

Title	幾何学定理自動証明における問題記述の簡略化
Author(s)	木村, 敦夫
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1217">http://hdl.handle.net/10119/1217</a>
Rights	
Description	Supervisor:外山 芳人, 情報科学研究科, 修士

# 修士論文

## 幾何学定理自動証明における問題記述の簡略化

指導教官 外山芳人教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報処理学専攻

学籍番号 610039

木村敦夫

1999年2月15日

審査委員主査 外山芳人 教授

審査委員 石原哉 助教授

審査委員 浅野哲夫 教授

# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>幾何学定理自動証明システム GEX</b>	<b>3</b>
2.1	利用可能な証明手法	3
2.2	仕様	5
2.2.1	点	5
2.2.2	幾何学量	5
2.2.3	代数表現	6
2.2.4	構造	6
2.2.5	システムへの入力記述	7
<b>3</b>	<b>入力問題と証明の可読性</b>	<b>9</b>
3.1	面積法とその証明	9
3.2	構造列による可読性の比較	11
3.2.1	中線定理の場合	11
3.2.2	垂心定理の場合	12
<b>4</b>	<b>簡略化アルゴリズム</b>	<b>16</b>
4.1	点順序列の生成	17
4.2	状態列の生成	18
4.2.1	状態列	18
4.2.2	点順序による線分の記述	18
4.3	状態列の追加	19
4.4	状態列の修正	19
4.5	構造の消去と結果出力	20

<b>5</b>	<b>実験と考察</b>	<b>21</b>
5.1	平行四辺形による例題 . . . . .	21
5.1.1	平行四辺形による例題の直観的記述 . . . . .	21
5.1.2	平行四辺形による例題の簡略化と考察 . . . . .	22
5.2	Cantor の定理による実験 . . . . .	24
5.2.1	Cantor の定理と直観的記述 . . . . .	24
5.2.2	Cantor の定理の簡略化と考察 . . . . .	26
5.3	Nehring の定理による実験 . . . . .	28
5.3.1	Nehring の定理と直観的記述 . . . . .	28
5.3.2	Nehring の定理の簡略化と考察 . . . . .	30
<b>6</b>	<b>おわりに</b>	<b>32</b>
	謝辞	34
	付録	37
A-1.	幾何学量の表現 . . . . .	37
A-2.	構造の仕様 . . . . .	38
A-3.	述語の仕様 . . . . .	42
B.	構造列から状態列への処理 . . . . .	44
C.	簡略化実行結果：Cantor の定理 . . . . .	47

# 第 1 章

## はじめに

幾何学定理における自動証明は，1977 年に Wu Wen-Tsun の提案した代数学を基にした手法 [2] により，多くの自明でない定理に対して適用が可能となった [1]．特にテキサス大学で開発されたシステムでは約 600 ものユークリッドあるいは非ユークリッド空間での定理の証明が成功し，Feuerbach の定理や Morley の三等分線定理などのような，数多くの難解な幾何学定理が計算機上で数秒で証明されている [3]．

しかし，このような代数学的手法は数多くの幾何学定理の自動証明に有効であるが，出力される証明手順は幾何学者による古典的証明とは異なり，一般的に複雑な多項式操作となる．したがって，証明の手順を知りたい利用者はその多項式操作を追わなければならないが，証明の直感的意味を理解することが困難であった．

証明の可読性は自動証明において非常に重要な要素であるが，一方で幾何学者が用いる古典的な証明方法は一般に可読性の高い証明を生成できる．可読性の高い証明を行う古典的手法を取り入れた自動証明システムは 1950 年代から開発が行なわれていたが，当初はその多大な努力と改良にもかかわらず証明が可能な定理はごく限られていた [14]．

そのようななか，代数学的アプローチと論理的アプローチのアイデアが結びつくことにより，幾何学者による古典的手法と同様に可読性の高く短い証明を生成できる面積法 (Area Method) [4] が 1980 年代後半に提案された．これを期に現在までにベクトル法 (Vector Method) [5] や全角法 (Full-Angle Method) [6] などのような様々な証明手法が提案され，近年は 3 次元空間の図形証明 [9] なども研究されている．

本研究では，各種証明手法を実装した自動証明システム GEX (Geometry Expert) [10] におけるシステムの入出力，すなわち問題記述と証明の可読性との関係について考察する [15]．GEX の基本証明エンジンには面積法，ベクトル法，全角法，さらに固定点法 (Fixpoint Method) [7] が組み込まれており，これらのエンジンを利用することで，幾何学

の研究者によって示されるもの以上に簡潔かつ綺麗な証明を出力することができる。また、代数学的手法として、Wu の方法 (Wu's Method) とグレブナ基底法 (Gröbner Basis Method)[8] も導入している。このような多彩な証明手法の導入により、利用者は定理がどのように証明されるかを学習するだけでなく、どのような問題に対してどの証明手法が適しているかなど、幅広く考察することができる。

GEX は、構造と呼ばれる書式に沿って作成した命題について、証明を実行するシステムである。しかし、その仕様によりシステムは証明を構造列に沿って進めるため、入力された命題が冗長な点や線分の情報を含む場合を考慮しない。たとえば、利用者によって作成された命題が、示したい図形的性質が同じものであってもいくつかの異なる構造列で記述される場合を考える。このとき、冗長な情報を含む構造列に対して、システムは不要な点を含めた計算結果を出力するために、証明が複雑化してしまう。

そこで、GEX に組み込まれたエンジンのうち、証明の可読性と汎用性から面積法の出力に注目し、入力問題の基本的な図形的性質の解析を行い、可能であればより簡潔な証明が出力されるような入力問題に変換を行うアルゴリズムを提案する。さらに、このアルゴリズムを Scheme[12] 上で実装したシステム GSS (Geometry Statement Simplifier) について、幾つかの実行例をもとに簡略化の有効性について考察する。

本研究で作成した簡略化システムにより、命題中における二直線の基本的な図形的性質を解析、操作することで GEX での証明がより短く可読性の高いものになる結果が得られた。また簡略化後の命題の図形的性質を理解するのが容易なため、利用者が効率的に証明を理解できることがわかった。

2 章で、本研究の対象となる GEX の仕様について説明し、3 章においてその入力と出力の関係を例題を用いて説明し、とその問題点について考察する。4 章では本研究で提案する構造列の簡略化アルゴリズムを説明する。さらに 5 章で簡略化アルゴリズムを実装したシステム GSS の Sun OS 上での動作例を示し、簡略化の有効性について考察するとともに、6 章でこの簡略化システムの問題点と今後の課題をまとめる。

## 第 2 章

# 幾何学定理自動証明システム GEX

ここでは、幾何学定理自動証明システム GEX (Geometry EXpert)[10, 11] の基本機能とその入出力の仕様を説明し、入力問題とその証明の関係について考察する。

GEX は以下の特長を備えた幾何学定理証明システムである。

- 数多くの幾何学定理を利用者にとって読みやすく、簡潔な証明が出力可能である。
- 対話型の図形エディタにより、証明までの図形の状態を確認しながら利用できる。
- 幾何学の教育者が、組み込まれた各手法がどのように証明を行うか説明する際に役立つ。

また、複数の証明手法をシステムに組み込むことにより、同じ定理においてシステムが変化に富んだ異なる形式の証明を出力できる。これにより、ある手法が他の証明より短い証明が可能であったり、あるいは計算が失敗する場合においても、どのような証明にどの手法が有効かを利用者は学習できる。

現在、GEX は SPARC Workstation または Linux OS 上の X Window で動作し、以下の ftp サイトから Postscript 形式のマニュアルとバイナリを入手可能である。

`emcity.cs.twsu.edu:/pub/geometry/software/{ge_sparc.tar.Z, ge_linux.tar.Z}`

### 2.1 利用可能な証明手法

GEX には複数の幾何学定理自動証明手法が組み込まれており、利用者は定理の証明にそれらを自由に利用できる。ここでは、本システムで用いられている証明手法とその特長を以下に記す。

## 1. 面積法

面積法は、幾何図形上に定義された点について、面積またはピタゴラスの差分に関する基本定理を適用することにより証明を行う手法である [4]。この方法は 500 以上の簡潔で可読性の高い証明を生成することができる。

## 2. ベクトル法

ベクトル法は面積法から派生したもので、幾何学におけるベクトルと複素数の基本定理により証明を行う [5]。

## 3. 全角法

全角法は二つの線分のなす角における基本定理に基づいて線分を消去する証明手法である [6]。その利点は、他の手法では多項式が膨大になり証明が失敗するような定理に対し、非常に簡潔な証明を出力することができることである。

## 4. 固定点法

出現する点に関する幾何学的性質をもとに、推論データベースの理論に基づいた証明を行う手法である [7]。この推論により、与えられた問題中で直観的に知ることのできる性質だけでなく、予測していなかった新しい性質を見つけることもできる。

## 5. Wu の方法

Wu の方法は座標情報をもとにした代数学的手法である [1, 2]。幾何学状態はまず多項式の等式として記述し、この連立多項式を解くことで証明を行う手法で、600 以上の幾何学定理に対して適用可能である [3]。

## 6. グレブナ基底法

グレブナ基底法は Wu の方法と同様に座標情報をもとにした手法で、多項式として表わされた幾何学状態をグレブナ基底 [13] をもちいて計算し、証明を行う手法である [8]。

本システムには、例題としてよく知られているもののうち 67 個の幾何学定理が組み込まれている。ここで、各証明手法を比較するために 67 個の証明問題のうちの成功数、さらに SUN Sparc-10 ワークステーションによる実行時間の平均値を比較すると、表 2.1 のようになる [10, 11]。

ここで、出力される問題の可読性を知る一つの指標である *maxt* について考える。



表 2.1: 証明手法とその特徴

	面積 / ベクトル法	全角法	固定点法	Wu の方法	グレブナ基底法
適用数 (67 個中)	61	10	17	65	57
平均時間 (秒)	0.02	0.02	0.21	0.14	0.87
平均 $maxt$ (個)	15.3	3.6	146.5	404	547

[ $maxt$ ]

