &= [0 \quad \mathbf{A}_i^T] \sum_{j=i}^n \mathbf{A}d_{ij} \mathbf{B}_j \boldsymbol{\rho}_j \\ &= \sum_{j=i}^n \mathbf{Y}_{ij} \boldsymbol{\rho}_j \end{aligned} \quad (3.56)$$

となり，以下の運動学的な連鎖構成に対する簡単な行列表現が導かれる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} & \mathbf{Y}_{14} & \dots & \mathbf{Y}_{1N} \\ 0 & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} & \mathbf{Y}_{24} & \dots & \mathbf{Y}_{2N} \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_{33} & \mathbf{Y}_{34} & \dots & \mathbf{Y}_{3N} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_{44} & \dots & \mathbf{Y}_{4N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1 \\ \boldsymbol{\rho}_2 \\ \boldsymbol{\rho}_3 \\ \boldsymbol{\rho}_4 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_N \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

ただし， (i, j) ブロック $\mathbf{Y}_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 10}$ は，

$$\mathbf{Y}_{ij} = [0 \ \mathbf{A}_i^T] \mathbf{A} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{B}_j \quad (i \leq j) \quad (3.58)$$

である．行列 $\mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^{2n \times 10n}$ がリグレッサ行列となる．

第 4 章

形状トラッキング制御

本章では，適応形状トラッキング制御則を導出する際に用いる形状トラッキング制御法 [8][9] についての説明を行なう．形状トラッキング制御法とは，3 次元空間内にある時変の目標曲線が与えられた際に，マニピュレータのすべてのリンク位置をその与えられた目標曲線に追従させることを目的とする．しかしここで問題となるのが，曲線上のリンク位置に対応する点の曲線パラメータは，一般に解析的には求めることが困難であるということである．ゆえに，制御を行う前にその値を算出することは実用的ではない．そこで，形状トラッキング制御法では，曲線パラメータ推定則により，制御を行いながら，動的に曲線パラメータを推定していく方法を用いている．

ここでは，まず最初に，超多自由度マニピュレータに与えられる目標曲線についての説明を行い，その目標曲線に対していくつかの仮定をおく．次に超多自由度マニピュレータ特有のヤコビ行列である，形状ヤコビ行列を定義し，形状トラッキング制御の問題設定を行う．さらに，マニピュレータと曲線パラメータ推定器をあわせた新しいシステムを考え，そのシステムの性質を議論する．最後に，2 つの種類の形状トラッキング制御法を示す．1 つは逆動力学法 [3] に基づいた制御則である．逆動力学法とは，多入力多出力の干渉のある非線形なマニピュレータシステムを非干渉かつ線形なシステムに変換する手法であり，この非干渉かつ線形なマニピュレータシステムにパラメータ推定器を付け加えることにより，制御の目的を達成することが可能となる．またもう一つは，リャプノフ法 [14] に基づいた制御則である．これは，状態空間内にあるスライディング面と仮想的な目標状態を設定し，システムの状態を直接，目標の状態を追従させるのではなくこの仮想的な目標状態とスライディング面に追従させるものである．この証明は，マニピュレータの力学的な工

エネルギーに関する正定関数を構成し，リアプノフの定理を適用することにより示される．

4.1 目標曲線

[1] 超多自由度マニピュレータに対する目標の形状として，図 4.1 の 3 次元空間上のパラメトリック曲線 c を与える．

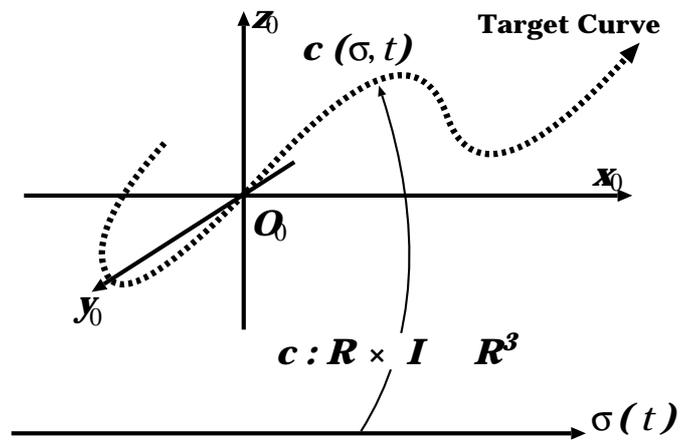


図 4.1: 目標曲線

すなわち，曲線パラメータ $\sigma \in \mathbb{R}$ ，時間 $t \in I := [0, \infty)$ に対して，以下の写像を考える．

$$c: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

本稿では，この曲線 c に対して，以下の 2 つの仮定をおく．

仮定 1

曲線 $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は σ, t に関して少なくとも C^2 級である． \square

仮定 2

任意の t に対して， $c(0, t) = \mathbf{o}$ である．すなわち，この曲線は必ず原点を通る． \square

4.2 形状ヤコビアン

形状トラッキングは，マニピュレータのすべてのリンク位置を時変の目標曲線 $c(t)$ に追従させることを目的とするものである．いま，マニピュレータの各リンク位置が到達すべき目標曲線上の推定位置ベクトル $p_d(\sigma) \in \mathfrak{R}^{3n}$ ，マニピュレータのすべてのリンク位置ベクトルを並べたベクトル $p(\theta) \in \mathfrak{R}^{3n}$ を以下のように定義する．

$$p(\theta) := \begin{bmatrix} p_1(\theta) \\ \vdots \\ p_n(\theta) \end{bmatrix}, \quad p_d(\hat{\sigma}, t) := \begin{bmatrix} c(\hat{\sigma}_1, t) \\ \vdots \\ c(\hat{\sigma}_n, t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ただし， $\hat{\sigma} := [\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ は各リンク位置に対応する曲線パラメータの推定値であり，その値はある微分方程式に従うものとする．本稿では，目標曲線上の推定位置ベクトル $p_d(\sigma) \in \mathfrak{R}^{3n}$ を目標形状と定義する．さらに， $p(\theta) \in \mathfrak{R}^{3n}$ をマニピュレータの形状と定義する．この目標形状 $p_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ と各リンク位置 $p \in \mathfrak{R}^{3n}$ の差を形状誤差 $\hat{e} \in \mathfrak{R}^{3n}$ とし以下のように定義し，さらにその時間微分を考える．

$$\hat{e}(\theta, \hat{\sigma}, t) := p(\theta) - p_d(\hat{\sigma}, t) \quad (4.3)$$

$$\dot{\hat{e}}(\theta, \hat{\sigma}, \dot{\theta}, \dot{\hat{\sigma}}, t) = \frac{\partial p}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial p_d}{\partial \hat{\sigma}} \dot{\hat{\sigma}} - \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) \quad (4.4)$$

$$= J(\theta, \hat{\sigma}, t) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\hat{\sigma}} \end{bmatrix} - \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) \quad (4.5)$$

ただし， $J(\theta, \hat{\sigma}, t) \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は形状ヤコビアンと呼ばれ，

$$J(\theta, \hat{\sigma}, t) := \left[\frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta) \quad - \frac{\partial p_d}{\partial \hat{\sigma}}(\hat{\sigma}, t) \right] \quad (4.6)$$

で表される．本稿では，形状ヤコビアン $J(\theta, \hat{\sigma}, t)$ に以下の仮定をおく．

仮定 3

$\hat{e}(\theta, \hat{\sigma}, t) = 0$ を満たすすべての $\theta, \hat{\sigma}, t$ に対して，

$$\det J(\theta, \hat{\sigma}, t) \neq 0 \quad (4.7)$$

である． □

これは、形状トラッキング制御を行っている際に、マニピュレータの形状が特異にならないということを仮定している。実際、あらかじめ形状ヤコビアンを解析することによって、ヤコビ行列が特異になる形状を予測することができる。ゆえに、制御を行う際にそのような形状を避けることによって、形状ヤコビアンの特異点を回避することが可能である。そのような意味から、この仮定は妥当であるといえる。

4.3 形状トラッキング制御の問題設定

形状トラッキング制御の目標は、マニピュレータの形状を与えられた時変の曲線に追従させることである。以下に、形状トラッキング制御問題を設定する。

形状トラッキング制御問題

マニピュレータの動力学パラメータが完全に既知であるとき、(3.15) の超多自由度マニピュレータモデル、(4.1) の目標曲線を考える。このとき、前節で定義した式 (4.3)、(4.4) の形状誤差 \hat{e} とその時間微分 $\dot{\hat{e}}$ が $t \rightarrow \infty$ で \mathbf{o} すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e} \rightarrow \mathbf{o} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{e}} \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.8)$$

となる制御入力 u を求める。 □

4.4 マニピュレータと曲線パラメータ推定器を含んだシステムダイナミクス

本節では、超多自由度マニピュレータと曲線パラメータ推定器を新しい1つのシステムとみなし、そのダイナミクスを記述し、このダイナミクスに成り立つ性質を示す。

まず、2次のダイナミクスを持つ以下のような曲線パラメータ推定器への入力を考える。

$$M_\sigma \ddot{\sigma} = u_\sigma \quad (4.9)$$

ここで、 $M_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は、正定対称行列、 $u_\sigma \in \mathbb{R}^n$ である。この曲線パラメータ推定器 (4.9) とマニピュレータのダイナミクス (3.15) を一つのシステムとみなすことによって、

以下のような新しいシステムを考える .

$$\bar{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}) = \bar{\boldsymbol{u}} \quad (4.10)$$

ここで , $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{3n}$, $\bar{M} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\bar{\boldsymbol{g}} \in \mathbb{R}^{3n}$, $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^{3n}$ であり ,

$$\boldsymbol{q} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\bar{M}(\boldsymbol{q}) := \begin{bmatrix} M(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & M_\sigma \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\bar{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) := \begin{bmatrix} C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\bar{\boldsymbol{u}} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}_\sigma \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

である .

このような曲線パラメータ推定器を含んだ新しいシステムのダイナミクスに対しても , マニピュレータのダイナミクスに成り立った以下の性質を拡張することができる .

