Title	構成的集合論における逆数学の研究
Author(s)	石原，哉
Citation	科学研究費助成事業研究成果報告書: 1-4
Issue Date	2014-06-02
Type	Research Paper
Text version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10119/12179
Rights	
Description	研究種目：基盤研究(C)，研究期間：2011～2013，課題番号：23540130，研究者番号：10211046，研究分野：数理論理学・構成的数学，科研費の分科・細目：数学・数学一般

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１３３０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１３０
研究課題名（和文）構成的集合論における逆数学の研究

研究課題名（英文）Reverse Mathematics in Constructive Set Theory

研究代表者
石原　哉（ISHIHARA, HAJIME）

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：１０２１１０４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：構成的逆数学における未解決問題の単調完備定理、２進展開定理、中間値の定理を部分的に解決した。単調完備定理はLPO、弱い帰納法およびある種の選択公理と同値に、２進展開定理、中間値の定理は凸性を持つ木構造に対するWKLと同値になることが分かった。これらの結果は構成的集合論の部分体系でも成り立つ。
すでに構成的解析体系への解釈が確立している演算の体系APPを中間的な体系として選び、集合論をAPPで解釈する手法を提案した。空集合の公理、非順序対の公理、無限の公理、弱い分出公理を解釈するために十分なAPPでの公理を明らかにした。また、外延性の公理を解釈するために十分なAPPの公理についてもめどが立った。

研究成果の概要（英文）：Some open problems in constructive reverse mathematics, such as the monotone completeness theorem, the binary expansion theorem and the intermediate value theorem have been partially solved. The monotone completeness theorem is equivalent to LPO, a weak induction axiom and a kind of countable choice, and the binary expansion theorem and the intermediate value theorem are equivalent to versions of WKL with some convexity conditions on trees. Those results also hold in a subsystem of the constructive set theory.
A method of interpreting a set theory by interpreting it into the theory of operation APP, as an intermediate theory, which has an interpretation in to a theory of elementary analysis has been proposed. Axioms in APP which are sufficient to interpret the axioms of empty set, pair, infinity and a weak separation have been given. An extensive investigation on an axiom in APP which is sufficient to interpret the axiom of extensionality has been carried out.

研究分野：数理論理学・構成的数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：数理論理学　構成的数学　逆数学　集合論

１．研究開始当初の背景

〔構成的数学〕

構成的数学は、Brouwer の直観主義数学に始まり、Markov の構成的数学、Bishop の構成的数学など、様々な哲学的背景に基づいて、研究が続けられている。一般に数学は、対象を記述する公理と（それらから定理を導きだすための）論理により規定される。これらの構成的数学の論理は、直観主義論理である。命題間の論理的同値性を同値関係とみなせば、直観主義論理の同値関係$\sim_i$は、通常の論理（古典論理）の同値関係$\sim_c$の部分集合であり、同値関係$\sim_i$による類別は、同値関係$\sim_c$による類別より細かい。一方、Brouwer の直観主義数学や Markov の構成的数学では、特殊な公理を仮定しているので、すべての関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は連続である（CONT）等、通常の数学と矛盾する定理も証明できる。しかし、古典論理より証明能力の弱い直観主義論理を用いているので、特殊な公理を仮定しても、それらの数学自身は無矛盾である。

〔Friedman-Simpson の逆数学〕

Friedman-Simpson の逆数学は、古典論理を用いて、通常の数学の様々な定理と同値な集合の存在公理を明らかにすることを目的としている。自然数と自然数の集合を対象とする弱い公理と古典論理により規定される形式体系（２階算術体系 $\mathbf{RCA}_0$）上で、定理を弱い König の補題（WKL）や算術的内包公理（ACA）等の集合の存在公理の階層（線形順序構造）に分類する。体系 $\mathbf{RCA}_0$ における論理的同値関係$\sim_{RCA}$では、古典論理を用いているため、WKL の対偶命題である fan 定理（FAN）は WKL の同値類$[\mathrm{WKL}]_{RCA}$に分類される。また、Brouwer の直観主義数学や Markov の構成的数学の、通常の数学と矛盾する定理は矛盾（⊥）の同値類$[\perp]_{RCA}$に分類される。さらに、２階算術体系を用いているため、抽象的な対象を自然数や自然数の集合にコード化しなければならない。したがって、位相空間など高度に抽象的な対象を自然に扱うことは非常に困難である。