証明中の多項式に含まれる項の数の最大値を  $maxt$  と呼ぶ。

$maxt$  は一般に値が大きいほど証明が複雑となり、可読性が低くなることを意味するので、定理自動証明の出力を評価する上で重要な要素である。本研究では、この  $maxt$  を可読性の基準として用いる。

## 2.2 仕様

次に、GEX での入力記述と証明の可読性との関係を考察するために、システムへの入力記述の作成方法を説明する。本章では、入力記述作成の概要を説明を与えることにとどめ、仕様の詳細については付録 A にまとめる。

GEX に入力される問題は、構造と呼ばれる述語によって記述される。

### 2.2.1 点

点の定義は幾何状態記述におけるもっとも基本的な操作で、一般的に  $A, B, C$  のように英文字によって定義される。線分、円、三角形などのような操作は `point` によって定義された点によって記述される。添字による区別を行いたい場合、 $A_1, B_2$  のように英文字の後に数字をおくか、 $C_{a_1}$  のような場合は `_str` と表記する。線分、円、三角形などのような操作は `point` によって定義された点によって記述される。

### 2.2.2 幾何学量

GEX では図形的な状態を記述するために、面積や比率などの幾何学量が定義されている。これらは、システムに入力される命題の結論部分で図形的性質を記述するために頻繁

に用いられる．ここでは，本論文で重要な幾何学量の表現を紹介するにとどめ，詳細は付録 A-1 に記載する．

[例 1：ピタゴラスの差分]

ピタゴラスの差分は，三角形の性質を記述するために用いられる．

$$(PY P_1 P_2 P_3) = (P_1 P_2)^2 + (P_2 P_3)^2 - (P_3 P_1)^2$$

$$(PY P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2)^2 - (P_2 P_3)^2 + (P_3 P_4)^2 - (P_4 P_1)^2$$

特別な場合として，直角三角形におけるピタゴラスの定理がある．

[例 2：2 点間の距離]

$$(SQ\_DIS P_1 P_2) = (PY P_1 P_2 P_2 P_1) = 2P_1 P_2^2$$

### 2.2.3 代数表現

以上の幾何学量をもちいて，代数表現を生成することができる．

[変数]

任意の文字と数字，これに記号， $-$ ， $\{$ ， $\}$  を含むものを変数として扱う．

[点の座標]

点の座標は利用者ではなく，システムにより自動的に生成される．これらは  $W_u$  の方法で利用される．これらは計算の内部で使用するが，変数として  $x_1$  が定義されている場合でも，座標  $x_1$  は異なる．

[代数表現]

本システム上で，代数表現は幾何学量や変数，あるいは点の座標にによって生成された数式で，演算子  $+$ ， $-$ ， $*$ ， $\wedge$  によって記述され，二つの値を空白で区切ることは  $*$  とみなす．

### 2.2.4 構造

GEX へ入力する命題は，構造と呼ばれる書式によって記述される (付録 A-2 参照)．1 つの構造により配置される点は 1 つで，一般的に次のような形式となる．

$$CNST P P_1 P_2 \cdots P_n;$$

ここで, CNST は点  $P_1 P_2 \cdots P_n$  を引数とする操作で, その構造により生成された新しい点が  $P$  となる. さらに, 構造 CONSTANT を除くそれぞれの構造において, 点  $P$  を, 構造により導入された点と呼ぶ.

## 2.2.5 システムへの入力記述

GEX への命題の入力は, 前節で定義された構造を組み合わせた列で記述され, 以下に説明されるような結論となる幾何状態を追加することで作成される.

[構造列]

構造列とは, 複数の構造からなる記述である. 構造列中のそれぞれの構造でそれ以前の構造によって導入された点を用いた新しい点が導入される. また, あらゆる構造列による記述について, 構造 POINT または CIRCLE で始まらなければならない. 例えば,

```
POINT A B C;  
INTERSECTION_PP D C A B A B C;  
INTERSECTION_LL O A B C D;
```

は構造列であるが, これに対し,

```
POINT A B;  
INTERSECTION_PP D C A B A B C;  
INTERSECTION_LL O A B C D;
```

2 番目の構造で点  $D$  を定義するために用いている点  $C$  が, それ以前の構造で定義されていたためにエラーとなる.

[構造による幾何状態の記述]

システムへの命題の入力は，以下の形式で記述する．

EXAMPLE name

HYPOTHESES:

$c_1$ ;

$c_2$ ;

...

$c_n$ ;

SHOW:  $c$ .

ここで， $c_1, c_2, \dots, c_n$  は前述の構造列で， $c$  入力される命題の結論となる幾何学的状態を示すもので，2 個の代数表現または一般に次に示すような幾何述語である．

$$\text{CNCL } P_1 P_2 \dots P_n.$$

ここで，CNCL は幾何述語で，構造列により導入された点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  によって結論となる図形の状態が記述される（付録 A-3 参照）．

以上で定められた規則により，システムに入力される問題が記述できる．

## 第 3 章

# 入力問題と証明の可読性

ここでは，GEX[10] での証明の実行例を示すとともに，実際にシステムに命題を入力したときの出力のについて考察する．GEX は，組み込まれている複数の証明エンジンにより様々な証明に対応可能であるが，これらの証明エンジンはそれぞれ手法の違いから取り扱える問題の種類が異なり，またその証明の可読性が大きく異なる．

本研究では，GEX に組み込まれている証明エンジンの中で，表 2.1 から適用可能な問題数と証明の可読性を考慮して面積法 [4] の出力に注目する．以下に，面積法の基本的な証明方法を説明し，システムに入力される構造列とその証明の可読性の関係について *maxt* に着目することで考察する．

### 3.1 面積法とその証明

面積法は，結論で示された幾何状態を，構造に対応する幾つかの基本的な幾何学定理を新しい点の順に適用していき，その構造で導入される点が任意のものとなるまで消去することで証明を行う．たとえば，面積法のために以下の補題を準備する．

[補題 1] 平行でない直線  $AB$  と  $PQ$  の交点を  $M$  とするとき、

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{S_{PAB}}{S_{QAB}} \text{ かつ、} \frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAQB}}$$

[補題 2] 直線  $AB$  と  $PQ$  が平行ならば、

$$S_{PAB} = S_{QAB} \text{ かつ、} S_{PAQB} = 0$$

このとき，図 3.1 に示すような例題をもちいて GEX における証明の例を示す．

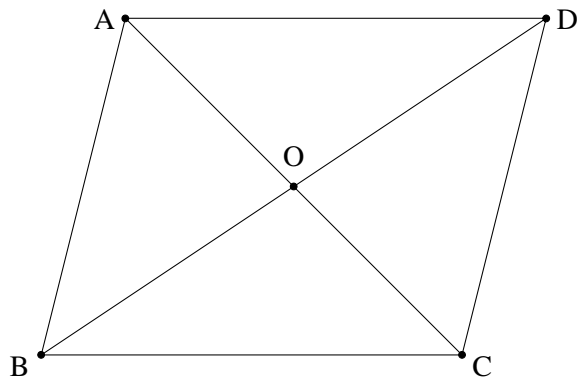


図 3.1: Parallelogram

[例 1 . 中線定理]

$ABCD$  を平行四辺形とする . 点  $O$  を対角線  $AC$  ,  $BD$  の交点とするととき ,  $AO = OC$  を示せ .

この命題は以下のような構造列によって記述される .

[入力される構造列:Parallelogram1]

```

EXAMPLE PARALLELOGRAM#1
HYPOTHESES:
POINT A B C;
INTERSECTION_PP D C A B A B C;
INTERSECTION_LL O A C B D;
SHOW:
MIDPOINT O A C.

```

このように記述された構造列を GEX に適用した結果 , 以下のような結果が得られる . この証明は , 結論に示された MIDPOINT  $O A C$ . により生成された式  $\frac{AO}{CO}$  に , 補題 1 , 補題 2 の順で補題を適用することによって進められる .

### [面積法による証明結果 1]

The Machine Proof

$$-\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}$$

$$\text{Eliminants: } \frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} = \frac{(-S_{DBA})}{S_{DCB}}$$

$$= \frac{(-S_{DBA})}{-S_{DCB}}$$

$$\text{Eliminants: } S_{DCB} = S_{CBA}$$

$$S_{DBA} = S_{CBA}$$

$$= \frac{(-S_{CBA})}{-S_{CBA}}$$

$$\text{Eliminating the common factors: } S_{CBA}$$

$$= 1$$

この証明により,  $AO = CO$  であることが導かれ, 平行四辺形の対角線の交点がそれらの中点であることが示された. なお, この問題の *maxt* は 1 である.

## 3.2 構造列による可読性の比較

ここで, 同様の図形的性質を有し, かつ記述の異なる構造列について例を作成し, それぞれについて GEX での入出力について比較, 考察する.

### 3.2.1 中線定理の場合

前節の中線定理について, 同様の図形的性質を以下のように記述した場合を考える.

[記述の異なる構造列:Parallerogram2]

EXAMPLE PARALLELOGRAM#2

HYPOTHESES:

POINT A B C;

INTERSECTION\_PP D C A B A B C;

MIDPOINT O B D;

SHOW:

CONGRUENT A O O C.

