

Title	CIP法による非定常管内流れの並列計算
Author(s)	荒木, 宏之
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1219
Rights	
Description	松澤照男, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

CIP 法による非定常管内流れの並列計算

指導教官 松澤照男 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

荒木 宏之

平成 11 年 3 月 30 日

要 旨

本研究では、管壁が移動する管内流れの解析をオイラーの格子を利用して行なう。スキームとしては、CIP 法を利用する。またそれらの解析を領域分割法に基づいて並列計算機 Cray T3E 上で並列化を行ない計算する。研究の目的は、流体の解析を CIP法を用いて行なうことにより、物理現象を確認すること。そして圧力の計算に時間を要する非定常な流れに適した並列アルゴリズムの開発を行う。

目次

1	はじめに	1
2	数値計算法について	3
2.1	基礎方程式	3
2.1.1	圧力のポアソン方程式と離散化	3
2.1.2	速度の計算	4
2.2	CIP 法について	6
2.3	境界条件	8
2.3.1	固定壁での境界条件	8
2.3.2	移動境界での境界条件	9
2.3.3	特異点での境界条件	11
3	領域分割法と並列計算	13
3.1	領域分割	13
3.2	並列計算	16
4	予備実験	18
4.1	計算モデル	18
4.1.1	計算手順	18
4.2	解析結果	19
4.3	計算時間	20
5	実験	21
5.1	凹管内の振動するポアゾイユ流れ	21
5.1.1	計算モデル	21
5.1.2	流入条件	21

5.1.3	計算結果	25
5.2	壁面が振動する管内流れ	51
5.2.1	計算モデル	51
5.2.2	解析結果	52
6	まとめ	61

第 1 章

はじめに

移動境界を含む流れの解析において、その境界面をどのように表現するかが重要になる。これまではラグランジェ的な格子を用いるのが一般的であった。しかしラグランジェ的な格子を用いる場合時間ステップごとに格子の張り替えが必要となる。

矢部孝 [1] らによって提案された Cubic Interpolation Propagation (CIP 法) は、オイラー的な格子を用い、非圧縮性流体、圧縮性流体、あるいは気体、液体、固体を統一的に扱うことができる。したがってこれまで CIP 法を用いた研究が数多く行われており、安定で精度の良いスキームであることが確認されている。この CIP 法を利用することで、固体が移動する際に流体に与える流れや、液体が固体に影響を与える流れの解析をオイラー格子を利用して容易に行うことができる。また単純な構造ゆえに多次元化を容易に行うことが可能である。

そこで CIP 法を用いることで、たとえば血管流れのような弾性管と振動流との相互作用を解析するといった問題に適応することが可能であると考えられる。古田 [4] はその基礎的な研究として、CIP 法を 2 次元の振動する管内流れの解析を行い、移動境界を伴う管内流れを精度良く解析できた。しかし振動する管内流れの解析のような非定常な問題では時間ステップごとに圧力の反復計算において残差が十分に小さくなるまで計算を行うため、多大な時間を要する。そのため格子間隔を小さくしその流れ場を精度良くとらえ、また時間間隔を小さくし高レイノルズ数の問題に適応させることは逐次的な計算では限界がある。また CIP 法は一般的なスキームと比較しても速度の勾配を保持するため、メモリを消費するといった短所があり 3 次元問題に適応させた場合、大規模な計算領域を扱うことができない。

しかし近年の計算機の性能向上で、大規模な流体解析を行なうことが可能になった。並列計算では複数のプロセッサエレメント (以下 PE と省略) に計算領域を分割して並列に

計算を行えば高速化がはかれ、かつ消費メモリも分割されるため大規模な計算領域を扱うことが可能となる。

そこで本研究では CIP 法をもちいた流れの解析を並列計算機上で並列アルゴリズムの開発を行う。またその並列アルゴリズムを通信ライブラリである MPI をもちいて並列計算機 SGI GatewayT3E 上に実装を試みる。まずその並列計算アルゴリズムの検証として、それぞれ同じ条件のもとで逐次的な計算との流れ場の比較検証、およびスケラビリティーの検証を行う。さらにこれらの並列計算機上で大規模な解析を行う。計算モデルとしては弾性管流れの解析の基礎的な実験となる 2 つの解析である。一つは壁面が振動する管内流れの解析、1 つは振動するポアゾイユ流れを流入条件として、凹部を持った管内流れの解析である。いずれも境界条件や流入条件が変化する非定常であり大規模な計算である。