〔構成的逆数学〕

研究代表者は、それまでの構成的数学における研究成果を踏まえて、直観主義論理を用いた構成的逆数学を提唱した。構成的逆数学は、通常の数学、Brouwer の直観主義数学および Markov の構成的数学など様々な哲学のもとに証明された定理を、統一的な視点から論理的原理や関数(集合)の存在公理により分類し、整理し、体系化することを目的としている。自然数と自然数列を対象とする弱い公理と直観主義論理により規定される形式体系（解析体系 $\mathbf{EL}_0$）上で、定理を排中律やド・モルガンの法則などの論理的原理および可算選択公理などの関数の存在公理のなす束構造に分類する。直観主義論理を用いることにより、体系 $\mathbf{EL}_0$ における論理的同値関係$\sim_{EL}$においては、$[\mathrm{FAN}]_{EL}\neq[\mathrm{WKL}]_{EL}$、$[\mathrm{CONT}]_{EL}\neq[\perp]_{EL}$ となるため、より細かい分類が可能である。しかしながら、抽象的な対象はやはり自然数や自然数列にコード化しなければならず、高度に抽象的な対象を自然に扱うことは非常に困難である。

２．研究の目的

構成的数学のための形式体系には、$\mathbf{EL}_0$ や Martin-Löf の型理論など型概念に基づく体系と、集合概念に基づく体系がある。Aczel は、Martin-Löf の型理論に自然な解釈をもつ集合論（**CZF**）を提案した。型概念に基づく体系 $\mathbf{RCA}_0$ や $\mathbf{EL}_0$ では、抽象的な対象を自然数や自然数の集合や列にコード化しなければならないが、集合概念に基づく形式体系では、高度に抽象的な対象を自然に扱うことができる。本研究の目的は、

（１）　体系 $\mathbf{EL}_0$ と **CZF** における構成的逆数学の実践を通して、
（２）　構成的逆数学のための集合概念に基づく形式体系を提案し、
（３）　構成的逆数学のケーススタディを通した評価・改良を行い、

構成的逆数学において高度に抽象的な対象を自然に扱えるようにすることである。具体的には、

（１）　構成的逆数学における重要な未解決問題（例えば、中間値の定理、Lindelöf の定理、Banach-Steinhaus の定理など）の、体系 $\mathbf{EL}_0$ と **CZF** における解決を目的とする。これを通して、$\mathbf{EL}_0$ における成果と **CZF** における成果との間の相互変換に関して一定の知見を得る。

（２）　（１）に基づいて、$\mathbf{EL}_0$ の保守的拡大になっている **CZF** より弱い集合論の体系 **T** の提案を目的とする。体系 **T** が $\mathbf{EL}_0$ の保守的拡大であるとは、体系 $\mathbf{EL}_0$ の命題 A に対して、

$$\mathbf{EL}_0 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{T} \vdash A$$

となることをいう（ここで、⊢は体系での証明可能性を表す）。これにより、自然数と自然数列に関する命題に限れば、$\mathbf{EL}_0$ と **T** は証明能力が同じであることが保証される。

（３）　（２）で提案した体系 **T** 上で、構成的位相空間の① カテゴリー性、② コンパクト性、③ 一様性を題材に構成的逆数学のケーススタディを行い、提案した形式体系の評価・改良を目的とする。これを通して、体系 **T** の保守的拡大性を保ちながら、**T** にどのような集合論の公理を加えることができるか（どこまで体系 **T** を強くできるか）も明らかにする。