この構造列では，結論である中点の記述が線分  $AO$  と  $OC$  の合同で示されている．また，構造の記述も若干異なるため，それにより適用される面積法の補題も異なるものになる．この証明の出力は以下ようになった．

[面積法による証明結果 2]

The Machine Proof

$$\frac{P_{OOAA}}{P_{OCC}}$$

$$\text{Eliminants: } P_{OCC} = \frac{1}{4}(2P_{DDCC} - P_{DDBB} + 2P_{CCBB})$$

$$\begin{aligned} P_{OOAA} &= \frac{1}{4}(-P_{DDBB} + 2P_{DDAA} + 2P_{BBAA}) \\ &= \frac{(-P_{DDBB} + 2P_{DDAA} + 2P_{BBAA})^4}{(2P_{DDCC} - P_{DDBB} + 2P_{CCBB})^4} \end{aligned}$$

Eliminating the common factors: 4

$$= \frac{-(P_{DDBB} - 2P_{DDAA} - 2P_{BBAA})}{(2P_{DDCC} - P_{DDBB} + 2P_{CCBB})}$$

$$\text{Eliminants: } P_{DDCC} = \frac{P_{BBAA}S_{CBA}^2}{S_{CBA}^2}$$

$$P_{DDAA} = \frac{S_{CBA}^2 P_{CCBB}}{S_{CBA}^2}$$

$$P_{DDBB} = \frac{(S_{CBA}^2 P_{CCBB} - 2S_{CBA}^2 P_{CBAA} + 3P_{BBAA}S_{CBA}^2)}{S_{CBA}^2}$$

$$= \frac{-(-S_{CBA}^2 P_{CCBB} - 2S_{CBA}^2 P_{CBAA} + P_{BBAA}S_{CBA}^2)S_{CBA}^2}{(S_{CBA}^2 P_{CCBB} + 2S_{CBA}^2 P_{CBAA} - P_{BBAA}S_{CBA}^2)S_{CBA}^2}$$

Eliminating the common factors:  $(S_{CBA})^4(P_{CCBB} + 2P_{CBAA} - P_{BBAA})$

$$= 1$$

このときの  $maxt$  について見ると，前述の構造列が 1 なのに対し，4 となった．これら二つの構造列は，中線定理で示される同一の図形的性質を記述したものである．しかし，それぞれの  $maxt$  を比較すると，証明の可読性はその図形的性質が同じでも命題を記述している構造の選択および結論の表現方法により変化することが分かる．

### 3.2.2 垂心定理の場合

さらに，前節の同一命題を記述する異なる構造列の場合に対し，入力問題における構造列の長さが異なる場合を考える．

[例 2 . 垂心定理]

三角形の 3 辺からの高さの交点は，一点で交わる．



この命題における同一の図形的性質を示した二つの構造列について考える .

[構造列 : Orthocenter1]

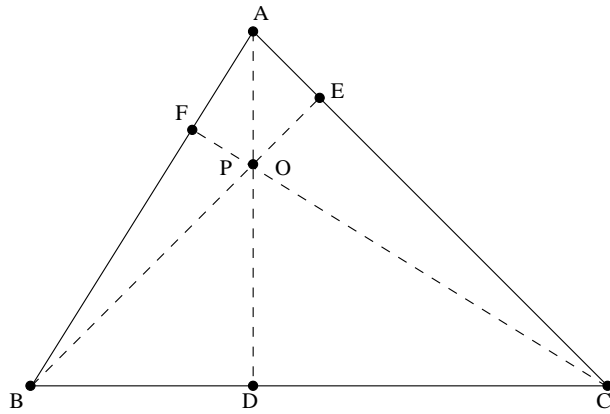
```
EXAMPLE ORTHOCENTER#1
HYPOTHESES:
POINT A B C;
FOOT D A B C;
FOOT E B C A;
FOOT F C A B;
INTERSECTION_LL O A D C F;
INTERSECTION_LL P A D B E;
SHOW:
(SQ_DIS O P) = 0.
```

[構造列 : Orthocenter2]

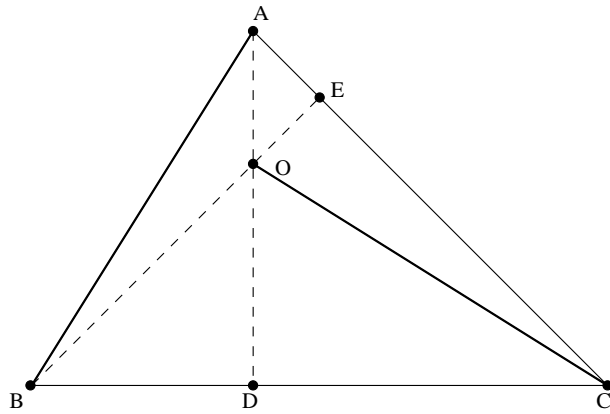
```
EXAMPLE ORTHOCENTER#2
HYPOTHESES:
POINT A B C;
FOOT D A B C;
FOOT E B C A;
INTERSECTION_LL O A D B E;
SHOW:
PERPENDICULAR A B C O.
```

この二つの構造列について比較すると、前者は与えられた命題に忠実にしたがって記述されたものであり、一方後者は前者の構造の幾つかを省略した、出現する点の数の少ない記述となっている。また、結論の記述も前者が点  $P, Q$  の合同であるのに対し後者は線分  $AB, CO$  の垂直となっている。この構造列で表される図形をそれぞれ図 3.2, 図 3.3 に示す。これらの構造列を GEX 上で証明を行った結果、 $maxt$  はそれぞれ 2, 1 となった。この結果から、後者の導入された点の少ない証明がより可読性が高いことがわかる。

自動証明において、システムの出力となる証明を評価する場合、可読性は特に重要な要素といえる。しかし、GEX の仕様では利用者の作成した構造列により証明が大きく変化



☒ 3.2: Orthocenter1



☒ 3.3: Orthocenter2

することを考慮しない．したがって，GEX での証明の可読性は利用者の入力記述で左右されることがわかる．

面積法では構造に対応した定理を結論から生成した等式に適用することで証明が行われるため，一般に構造列の要素の数すなわち導入した点が多いほど証明が煩雑になる傾向が強い．さらに，入力者が自然言語を参照しながら作成した構造列では，冗長な点が含まれている可能性がある．これらを考慮すると，証明システムに入力する構造列に，より簡潔な証明を生成するような前処理を施すことが重要であることが分かる．

## 第 4 章

# 簡略化アルゴリズム

GEX ではシステムの入力となる命題を構造列によって記述する際、まず利用者は一般に文章題から必要な点を決定する。次にその点の出現に対応した構造を列挙して構造列を記述するが、この際、同一の問題でも様々な形式に書き下せる場合がある。特に面積法のように構造に対応した消去補題を適用していく証明では、その補題の複雑さや構造列の長さでその可読性が大きく変化する [15]。

ここでは、図 4.1 で示されるように、GEX への入力すなわち利用者の作成した構造列を解析し、より可読性の高い証明を生成できる構造列に変換するアルゴリズムを提案する。なお、このアルゴリズムは本研究で作成した簡略化システム GSS (Geometry Statement Simplifier) に実装されている。

GSS は、与えられた構造列に対し、それぞれの構造から挙げられる基本的な幾何学的性質の列を生成してその解析を行い、冗長な情報があればそれを消去した構造列を出力する。ただし、この簡略化では与えられた仮定の元で結論が真でなければ簡略化後の構造列が真であると言えない。したがって、ここで前提となるのは、利用者が作成した命題が GEX によって証明がなされていることが必要である。

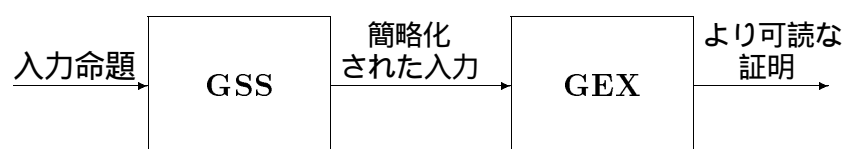


図 4.1: 簡略化システムの導入

本アルゴリズムでは、主に線分の交差の構造に注目し、線分の平行と垂直、および長さの等しい関係を列挙し、これを操作することで冗長な点を解析し簡略化を行う。

このアルゴリズムは、大きく次のような手順で構成される。

[簡略化アルゴリズムの概要]

1. 入力された構造列から点順序および状態列の生成する。
2. 状態列を解析し、前後の関係から新状態の追加する。
3. 状態列の垂直と平行に関する推移律より線分情報を更新する。
4. 構造列の結論が点の合同ならば末尾の構造を消去し、状態列の末尾を新たな結論に変更する。
5. 構造中の不要な点を消去し、結果を出力する。

以下に、この手順の詳細を説明する。

## 4.1 点順序列の生成

最初に、構造列により導入される点のリストを生成する。これを用いることにより、構造列から得られる図形的性質の解析を効率化できる。ここではこの記号列を点順序列とよぶ。一般に、点  $P$  を導入する構造は  $CNST P Q_1 Q_2 \cdots Q_m$ ; のように記されている。したがって構造列により導入される点をから点順序列を生成する場合、初期構造 POINT および CIRCLE は第 2 要素以降を、それ以外の構造では第 2 要素を取出しリスト化する。

さらに、点順序列が  $P_1 P_2 \cdots P_n$  と得られたとき、その大小関係を  $P_1 < P_2 < \cdots < P_n$  と定める。例えば、以下の構造列が与えられたとき、

[例：点順序の生成]

```
EXAMPLE PARALLELGRAM
HYPOTHESES:
POINT A B C;
INTERSECTION_PP D C A B A B C;
INTERSECTION_LL O A C B D;
SHOW: MIDPOINT O A C.
```

このとき点順序列は、 $(A B C D O)$  となる。

## 4.2 状態列の生成

次に，与えられた構造列のそれぞれの要素においてどのような図形的性質があるか解析するため，状態列を準備する．

### 4.2.1 状態列

まず，構造列を解析するために，それぞれの構造単体からいえる図形的性質を列挙していく．これを状態と呼び次の形式で扱う．

$$(\text{REL } l_1 l_2)$$

ここで，REL は 2 直線  $l_1, l_2$  の関係を記述する関係子で，GSS では，平行 (para) と垂直 (perp)，および合同 (eq\_len) を用いる．構造単体から生成される状態が複数になる場合も考慮し，構造単体からなる状態はリストとして扱う．

[例：構造 ON\_LINE による状態の生成]

$$\text{ON\_LINE } P P_1 P_2; \rightarrow ((\text{para } (P_1P)(P_2P)))$$

このように構造ひとつひとつから幾何学的性質を列挙していくことで，入力問題の仮定部分から状態のリストが生成され，これを状態列と呼ぶ．なお，状態と構造との具体的な対応関係の詳細は付録 B に記載する．

### 4.2.2 点順序による線分の記述

状態列中の線分は，点順序列により並び替えを行う．線分  $l = (P_1P_2)$  において，点順序により  $P_1 < P_2$  の関係が成り立つものとする．また，状態内の線分の組  $l_1, l_2$  においても以下のような順序を与える．

$$l_1 l_2 = (P_1P_2) (P_3P_4) \mid P_2 < P_4 \text{ または } P_2 = P_4 \cap P_1 < P_3$$

このような順序を与えたとき  $l_1 < l_2$  とし，これにより状態列上の各要素は以下の性質を持つ．

[線分情報の性質]

1. ある関係を記した状態 (REL  $l_1 l_2$ ) において，少なくとも  $l_2$  内の右側の点  $P_4$  がこの状態のもととなった構造で導入した点となる．

2. 異なる構造  $c_i, c_j (i < j)$  で生成された状態  $(REL1 \ l_1 \ l_2)$  ,  $(REL2 \ l_3 \ l_4)$  について ,  $l_1 < l_2 < l_4$  が点順序により成立する .