第 2 章

数値計算法について

2.1 基礎方程式

基礎方程式として、質量の保存を記述する連続の式、及び運動量の保存を記述する非圧縮性ナビエ・ストークス方程式とした。

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

ここで \mathbf{u} は速度, p は圧力, Re はレイノルズ数である。

2.1.1 圧力のポアソン方程式と離散化

ナビエ・ストークス方程式の発散をとり、さらに連続の式を用いることで、2次元の場合以下のような圧力のポアソン方程式が得られる。

$$\Delta p = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

ここで u, v は各軸方向の速度成分である。ここで右辺第 1 項は連続の式の時間微分であり、次の時間ステップで連続の式が完全に満たされていると考えられる。そこで

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{u} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{u}^n \quad (2.4)$$

とできる。よって圧力のポアソン方程式の右辺は以下になる。

$$RHS = - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5)$$

ここで u は x 軸方向, v は y 軸方向の速度成分をあらわす。次に各速度成分の空間微分の離散化を行う。計算格子にはスタッカード格子を用いる。スタッカード格子は格子の辺上で速度を定義し、格子の中心で圧力を定義する。ここでは各速度成分の空間微分は圧力点上で定義するので、それぞれ以下ようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+3/2,j} - u_{i-1/2,j}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-3/2,j}}{2\Delta x} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{i-1/2,j+1} - u_{i-1/2,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i+1,j-1/2} - v_{i-1,j-1/2}}{2\Delta x} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i,j+3/2} - v_{i,j-1/2}}{2\Delta y} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-3/2}}{2\Delta y} \right) \quad (2.9)$$

また圧力のポアソン方程式の左辺についても中心差分を用いて離散化すると

$$\nabla^2 p = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (2.10)$$

となる。さらに $p_{i,j}$ について整理し、実際の反復計算を行う際に用いる。

$$p_{i,j} = \left(\frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} - RHS \right) / \left(2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (2.11)$$

2.1.2 速度の計算

CIP 法はナビエ・ストークス方程式の移流項の 3 次関数を用いて補間する計算手法である。そこでナビエ・ストークス方程式を移流項と非移流項に分割する。非移流項と移流項はそれぞれ、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

それぞれの速度成分について非移流項の空間微分を中心差分で、時間微分を前進差分で離散化を行い、これにより速度と圧力からそれぞれのノードにおける各速度成分の中間的な

値が得られる。

$$u_{i+1/2,j}^* = u_{i+1/2,j}^n + \Delta t \left(-\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{3}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (2.14)$$

$$v_{i,j+1/2}^* = v_{i,j+1/2}^n + \Delta t \left(-\frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j+\frac{3}{2}}^n}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (2.15)$$

また CIP 法では、それぞれの速度の定義された点における各速度成分の各軸方向の勾配が必要となる。そこで各軸方向の速度の中間的な値の微分値を求める。まずナビエ・ストークス方程式を各軸方向に微分し、その非移流成分は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \quad (2.17)$$

この式を時間微分を前進差分で、空間微分を中心差分で離散化すると、速度の各軸方向の速度勾配が計算することができる。 $(i+1/2, j)$ のノードにおける中間的な速度 $u_{i+1/2,j}^*$ の勾配は以下のように求める。

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j}^* - \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j}}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} u_{i+1/2,j} - \frac{\partial}{\partial t} u_{i+1/2,j}}{2 \Delta x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} v_{i+1/2,j} \frac{\partial}{\partial y} u_{i+1/2,j} \end{aligned} \quad (2.18)$$

さらに右辺第 1 項の分母を前進差分で離散化し、 $\frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j}^*$ について整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j}^* &= \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j} + \frac{u_{i+3/2,j}^* - u_{i-1/2,j}^* - u_{i+3/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2 \Delta x} \\ &+ \Delta t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} v_{i+1/2,j} \frac{\partial}{\partial y} u_{i+1/2,j} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。CIP 法では 3 次関数で新しいタイムステップの速度を求める際に、そのノードにおける速度の各軸方向の勾配を計算するため、 $\frac{\partial}{\partial x} u$, $\frac{\partial}{\partial y} u$ はこの時既知数である。よって $\frac{\partial}{\partial x} u$ 、

$\frac{\partial}{\partial y}u$ 、 u および u^* から速度の中間的な値の微分を求めることができる。ただし $(i+1/2, j)$ の点での速度 v の勾配は定義されていないので以下の式を用いて補間する。同様にしてすべての速度成分の各軸方向の微分を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x}v_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1, j-1/2} - v_{i, j-1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i+1, j+1/2} - v_{i, j+1/2}}{2\Delta x} \right) \quad (2.20)$$

このようにして求めた速度の中間的な値 u^* 、 v^* 、とその勾配 $\frac{\partial}{\partial x}u^*$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^*$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^*$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^*$ を用い、次に示す 3 次元関数で移流項の計算を行うことで次のタイムステップでの速度 u^{n+1} 、 v^{n+1} 、とその勾配 $\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}$ 、 $\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}$ を計算することができる。