３．研究の方法

初年度は、型概念に基づいた体系 $\mathbf{EL}_0$ と集合概念に基づいた体系 **CZF** における構成的逆数学の実践を通して、構成的逆数学のための集合概念に基づく形式体系の調査を行った。具体的には、

（１） 構成的逆数学における重要な未解決問題（例えば、中間値の定理、Lindelöf の定理、Banach-Steinhaus の定理など）の、体系 $\mathbf{EL}_0$ と **CZF** における解決を目指した。この実践を通して、$\mathbf{EL}_0$ における成果と **CZF** における成果との間の相互変換について考察し、$\mathbf{EL}_0$ の保守的拡大となる集合論の体系 **T** を得るためには、**CZF** の公理にどのような制限を加える必要があるか考察を行った。

（２） 集合概念に基づく体系と、その型概念に基づく体系での解釈の調査（例えば、**CZF** と **CZF** の Martin-Löf の型理論への自然な解釈の調査）を行った。**CZF** の Martin-Löf の型理論への自然な解釈の手法を中心に、様々な解釈の手法を調査し、集合論の体系 **T** の $\mathbf{EL}_0$ への解釈の手法を探った。

次年度以降は、構成的逆数学のための集合概念に基づく形式体系の提案、およびその構成的逆数学のケーススタディを通した評価・改良を行った。具体的には、

（１） 体系 CZF の公理に制限を加えることにより、構成的逆数学のための集合論の体系 **T** を提案する。体系 **T** の命題 A から $\mathbf{EL}_0$ の命題 f(A)への変換（解釈）f を定義し、

$$\mathbf{EL}_0 \vdash f(A) \Leftrightarrow \mathbf{T} \vdash A$$

および体系 $\mathbf{EL}_0$ の命題 A に対して、

$$\mathbf{EL}_0 \vdash f(A) \leftrightarrow A$$

を示すことにより、保守的拡大性を示すことを試みた。

（２） 提案した体系 **T** 上で、位相空間への様々な構成的アプローチ（neighbourhood space、constructive topological space 、formal topology、basic pair など）での① カテゴリー性、② コンパクト性、③ 一様性に焦点を絞り、構成的逆数学のケーススタディを試みた。これを通して、体系 **T** の保守的拡大性を保ちながら、**T** にどのような集合論の公理を加えることができるか解明を試みた。

各年度末には年度全体にわたって評価を行い、問題点の明確化・解決案の調査を行った。研究が計画通り進まない場合は、海外共同研究者の意見や国際会議・研究集会での講演などを参考に、形式体系間の変換（解釈）やケーススタディの題材を柔軟に変更し対応した。

特に、保守的拡大性の証明に困難があったので、体系 $\mathbf{EL}_0$ と体系 **T** の間の中間的な体系 **T**’とそれらの間の変換(解釈)g、h を導入し、

$$\mathbf{EL}_0 \vdash g(h(A)) \Leftrightarrow \mathbf{T}' \vdash h(A) \Leftrightarrow \mathbf{T} \vdash A$$

を示すことにより、**T** の保守的拡大性の証明を試みた。

また、最終年度でには、計画年度全体にわたって評価を行い、問題点の明確化・解決案の調査を行った。

４．研究成果

（１）構成的逆数学における未解決問題

① 単調完備定理（MCT）の弱い形式は、直観主義算術体系 **HA** では LPO（排中律の特別な場合）と同値であり、帰納法を制限した弱い古典的算術体系ではある帰納法の公理と同値であることが知られている。構成的逆数学の体系 $\mathbf{EL}_0$ では、MCT の弱い形式は LPO と弱い帰納法と同値であることを示した。また、MCT それ自身は MCT の弱い形式とある種の選択公理と同値になる可能性が高いことが分かった。

② ２進展開定理（BE）と中間値の定理（IVT）は、いずれも古典的逆数学の弱い体系で証明できるが構成的数学では成り立たず、いずれも LLPO（ド・モルガン法則の特別な場合）を含意することが知られている。木構造に対してある種の凸性の概念を導入し、凸性を持つ木構造に対する WKL と BE、IVT の関係を $\mathbf{EL}_0$ で明らかにした。