この性質を利用することにより , 点や線分の関係を探査する場合の組み合わせなどを大幅に減らすことができる .

### 4.3 状態列の追加

次に , ふたつの状態列要素のそれぞれの示す線分の関係で一般的にいえる性質を調べ , 新たな状態があれば追加する . 本アルゴリズムでは , 図 4.2 に示すような垂直の条件について状態列を評価する .

$$(eq\_len (P_1P_2) (P_1P_3)) \cap (eq\_len (P_2P_4) (P_3P_4)) \rightarrow (perp (P_2P_3) (P_1P_4)) .$$

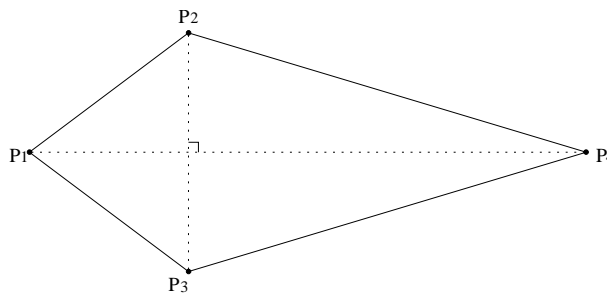


図 4.2: 垂直を追加するための条件

この評価によって生成された新しい状態は , 含まれる点のうち最も新しい点の出現する構造から生成された状態列に追加する .

### 4.4 状態列の修正

さらに , 追加の完了した状態列に関して , 平行と垂直の関係に関する性質について解析を行う .

ここで , 状態内の線分を  $l_1 = (P_1P_2)$  ,  $l_2 = (P_3P_4)$  ,  $l_3 = (P_5P_6)$  とする . 構造  $c_i, c_j (i < j)$  の生成する平行または垂直の状態について次に示すような線分  $l_2$  で一致する関係を検索し , 推移律により  $c_j$  を含む状態を変更する .

$$\begin{aligned}
& (\text{para } l_1 l_2) \cap (\text{para } l_2 l_3) \rightarrow (\text{para } l_1 l_3) . \\
& (\text{para } l_1 l_2) \cap (\text{perp } l_2 l_3) \rightarrow (\text{perp } l_1 l_3) . \\
& (\text{perp } l_1 l_2) \cap (\text{para } l_2 l_3) \rightarrow (\text{perp } l_1 l_3) . \\
& (\text{perp } l_1 l_2) \cap (\text{perp } l_2 l_3) \rightarrow (\text{para } l_1 l_3) .
\end{aligned}$$

この操作により書き換えが成功する場合、線分の順序の比較から  $l_1 < l_2$  となり、構造  $c_j$  の生成する状態を構成する線分がより小さい順序の点で示されたことになる。つまり、新しい点の出現で生成された状態がそれより古い点によって記述され、点の出現に関する消去判定が容易になる。

## 4.5 構造の消去と結果出力

最後に、これまでの解析によって得られた状態列から、実際に構造列中の点の消去を試みる。

まず、命題の結論部分について、利用者の作成した命題が真という前提の元で、構造列の結論  $c$  が特定の形式の場合の簡略化を示す。

[2点  $P_1 P_2$  の合同]

入力問題の結論が、2点  $P_1, P_2$  が合同すなわち  $(SQ\_DIS P_1 P_2)=0$  . であるときは、 $P_1 = P_2$  を仮定し、この2点を導入している構造のうち一方を消去を行う。このとき消去を行う構造は  $P_1, P_2$  のうち点順序が大きい点を導入しているものを選ぶ。次に新たな結論は、消去される構造によって生成された状態とし、新しく構成された構造列から消去可能な点を検索する。

構造列が平行と垂直の性質から簡略化可能、すなわち冗長な点の出現を含む場合、以上の操作を繰り返すことによって前節の直線  $l_2$  を構成する点  $(P_3 P_4)$  のうち使用されない点が発見できる。この時は命題の仮定に実質的に不必要な点があるとし、その点が出現する構造の消去を行うことができる。

結論が複数の場合は、それら一つ一つを結論とする複数の構造列を作成して消去を試みる。示すべき結論を細分化することで、それぞれにおいて上記の不要な点を生じる可能性が高くなる。



# 第 5 章

## 実験と考察

ここで、実際に Scheme[12] 上で実装した GSS を利用し、直感的に作成した命題について簡略化を行い、簡略化前後の図形的な考察とそれぞれの GEX[10] での実行結果との比較とその図形的考察を行う。

仕様上、GSS では GEX への入力命題に若干の変更を与える必要がある。

- 行 EXAMPLE, HYPOTHESES:, SHOW: および構造の末尾のセミコロンは不要。
- テキストは大文字と小文字を区別しない。
- 各構造をリストで表し、構造列はそれらをリスト化したものとする。
- 結論  $(SQ\_DIS P_1 P_2)=0$  のような代数式は  $(sq\_dis p_1 p_2 0)$  と表現する。

なお、GSS の出力結果は SS5(Sun OS 4.1.3) 上の Scheme(scm ver.5b1) で実行したものである。

### 5.1 平行四辺形による例題

#### 5.1.1 平行四辺形による例題の直観的記述

以下に示すような例題について、問題から構造列を作成する。

[平行四辺形を用いた例題]

平行四辺形の向かい合う各辺の midpoint を結んだ交点と、対角線の交点は一点で交わる。

この問題を GEX の仕様に基づいて記述すると、以下のようになる。

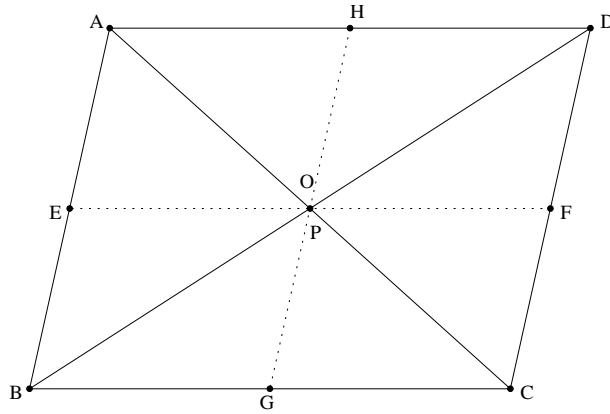


図 5.1: 平行四辺形を用いた例題

[例題の直観的記述]

```

EXAMPLE Ex1
HYPOTHESES:
POINT A B C;
INTERSECTION_PP D C A B A B C;
INTERSECTION_LL O A C B D;
MIDPOINT E A B;
MIDPOINT F C D;
MIDPOINT G B C;
MIDPOINT H D A;
INTERSECTION_LL P E F G H;
SHOW:
(SQ_DIS O P) = 0 .

```

この直感的記述を GEX での証明したところ, *maxt* は 96 となる. この値は, 証明の出力を追うことは極めて労力を要することを意味している.

### 5.1.2 平行四辺形による例題の簡略化と考察

次に, この入力命題を GSS によって簡略化すると, その実行結果は以下ようになった.

[例題の簡略化記述 1]

```
hypothesis:
point a b c ;
intersection_pp d c a b a b c ;
intersection_ll o a c b d ;
midpoint e a b ;
midpoint f c d ;
show:
collinear o e f .
```

[例題の簡略化記述 2]

```
hypothesis:
point a b c ;
intersection_pp d c a b a b c ;
intersection_ll o a c b d ;
midpoint g b c ;
midpoint h d a ;
show:
collinear o g h .
```

GSS によりこの命題は二つの簡略記述に変換され、それぞれの結論に対応した導入した点の少ない構造列が与えられる。これらを GEX を用いて証明すると、それぞれ *maxt* は 1 となる。

簡略化後の構造列で示された図形である図 5.2 と図 5.3 について考察する。向かい合う各辺の中点を結んだ交点  $P$  と、対角線の交点  $O$  の合同を示す命題は、簡略化により点  $O, E, F$  と、3 点  $O, G, H$  がそれぞれ同一直線上に存在することを示す命題となる。これらが真ならば、線分  $EF$  と  $GH$  の交点が点  $O$  であることがわかり、簡略化された証明が性質を失っていないことがわかる。さらに、簡略化によって得られた命題を図形的に比較すると、その対称性からどちらか一方の証明が真であることが分かればよい。

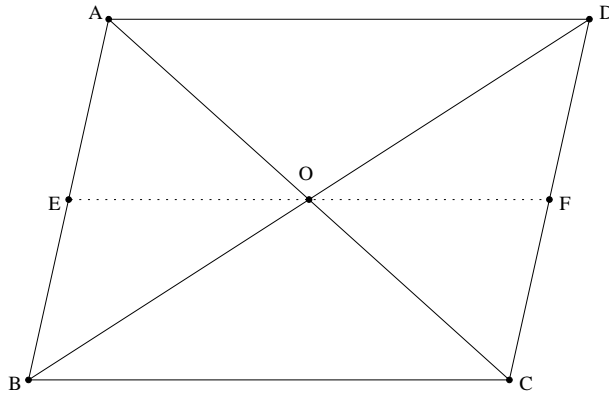


図 5.2: 簡略化済例題 1

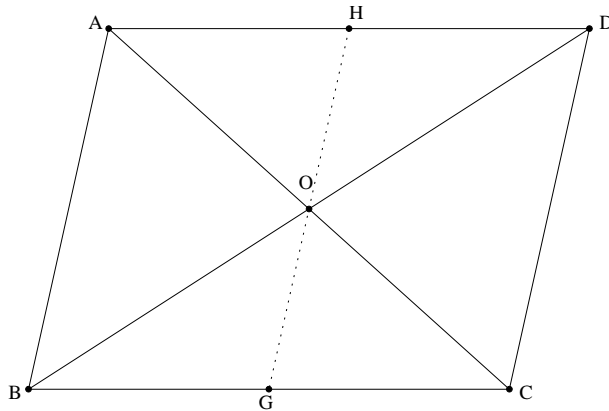


図 5.3: 簡略化済例題 2

## 5.2 Cantor の定理による実験

次に，GEX に組み込まれている例題 [11] のうち，Cantor の定理を用いて，GEX に入力する構造列を作成し，簡略化前後の図形的意味と可読性について考察を行う．