性質 1'

行列 $\bar{M}(\boldsymbol{q})$ は正定対称行列である . すなわち , すべての \boldsymbol{q} , $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して ,

$$\boldsymbol{x}^T \bar{M}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{x} \geq 0. \quad (4.16)$$

が成り立つ . □

性質 2'

行列 $\bar{M}(\boldsymbol{q})$ のノルム $\|\bar{M}(\boldsymbol{q})\|$ は有界であり , 任意の \boldsymbol{q} , $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して ,

$$\bar{M}_m \leq \|\bar{M}(\boldsymbol{\theta})\| \leq \bar{M}_M. \quad (4.17)$$

が成り立つ．ただし， \bar{M}_m, \bar{M}_M はそれぞれ，

$$\bar{M}_m := \min\{M_m, \lambda_m(\mathbf{M}_\sigma)\} \quad (4.18)$$

$$\bar{M}_M := \max\{M_M, \lambda_M(\mathbf{M}_\sigma)\} \quad (4.19)$$

であり， $\lambda_m()$ ， $\lambda_M()$ はそれぞれ最小固有値，最大固有値をあらわす． \square

性質 3' (歪み対称性)

行列 $\dot{\bar{M}}(\mathbf{q}) - 2\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は，歪み対称行列となる．すなわち，任意の \mathbf{q} ， $\dot{\mathbf{q}}$ ， $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{2n}$ に対して，

$$\mathbf{x}^T \{ \dot{\bar{M}}(\dot{\mathbf{q}}) - 2\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \} \mathbf{x} = 0 \quad (4.20)$$

が成り立つ． \square

性質 4' (リグレッサ行列)

(4.10) は，適当な行列 $\bar{Y} \in \mathfrak{R}^{3n \times 11n}$ を用いることにより，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \bar{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{C}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \\ &= \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\bar{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

と表すことが可能である．ここで， $\bar{\boldsymbol{\rho}} \in \mathfrak{R}^{11n \times 1}$ は，動力学パラメータベクトルを拡張したものである． \square

4.5 逆動力学法に基づいた形状トラッキング制御則

以下のような曲線パラメータ推定器を含んだ新しいマニピュレータシステムへの制御入力 $\bar{\mathbf{u}}$ に対して，以下のような非線形状態フィードバック補償を考える．

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{M}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (4.22)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \ddot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_d\dot{\hat{\mathbf{e}}}_c \right\} \quad (4.23)$$

ただし， $\mathbf{K}_p \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ ， $\mathbf{K}_d \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列であり， $\ddot{\mathbf{x}}_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ は，以下のような推定目標形状速度 $\dot{\mathbf{x}}_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ を $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = 0$ で時間微分したものとして定義する．

$$\dot{\mathbf{x}}_d := \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t)$$

$$= \dot{\boldsymbol{p}}_d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{o}, t) \quad (4.24)$$

システムダイナミクス (4.10) と制御入力 (4.22) さらに補助入力 (4.23) を用いることによって、以下の閉ループ系のダイナミクスを得ることができる。

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{e}}} + K_d \dot{\hat{\boldsymbol{e}}} + K_p \hat{\boldsymbol{e}} = \mathbf{o} \quad (4.25)$$

これは、 K_p, K_d が正定対称行列であるならば、形状誤差 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 、とその時間微分 $\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}$ が 0 に収束することを示している。

以上を定理として以下にまとめる。

定理 1(逆動力学法に基づいた形状トラッキング制御則) []

(3.15) で表されるマニピュレータに対して、つぎの制御則 (4.26)、曲線パラメータ推定則 (4.27) を考える。

$$\boldsymbol{u} = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.26)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \quad (4.27)$$

ここで、 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \in \mathbb{R}^{2n}$ 、 $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \in \mathbb{R}^n$ 、 $\dot{\boldsymbol{x}}_d \in \mathbb{R}^{3n}$ は、以下のような変数である。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}, t) \left\{ \ddot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{J}}^{-1}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\dot{\boldsymbol{q}} - K_p \hat{\boldsymbol{e}} - K_d \dot{\hat{\boldsymbol{e}}} \right\}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_d = \dot{\boldsymbol{p}}_d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{o}, t) \quad (4.28)$$

ただし、 $K_p \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ 、 $K_d \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である。

このとき、このシステムは平衡点 $(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = (\boldsymbol{\theta}^*, \dot{\boldsymbol{\theta}}^*)$ に関して局所的に漸近安定となり、形状トラッキングを達成することができる。 □

4.6 リアプノフ法に基づいた形状トラッキング制御則

本節では、形状トラッキング制御問題をリアプノフ法に基づいて解決する方法を説明する。

まず最初に，以下のような仮想的な参照軌跡 $p_r \in \mathfrak{R}^{3n}$ を定義する．

$$p_r := p_d - \Lambda \int_0^t \hat{e} dt \quad (4.29)$$

ここで， $\Lambda \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は，正定対称定数行列である．さらに，形状ヤコビ行列 $J(q, t)$ が正則である (仮定 3) ことを考慮して，式 (5.27) の時間微分を考える．

$$\dot{q}_r = J^{-1}(q, t) \left\{ \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) - \Lambda \hat{e} \right\} \quad (4.30)$$

次に，仮想参照軌跡 q_r を目標軌跡 $q_d(t)$ と置き換える．これは，直接に目標軌跡 $q_d(t)$ を追従するのではなく，仮想的な目標軌跡 $q_d(t)$ を追従させ，そこから目標軌跡に間接的に追従させることを意味する．この仮想参照軌跡によって，間接的ではあるがトラッキングを達成させることができる．したがって， \dot{q}_d , \ddot{q}_d を仮想参照軌道に以下のように置き換える．

$$\dot{q}_r = J^{-1}(q, t) \left\{ \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) - \Lambda \hat{e} \right\} \quad (4.31)$$

いま，以下のような関節空間におけるスライディング面を導入する．

$$\begin{aligned} s_c &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ &= J^{-1}(q, t) J(q, t) \dot{q} - J^{-1}(q, t) \left\{ \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) - \Lambda \hat{e} \right\} \\ &= J^{-1}(q, t) \left\{ \frac{\partial p}{\partial t}(\theta) - \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) + \Lambda \hat{e} \right\} \\ &= J^{-1}(q, t) \left\{ \dot{\hat{e}} + \Lambda \hat{e} \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

スライディング変数 s_c は， \hat{e} , $\dot{\hat{e}}$ の有界性や収束性に関する情報を伝えるものである．すなわち， s_c の定義式 (5.29) より，入力としての s_c を安定な 1 次微分方程式と見ることができ，初期状態が有界ならば， s_c の有界性は， \hat{e} , $\dot{\hat{e}}$ の有界性を保証するものである．すなわち， $t \rightarrow \infty$ で $s_c \rightarrow \mathbf{0}$ を示すことができるのなら， \hat{e} , $\dot{\hat{e}}$ が $\mathbf{0}$ に向かうことが保証される．

いま，以下のような曲線パラメータ推定器を含んだシステム (4.22) への制御入力 \bar{u} を考える．

$$\bar{u} = \bar{M}(q)\ddot{q}_r + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{g}(q)_r - J^T(q, t)K_p \hat{e} - K_v s_c \quad (4.33)$$

ただし, $K_p \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $K_v \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である. システムダイナミクス (4.10) とこの制御入力 \bar{u} , さらにスライディング変数 s_c を用いることによって, 以下の閉ループ系のダイナミクスを得ることができる.

$$\bar{M}(\mathbf{q})\dot{s}_c + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})s_c + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)K_p\hat{e} + K_v s_c = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

ここで, (s_c, \hat{e}) に関して正定な関数 $V_c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ を考える.

$$V(s_c, \hat{e}) = \frac{1}{2}s_c^T \bar{M}(\mathbf{q})s_c + \frac{1}{2}\hat{e}^T K_p \hat{e} \quad (4.35)$$

(4.35) 式の解軌道 (5.32) に沿った時間微分をとると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_c, \hat{e}) &= s_c^T \dot{\bar{M}}(\mathbf{q})s_c + \frac{1}{2}s_c^T \dot{\bar{M}}(\mathbf{q})s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} \\ &= s_c^T \left[-\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})s_c - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)K_p \hat{e} - K_v s_c \right] n + \frac{1}{2}s_c^T \dot{\bar{M}}(\mathbf{q})s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} \\ &= \frac{1}{2}s_c^T \left[\dot{\bar{M}}(\mathbf{q}) - 2\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] s_c - (\mathbf{J}s_c)^T(\mathbf{q}, t)K_p \hat{e} - s_c^T K_v s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} \end{aligned}$$

となり, さらに $s_c^T (\bar{M} - 2\bar{C}) s_c = 0$ (性質 3') とスライディング変数 s_c の定義 (5.29) を考慮すると, $\dot{V}(s_c, \hat{e})$ は, 次のように変形される.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_c, \hat{e}) &= -(\dot{\hat{e}} + \Lambda \hat{e})^T K_p \hat{e} - s_c^T K_v s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} \\ &= -\hat{e}^T \Lambda^T K_p \hat{e} - s_c^T K_v s_c \end{aligned} \quad (4.36)$$

ここで, $\Lambda^T K_p = K_p^T \Lambda$ ならば, $\dot{V}(s_c, \hat{e})$ は \hat{e} と s_c に関して準負定となる. これは, リヤプノフの定理から \hat{e} と s_c が指数関数的に 0 に収束していくことを意味しており, スライディング変数 s_c の定義式 (5.29) より, \hat{e} , $\dot{\hat{e}}$ の指数関数的漸近安定であることを示している.

以上を定理として以下にまとめる.

定理 1(形状トラッキング)[]

(3.15) で表されるマニピュレータに対して, つぎの制御則 (4.37), 曲線パラメータ推定則 (4.38) を考える.

$$\mathbf{u} = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{u}_\theta \quad (4.37)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_r + K_\sigma \mathbf{u}_\sigma \quad (4.38)$$

ここで, $\mathbf{u}_\theta \in \mathfrak{R}^{2n}$, $\mathbf{u}_\sigma \in \mathfrak{R}^n$ は,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_\sigma \end{bmatrix} = -J^T(\mathbf{q}, t)K_p \hat{\mathbf{e}} - K_v(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) \quad (4.39)$$

また, $\dot{\mathbf{q}}_r \in \mathfrak{R}^{3n}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_r \in \mathfrak{R}^{2n}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_r \in \mathfrak{R}^n$ であり,

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r \end{bmatrix} := J^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) - \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\} \quad (4.40)$$

である. ただし, $K_p, \Lambda \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$, $K_\sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $K_v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ は正定対称行列であり, $\Lambda^T K_p = K_p^T \Lambda$ である. このとき, このシステムは平衡点 $(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}_d, \dot{\mathbf{p}}_d)$ に関して局所的に漸近安定となり, 形状トラッキングを達成することができる. \square

第 5 章

適応形状トラッキング制御

前章まで説明した形状トラッキング制御法により，複雑な障害物回避や巻き付き把持などの高度な作業を達成させることが可能となる．しかしこの形状トラッキング制御法は，正確な動力学パラメータの値を必要とし，かつその値は変動しないことを前提としている．これらのパラメータを得る方法としては，ロボットマニピュレータを構成する各部品的设计データから計算したり，マニピュレータモデルの同定をすることが考えられるが，超多自由度ゆえに多くのリンクを持つため，制御に必要なパラメータの個数も非常に多いものとなり，すべてのパラメータ値を算出することは非常に手間のかかる作業となる．また，マニピュレータの動力学モデルに含まれるパラメータ値は，摩擦や外力などの要因により変動，もしくは誤差が生じるため，正確な値を得ることは困難である．以上のような理由から動力学パラメータの知識なしに制御を行ないたいという要求が生じてくる．このようなロボットマニピュレータの動力学パラメータの値が未知であるという状況において有効な制御方法の 1 つに，ロボットマニピュレータの適応制御がある．これは，逆動力学法 [11] や，リアプノフ法 [12] に適当な動力学パラメータ推定機構を組み合わせることにより，動力学パラメータ値が未知であるという状況においてもある有限時間 (適応期間) 後には，関節の目標形状 $p_d(t)$ と実際の形状 $p(t)$ の誤差を 0 に収束させることのできる制御方法である．本章では，この Slotine らによって提案されたロボットマニピュレータ特有の適応制御法を用いて，動力学パラメータの値が未知であっても，超多自由度マニピュレータの形状制御問題を達成することのできる制御則である，適応形状トラッキング制御則を導く．