2.2 CIP 法について

CIP 法の重要な特徴は、移流方程式を精度良く解けるところにある。移流方程式を解く手段としては 1 次の風上差分のように単に線形の補間を用いる方法があるが、その場合数値的な拡散といった問題がある。また 2 次の補完では格子点間の補間はうまく行われるが、不連続な点ではうまく精度が確保できない。それに対して CIP 法は各格子点上で、その格子点の値と各軸方向の勾配を保持しており、それらの情報を利用して格子点間のプロファイルとして 3 次関数を求め、それを利用して格子点間の補間を行なう手法である。この 3 次関数による補間は、非常に安定しており、さらに精度が良いことが確認されている。そこで本研究では CIP 法をナビエ・ストークス方程式の解法に適用し、移流項を計算する際に用いる。そこで 2 次元の移流方程式を CIP 法で計算する手順について考えてみる。移流方程式は、波が u, v という速度で移動している様子をあらわしている。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

また式を各軸方向に空間微分すると以下ようになる。

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + u \frac{\partial g_x}{\partial x} + v \frac{\partial g_x}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}g_x - \frac{\partial v}{\partial x}g_y \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial t} + u \frac{\partial g_y}{\partial x} + v \frac{\partial g_y}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}g_x - \frac{\partial v}{\partial y}g_y \quad (2.23)$$

ただし $g_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $g_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ とする。すると伝搬速度が u, v であるとき、値 f と値 g_x, g_y はともに u, v という速度で移流することがわかる。この値 f, g_x, g_y を利用することで、値が移動する前後のプロファイルを少ない誤差で表現できると考えられる。そこで格子点 (i, j) 、 $(i, j-1)$ 、 $(i-$

$(i,j), (i-1,j-1)$ の 4 点間のプロファイルを考える。ここで格子点 $(i,j), (i,j-1), (i-1,j), (i-1,j-1)$ を結ぶ 3 次関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
F(x, y) = & C_{3,0}x^3 + C_{2,0}x^2 + C_{1,0}x \\
& + C_{0,3}y^3 + C_{0,2}y^2 + C_{0,1}y + \\
& + C_{2,1}x^2y + C_{1,2}xy^2 + C_{1,1}xy + C_{0,0}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
GX(x, y) = & 3C_{3,0}x^2 + 2C_{2,0}x + C_{1,0} \\
& + 2C_{2,1}xy + C_{1,2}y^2 + C_{1,1}y
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
GY(x, y) = & 3C_{0,3}y^2 + 2C_{0,2}y + C_{0,1} \\
& + C_{2,1}x^2 + 2C_{1,2}xy + C_{1,1}x
\end{aligned} \tag{2.26}$$

よって 10 個の未知数は各格子点 $(i,j), (i,j-1), (i-1,j), (i-1,j-1)$ の f, g_x, g_y の値から決定することができる。ここで次の時間ステップ $n+1$ でのプロファイルは x 軸方向に $-u\Delta t$ 、 y 軸方向に $-v\Delta t$ 移動すると考えられるので、

$$\begin{aligned}
f_{i,j}^{n+1} = & C_{3,0}XX^3 + C_{2,0}XX^2 + C_{1,0}XX \\
& + C_{0,3}YY^3 + C_{0,2}YY^2 + C_{0,1}YY + \\
& + C_{2,1}XX^2 \times YY + C_{1,2}XX \times YY^2 + C_{1,1}XX \times YY + C_{0,0}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
GX_{i,j}^{n+1} = & 3C_{3,0}XX^2 + 2C_{2,0}XX + C_{1,0} \\
& + 2C_{2,1}XX \times YY + C_{1,2}YY^2 + C_{1,1}YY
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
GY_{i,j}^{n+1} = & 3C_{0,3}YY^2 + 2C_{0,2}YY + C_{0,1} \\
& + C_{2,1}XX^2 + 2C_{1,2}XX \times YY + C_{1,1}XX
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ここで $XX = -u\Delta t, YY = -v\Delta t$ とする。また各係数は以下のようになる。

$$C_{3,0} = (GX_{im1,j} + GX_{i,j}) \times X1 - 2(f_{i,j} - f_{im1,j}) \backslash X1^3 \tag{2.30}$$

$$C_{2,0} = (3f_{im1,j} - f_{i,j}) + (GX_{im1,j} + 2GX_{i,j}) \times X1 \backslash X1^2 \tag{2.31}$$

$$C_{1,0} = GX_{i,j} \tag{2.32}$$

$$C_{0,3} = (-2(f_{i,j} - f_{i,jm1}) + (GY_{i,jm1} + GY_{i,j}) \times Y1) \backslash Y1^3 \tag{2.33}$$