### 5.2.1 Cantor の定理と直観的記述

以下に，Cantor の定理と直観的な記述方法による構造列について示す．

[Cantor の定理]

円上の四辺形の各辺の中点を通り，向かい合う辺への垂線は一点で交わる．

この問題を GEX の仕様に基づいて記述すると、以下のようになる。

[Cantor の直観的記述]

Example Cantor\_1

HYPOTHESES:

POINT a b c ;

CIRCUMCENTER a b c ;

ON\_CIRCLE d o a ;

MIDPOINT g a d ;

MIDPOINT f a b ;

MIDPOINT e c d ;

MIDPOINT h b c ;

INTERSECTION\_PP n e o f f o e ;

INTERSECTION\_PP m g o h h o g ;

SHOW:

(SQ\_DIS n m) = 0 .

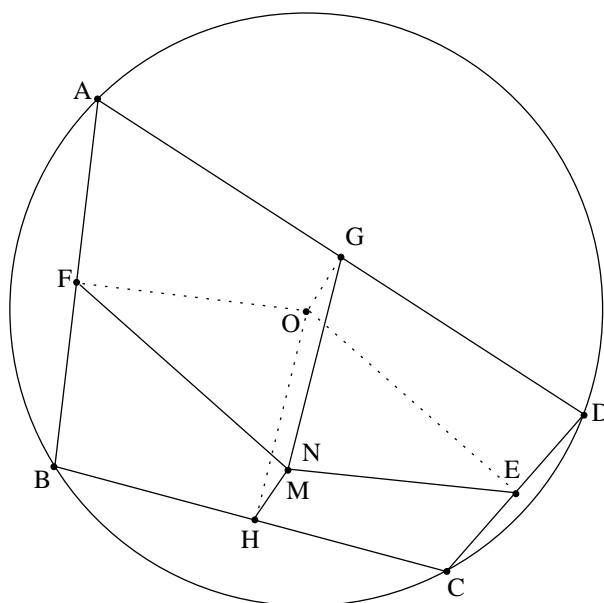


図 5.4: Cantor

これを GEX に入力し，面積法で実行した結果，証明中の多項式がもつ項の最大数  $maxt$  は 18 であった．

## 5.2.2 Cantor の定理の簡略化と考察

次に，この結果が真であることが判明したので，GSS 上で命題 `Cantor_1` の入力記述の簡略化を試みると以下ようになった．実行における処理の詳細は，付録 C に記載する．

[Cantor の簡略化記述 1]

```
hypothesis:
point a b c ;
circumcenter o a b c ;
on_circle d o a ;
midpoint g a d ;
midpoint f a b ;
midpoint e c d ;
intersection_pp n e o f f o e ;
show:
perpendicular b c g n .
```

[Cantor の簡略化記述 2]

```
hypothesis:
point a b c ;
circumcenter o a b c ;
on_circle d o a ;
midpoint f a b ;
midpoint e c d ;
midpoint h b c ;
intersection_pp n e o f f o e ;
show:
perpendicular a d h n .
```

出力である二つの簡略化結果をシステムで実行した結果， $maxt$  は簡略化前が 18 であるのに対し，簡略化後は共に 13 に減少した．この結果は，二つの簡略化結果が共に簡略化前の証明より可読性が向上していることを意味している．

この二つの簡略化済み命題を図形的に比較すると，5.1 節と同様，図 5.5，図 5.6 から前節と同様図形的には対称的で，点の名前を変更すれば図形的には等価な証明を行っていることがわかる．したがって，この定理の証明は，簡略化後の二つの命題のうち一方の証明を把握することによって利用者は元の証明を理解することができる．

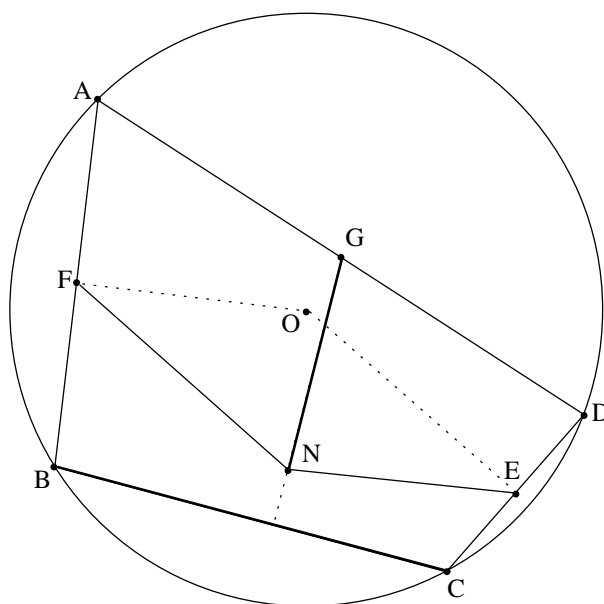


図 5.5: 簡略化済 Cantor その 1

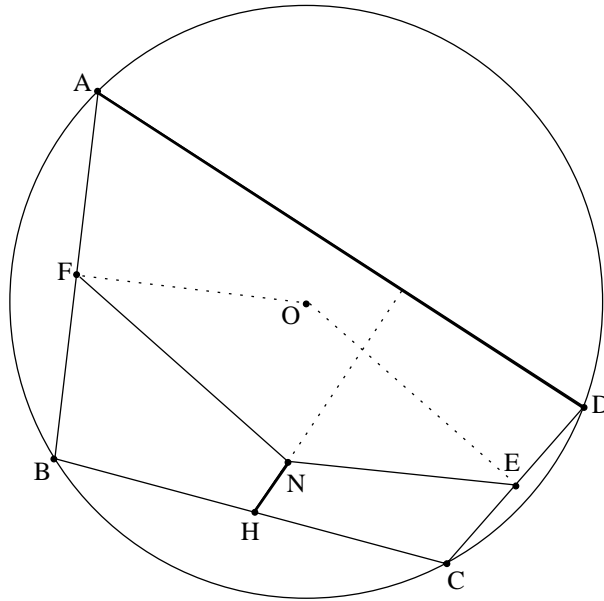


図 5.6: 簡略化済 Cantor その 2

### 5.3 Nehring の定理による実験

同様に GEX の組み込み例題の一つである Nehring の定理についての簡略化による入出力の変化について考察する .

#### 5.3.1 Nehring の定理と直観的記述

Nehring の定理を以下に示す .

[Nehring の定理]

三角形  $ABC$  の頂点  $A, B, C$  から任意の点  $O$  を通り , 向かい合う辺  $BC, CA, AB$  との交点をそれぞれ  $A_1, B_1, C_1$  とする .  $X_1$  を  $BC$  上の点とし ,  $X_2 = X_1B_1 \cap BA$  ,  $X_3 = X_2A_1 \cap AC$  ,  $X_4 = X_3C_1 \cap CB$  ,  $X_5 = X_4B_1 \cap BA$  ,  $X_6 = X_5A_1 \cap AC$  ,  $X_7 = X_6C_1 \cap CB$  とする . このとき  $X_7 = X_1$  を示せ .

この定理も , 前節と同様な点の合同を結論として示す問題である ( 図 5.7 参照 ) . これを構造列で記述すると以下のようなになった .



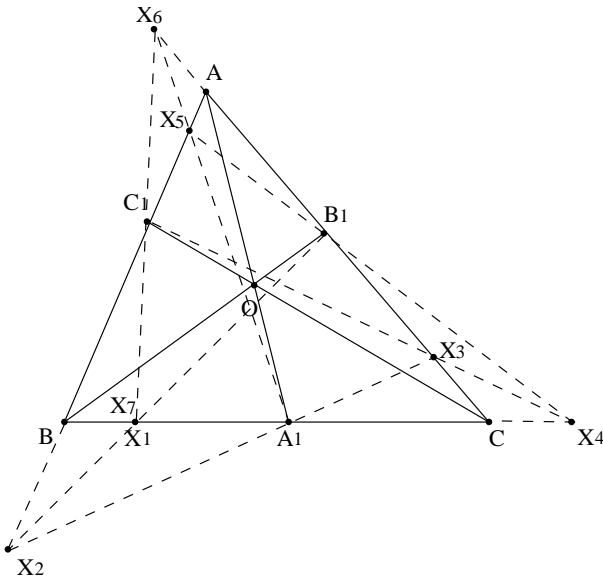


図 5.7: Nehring

[Nehring の直観的記述]

```

Example Nehring_1
HYPOTHESES:
POINT A B C O;
INTERSECTION_LL A_1 A O B C;
INTERSECTION_LL B_1 B O A C;
INTERSECTION_LL C_1 C O A B;
ON_LINE X_1 B C;
INTERSECTION_LL X_2 X_1 B_1 B A;
INTERSECTION_LL X_3 X_2 A_1 A C;
INTERSECTION_LL X_4 X_3 C_1 C B;
INTERSECTION_LL X_5 X_4 B_1 B A;
INTERSECTION_LL X_6 X_5 A_1 A C;
INTERSECTION_LL X_7 X_6 C_1 C B;
SHOW:
(SQ_DIS X_7 X_1) = 0 .

```

この問題を GEX によって証明を行った結果, *maxt* は 4 であった.