前章と同様に，2 種類の方法によって適応形状トラッキング制御則を導出する．1 つは，

線形化，非干渉化に基づいた逆動力学法より導かれたものであり，もう1つは，マニピュレータのエネルギーに関したリアプノフ法によるものである．

5.1 準備

本章では，適応形状トラッキング制御則を導出する際に必要となる以下の定理について説明する．

定理：Rayleigh-Ritz

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を正定対称行列とする．また， $\lambda_{\min}(A)$ ， $\lambda_{\max}(A)$ をそれぞれ，行列 A の最小固有値，最大固有値とする．このとき，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\lambda_{\min}(A)\|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)\|x\|^2 \quad (5.1)$$

である．

□

補題：Barbalat

$f(t)$ を微分可能な 時間 t の関数とする．

$$\dot{f}(t) \text{ は一様連続 かつ } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = k < \infty$$

であるならば，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0.$$

である．

□

5.2 逆動力学法に基づいた適応形状トラッキング制御則

いま，マニピュレータシステム (4.10) への入力として，以下のような 制御入力 \bar{u} と 補助入力 \bar{u}_0 を考える．

$$\bar{u} = \hat{M}(q)\bar{u}_0 + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) \quad (5.2)$$

$$\bar{u}_0 = J^{-1}(q, t) \left\{ \ddot{x}_d - \dot{J}^{-1}(q, \dot{q}, t)\dot{q} - K_p \hat{e} - K_d \dot{\hat{e}} \right\} \quad (5.3)$$

ここで, $\hat{M} \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$, $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$, $\hat{g} \in \mathfrak{R}^{3n}$ は, システムのパラメータベクトルの推定値 $\hat{\rho}$ を含んだ行列である. また, $K_p \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$, $K_d \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列であり, $\ddot{x}_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ は, 以下のような推定目標形状速度 $\dot{x}_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ を $\dot{\hat{\sigma}} = 0$ で時間微分したものとして定義する.

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &:= \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) \\ &= \dot{p}_d(\hat{\sigma}, \mathbf{o}, t)\end{aligned}\quad (5.4)$$

ゆえに, この時間微分は

$$\begin{aligned}\ddot{x}_d &:= \ddot{p}_d(\hat{\sigma}, \mathbf{o}, t) \\ &= \dot{J}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_d + J(\mathbf{q}, t)\ddot{q}_d\end{aligned}\quad (5.5)$$

である. リグレッサ行列の性質⁴⁾, および, (5.5) の定義より, 制御入力 \bar{u} は,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \hat{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \ddot{x}_d - \dot{J}^{-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{q} - K_p\hat{e} - K_d\dot{\hat{e}} \right\} \\ &\quad + \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q} + \hat{g}(\mathbf{q}) \\ &= \hat{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}, t) \left[\{ \ddot{x}_d - \ddot{p} \} - K_p\hat{e} - K_d\dot{\hat{e}} \right] \\ &\quad + \hat{M}(\mathbf{q})\ddot{q} + \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q} + \hat{g}(\mathbf{q}) \\ &= \hat{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}, t) \{ \ddot{e} - K_p\hat{e} - K_d\dot{\hat{e}} \} + \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\hat{\rho}\end{aligned}\quad (5.6)$$

ただし, $\bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{2n \times 11n}$, $\hat{\rho} \in \mathfrak{R}^{11n}$ は, システムの推定パラメータである. システムダイナミクス(4.10)と, (5.6) の制御入力 \bar{u} より, 以下の閉ループ系のダイナミクスを得ることができる.

$$\hat{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}, t) \{ \ddot{e} + K_d\dot{\hat{e}} + K_p\hat{e} \} = \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\tilde{\rho}\quad (5.7)$$

ただし,

$$\tilde{\rho} = \bar{\rho} - \hat{\rho}\quad (5.8)$$

であり,

$$\begin{aligned}\bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\tilde{\rho} &= \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})(\hat{\rho} - \bar{\rho}) \\ &= \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\hat{\rho} - \bar{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\bar{\rho} \\ &= \left\{ \hat{M}(\mathbf{q})\ddot{q} + \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q} + \hat{g}(\mathbf{q}) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \{ \bar{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \} \\
= & \{ \hat{M}(\mathbf{q}) - \bar{M}(\mathbf{q}) \} \ddot{\mathbf{q}} \\
& + \{ \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \} \dot{\mathbf{q}} + \{ \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

である .

ここで , 以降の議論を進める上で必要となる以下の 2 つの仮定をおく .

仮定 4(角加速度の測定可能性)

関節の角加速度 $\ddot{\theta}$ は測定可能である . □

仮定 5(システムの推定慣性行列の正則性)

慣性行列の推定値 $\hat{M}(\mathbf{q})$ は , 全ての \mathbf{q} に関して full rank である . □

これらの仮定および仮定 3 のもとで , (5.32) の閉ループ系の式は , 以下のように書き改めることができる .

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \hat{M}^{-1}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tag{5.10}$$

この式は , 状態変数 $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{R}^{6n}$ を

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

ととることによって , 以下のように状態空間表現することが可能である .

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \hat{M}^{-1}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tag{5.12}$$

ただし ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{E}_n \end{bmatrix}$$

この系の安定性を解析するために , 以下のような正定関数を考える

$$V(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{K}_\rho \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tag{5.13}$$

ただし , $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$, $\mathbf{K}_\rho \in \mathfrak{R}^{11n \times 11n}$ は正定対称行列である . さらに , 与えられた正定対称行列 $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ に対して , $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ が成り立つものとする .

正定関数 V の解軌道に沿った時間微分をとると

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi, \hat{\rho}) &= \xi^T P \dot{\xi} + \dot{\xi}^T P \xi + 2\tilde{\rho}^T K_\rho \dot{\hat{\rho}} \\
&= \xi^T P \left\{ A\xi + BJ(q, t)\hat{M}^{-1}(q)\bar{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\rho} \right\} \\
&\quad + \left\{ A\xi + BJ(q, t)\hat{M}^{-1}(q)\bar{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\rho} \right\}^T P \xi \\
&\quad + 2\tilde{\rho}^T K_\rho \dot{\hat{\rho}} \\
&= \xi^T \left\{ PA + A^T P \right\} \xi \\
&\quad + 2\tilde{\rho}^T \bar{Y}^T(q, \dot{q}, \ddot{q})J^T(q, t)\hat{M}^{-1}(q)B^T P \xi \\
&\quad + 2\tilde{\rho}^T K_\rho \dot{\hat{\rho}} \\
&= -\xi^T Q \xi \\
&\quad + 2\tilde{\rho}^T \left\{ \bar{Y}^T(q, \dot{q}, \ddot{q})J(q, t)\hat{M}^{-1}(q)B^T P \xi + K_\rho \dot{\hat{\rho}} \right\} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

いま, $\dot{V}(\xi, \hat{\rho})$ の第 2 項を

$$2\tilde{\rho}^T \left\{ \bar{Y}^T(q, \dot{q}, \ddot{q})J(q, t)\hat{M}^{-1}(q)B^T P \xi + K_\rho \dot{\hat{\rho}} \right\} = 0 \tag{5.15}$$

とすることを考える. $\tilde{\rho} \in \mathfrak{R}^{11n}$ の定義より,

$$\dot{\tilde{\rho}} = \dot{\hat{\rho}} - \dot{\rho} = \dot{\hat{\rho}} \tag{5.16}$$

であるので,

$$\dot{\hat{\rho}} = -K_\rho \bar{Y}^T(q, \dot{q}, \ddot{q})J(q, t)\hat{M}^{-1}(q)B^T P \xi \tag{5.17}$$

と選択することにより, $\dot{V}(\xi, \hat{\rho})$ は,

$$\dot{V}(\xi, \hat{\rho}) = -\xi^T Q \xi \tag{5.18}$$

となり, $\dot{V}(\xi, \hat{\rho})$ は, 準負定となる. ここで, $V(\xi, \hat{\rho})$ は正定関数であるので, 初期値 $\xi(0)$, $\rho(0)$ が有限ならば, ξ と $\hat{\rho}$ は, 有界となる. ゆえに, ある区間 $[0, \infty)$ では,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty \geq 0 \tag{5.19}$$

ここで, V_∞ は, 正の定数である. ここで, V は正定, $\dot{V}(\xi, \hat{\rho})$ 準負定, かつ一様連続であるので, Barbalat's lemma[17] を適用することにより,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \tag{5.20}$$

が示される．これは，Rayleigh-Ritz の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} &= -\xi^T Q \xi \\ &= -\lambda\{Q\} \|\xi\|^2\end{aligned}\quad (5.21)$$

である．ゆえに，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = 0 \quad (5.22)$$

が示される．以下にこれらを定理としてまとめる．

定理 (逆動力学法に基づく適応形状トラッキング制御則)

仮定 3, 仮定 4, 仮定 5 が成立するとき，以下の制御入力 u ，曲線パラメータ推定則 u_σ ，
動力学パラメータ推定則 ρ を含んだシステムを考える．

$$u = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) \quad (5.23)$$

$$\ddot{\sigma} = \ddot{\sigma}_d \quad (5.24)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -K_p Y^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) J(\theta, t) \hat{M}^{-1}(\theta) P \dot{\theta} \quad (5.25)$$

ここで， $Y^T(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は，性質 3 のリグレッサ行列， $J(\theta, t) \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は形状ヤコビアン． $P \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は与えられた正定対称行列 $Q \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ に対して， $A^T P + P A = -Q$ が成り立つものとする．また， $\ddot{\theta}_d \in \mathfrak{R}^{2n}$ ， $\ddot{\sigma}_d \in \mathfrak{R}^n$ ， $\dot{x}_d \in \mathfrak{R}^{3n}$ は，以下のような変数である．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_d \\ \ddot{\sigma}_d \end{bmatrix} &= J^{-1}(q, t) \left\{ \ddot{x}_d - \dot{J}^{-1}(q, \dot{q}, t) \dot{q} - K_p \hat{e} - K_d \dot{\hat{e}} \right\} \\ \dot{x}_d &= \dot{p}_d(\hat{\sigma}, \mathbf{o}, t)\end{aligned}\quad (5.26)$$

