Title	幾何学定理自動証明における問題記述の簡略化
Author(s)	木村，敦夫
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1217
Rights	
Description	Supervisor:外山 芳人，情報科学研究科，修士

幾何学定理自動証明における問題記述の簡略化

木村 敦夫

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999 年 2 月 15 日

キーワード： 幾何学定理自動証明，Geometry Expert，可読性，簡略化, Geometry Statement Simplifier.

幾何学定理における自動証明は，1977 年に Wu Wen-Tsün の提案した代数学を基にした手法により大きく進歩した．この手法は既存の数多くの自明でない幾何学定理に対して高い確率で適用できたが，出力される証明手順は幾何学者による古典的証明とは異なり，一般的に複雑な多項式操作となる．したがって，証明の手順を知りたい利用者はその多項式操作を追わなければならず，証明の直感的意味を理解することが困難であった．

証明の可読性は計算機による自動証明において非常に重要な要素であるが，一方で幾何学者が用いる古典的な証明方法は一般に可読性の高い証明を生成できることが知られている．古典的手法のように可読性の高い証明を生成する自動証明システムは 1950 年代から開発が行なわれていたが，当初はその多大な努力と改良にもかかわらず証明が可能な定理はごく限られていた．

そのようななか，代数学的アプローチと論理学的アプローチのアイデアが結び付くことにより，幾何学者による古典的手法のように可読性の高く短い証明を生成できる面積法 (Area Method) が 1980 年代後半に提案された．これを期に現在までにベクトル法 (Vector Method) や全角法 (Full-Angle Method) などのような様々な証明手法が提案され，近年は 3 次元空間の図形証明なども研究されている．

本研究では，各種証明手法を実装した自動証明システム GEX(Geometry Expert) におけるシステムの入出力，すなわち問題記述と証明の可読性との関係について考察する．GEX の基本証明エンジンには面積法，ベクトル法，全角法，さらに固定点法 (Fixpoint Method) が組み込まれている．これらのエンジンを利用することで，幾何学の研究者によって示されるもの以上に簡潔かつ綺麗な証明を出力することができる．また， 代数学的手法として，Wu の方法 (Wu's Method) とグレブナ基底法 (Gröbner Basis Method) も導入している．このような多彩な証明手法の導入により，利用者は定理がどのように証明

されるかを学習するだけでなく，どのような問題に対してどの証明手法が適しているかなど，幅広く考察することができる．

GEX へ入力される命題は，平面上に点を配置する構造の列によって表される．一般に，利用者が命題をその書式に沿って直観的に記述すると，命題の述べる図形的性質にとって冗長な情報が構造列中に含まれる場合がある．しかし，GEX での証明ではそのような冗長性を考慮しないため，そのような構造列から得られる証明は複雑化する傾向がある．

ここで，同一の図形的性質を記述した二つの構造列に対して証明を行ったときの面積法の出力について比較する．

[**例：垂心定理**] 三角形の 3 つの高さの交点は一点である．

この命題は，以下の 2 通りの構造列で記述される．

記述 1：

```
HYPOTHESES:
  POINT A B C;
  FOOT D A B C;
  FOOT E B C A;
  FOOT F C A B;
  INTERSECTION_LL O A D C F;
  INTERSECTION_LL P A D B E;
SHOW:
  (SQ_DIS O P)=0.
```

記述 2：

```
HYPOTHESES:
  POINT A B C;
  FOOT D A B C;
  FOOT E B C A;
  INTERSECTION_LL O A D B E;
SHOW:
  PERPENDICULAR A B C O.
```

ここで，記述 1 は記述 2 と比較して，より直観的な記述であることがわかる．この二つの構造列をそれぞれ GEX を用いて証明したところ，証明における代数表現に出現した項の最大数 $maxt$ はそれぞれ 2，1 となった．$maxt$ は証明の煩雑さを示す指標の一つであり，その数値が大きいほど証明が煩雑になる傾向がある．この結果から，命題の証明の可読性を高めるには，構造列の冗長な情報を消去することが重要であることが分かる．

そこで，構造列から得られる基本的な図形的性質を解析することで，直観的に生成された構造列を，可読性の高い証明が出力されるように簡略化を行うアルゴリズムを提案する．このアルゴリズムでは，構造のもつ線分の平行，垂直，合同の関係を記述した状態列を導入し，これを解析することで冗長な点の情報を消去する．

以下に本アルゴリズムの実行手順を示す．

[**簡略化アルゴリズム**]

1. 入力された構造列から点順序および状態列を生成する．
2. 状態列を解析し，前後の関係から新たな状態を追加する．
3. 状態列の垂直と平行に関する推移律より線分情報を更新する．
4. 構造列の結論が点の合同ならば末尾の構造を消去し，状態列の末尾を新たな結論に変更する．
5. 構造中の不要な点を消去し，結果を出力する．

さらに，簡略化アルゴリズムにおいて，点の合同を結論とした命題に注目し，簡略化を試みるシステム GSS(Geometry Statement Simlifier) を Scheme 上で実装し，直観的に作成された構造列について簡略化を行った．その結果，実験で利用したいくつかの命題においては，構造の消去により出力となる証明の $maxt$ が減少し，可読性が向上するという結果が得られた．

ところで，$maxt$ を減少させ可読性の高い証明を生成するために，構造列の点の消去だけでなく，新たに構造を追加するという手段も有効である．この手法は証明に利用される数式の傾向を考慮しているため，利用者は追加された構造列による図形的性質を把握しにくい．それに対し，GSS による簡略化では簡略化前後の構造列を図形的に理解することが容易であるため，利用者は構造列の変更を把握しつつ可読性の高い証明を得られる．

以上から，本研究で提案したアルゴリズムが幾何学定理自動証明における証明の可読性の向上に有効であることがわかる．