### 5.3.2 Nehring の定理の簡略化と考察

Nehring の定理の直観的記述を GSS によって簡略化した結果は、以下ようになった。

[Nehring の簡略化記述 1]

```
hypothesis:
point a b c o ;
intersection_ll a_1 a o b c ;
intersection_ll b_1 b o a c ;
intersection_ll c_1 c o a b ;
on_line x_1 b c ;
intersection_ll x_2 x_1 b_1 b a ;
intersection_ll x_3 x_2 a_1 a c ;
intersection_ll x_4 x_3 c_1 c b ;
intersection_ll x_5 x_4 b_1 b a ;
intersection_ll x_6 x_5 a_1 a c ;
show:
collinear x_1 c_1 x_6 .
```

[Nehring の簡略化記述 2]

```
hypothesis:
point b c ;
on_line x_1 b c ;
show:
collinear x_1 b c .
```

二つとなった簡略化結果のそれぞれについて考察する。簡略化前の問題での結論  $X_7 = X_1$  の消去により、新たに生成された問題では3点  $X_1, C_1, X_6$  と、3点  $X_1, B, C$  がそれぞれ同一直線上にあることを示す問題に変換されている。この二つの記述から、直線  $BC$  上に配置した点  $X_1$  が直線  $C_1X_6$  上にあれば十分な証明が得られることがわかる。

この簡略化済み問題を GEX で処理したところ、*maxt* がそれぞれ 2, 1 に減少したことから、証明の可読性が向上していることがわかる。簡略化記述 2 は、特に仮定で記述した図形的性質をそのまま結論として示していることから自明であり、さらに図 5.8 で示されるように簡略化記述 1 にその図形的性質が含まれることから、事実上、簡略化記述 1 の証明のみで Nehring の証明を行うのに充分であることがわかる。

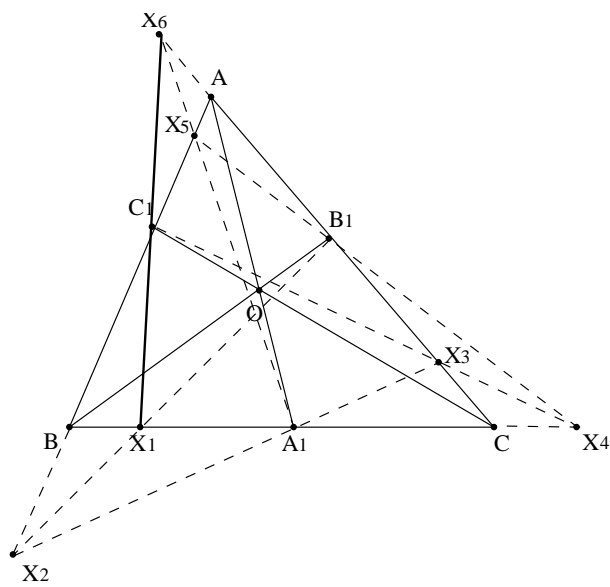


图 5.8: 簡略化済 Nehring

## 第 6 章

### おわりに

簡略化システム GSS により，構造列から作成された線分の平行，垂直，長さの一致という基本的な関係のみから，証明で冗長となる点を解析・消去した入力記述の生成が可能である．また，本研究で注目した点の合同において，GSS は一般的に複数の命題を出力することになるが，それぞれの命題について利用者が図形的意味を考察することは比較的容易である．さらにそれぞれの証明での  $maxt$  の減少による可読性の向上から，結果的に利用者は効率的に証明を理解することができる．

GSS の仕様について，点の情報から生成できる線分の探索方法に関して，起こりうる線分の組み合わせを総当たりで解析すると，3 つの線分の組み合わせでオーバーフローが起るようになる．そこで本システムでは点および線分に順序を与え，3 つの線分の組み合わせにおける計算量を抑えたが，この仕様では GEX で取り扱っている符合付きの長さや角度のような情報の有向性が考慮できないという問題点がある．したがって，システムを拡張する際に面積や角度に対する図形的性質を状態も考慮するならば，点順序による線分の扱いをより慎重に行う必要がある．

ところで， $maxt$  の増加を抑えるための入力問題の操作は，構造を消去する以外にも，結論となる述語を操作するために構造列を増やす方法もある [10]．5.3 節の Nehring の定理において，結論である点の合同を以下のように記述する．

[構造を追加する簡略化]

EXAMPLE Nehring\_1942

HYPOTHESES:

```
POINT B C A O ;
INTERSECTION_LL A_1 A O B C ;
INTERSECTION_LL B_1 B O C A ;
INTERSECTION_LL C_1 C O B A ;
ON_LINE X_1 B C;
INTERSECTION_LL X_2 B_1 X_1 B A ;
INTERSECTION_LL X_3 A_1 X_2 C A ;
INTERSECTION_LL X_4 C_1 X_3 B C ;
INTERSECTION_LL X_5 B_1 X_4 B A ;
INTERSECTION_LL X_6 A_1 X_5 C A ;
INTERSECTION_LL Z2 C A C_1 X_1 ;
INTERSECTION_LL Z1 A_1 X_5 C_1 X_1 ;
```

SHOW: (RATIO C\_1 Z1 X\_1 Z1)

(RATIO X\_1 Z2 C\_1 Z2)=1.

このように点  $X_7$  を導入する代わりに点  $Z_2, Z_1$  を導入し、結論を線分の比に置き換えて証明を行った場合にも *maxt* は 2 となる。これは、数式操作の初期状態である命題の結論によっても証明の可読性が変化することを示しており、証明を簡略化するための工夫は構造の消去だけではないことがわかる。

しかし、このような点を増やすことで結果的に *maxt* を減らす記述方法は、システムに組み込まれた数式のもつ傾向をふまえた工夫である。したがって、利用者は証明に使われる数式についての厳密な知識が必要になる。このことから、利用者が簡略化後の図形がどのように生成されたかを直観的に理解することに関しては、構造列に沿った簡略化を行う GSS の手法が有利であると考えられる。

今後の課題として、探索における計算量を抑えたより複雑な図形的性質の解析、また線分の有向性を含めた構造の処理を取り入れることが重要である。これにより加わる角度や面積などの幾何学量を用いた新たな基本定理により、状態の追加、推移による操作が行えるようになり、より可読性が高い証明を出力できるような、冗長の少ない入力問題の生成が期待できる。

# 謝辞

本研究および学生生活に渡って、多大な御指導と頂きました外山芳人教授に、そしてアルゴリズム作成にあたり様々な助言を下された鈴木太郎助手に感謝します。

また、研究だけでなく課外においてお世話になった先輩方、共に酒を酌み交わした学友およびその場を提供して下さった‘ゆうゆう’に感謝します。

そして、常にあたたかい励ましと惜しみない支援をして下さった家族に感謝します。

## 参考文献

- [1] S.C.Chou, An Introduction to Wu's Method for Mechanical Theorem Proving in Geometry, *Journal of Automated Reasoning* 4 (1988), pp.237-267.
- [2] Wu Wen-Tsün, On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem Proving in Elementary Geometry, *Scientia Sinica* 21 (1978), pp.157-179.
- [3] S.C.Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D.Reidel Publishing Company (1988).
- [4] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, Automated Production of Traditional Proofs for Theorems in Euclidean Geometry, *Proc. of Eighth IEEE Symposium on Login in Computer Science* (1993), pp.48-56.
- [5] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, Automated Geometry Theorem Proving by Vector Calculation, *Proc. of ISSAC-93, Kiev* (1993), pp.284-291.
- [6] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants II.Theorem Proving With Full-Angle, *Journal of Automated Reasoning* 17 (1996), pp.349-370.
- [7] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, A Fixpoint Approach To Automated Geometry Theorem Proving, *WSUC-95-2, CS Dept, Wichita State University* (1995).
- [8] B.Kutzler, and S.Stifter, Automated Geometry Theorem Proving Using Buchberger's Algorithm, *Proc. of SYMSAC'86, Waterloo* (1986), pp.209-214.
- [9] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, Automated Production of Traditional Proofs in Solid Geometry, *Journal of Automated Reasoning* 14 (1995), pp.257-291.

- [10] S.C. Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, An Introduction to Geometry Expert, Lecture Notes in Computer Science 1104 (1996), pp.235-239.
- [11] S.C.Chou, X.S.Gao, and J.Z.Zhang, The Geometry Expert, Version 1.0 A User Manual (1995).
- [12] 猪股 俊光, 益崎 真治, Scheme による記号処理入門, 森北出版 (1994).
- [13] 酒井 文雄, 環と体の理論, 共立出版 (1997).
- [14] 加藤 直幸, 具体的な図を使う幾何推論システム, 九州大学大学院システム情報科学研究科修士論文 (1998).
- [15] 木村 敦夫, 外山 芳人, 幾何学定理自動証明における問題記述の簡略化, 電気関係学会北陸支部連合大会 (1998), F-72, pp.376.



