

Title	直観主義様相論理の意味論的研究
Author(s)	橋本, 安司
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1171
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

直観主義様相論理の意味論的研究

橋本 安司

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1998 年 2 月 13 日

キーワード： 直観主義様相論理、様相ハイティング代数、直観主義様相フレーム、クリプキ完全性、有限モデル性。

1 はじめに

古典論理 **CI** を基にした様相論理は大変よく調べられてきた。古典論理はコンピューター科学や構成的数学の方からみると強過ぎる。そこで、論理を弱めようと思うのだが、古典論理の否定は、直観主義論理の否定よりも強いので、古典論理では $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$ が成り立っても、直観主義論理では、一般に $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$ や $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$ は成り立たない。このことから、直観主義様相論理は、いろんな定義の仕方がありうる。ここでは、 $\Box$ と $\Diamond$ は独立であるとしよう。

可算個の命題論理 $p, q, r, \dots$ と論理結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \Box, \Diamond$ からなる言語を $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ とし、 $\text{Form}(\mathcal{L}_{\Box\Diamond})$ で $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ の論理式全体を表そう。論理式 $\neg \alpha$ は $\alpha \rightarrow \perp$ で $\top$ は $\perp \rightarrow \perp$ のことであると約束する。正規な古典様相論理 **K** にあたる直観主義様相論理はどう定義したらよいだろうか。このことについて多くの試みがなされた。二種類の $\Box$ からなる様相論理の研究から、Fischer Servi は $\Box$ と $\Diamond$ に弱い関係をもたせた論理 **FS** を構成した [1][2]。FS とは、公理 (1)–(6) を含み推論規則 (a)–(c) に閉じた最小の論理式の集合である。

- (1) 直観主義論理 **Int**、
- (2) $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$ 、
- (3) $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ 、
- (4) $\neg \Diamond \perp$ 、
- (5) $\Diamond(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$ 、

(6) $(\Diamond p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$ 、

(a) モーダス・ポネンス $\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}$ (MP)、

(b) 代入の規則 (Sub)、

(c) $\frac{\vdash \alpha}{\vdash \Box \alpha}$ (RN)。

一方、Wolter と Zakharyashev は 最小の直観主義様相論理 $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ を導入した [3][4]。 $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ とは、公理 (1)–(3) を含み推論規則 (a)–(c) に閉じた 最小の論理式の集合である。

(1) 直観主義論理 $\mathbf{Int}$ 、

(2)

(2 $_{\Box}$) $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$ かつ (2 $_{\Diamond}$) $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ 、

(3)

(3 $_{\Box}$) $\Box \top$ かつ (3 $_{\Diamond}$) $\neg \Diamond \perp$ 、

(a) モーダス・ポネンス $\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}$ (MP)、

(b) 代入の規則 (Sub)、

(c)

$\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \Box \alpha \rightarrow \Box \beta}$ ($\mathbf{RR}_{\Box}$) かつ $\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \beta}$ ($\mathbf{RR}_{\Diamond}$)。

我々の目的は、最小の直観主義様相論理から出発して、それぞれの論理がどんな性質を持つか調べ、何らかの意味で一番ふさわしい直観主義様相論理はどれかを定めることにある。

2 セマンティクス

$\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ の論理式の集合 L は $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ を含み推論規則 (a)–(c) に閉じているとき直観主義様相論理 という。

直観主義様相論理に対して、ここでは、代数的セマンティクス とクリプキ・タイプ セマンティクス を考える。代数的セマンティクスとは各々の論理式に様相ハイティング代数の元を対応付けて考えることであるが、ここで、代数 $\mathbf{A} = (A, \Box, \Diamond)$ は次の条件をみたすとき、 $\Box\Diamond$ -様相ハイティング代数 であるという。

(1) A は ハイティング代数、

$$(2) \quad \Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b \text{ かつ } \Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b,$$

$$(3) \quad \Box \top = \top \quad \text{かつ} \quad \Diamond \perp = \perp.$$

一方、クリプキ・タイプ セマンティクス は各々の論理式に直観主義様相フレームの遺伝的（つまり 上に閉じた）部分集合を対応付けて考えることであるが、ここで、4 項組 $\mathcal{F} = (W, R, R_\Box, R_\Diamond)$ 次の条件をみたすとき、直観主義様相フレーム であるという。

- (1) $W \neq \emptyset$ 、
- (2) R は W 上の半順序、
- (3) $R_\Box, R_\Diamond$ は W 上の 2 項関係、
- (4) $R \circ R_\Box \circ R = R_\Box$ 、
- (5) $R^{-1} \circ R_\Diamond \circ R^{-1} = R_\Diamond$ 。

3 クリプキ完全性

代数的セマンティクス は 論理に対して完全であるが、クリプキ・タイプ セマンティクス は一般に完全ではない。そこで、いつクリプキ完全になるかに興味がわく。

論理とフレームの満たすべき対応理論から 主だった論理はカノニカルな論理であることが示された。

しかし、有限モデル性に関しては、 $\Diamond$ がやっかいである。ろ過法を用いて、次の定理を得た。

定理 $\text{IntK}_{\Box\Diamond}$ 、 $\text{IntK4}_{\Box\Diamond}$ 、 $\text{IntS4}_{\Box\Diamond}$ 、 $\text{IntS5}_{\Box\Diamond}$ は有限モデル性をもつ。

4 おわりに

直観主義様相論理においてもいくつかの性質は古典様相論理と同じように満たすのだが、 $\text{IntK}_{\Box\Diamond}$ は 好ましくない性質ももっている。演繹定理が成り立たないのである。また、 $\text{IntK}_{\Box\Diamond}$ に対応しているバラエティも合同関係において好ましくない性質 (*congruence extension property* が成り立たない) をもっている。しかし、これらは、 $\Diamond$ のやっかいさをあらわす好例かもしれない。今後については、 $\Diamond$ の性質を探りながら、例えば、もっと多くの論理で有限モデル性を示したい。

参考文献

- [1] G. Fischer Servi. *Semantics for a class of intuitionistic modal calculi*. In M. L. Dalla Chiara, editor, Italian Studies in the Philosophy of Science, Reidel, Dordrecht, 59-72, 1980.
- [2] G. Fischer Servi. *Axiomatizations for some intuitionistic modal logics*. Rend. Sem. Mat. Univers. Polit., 42:179-194, 1984.
- [3] F. Wolter. *Superintuitionistic companions of classical modal logics*. Studia Logica, 58:229-259, 1997.
- [4] F. Wolter and M. Zakharyashev. *The relation between intuitionistic and classical modal logics*. Algebra and Logic, 36:73-92, 1997.