ただし， $K_p \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ ， $K_d \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である．

これらの制御則により形状トラッキング誤差 \hat{e} およびその時間微分 $\dot{\hat{e}}$ は，漸近的に 0 に近づく． \square

明らかにパラメータの真値への収束性 $\hat{\rho} \rightarrow \rho$ は保証されない．しかし，(5.13) の正定関数 V の有界性より， M^{-1} が存在するのなら，動力学パラメータの推定値 $\hat{\rho}$ の有界性は結論できる．

また，ここで示した逆動力学法に基づく適応形状トラッキング制御則の有用性は，2つの仮定次第である．すなわち，リグレッサ行列を算出する際に必要となる仮定1と動力学パラメータ推定則を計算する際に必要となる仮定2次第である．理論的にも実的にもこれらの仮定は受け入れられ難い．実際，ほとんどの産業用マニピュレータは位置，速度に関するセンサしか持っておらず，もし，角加速度センサがある場合でも角加速度を正確に計測することは事実上困難である．さらに，仮定2に関しては，有界な $\hat{M}^{-1}(\mathbf{q})$ が存在することを保証させるために，あらかじめ $\hat{M}^{-1}(\mathbf{q})$ が存在するパラメータ ρ の領域を求めておき，動力学パラメータ推定則のパラメータ更新変化率を変えることにより，パラメータが領域 Ω を離れないような方法に改良する方法が提案されている [18]．しかし，未知の非常に大きな負荷が急にリンクに加わった場合は， M^{-1} の存在を保証させることは難しく，また，制御前に領域 Ω を求めることも困難である．

5.3 リアプノフ法に基づいた適応形状トラッキング制御則

まず最初に，形状トラッキング制御の場合と同様に，以下のような仮想的な参照軌跡 $\mathbf{p}_r \in \mathbb{R}^{3n}$ ，それを時間微分することによって得られる $\mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^{3n}$ ，および関節空間におけるスライディング面 $\mathbf{s}_c \in \mathbb{R}^{3n}$ を定義する．これらの変数の説明は，前章の形状トラッキング制御の場合と同じである．

$$\mathbf{p}_r := \mathbf{p}_d - \Lambda \int_0^t \hat{\mathbf{e}} dt \quad (5.27)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) - \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_c &= \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

ここで， $\Lambda \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は，正定対称定数行列である．また，仮定3が成り立つものとする．すなわち，任意の \mathbf{q}, t に対して形状ヤコビ行列 $\mathbf{J}(\mathbf{q}, t)$ は正則である．

いま，(4.10)のダイナミクスで表されるこのシステムへの入力 $\bar{\mathbf{u}}$ を以下のように与える．

$$\bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})_r - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)\mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_v\mathbf{s}_c \quad (5.30)$$

ただし, $K_p \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $K_v \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である. また, $\hat{M} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\hat{g} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ はすべて推定値を表しており, マニピュレータの動力学パラメータを含むこのシステムのパラメータベクトルを $\rho \in \mathbb{R}^{11n}$ とすると性質 3' より, リグレッサ行列を用いて以下のように記述できる.

$$\hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{g}(q)_r = \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\rho} \quad (5.31)$$

システムダイナミクス (4.10) とこの制御入力 \bar{u} , さらにスライディング変数 s_c を用いることによって, 以下の閉ループ系のダイナミクスを得ることができる.

$$\bar{M}(q)\dot{s}_c + \bar{C}(q, \dot{q})s_c + J^T(q, t)K_p\hat{e} + K_v s_c = \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\rho} \quad (5.32)$$

前章の形状トラッキング制御における閉ループ系のダイナミクスとの違いは, 右辺に現れる. すなわち, パラメータ推定誤差に関する項が右辺に影響していることがわかる.

以上をふまえて, \hat{e} , $\dot{\hat{e}}$ の o への収束性, $\hat{\rho}$ の ρ への収束性を同時に測る尺度として, 次のような 2 次形式で表される $(s_c, \hat{e}, \hat{\rho})$ に関して正定関数を考える.

$$V(s_c, \hat{e}, \hat{\rho}) = \frac{1}{2}s_c^T \bar{M}(q)s_c + \frac{1}{2}\hat{e}^T K_p \hat{e} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}^T K_\rho^{-1} \tilde{\rho} \quad (5.33)$$

ただし, $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^r$ は, 推定パラメータ誤差を表すベクトルであり, $\tilde{\rho} = \hat{\rho} - \rho$ で与えられる. ここで, (5.32) 式の解軌道に沿った時間微分をとると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_c, \hat{e}, \hat{\rho}) &= \frac{1}{2}s_c^T \dot{\bar{M}}(q)s_c + s_c^T \bar{M}(q)\dot{s}_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} + \tilde{\rho}^T K_\rho^{-1} \dot{\tilde{\rho}} \\ &= \frac{1}{2}s_c^T \dot{\bar{M}}(q)s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} + \tilde{\rho}^T K_\rho^{-1} \dot{\tilde{\rho}} \\ &\quad + s_c^T \{ \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\rho} - \bar{C}(q, \dot{q})s_c - J^T(q, t)K_p\hat{e} - K_v s_c \} \\ &= \frac{1}{2}s_c^T \{ \dot{\bar{M}}(q) - 2\dot{\bar{C}}(q, \dot{q}) \} s_c + \hat{e}^T K_p \dot{\hat{e}} - s_c^T J^T(q, t)K_p\hat{e} \\ &\quad - s_c^T K_v s_c + \{ \dot{\tilde{\rho}}K_\rho^{-1} + s_c \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \} \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (5.34)$$

ここで, $s_c^T (\dot{\bar{M}} - 2\dot{\bar{C}}) s_c = 0$ (性質 3') および, スライディング変数 s_c の定義 (5.29) を考慮し, $\dot{V}(s_c, \hat{e}, \hat{\rho})$ を, さらに次のように展開する.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_c, \hat{e}, \hat{\rho}) &= \hat{e}^T K_p \{ J(q, t)s_c - \Lambda\hat{e} \} - s_c^T J^T(q, t)K_p\hat{e} \\ &\quad - s_c^T K_v s_c + \{ \dot{\tilde{\rho}}K_\rho^{-1} + s_c \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \} \tilde{\rho} \\ &= -\hat{e}^T K_p \Lambda\hat{e} - s_c^T K_v s_c + \{ \dot{\tilde{\rho}}K_\rho^{-1} + s_c \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \} \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (5.35)$$

いま, $\dot{V}(s_c, \hat{e}, \hat{\rho})$ の第 3 項を

$$\{\dot{\tilde{\rho}}K_\rho^{-1} + s_c \bar{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\} \tilde{\rho} = 0 \quad (5.36)$$

とすることを考える. $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^r$ の定義より,

$$\dot{\tilde{\rho}} = \dot{\hat{\rho}} - \dot{\rho} = \dot{\hat{\rho}} \quad (5.37)$$

であるので,

$$\dot{\hat{\rho}} = -K_\rho Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tilde{\rho} \quad (5.38)$$

と選択することにより, $\dot{V}(s_c, \hat{e}, \hat{\rho})$ は,

$$\dot{V} = -s_c^T K_v s_c - \hat{e}^T \Lambda^T K_\rho^{-1} \hat{e} \quad (5.39)$$

となる. ここで, $V(s_c, \hat{e}, \hat{\rho})$ は正定関数であるので, $s_c, \hat{e}, \hat{\rho}$ は有界となる. ゆえに, ある区間 $[0, \infty)$ では,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty \geq 0 \quad (5.40)$$

ここで, V_∞ は, 正の定数である. ここで, V は正定, $\dot{V}(\xi, \tilde{\rho})$ 準負定, かつ一様連続であるので, Barbalat's lemma[17] を適用することにより,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \quad (5.41)$$

が示される [17]. これは, Rayleigh-Ritz の定理より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} &= -s^T K_v s - \hat{e}^T \Lambda^T K_\rho^{-1} \hat{e} \\ &= -\lambda\{K_v\} \|s\|^2 - \lambda\{\Lambda^T K_\rho^{-1}\} \|\hat{e}\|^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

である. ゆえに,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e} = \mathbf{0} \quad (5.43)$$

となり, s の定義 (5.29) より, 出力誤差 s が, 以下の sliding surface へ収束することを示している.

$$s = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = 0 \quad (5.44)$$

$t \rightarrow \infty$ のとき, $\tilde{q} \rightarrow 0$ となるので, u, u_σ, ρ による制御系は, 漸近安定となり, 追従誤差の定常偏差が 0 に収束することを保証する. すなわち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e} = \mathbf{o}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{e}} = \mathbf{o} \quad (5.45)$$

が成り立つ. □

以下に, リアプノフの方法に基づいた適応形状トラッキング制御則を定理としてまとめる

定理 (リアプノフ法に基づいた適応形状トラッキング制御則)

(3.15) で表されるマニピュレータに対して, つぎの制御則 (5.46), 曲線パラメータ推定則 (5.47), 動力学パラメータ推定則 (5.48) を考える.

$$u = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r) \hat{\rho} - \frac{\partial p^T}{\partial \theta}(\theta) K_p \hat{e} - K_{d,\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_r) \quad (5.46)$$

$$\ddot{\hat{\sigma}} = \ddot{\hat{\sigma}}_r - K_\sigma \left\{ \frac{\partial p_d^T}{\partial \hat{\sigma}}(\hat{\sigma}, t) K_p \hat{e} - K_{d,\sigma}(\dot{\hat{\sigma}} - \dot{\hat{\sigma}}_r) \right\} \quad (5.47)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -K_\rho Y^T(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)(\dot{\theta} - \dot{\theta}_r) \quad (5.48)$$

ここで $\dot{\theta}_r \in \mathfrak{R}^{2n}$, $\dot{\hat{\sigma}}_r \in \mathfrak{R}^n$ は, 以下のような補助変数である.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\hat{\sigma}}_r \end{bmatrix} := J^{-1}(\theta, \hat{\sigma}, t) \left\{ \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) - \Lambda \hat{e} \right\} \quad (5.49)$$

また, $K_\sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $K_\rho \in \mathfrak{R}^{10n \times 10n}$, $K_p, \Lambda \in \mathfrak{R}^{3n \times 3n}$, $K_{d,\theta} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, $K_{d,\sigma} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ は正定対称行列である.

このとき, マニピュレータの動力学パラメータ ρ の値が未知である場合においても, 形状トラッキングを達成することができる. □

この証明から明らかなように, パラメータの真値への収束性 $\hat{\rho} \rightarrow \rho$ は保証されない. しかし, (5.33) の正定関数 V の有界性より, 動力学パラメータの推定値 $\hat{\rho}$ の有界性は結論できる. パラメータ誤差ベクトル $\tilde{\rho}$ の 0 への収束性に関しては, 目標曲線の軌道が関係する. リグレッサ行列の rank が full rank ならば, すべてのパラメータは真値に収束することが示されている [17].