# 付録

ここでは，GEX[10, 11] および GSS の仕様，および Cantor の定理における命題の簡略化の詳細を記載する．

## A-1. 幾何学量の表現

ここでは，GEX で扱う命題中に含まれる図形的性質のうち，面積や比率などを表現するために利用できる幾何学量について記載する．

[面積]

$(\text{AREA } P_1 P_2 P_3)$ ， $(\text{AREA } P_1 P_2 P_3 P_4)$  を有向三角形  $S_{P_1 P_2 P_3}$  および有向四辺形  $S_{P_1 P_2 P_3 P_4}$  の面積とする．

[ピタゴラスの差分]

ピタゴラスの差分は，三角形の性質を調べるために用いられる．

$$(\text{PY } P_1 P_2 P_3) = (P_1 P_2)^2 + (P_2 P_3)^2 - (P_3 P_1)^2$$

$$(\text{PY } P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2)^2 - (P_2 P_3)^2 + (P_3 P_4)^2 - (P_4 P_1)^2$$

特別な場合として，直角三角形におけるピタゴラスの定理がある．

[線分の比]

4 個の点  $P_1$ ， $P_2$ ， $P_3$ ， $P_4$  についてこれらが同一直線上または平行であるとき， $(\text{RATIO } P_1 P_2 P_3 P_4)$  は有向線分  $P_1 P_2$  と  $P_3 P_4$  の比率  $\frac{P_1 P_2}{P_3 P_4}$  を表わす．

[ベクトル]

$(\text{VEC } P_1)$  を点  $P_1$  のベクトルとする． $(\text{VEC } P_1 P_2) = (\text{VEC } P_2) - (\text{VEC } P_1)$  ．

[2点間の距離]

$$(\text{SQ\_DIS } P_1 P_2) = (\text{PY } P_1 P_2 P_2 P_1) = 2P_1P_2^2$$

[交差比率]

$$(\text{CROSS\_RATIO } P_1 P_2 P_3 P_4) = (\text{RATIO } P_3 P_1 P_3 P_2)(\text{RATIO } P_4 P_2 P_4 P_1) .$$

[有向弦]

$(L P_1 P_2)$  を  $P_1$  から  $P_2$  までの有向弦とする．この値は構造 CIRCLE を消去する際のみに使われる．

[三角関数]

構造 CIRCLE を消去する際に利用するために三角関数を導入する．

$$(\text{SIN } P_1 P_2) , (\text{COS } P_1 P_2) , (\text{SIN } P_1) , (\text{COS } P_1) .$$

## A-2. 構造の仕様

GEX における構造列の記述に関する詳細を説明する．なお，説明のために以下の表記を定める．

$(\text{LINE } U V)$  点  $U$  ,  $V$  を通過する直線．

$(\text{PLINE } W U V)$  点  $W$  を通り直線  $(\text{LINE } U V)$  に平行な直線．

$(\text{TLINE } W U V)$  点  $W$  を通り直線  $(\text{LINE } U V)$  に垂直な直線．

$(\text{BLINE } U V)$  直線  $UV$  の垂直二等分線．

$(\text{ALINE } U V P Q R)$  点  $W$  を通り，直線  $UV$  から角度  $\angle[PQ, QR]$  と等しい角度をなす直線．

$(\text{CIR } O U)$  点  $O$  を中心として点  $U$  を通る直線．

$(\text{SCIR } W U V)$  点  $W$  ,  $U$  ,  $V$  を通る円．

ここでは，既知の点から新しい点を導入するための構造を定義する．それぞれの構造において，構造の記述が矛盾なく成立するために状態記述と非退化条件 (non-degenerate conditions) がシステムにより自動的に与えられる．

[記述開始時の構造]

POINT  $P_1 P_2 \cdots P_n$  .

平面上に任意の点  $P_1 P_2 \cdots P_n$  を配置する .

CIRCLE  $P_1 P_2 \cdots P_n$  .

円上に点  $P_1 P_2 \cdots P_n$  を配置する .

[半任意点を導入する構造]

ON\_LINE  $P P_1 P_2$  .

直線  $P_1 P_2$  上に任意に点  $P$  をとる .

ON\_PLINE  $P P_1 P_2 P_3$  .

直線 (PLINE  $P_1 P_2 P_3$ ) 上に任意に点  $P$  をとる .

ON\_TLINE  $P P_1 P_2 P_3$  .

直線 (TLINE  $P_1 P_2 P_3$ ) 上に任意に点  $P$  をとる .

ON\_BLINE  $P P_1 P_2$  .

直線 (BLINE  $P_1 P_2$ ) 上に任意に点  $P$  をとる .

ON\_ALINE  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

直線 (ALINE  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ ) 上に任意に点  $P$  をとる .

ON\_CIRCLE  $P P_1 P_2$  .

円 (CIR  $P_1 P_2$ ) 上に任意に点  $P$  をとる .

[交差についての構造]

INTERSECTION\_LL  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

直線  $P_1 P_2$  と  $P_3 P_4$  との交点を点  $P$  にとる .

INTERSECTION\_LP  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{LINE } P_1 P_2) \cap (\text{PLINE } P_3 P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_LT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{LINE } P_1 P_2) \cap (\text{TLINE } P_3 P_4 P_5)$

INTERSECTION\_LB  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$P = (\text{LINE } P_1 P_2) \cap (\text{BLINE } P_3 P_4)$  .

INTERSECTION\_PP  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .

$P = (\text{PLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{PLINE } P_4 P_5 P_6)$  .

INTERSECTION\_PT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .

$P = (\text{PLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{TLINE } P_4 P_5 P_6)$  .

INTERSECTION\_PB  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{PLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{BLINE } P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_TT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .

$P = (\text{TLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{TLINE } P_4 P_5 P_6)$  .

INTERSECTION\_TB  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{TLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{BLINE } P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_BB  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$P = (\text{BLINE } P_1 P_2) \cap (\text{BLINE } P_3 P_4)$  .

INTERSECTION\_LC  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$P = (\text{LINE } P_1 P_2) \cap (\text{CIR } P_3 P_4)$  .

INTERSECTION\_PC  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{PLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{CIR } P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_TC  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{TLINE } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{CIR } P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_CC  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$P = (\text{CIR } P_1 P_2) \cap (\text{CIR } P_3 P_4)$  .

INTERSECTION\_LS  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

$P = (\text{LINE } P_1 P_2) \cap (\text{SCIR } P_3 P_4 P_5)$  .

INTERSECTION\_SS  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .

$P = (\text{SCIR } P_1 P_2 P_3) \cap (\text{SCIR } P_4 P_5 P_6)$  .

#### [比率に関する構造]

MIDPOINT  $P P_1 P_2$  .

$P$  を直線  $P_1P_2$  の中点にとる .

SYM  $P P_1 P_2$  .

$P$  を点  $P_1$  の点  $P_2$  について対称な直線  $P_1P_2$  点とする .

LRATIO  $P P_1 P_2 (e_1) (e_2)$  .

$P$  を直線  $P_1P_2$  上で  $(\text{RATIO } P_1 P P_1 P_2) = e_1/e_2$  となる点とする .

MRATIO  $P P_1 P_2 (e_1) (e_2)$  .

$P$  を直線  $P_1P_2$  上で  $(\text{RATIO } P_1 P P_2) = e_1/e_2$  となる点とする .

PRATIO  $P P_1 P_2 P_3 (e_1) (e_2)$  .

$P$  を (PLINE  $P_1 P_2 P_3$ ) 上で  $(\text{RATIO } P_1 P P_2 P_3) = e_1/e_2$  となる点とする .

TRATIO  $P P_1 P_2 P_3 (e_1) (e_2)$  .

$P$  を (TLINE  $P_1 P_2 P_3$ ) 上で  $PP_1/P_2P_3 = e_1/e_2$  となる点とする .

INVERSION  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を直線  $P_1P_2$  上の , 点  $P_1$  による円 (CIR  $P_2 P_3$ ) の鏡像 ,

すなわち  $(\text{RATIO } P_2 P P_2 P_1) * (\text{SQ\_DIS } P_1 P_2) = (\text{SQ\_DIS } P_3 P_4)$  を満たす点にとる .

HARMONIC  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を調和対  $(PP_1, P_2P_3)$  を満たす点にとる . すなわち ,

$(\text{RATIO } P_2 P P_2 P_1) = -(\text{RATIO } P_3 P P_3 P_1)$  .

PSQUARE  $P P_1 P_2$  .

$P$  を  $PP_1 = P_1P_2, PP_1 \perp P_1P_2$  を満たし , かつ  $PP_1$  から  $P_2P_1$  の方向を反時計回りとなるような点にとる .

NSQUARE  $P P_1 P_2$  .

$P$  を  $PP_1 = P_1P_2, PP_1 \perp P_1P_2$  を満たし , かつ  $PP_1$  から  $P_2P_1$  の方向を時計回りとなるような点にとる .

PE\_TRIANGLE  $P P_1 P_2$  .

$P$  を  $PP_1P_2$  が正三角形になり , かつ  $PP_1$  から  $P_2P_1$  の方向を反時計回りとなるような点にとる .

NE\_TRIANGLE  $P P_1 P_2$  .

$P$  を  $PP_1P_2$  が正三角形になり , かつ  $PP_1$  から  $P_2P_1$  の方向を時計回りとなるような点にとる .

### [3点からなる特殊な点]

FOOT  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を  $P_1$  から  $P_2P_3$  に引いた垂線上にとる . 構造 INTERSECTION\_LT  $P P_2 P_3 P_1 P_2 P_3$  と同様 .

CENTROID  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を三角形  $P_1P_2P_3$  の重心にとる .

ORTHOCENTER  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を三角形  $P_1P_2P_3$  の垂心にとる .

構造 INTERSECTION\_TT  $P P_1 P_2 P_3 P_2 P_1 P_3$  と同様 .

CIRCUMCENTER  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を三角形  $P_1P_2P_3$  の外心にとる .

構造 INTERSECTION\_BB  $P P_1 P_2 P_3 P_2$  と同様 .

INCENTER  $P P_1 P_2 P_3$  .

$P$  を  $P_3$  が三角形  $P_1P_2P$  の内心になるようにとる .

[定数]

CONSTANT  $p(r)$  .

$p(r)$  は変数  $r$  の多項式である . これにより ,  $p(r) = 0$  をみたす定数  $r$  が導入される .

以上の構造をもちいて入力問題を記述する . さらに , 構造 CONSTANT を除くそれぞれの構造において , 点  $P$  を , 構造により導入された点と呼ぶ .

### A-3. 述語の仕様

入力される構造列の末尾は , それ以前で導入された点によって作成された図形の幾何学的性質を示す述語であり , 命題の結論部分となる . ここでは , その結論部分で使用される幾何学的性質の記述の仕様について説明する .

COLLINEAR  $P_1 P_2 P_3$  .

3 つの点  $P_1 P_2 P_3$  が同一直線上にある .

PARALLEL  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2 つの直線  $P_1P_2$  ,  $P_3P_4$  が平行である .

PERPENDICULAR  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2 つの直線  $P_1P_2$  ,  $P_3P_4$  が垂直である .

CONGRUENT  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2つの直線  $P_1P_2$  ,  $P_3P_4$  の長さが等しい .

EQDISTANCE  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2つの直線  $P_1P_2$  ,  $P_3P_4$  の長さが等しい .

PERP\_BISECT  $P_1 P_2 P_3$  .