また、これらの結果は構成的集合論 **CZF** の部分体系でも成立することが分かった。

（２）集合概念に基づく体系と、その型概念に基づく体系での解釈の調査

構成的集合論 **CZF** を Martin-Löf の型理論で解釈する手法を調査し、型理論では集合をある種の関数として解釈していること、および分出公理、外延性公理の解釈に特殊な手法を用いていることが分かった。

この知見をもとに、**CZF** の部分体系を $\mathbf{EL}_0$ で解釈する手法の構築を試みたが、直接的な解釈ではなく中間的な体系を経由した解釈を与えることにより、より見通しのよい解釈を与えることができることが分かった。

（３）中間的な体系への解釈

すでに $\mathbf{EL}_0$ への解釈が確立している体系 **APP** を中間的な体系として選んだ。集合論の公理、空集合の公理、非順序対の公理、無限の公理

を解釈するために十分なAPPの公理を明らかにした。
また、弱い分出公理を解釈するために十分なAPPの公理も明らかにすることができた。Martin-Löf の型理論での解釈と同様に外延性の公理を解釈するために十分なAPPの公理についてもめどが立った。また、APP のいくつかのモデルにおいて、それらの公理が成り立つかを検証した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）
1. Hajime Ishihara, Classical propositional logic and decidability of variables in intuitionistic propositional logic, Log. Methods Comput. Sci.,to appear.査読有
2. Peter Aczel, Hajime Ishihara, Takako Nemoto and Yasushi Sangu, Generalized geometric theories and set-generated classes, Math. Structures Comput. Sci., to appear.査読有
3. Hajime Ishihara and Tatsuji Kawai, Completeness and cocompleteness of the categories of basic pairs and concrete spaces, Math. Structures Comput. Sci., to appear.査読有
4. Douglas Bridges, Hajime Ishihara and Maarten McKubre-Jordens, Uniformly convex Banach spaces are reflexive - constructively, MLQ Math. Log. Q., 59, 352-356, 2013.査読有
5. Hajime Ishihara, Relating Bishop's function spaces to neighbourhood spaces, Ann. Pure Appl. Logic, 164, 482-490, 2013.査読有
6. Hajime Ishihara, Some conservative extension results on classical and intuitionistic sequent calculi, In: U. Berger, H. Diener, P. Schuster and M. Seisenberger eds., Logic, Construction, Computation, Ontos Verlag, Frankfurt, 2012, 289-304.査読有

〔学会発表〕（計７件）
1. Hajime Ishihara, A monad in the combinatory algebra, ·Correctness by Construction CORCON 2014 Workshop, Genoa, Italy, March 24-27, 2014.
2. Hajime Ishihara, Classical propositional logic and decidability of variables in intuitionistic propositional logic, Continuity, Computability, Constructivity - From Logic to Algorithms, Swansea University/Gregynog, UK, June 26-30, 2013.
3. Hajime Ishihara, Constructive reverse mathematics: an introduction, Constructive Mathematics: Foundations and Practice, Nis, Serbia, June 24-28, 2013.
4. Hajime Ishihara, Infinitary propositional theories and set-generated classes, Fourth Workshop on Formal Topology, Ljubljana, Slovenia, June 15 -19, 2012.
5. Hajime Ishihara, Some conservative extension results of classical logic over intuitionistic logic, Continuity, Computability, Constructivity - From Logic to Algorithms, Trier, Germany, May 29 - June 02, 2012.
6. Hajime Ishihara, Some conservative extension results of classical logic over intuitionistic logic, Mathematical Logic: Proof Theory, Constructive Mathematics, Oberwolfach, Germany, November 7-11, 2011.
7. Hajime Ishihara, Generalized geometric theories and set-generated classes, Computing with Infinite Data: Topological and Logical Foundations, Dagstuhl, Germany, October 10-14, 2011.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
石原　哉（ISHIHARA HAJIME）
北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：１０２１１０４６