リアプノフ法によって導出された制御則は逆動力学法より導出された制御則と同様に、マニピュレータへの制御入力、曲線パラメータ推定則および動力学パラメータ推定則から構成されている。両者とも構造的には似通ったものであるが、リアプノフ法に基づいた制御則は関節の角加速度情報を必要としないことや、動力学パラメータの存在領域を考慮する必要がないなどの長所を持つ。

また、本章で導出した適応形状トラッキング制御則の大きな特徴は、2つの推定器を含んでいることである。すなわち、動力学パラメータと目標曲線パラメータの2種類のパラメータの推定を同時に行ないながら、形状トラッキング制御を行なうこととなる。動力学パラメータ ρ が既知の場合の形状トラッキング則 [8] と比較すると、(5.48) の動力学パラメータ推定が付け加わっているだけで、その構造はまったく等しい。

第 6 章

制御則の再帰的表現

本章では，リアプノフ法に基づいて得られた制御則を各リンク単位の再帰的な制御則に分解することを目的とする．前章において導出された適応形状トラッキング制御則は，ラグランジェの運動方程式によって得られるマニピュレータのダイナミクスに基づいて導かれている．よって，実際に制御則を計算する際には複雑かつ多くの行列演算を含み，かつ冗長な計算も多い．これは，ラグランジェ法に基づいて得られたマニピュレータのダイナミクスは，マニピュレータをマクロな一つのシステムとしてみなした場合のダイナミクスに対応しているからである．

そこで，ラグランジェ法に基づいて得られた制御則をマニピュレータの運動方程式や形状ヤコビ行列などの特徴を考慮し，各リンクに関する再帰的な制御則に分解する．適応形状トラッキング制御則は，3つの制御則からなる．マニピュレータへの制御入力，曲線パラメータ推定器への入力，動力学パラメータ推定器への入力である．これらのうち，マニピュレータへの制御入力，曲線パラメータ推定器への入力に関しては，超多自由度マニピュレータ特有の形状ヤコビ行列の性質を用いて，各リンク単位への分解が可能である．[2]．一方，動力学パラメータ推定則に関しては，マニピュレータのリグレッサ行列の特徴を利用することによって再帰的表現を求めることが可能である．

分解後の制御則はマニピュレータの各リンクに関する速度や角速度などの運動学的な情報から構成されているため，物理的にわかりよい制御則となっている．さらに，マニピュレータへの制御入力の計算で用いたマニピュレータのダイナミクスの計算結果および，形状誤差，速度に関する比例微分項の計算結果をパラメータ推定則を計算する際に漸化的に利用できるなどの，制御則を計算機に実装する際に有効な多くの性質を持っている．

本章の構成としては，まず最初に仮想参照軌道を含んだリグレッサ行列についての一般的な表現を求める．さらに，形状ヤコビ行列の特徴などを考慮して，マニピュレータへの入力と曲線パラメータ推定器への入力に関して各リンク単位に分解された制御則を示す．そして最後に，動力学パラメータ推定則の各リンク単位の表現を導出する．

6.1 仮想参照軌跡を含んだリグレッサ行列

本節では，リアプノフ法によって得られた制御入力 (5.46)，動力学パラメータ推定則 (5.48) に含まれるリグレッサ行列の構造を調べる．そして，リグレッサ行列と仮想参照軌跡 $\theta_{r,i}$ との関係を明らかにすることによって，仮想参照軌跡 $\theta_{r,i}$ を含んだリグレッサ行列を導出する．

まず，仮想参照軌跡 $\theta_{r,i}$ を含んだ以下のようなリグレッサ行列を考える．

$$\begin{aligned} u &= M(\theta)\ddot{\theta}_r + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_r + g(\theta) \\ &= Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}_r, \dot{\theta}_r)\rho \end{aligned} \quad (6.1)$$

仮想参照軌跡 q_r を含む場合，リンク i の運動によりリンク座標系 Φ_i の原点に作用する力 ${}^i\hat{f}_i$ とそのまわりのモーメント ${}^i\hat{n}_i$ は，次のように求まる．

$$\begin{aligned} {}^i\hat{f}_i &= m_i\Phi_{w,i}{}^{i-1}\ddot{p}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_{m,i} \times m_i{}^i r_i \\ &\quad + {}^i\omega_{r,i} \times ({}^i\omega_i \times m_i{}^i r_i) + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_{r,i} \times m_i{}^i r_i) \\ &= m_i\Phi_{w,i}{}^i\ddot{p}_{i-1} \\ &\quad + \left\{ [{}^i\dot{\omega}_{m,i} \times] + \frac{1}{2} ([{}^i\omega_{r,i} \times][{}^i\omega_i \times] + [{}^i\omega_i \times][{}^i\omega_{r,i} \times]) \right\} m_i{}^i r_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} {}^i\hat{n}_i &= {}^iI_i{}^i\dot{\omega}_{m,i} + \frac{1}{2} [{}^i\omega_i \times ({}^iI_i\omega_{r,i}) + {}^i\omega_{r,i} \times ({}^iI_i\omega_i)] + m_i{}^i r_i \times {}^i\ddot{p}_i \\ &= [{}^i\omega_i \bullet \mid [{}^i\omega_i \diamond]] {}^i i_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ [{}^i\omega_{r,i} \times][{}^i\omega_i \bullet \mid [{}^i\omega_i \diamond]] + [{}^i\omega_i \times][{}^i\omega_{r,i} \bullet \mid [{}^i\omega_{r,i} \diamond]] \right\} {}^i i_i \\ &\quad - [{}^i\ddot{p}_i \times] m_i{}^i r_i \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで， ${}^i\omega_j \in \mathfrak{R}^3$ は第 i リンク座標系で表した第 j リンクの角速度ベクトル， ${}^i\omega_{r,j}$ ， ${}^i\dot{\omega}_{r,j}$ ， ${}^i\dot{p}_{r,j}$ ， ${}^i\ddot{p}_{r,j} \in \mathfrak{R}^3$ はそれぞれ (5.49) の仮想参照軌道 $\theta_{r,j}$ に関する第 j リンクの手速度，加速度，角速度，

角加速度ベクトルであり，以下のように定義される．

$${}^i\dot{\mathbf{p}}_{r,i} := {}^i\dot{\mathbf{p}}_i|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\boldsymbol{\theta}}_r}, \quad {}^i\ddot{\mathbf{p}}_{\bar{r},i} := {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}^2=\dot{\boldsymbol{\theta}}_j\dot{\boldsymbol{\theta}}_{r,j}} \quad (6.4)$$

$${}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i} := {}^i\boldsymbol{\omega}_i|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\boldsymbol{\theta}}_r}, \quad y^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},i} := {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}^2=\dot{\boldsymbol{\theta}}_j\dot{\boldsymbol{\theta}}_{r,j}} \quad (j = 1..i) \quad (6.5)$$

3章の仮想参照軌跡を含まない場合と同様な議論によって，この式は以下のような線形な行列方程式の形に変形することができる．

$$\begin{bmatrix} {}^i\hat{\mathbf{f}}_i \\ {}^i\hat{\mathbf{n}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{r,i}\boldsymbol{\rho}_i \quad (6.6)$$

$$\mathbf{B}_{r,i} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & B_{r,i,13} & {}^i\ddot{\mathbf{p}}_{\bar{r},i} \\ B_{r,i,21} & B_{r,i,22} & -[{}^i\ddot{\mathbf{p}}_{\bar{r},i} \times] & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$B_{r,i,13} := [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},s,i} \times] + \frac{1}{2} \left([{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \times] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \times] \right) \quad (6.8)$$

$$B_{r,i,21} := [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},s,i} \bullet] + \frac{1}{2} \left([{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \bullet] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \bullet] \right) \quad (6.9)$$

$$B_{r,i,22} := [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},s,i} \diamond] + \frac{1}{2} \left([{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \diamond] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,s,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{s,i} \diamond] \right) \quad (6.10)$$

$$B_{r,i,31} := [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},m,i} \bullet] + \frac{1}{2} \left([{}^i\boldsymbol{\omega}_{m,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,m,i} \bullet] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,m,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{m,i} \bullet] \right) \quad (6.11)$$

$$B_{r,i,32} := [{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},m,i} \diamond] + \frac{1}{2} \left([{}^i\boldsymbol{\omega}_{m,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,m,i} \diamond] + [{}^i\boldsymbol{\omega}_{r,m,i} \times][{}^i\boldsymbol{\omega}_{m,i} \diamond] \right) \quad (6.12)$$

で定義される．さらに， ${}^i\boldsymbol{\omega}_i = [{}^i\omega_{i,x} \ {}^i\omega_{i,y} \ {}^i\omega_{i,z}]^T$ とすると，

$$[{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times] := \begin{bmatrix} 0 & -{}^i\omega_{i,z} & {}^i\omega_{i,y} \\ {}^i\omega_{i,z} & 0 & -{}^i\omega_{i,x} \\ -{}^i\omega_{i,y} & {}^i\omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$[{}^i\boldsymbol{\omega}_i \bullet] := \begin{bmatrix} {}^i\omega_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^i\omega_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & {}^i\omega_{i,z} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$[{}^i\boldsymbol{\omega}_i \diamond] := \begin{bmatrix} 0 & {}^i\omega_{i,z} & {}^i\omega_{i,y} \\ {}^i\omega_{i,z} & 0 & {}^i\omega_{i,x} \\ {}^i\omega_{i,y} & {}^i\omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$B_{r,i} \in \mathbb{R}^{6 \times 10}$ は仮想参照軌道を考慮したリンク i の運動を記述する行列であり, $\rho_i \in \mathbb{R}^{10}$ はリンク i の動力学パラメータベクトルである. 以上の式より, 仮想参照軌道を含んだリンク i の運動方程式もリンク i の動力学パラメータベクトル ρ_i に関して線形に表されることが示された.

ゆえに, 仮想参照軌道を含むリグレッサ行列 $Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)$ の第 (i, j) ブロック $Y_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 10}$ は,

$$Y_{ij} := \begin{cases} Ad_{ij}^T B_{r,j} & (j > i) \\ \mathbf{0}_{2 \times 10} & (j \leq i) \end{cases} \quad (6.16)$$

で与えられる.