点  $P_1$  を通り直線  $P_2P_3$  に垂直な線分が直線  $P_2P_3$  を2等分する .

EQANGLE  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .

$\angle P_1P_2P_3 = \angle P_4P_5P_6$  .

COCIRCLE  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$\angle P_1P_3P_2 = \angle P_1P_4P_2$  .

MIDPOINT  $P_1 P_2 P_3$  .

$P_1$  は直線  $P_2P_3$  の中点である .

HARMONIC  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2直線  $P_1P_2$  ,  $P_3P_4$  は調和对すなわち ,

$(\text{RATIO } P_2 P P_2 P_1) = -(\text{RATIO } P_3 P P_3 P_1)$  を満たす .

INVERSION  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

$P_1$  は直線  $P_2P_3$  上 , 点  $P_2$  による円 (CIR  $P_2 P_3$ ) の鏡像 , すなわち ,

$(\text{RATIO } P_2 P P_2 P_1) * (\text{SQ\_DIS } P_1 P_2) = (\text{SQ\_DIS } P_3 P_4)$  を満たす .

PE\_TRIANGLE  $P_1 P_2 P_3$  .

$P_1P_2P_3$  が正三角形になり , かつ  $P_1P_2$  から  $P_3P_2$  の方向を反時計回りとなっている .

EQ\_POINT  $P_1 P_2$  .

$P_1 = P_2$  .

EQ\_PRODUCT  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$  .

$P_1P_2 * P_3P_4 = P_5P_6 * P_7P_8$  .

EQ\_RATIO  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$  .

$(\text{RATIO } P_1 P_2 P_3 P_4) = (\text{RATIO } P_5 P_6 P_7 P_8)$  .

ON\_RADICAL  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .

点  $P_1$  は2つの円 (CIR  $P_2 P_3$ ) , (CIR  $P_4 P_5$ ) の根軸である .

TANGENT  $P_1 P_2 P_3 P_4$  .

2つの円 (CIR  $P_1 P_2$ ) , (CIR  $P_3 P_4$ ) は正接である .

NO .

記述に結論を加えない . この記述は利用者が図を描くだけを目的とするときに用いられる .

## B. 構造列から状態列への処理

ここでは , 本研究でアルゴリズムを作成 , 実装した簡略化システム GSS における , GEX への入力記述の仮定部分を構成する構造と状態との対応を示す .

[記述開始時の構造]

POINT  $P_1 P_2 \cdots P_n$  , CIRCLE  $P_1 P_2 \cdots P_n$  .

初期構造では , 任意の位置に点を配置するため性質を示す情報は得られないが , 便宜上以下の状態を生成する .

状態 : (point ( $P_1 P_2 \cdots P_n$ )) , (circle ( $P_1 P_2 \cdots P_n$ ))

[半任意点を導入する構造]

ON\_LINE  $P P_1 P_2$  .

状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ )) .

ON\_PLINE  $P P_1 P_2 P_3$  .

状態 : (para ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) .

ON\_TLINE  $P P_1 P_2 P_3$  .

状態 : (perp ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) .

ON\_BLINE  $P P_1 P_2$  .

状態 : (eq\_len ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ )) .

ON\_CIRCLE  $P P_1 P_2$  .

状態 : (eq\_len ( $P_1P_2$ ) ( $P_1P$ )) .

[交差についての構造]

INTERSECTION\_LL  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .

状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(para ( $P_3P$ ) ( $P_4P$ ))



INTERSECTION\_LP  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(para ( $P_4P_5$ ) ( $P_3P$ )) .

INTERSECTION\_LT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(perp ( $P_4P_5$ ) ( $P_3P$ )) .

INTERSECTION\_LB  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .  
 状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(eq\_len ( $P_3P$ ) ( $P_4P$ )) .

INTERSECTION\_PP  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .  
 状態 : (para ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (para ( $P_5P_6$ ) ( $P_1P$ )) .

INTERSECTION\_PT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .  
 状態 : (para ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (perp ( $P_5P_6$ ) ( $P_1P$ )) .

INTERSECTION\_PB  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (para ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (eq\_len ( $P_4P$ ) ( $P_5P$ )) .

INTERSECTION\_TT  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  .  
 状態 : (perp ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (perp ( $P_5P_6$ ) ( $P_1P$ )) .

INTERSECTION\_TB  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (perp ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (eq\_len ( $P_4P$ ) ( $P_5P$ )) .

INTERSECTION\_BB  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .  
 状態 : (eq\_len ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ )) (eq\_len ( $P_3P$ ) ( $P_4P$ )) .

INTERSECTION\_LC  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .  
 状態 : (para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(eq\_len ( $P_3P_4$ ) ( $P_3P$ )) .

INTERSECTION\_PC  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (para ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (eq\_len ( $P_4P$ ) ( $P_5P$ )) .

INTERSECTION\_TC  $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$  .  
 状態 : (perp ( $P_2P_3$ ) ( $P_1P$ )) (eq\_len ( $P_4P$ ) ( $P_5P$ )) .

INTERSECTION\_CC  $P P_1 P_2 P_3 P_4$  .  
 状態 : (eq\_len ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ )) (eq\_len ( $P_3P$ ) ( $P_4P$ )) .

[比率に関する構造]

MIDPOINT  $P P_1 P_2$  .  
 状態 : (eq\_len ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(para ( $P_1P$ ) ( $P_2P$ ))(para ( $P_1P P_1P_2$ )) .

$\text{SYM } P P_1 P_2 .$

状態： $(\text{eq\_len } (P_1P) (P_2P))(\text{para } (P_1P) (P_2P))(\text{para } (P_1P P_1P_2)) .$

[3点からなる特殊な点]

$\text{FOOT } P P_1 P_2 P_3 .$

状態： $(\text{perp } (P_2P_3) (P_1P)) .$

$\text{ORTHCENTER } P P_1 P_2 P_3 .$

状態： $(\text{perp } (P_2P_3) (P_1P)) (\text{perp } (P_1P_3) (P_2P)) .$

$\text{CIRCUMCENTER } P P_1 P_2 P_3 .$

状態： $(\text{eq\_len } (P_1P) (P_2P)) (\text{eq\_len } (P_1P) (P_3P)) .$

## C. 簡略化実行結果：Cantor の定理

ここでは，Cantor の定理の直観的な入力記述の GSS による簡略化結果を示す．

```
Construction Sequence is...
hypotheses:
point a b c ;
circumcenter o a b c ;
on_circle d o a ;
midpoint g a d ;
midpoint f a b ;
midpoint e c d ;
midpoint h b c ;
intersection_pp n e o f f o e ;
intersection_pp m g o h h o g ;
show:
eq_point n m .
```

Step1.Making point-order.

```
(a b c o d g f e h n m)
```

Step2.Making condition-list.

```
((point (a b c)))
((eq_len (a o) (b o)) (eq_len (a o) (c o)))
((eq_len (a o) (o d)))
((eq_len (a g) (d g)) (para (a g) (d g)) (para (a d) (d g)))
((eq_len (a f) (b f)) (para (a f) (b f)) (para (a b) (b f)))
((eq_len (c e) (d e)) (para (c e) (d e)) (para (c d) (d e)))
((eq_len (b h) (c h)) (para (b h) (c h)) (para (b c) (c h)))
((para (o f) (e n)) (para (o e) (f n)))
((para (o h) (g m)) (para (o g) (h m)))
((eq_point (n m)))
```

Step3-1.Making addition-list

```
((perp (a b) (o f)) (perp (a d) (o g)) (perp (b c) (o h)) (perp (c d) (o e)))
```

Step3-2.Adding condition-list.

```
((point (a b c)))  
(eq_len (a o) (b o)) (eq_len (a o) (c o))  
(eq_len (a o) (o d))  
(eq_len (a g) (d g)) (para (a g) (d g)) (para (a d) (d g)) (perp (a d) (o g))  
(eq_len (a f) (b f)) (para (a f) (b f)) (para (a b) (b f)) (perp (a b) (o f))  
(eq_len (c e) (d e)) (para (c e) (d e)) (para (c d) (d e)) (perp (c d) (o e))  
(eq_len (b h) (c h)) (para (b h) (c h)) (para (b c) (c h)) (perp (b c) (o h))  
(para (o f) (e n)) (para (o e) (f n))  
(para (o h) (g m)) (para (o g) (h m))  
(eq_point (n m))
```

Step4-1.Making replacement-list.

```
((para (o g) (h m)) (perp (a d) (h m))  
(para (o f) (e n)) (perp (a b) (e n))  
(para (o e) (f n)) (perp (c d) (f n))  
(para (o h) (g m)) (perp (b c) (g m)))
```

Step4-2.Fixing condition-list.

```
((point (a b c)))  
(eq_len (a o) (b o)) (eq_len (a o) (c o))  
(eq_len (a o) (o d))  
(eq_len (a g) (d g)) (para (a g) (d g)) (para (a d) (d g)) (perp (a d) (o g))  
(eq_len (a f) (b f)) (para (a f) (b f)) (para (a b) (b f)) (perp (a b) (o f))  
(eq_len (c e) (d e)) (para (c e) (d e)) (para (c d) (d e)) (perp (c d) (o e))  
(eq_len (b h) (c h)) (para (b h) (c h)) (para (b c) (c h)) (perp (b c) (o h))  
(perp (a b) (e n)) (perp (c d) (f n))  
(perp (b c) (g m)) (perp (a d) (h m))  
(eq_point (n m))
```

Step5.Checking conclusion and eliminate points.

Detected conclusion EQ\_POINT.

Set new conclusion is ...

((perp (b c) (g n)) (perp (a d) (h n)))

Simplified result(s) is(are)...

hypothesis:

point a b c ;

circumcenter o a b c ;

on\_circle d o a ;

midpoint g a d ;

midpoint f a b ;

midpoint e c d ;

intersection\_pp n e o f f o e ;

show:

perpendicular b c g n .

hypothesis:

point a b c ;

circumcenter o a b c ;

on\_circle d o a ;

midpoint f a b ;

midpoint e c d ;

midpoint h b c ;

intersection\_pp n e o f f o e ;

show:

perpendicular a d h n .