6.2 制御則の各リンク単位の再帰的表現

本章では各リンクに対する制御則を考えたいため, 制御則に含まれるゲイン行列 K_p , K_v , K_σ , K_ρ , および Λ は以下のような正定ブロック対角行列であるとする.

$$\begin{aligned} K_p &= \text{blockdiag}\{K_{p,1}, \dots, K_{p,n}\} \\ K_d &= \text{blockdiag}\{K_{d,1}, \dots, K_{d,n}\} \\ K_\sigma &= \text{blockdiag}\{k_{\sigma,1}, \dots, k_{\sigma,n}\} \\ K_\rho &= \text{blockdiag}\{K_{\rho,1}, \dots, K_{\rho,n}\} \\ \Lambda &= \text{blockdiag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \end{aligned}$$

6.2.1 制御入力 of 再帰的表現

以下は, マニピュレータへの制御入力 (5.46) である.

$$\mathbf{u} = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r) \hat{\rho} - \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \theta}(\theta) K_p \hat{\mathbf{e}} - K_{d,\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_r) \quad (6.17)$$

仮想参照軌道を含んだリグレッサ行列 (6.16) と形状ヤコビアン of の構造 [6] を考慮すると, 第 i リンクに関する制御入力を以下のような再帰的な表現を用いて表せる.

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \hat{\rho}_j - \sum_{j=i}^n \left(\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial \theta_i} \right)^T K_{p,j} \hat{\mathbf{e}}_j - K_{v,i} \dot{\theta}_i$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{A} d_{ij} \mathbf{B}_{r,j} \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \right) - \mathbf{A}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T \left(\boldsymbol{\beta}_i - \mathbf{p}_{i-1} \times \boldsymbol{\alpha}_i \right) - \mathbf{K}_{v,i} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (6.18)$$

ただし,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \mathbf{K}_{p,i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (6.19)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{i+1} + \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (6.20)$$

$$(6.21)$$

である.

6.2.2 曲線パラメータ推定則の再帰的表現

リアプノフ法による曲線パラメータ推定則は, 以下で与えられる.

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_r - \mathbf{K}_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_d^T}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_{d,\sigma} (\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r) \right\} \quad (6.22)$$

よって, 第 i リンクに関する曲線パラメータ推定則は, 形状ヤコビアン of の性質を用いることよって, 以下のように表される [6].

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_i = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_{r,i} - \mathbf{K}_{\sigma,i} \left\{ \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma_i}(\hat{\sigma}_i) \right\}^T \mathbf{K}_{p,j} \hat{\mathbf{e}}_j - \mathbf{K}_{v,i} \{ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r,i} \} \quad (6.23)$$

6.2.3 動力学パラメータ推定則

以下は, リアプノフ法によって導かれた動力学パラメータ推定則である.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = -\mathbf{K}_\rho \mathbf{Y}^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)(\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}_r) \quad (6.24)$$

よって, 第 i リンクの動力学パラメータベクトルに対するパラメータ推定則 $\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_i \in \mathbb{R}^{10}$ は,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_i = -\mathbf{K}_{\rho,i} \sum_{j=1}^i \left\{ \mathbf{Y}_{ij}^T (\dot{\boldsymbol{\theta}}_j - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{r,j}) \right\} \quad (6.25)$$

で与えられる. さらに, リグレッサ行列の (i, j) ブロック (6.16) を用いることにより以下のように式変形できる.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_i = -\mathbf{K}_{\rho,i} \mathbf{A}_i^T \sum_{j=1}^i \left\{ \mathbf{A} d_{ij} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_j - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{r,j}) \right\}$$

$$= -K_{\rho,i} B_i^T \begin{bmatrix} {}^i\dot{\mathbf{p}}_i - {}^i\dot{\mathbf{p}}_{r,i} \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_i - {}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

さらに，各パラメータ単位の推定則を計算するために， $K_{\rho,i}$ は以下のような正定対角ブロック行列であるとする．

$$K_{\rho,i} = \text{blockdiag}\{K_{\rho,i}^I, K_{\rho,i}^{mr}, k_{\rho,i}^m\} \quad (6.27)$$

ただし， $K_{\rho,i}^I \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ ， $K_{\rho,i}^{mr} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ ， $k_{\rho,i}^m \in \mathfrak{R}$ である．ゆえに，第 i リンクの各動力学パラメータに対する推定則は，

$$\hat{{}^i\dot{\mathbf{i}}}_i = -K_{\rho,i}^I \begin{bmatrix} [({}^i\boldsymbol{\omega}_i - {}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i}) \bullet] \\ [({}^i\boldsymbol{\omega}_i - {}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i}) \diamond] \end{bmatrix} \left\{ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\bar{r},i} + \frac{1}{2} ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i}) \right\} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_i {}^i\mathbf{r}_i &= -K_{\rho,i}^{mr} \left\{ B_{r,13}^T ({}^i\dot{\mathbf{p}}_i - {}^i\dot{\mathbf{p}}_{r,i}) \right. \\ &\quad \left. + {}^i\ddot{\mathbf{p}}_{\bar{r},i} \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i - {}^i\boldsymbol{\omega}_{r,i}) \right\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\hat{m}_i = -k_{\rho,i}^m {}^i\dot{\mathbf{p}}_{m,i}^T ({}^i\dot{\mathbf{p}}_i - {}^i\dot{\mathbf{p}}_{\bar{r},i}) \quad (6.30)$$

となる．

第 7 章

シミュレーション結果

本章では、5 章で導出したリアブノフ法に基づいた適応形状トラッキング制御則を 6 章で示した各リンクに関する再帰的な制御則を用いてシミュレーションを行い、制御則とその計算アルゴリズムの有効性を検証する。

7.1 シミュレーション環境

本シミュレーションは、以下のような環境で行なった。

- indigo2 Maximum IMPACT
- IRIX 5.3
- MATLAB, SIMULINK ver.4
- 機構解析プログラム Dads ver.8

また、シミュレーションで用いた運動学パラメータおよび、そのパラメータ値をより算出した動力学パラメータ値をそれぞれ表 7.1、表 7.2 に示す。

簡単のため、本シミュレーションにおいては、すべてのゲイン行列を以下のような対角行列と仮定し、それぞれのゲインの値を図 7.3 に示す。すなわち、 $K_p = k_p I$ 、 $K_v = k_v I$ 、 $K_\sigma = k_\sigma I$ 、 $A = \lambda I$ 、 $K_{\sigma,p} = k_{\sigma,p} I$ 、 $K_{\sigma,d} = k_{\sigma,d} I$ 、 $K_{\rho,i} = k_{\rho,i} I$ 、 $K_{\rho,mr} = k_{\rho,mr} I$ 、 $K_{\rho,mr} = k_{\rho,mr} I$ 、

リンク数	:	10
自由度数 n	:	20
リンク長	$l_i (i = 1..n)$	0.1000 [m]
質量中心距離	$r_i (i = 1..n)$	0.0500 [m]
リンク質量	$m_i (i = 1..n)$	1.0000 [kg]

表 7.1: 運動学パラメータ

$I_{xx} (i = 1..n)$	0.0012 [kgm^2]
$I_{yy} (i = 1..n)$	0.0014 [kgm^2]
$I_{zz} (i = 1..n)$	0.0014 [kgm^2]
$I_{yz} (i = 1..n)$	0.0000 [kgm^2]
$I_{xz} (i = 1..n)$	0.0000 [kgm^2]
$I_{xy} (i = 1..n)$	0.0000 [kgm^2]
$mr_x (i = 1..n)$	0.0500 [kgm]
$mr_y (i = 1..n)$	0.0000 [kgm]
$mr_z (i = 1..n)$	0.0000 [kgm]
$m (i = 1..n)$	1.0000 [kg]

表 7.2: 動力学パラメータ

k_p	30.0000
k_d	1.0000
$k_{\rho,I}$	0.0001
$k_{\rho,mr}$	0.0010
$k_{\rho,m}$	1.0000
$k_{\sigma,p}$	15.0000
$k_{\sigma,d}$	0.5000
λ	5.0000
$k_{\sigma,d}$	0.5000

表 7.3: フィードバックゲイン

また，目標曲線 c は，以下のような周期 2 秒の螺旋を与える．

$$c(\sigma, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \{2 \cos(\pi t) + 5\} \sigma \\ \frac{1}{10} \{ \cos u(\sigma, t) \} \\ \frac{1}{10} [\sin \{ u(\sigma, t) \} + 1] \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

サンプリング時間は 0.001 秒，0 ~ 10 秒でシミュレーションを行なった．

7.2 シミュレーション結果

まず最初に，従来までの形状トラッキング制御則を用いた場合で，動力学パラメータに誤差を含む場合と含まない場合のシミュレーション結果を図 7.1 から 図 7.4 に示す．ただし，それぞれのグラフは図 7.1 は形状誤差，図 7.2 は形状誤差の時間微分，図 7.3 は入力トルク，図 7.4 は曲線パラメータ誤差を表し，破線が動力学パラメータに誤差を含まない場合の結果，実線が動力学パラメータに誤差を含む場合での結果である．

動力学パラメータに誤差を含まない場合は，形状誤差およびその時間微分ともに 0 に収束していることがわかる．すなわち，形状トラッキングを達成している．それに対して，動力学パラメータに誤差を含む場合は，形状誤差およびその時間微分ともに 0 に収束しておらず，また，入力トルクに関しても動力学パラメータ誤差を含まない場合と比較して，大きくなっていることがわかる．

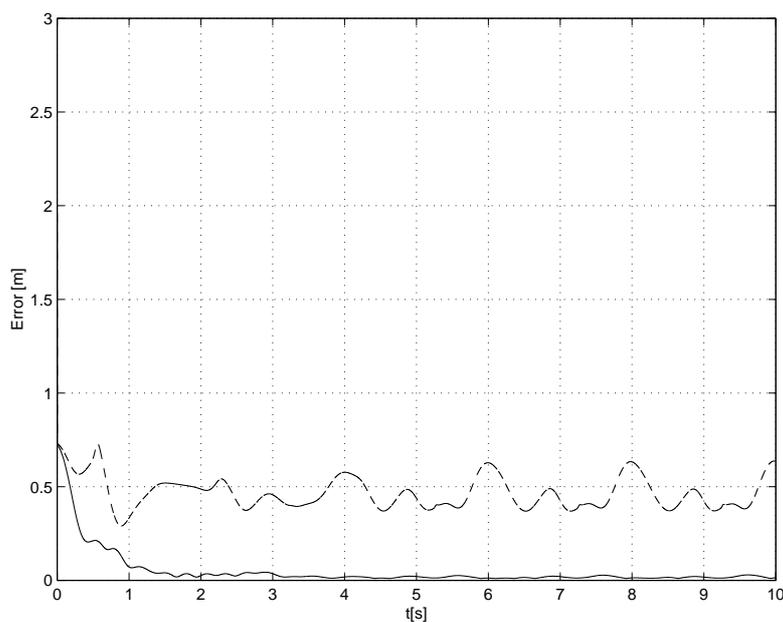


図 7.1: 形状誤差

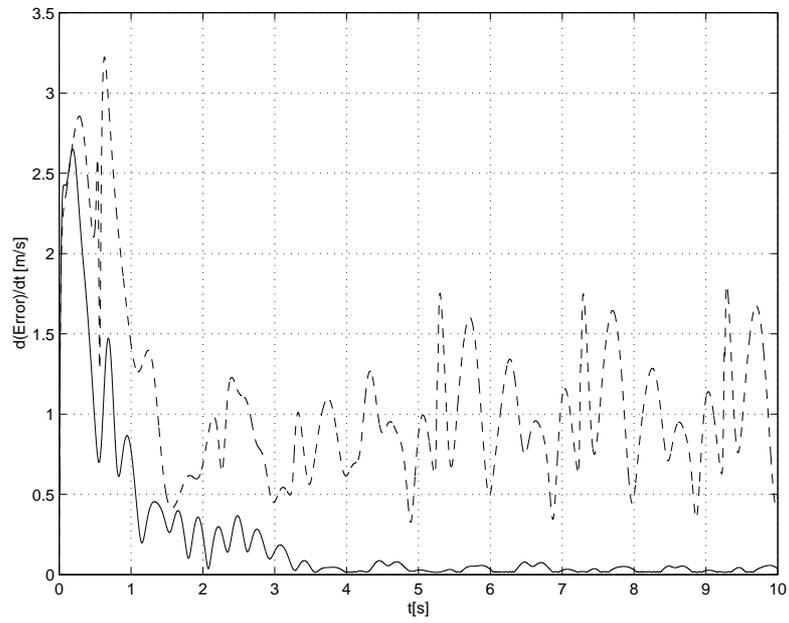


図 7.2: 形状誤差の時間微分

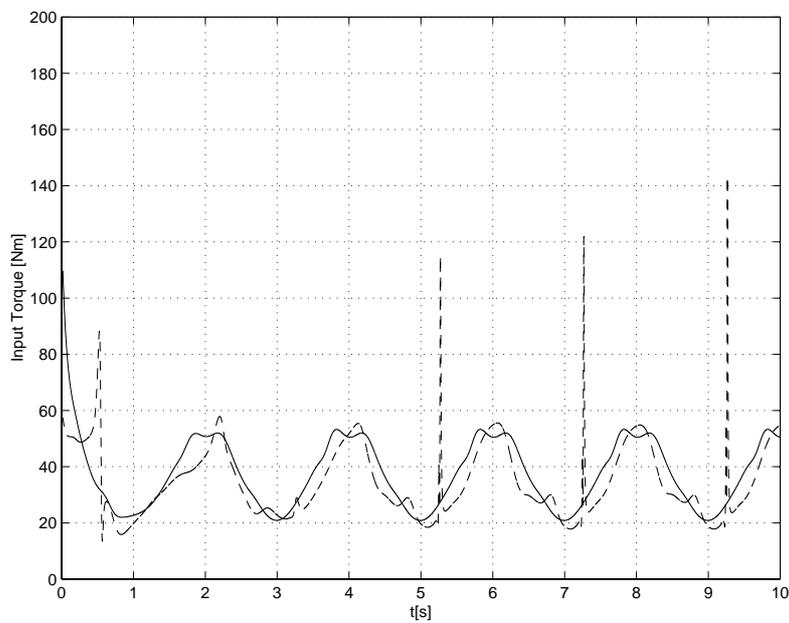


図 7.3: マニピュレータへの入力トルク

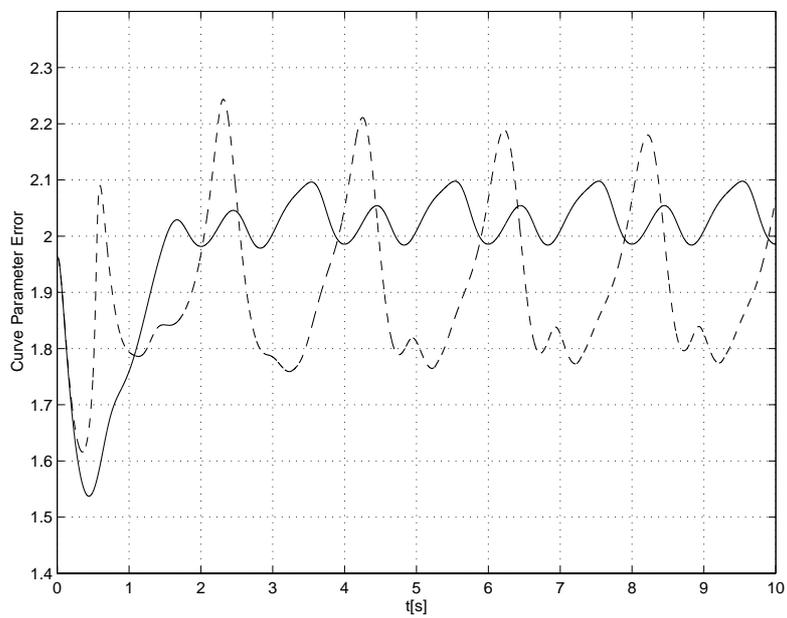


図 7.4: 推定曲線パラメータ

次に、本稿で提案した適応形状トラッキング制御則を用いた場合の結果を示す。動力学パラメータには誤差を含むものとして、動力学パラメータ推定を行なった場合と行なわない場合のシミュレーション結果を図 7.5 から 図 7.6 に示す。ただし、それぞれのグラフは図 7.5 は形状誤差、図 7.6 は形状誤差の時間微分、図 7.7 は入力トルク、図 7.8 は曲線パラメータ誤差、図 7.9 は動力学パラメータ誤差を表し、破線が動力学パラメータ推定を含めた場合の結果、実線が動力学パラメータ推定を含まない場合の結果である。

動力学パラメータ誤差を含んでいるので、それらを動力学パラメータの推定器を含まない場合は、形状誤差およびその時間微分ともに定常偏差が残る。それに対して、動力学パラメータ推定器を含めた場合は、形状誤差およびその時間微分ともに 0 に収束しており、また、入力トルクに関しても動力学パラメータ推定器を含まない場合と比較して、小さく抑えられていることがわかる。さらに、動力学パラメータ誤差も有界となることが確認できる ..

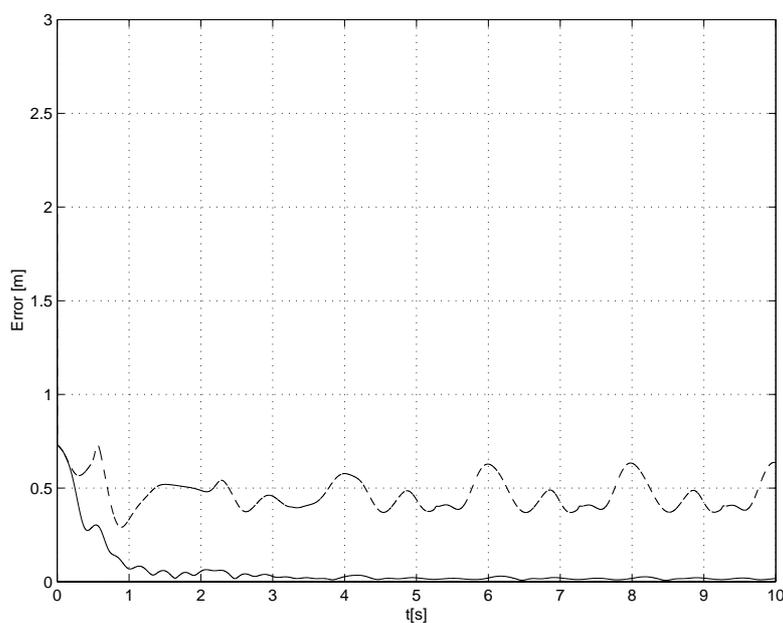


図 7.5: 形状誤差

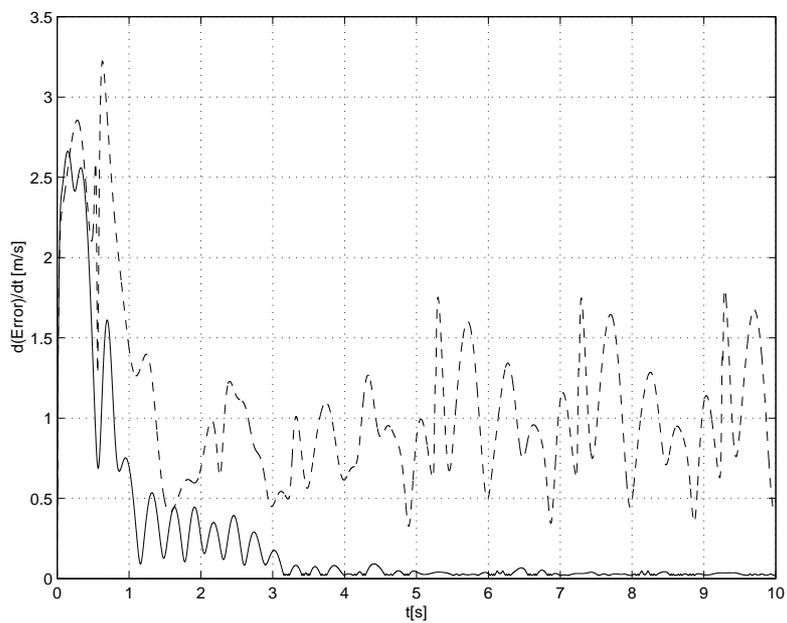


図 7.6: 形状誤差の時間微分

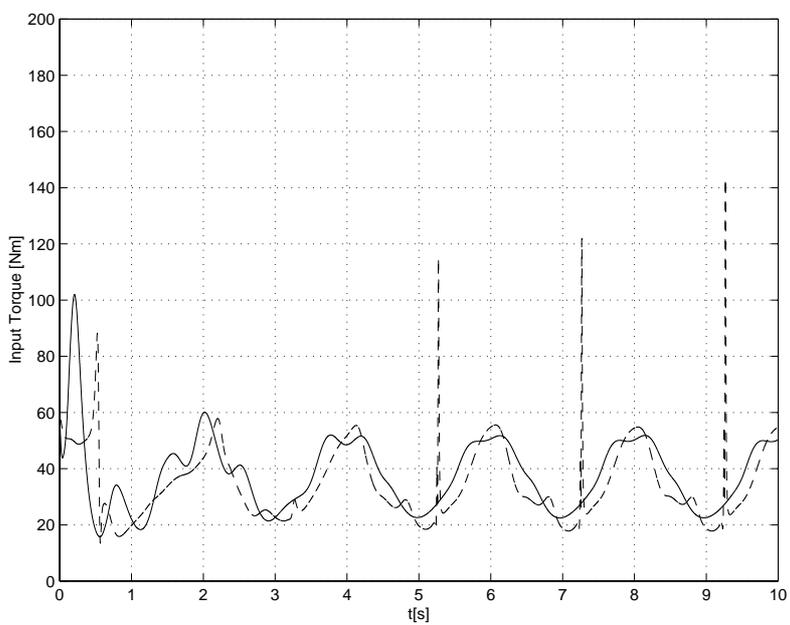


図 7.7: マニピュレータへの入力トルク

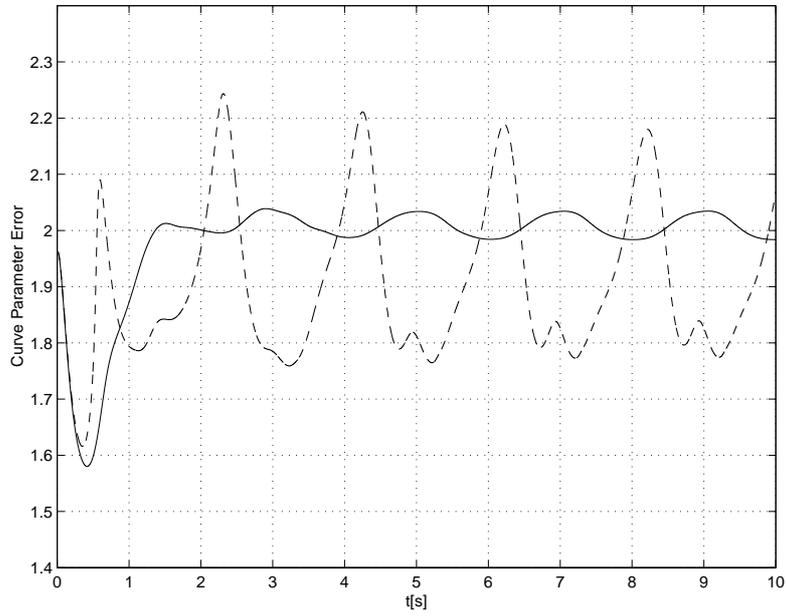


図 7.8: 推定曲線パラメータ

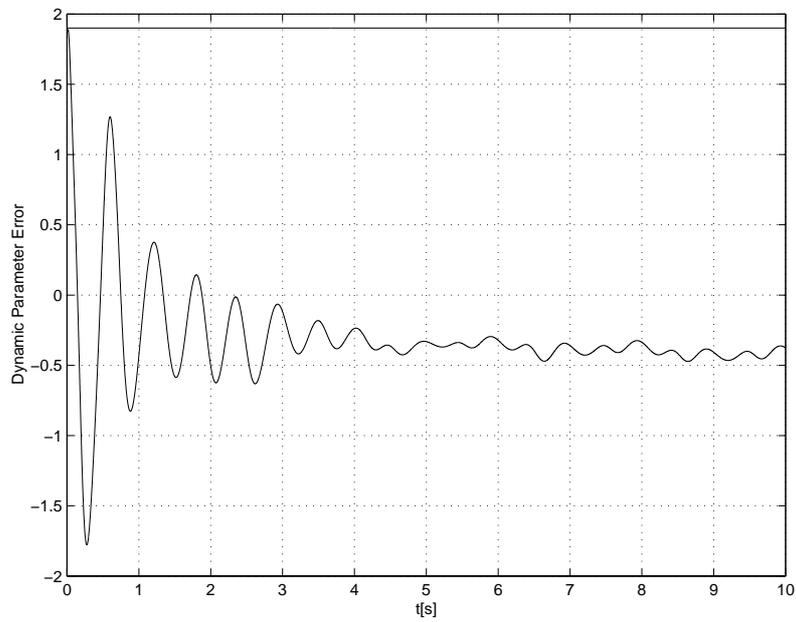
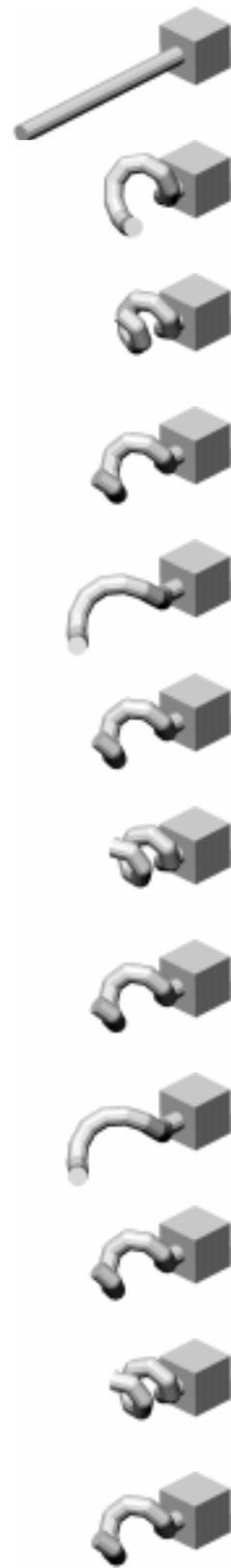
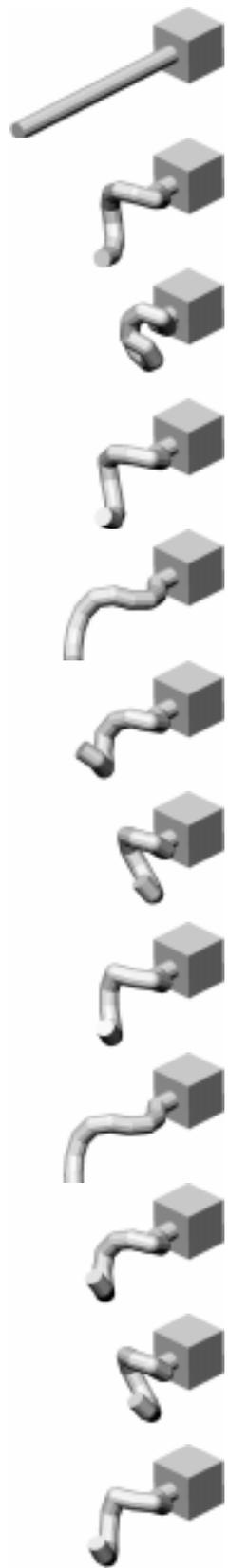


図 7.9: 動力学パラメータ誤差

最後に、以上のシミュレーション結果と機構解析プログラム Dads を用いて、超多自由度マニピュレータの運動の状態をアニメーション化した結果を次の頁の 図 7.10 に示す。左の列のアニメーションが動力学パラメータに誤差が含まれているが、適応則を用いない場合であり、右の列が同じ誤差に対して適応則を用いている場合である。ただし、シミュレーション時間は 6 秒間であり、各コマの時間間隔は 0.5 秒である



第 8 章

まとめ

本稿では、マニピュレータの動力学パラメータの値が正確に得られない状況においても、超多自由度マニピュレータの形状トラッキング制御を達成することのできる 2 種類の制御則を提案した。また、それらを各リンクに関する再帰的な制御則に分解し、制御則を実装する際に扱いやすい表現を求めた。さらに、シミュレーションによって制御則の有効性を確認した。

本制御則は、2 種類のパラメータ推定則を含んでおり、1 つは曲線パラメータ、もう 1 つは動力学パラメータである。曲線パラメータはマニピュレータの運動学に密接に関係しているものであり、動力学パラメータはマニピュレータの動力学に関係するパラメータである。これらの異なる種類のパラメータを同時に推定し制御目標を達成できるということは、非常に興味深い事実である。これは、ある意味マニピュレータの動力学パラメータや曲線パラメータにはある程度の自由度が許容されることを意味している。

今後の課題としては、動力学パラメータ推定則の物理的解釈にすることがあげられる。動力学パラメータ推定則はすべて速度と加速度の積で表されることが結果から理解できたが、そこにどのような意味があるのかは明らかではない。その物理的な意味が明らかにすることにより、そこからさらに新たな考察を得ることができよう。また、パラメータの真値への収束性に関しても今後の課題である。本稿で導出した推定則は、推定パラメータの有界性は保証しているが、その真値への収束性に関しては何も情報を与えていない。それに関しては、与える目標曲線に大きく関係することがわかっている。すなわち、与える作業に依存するということになる。この点については今後の研究が期待される。

謝辞

本研究を進めるにあたり御指導いただいた示村悦二郎教授，ならびに藤田政之助教授に深く感謝いたします．また，適切なアドバイスを与えてくださいました博士後期課程3年の望山洋さんおよび示村・藤田研究室のみなさんにもお礼を申し上げます．

参考文献

- [1] 望山 洋, 示村 悦二郎, 小林尚登: 超多自由度マニピュレータの制御: 曲線パラメータ推定に基づく形状トラッキング 第 25 回制御理論シンポジウム, 63/68 (1996)
- [2] 望山 洋, 示村 悦二郎, 小林尚登: 超多自由度マニピュレータの制御: 曲線パラメータ推定に基づく形状制御計測自動制御学会論文集, (投稿中)
- [3] 吉川恒夫, ロボット制御基礎論, コロナ社, 1988.
- [4] 有本 卓, ロボットの力学と制御, 朝倉書店, 1990.
- [5] Chae H.An, Christopher G.Atkeson, John M.Hollerbach, (松本治彌 訳), モデルに基づくロボットマニピュレータの制御, 実教出版株式会社, 1991.
- [6] Hiromi MOCHIYAMA: *Shape Control of Manipulators with Hyper Degrees of Freedom*, Ph.D thesis, School of Information Science, JAIST, 1998.
- [7] H.Mochiyama, E.Shimemura and H.Kobayashi: *Direct Kinematics of Manipulators with Hyper Degrees of Freedom and Frenet-Serret Formula* submitted to 1998 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation
- [8] H.Mochiyama, E.Shimemura and H.Kobayashi: *Control of Manipulators with Hyper Degrees of Freedom: Shape Tracking Based on Curve Parameter Estimation* 1997 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 173/178 (1997)
- [9] H.Mochiyama, E.Shimemura and H.Kobayashi: *Control of Manipulators with Hyper Degrees of Freedom: Shape Tracking Based on Curve Parameter Estimation* 1997 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 173/178 (1997)
- [10] R.Ortega, and M.W.Spong, *Adaptive motion control of rigid robots : a Tutorial*, Automatica, vol.25, pp.877-888,1989.
- [11] J.-J.E.Slotine and W.Li, *On the adaptive control of robot manipula-*

- tors, Int.J.of Robotics Research, vol.6,no.3,pp.49-59,1987.
- [12] *Adaptive manipulator control : A case study*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.33,pp.995-1003,1987.
- [13] P.Tomei, *Adaptive PD controller for robot manipulators*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol.7,pp.565-570,1991.
- [14] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano and Georges Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag,Berlin,D, Part1, p.1-114, 1996.
- [15] M.Gautier and W.Khalil, *Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol.6, p.368-373,1990.
- [16] Richard N.Murray, Zexiang Li and S.Shnkar Sastry *A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION* CRC Press Inc, 1994.
- [17] F.L.Lewis, C.T.Abdallah and D.M.Dawson: *Control of robot manipulators*, Macmillan Publishing Company, 1993.
- [18] Kelly,R.,R.Ortega and R. Carelli: *Adaptive-motion control design of robot manipulators: an input-output approach.*, Proc.IEEE Conf. on Robotics and Automation, Philadelphia, Pennsylvania.