$$C_{0,2} = (3(f_{i,jm1} - f_{i,j}) + (GY_{i,jm1} + 2GY_{i,j}) \times Y1)/Y1^2 \quad (2.34)$$

$$C_{0,1} = GY_{i,j} \quad (2.35)$$

$$C_{2,1} = (-(f_{i,j} - f_{im1,j} - f_{i,jm1} + f_{im1,jm1} - (GX_{i,jm1} - GX_{i,j}) \times X1)/(X1^2 \times Y1) \quad (2.36)$$

$$C_{1,2} = (-(f_{i,j} - f_{im1,j} - f_{i,jm1} + f_{im1,jm1} - (GY_{i,jm1} - GY_{i,j}) \times X1)/(X1 \times Y1^2) \quad (2.37)$$

$$C_{1,1} = (C_{2,1} \times X1^2 - (GY_{im1,j} - GY_{i,j}))/X1 \quad (2.38)$$

$$C_{0,0} = F_{i,j} \quad (2.39)$$

ここで $im1 = i - \text{sgn}(u)$, $jm1 = j - \text{sgn}(v)$, $X1 = \text{sgn}(u) \times \Delta x$, $Y1 = \text{sgn}(v) \times \Delta y$ とする。このようにして各格子点においてこれらの係数を計算することで、隣接する 4 点間を補間する 3 次の多項式が得られた。

2.3 境界条件

オイラー格子を用いた際、境界が格子を斜めに横切る場合や境界が曲線である場合、その境界を如何に表現するかが重要になる。また固体が流体中を移動する場合においても、その境界での速度や圧力の設定を適切に行う必要がある。

2.3.1 固定壁での境界条件

固定壁での境界条件には、基本的には MAC 法と同じ手法による境界条件を設定した。本研究では壁面の境界条件には no-slip 条件を用いた。no-slip 条件は壁面に平行な流れおよび垂直な流れに対して、壁面上で $u=0, v=0$ が成り立つ境界条件である。この条件が成り立つために仮想セルの速度を以下のように置く。また圧力についても壁面上で勾配が 0 になるように仮想セルの圧力の設定を以下のように行う。

$$v_{i,j+3/2} = v_{i,j-1/2} \quad (2.40)$$

$$v_{i,j+1/2} = 0 \quad (2.41)$$

$$u_{i+1/2,j+1} = -u_{i+1/2,j} \quad (2.42)$$

$$p_{i,j+1} = p_{i,j} \quad (2.43)$$

CIP 法を用いて計算を行う場合は、速度の中間的な値 u^*, v^* とその勾配についても境界条件を設定する必要がある。速度の中間的な値については、固体との境界については速度の

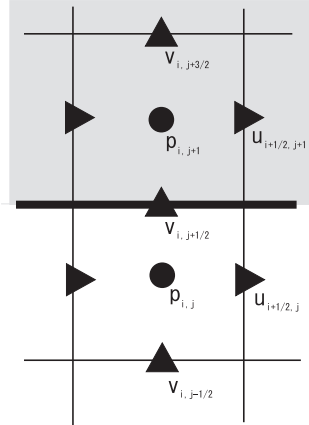


図 2.1: 境界条件

境界条件と同一とした。速度の中間的な値の勾配については 0 とした。たとえば固定壁での境界条件は以下ようになる。

$$v_{i,j+3/2}^* = v_{i,j-1/2}^* \quad (2.44)$$

$$v_{i,j+1/2}^* = 0 \quad (2.45)$$

$$u_{i+1/2,j+1}^* = -u_{i+1/2,j}^* \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{i,j+3/2}^* = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{i+1/2,j+1}^* = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_{i,j+3/2}^* = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{i+1/2,j+1}^* = 0 \quad (2.50)$$

$$(2.51)$$

2.3.2 移動境界での境界条件

固体が液体中を移動するような移動境界問題では、その境界での速度や圧力の設定を適切に行う必要がある。あるノードがそれまで流体中であった場所が次のタイムステップで固体になるといった場合、固定壁での境界条件の設定と同じように行えば、計算にとって悪影響を及ぼしかねない。そこで古田 [4] は次のような移動境界での境界条件の設定を定義した。

図 2.2は、流体領域と固体領域の接している部分を表している。壁面は仮想領域に位置しており右方向へ V という速度で移動している。ここでの壁面は non-slip とする。壁の位置は図 2. 2のように r, s の二つの変数で表す。ここで速度 v について境界での速度を与える。 $(i, j + 1/2)$ の位置での速度は、壁面が (a) の位置にある場合は $v_{i,j+1/2}$ である。その後壁が移動し (c) の位置に近づくにしたがって $(i, j + 1/2)$ の速度は V に近似していくようにする。また u については壁面が (d) に移動し接近するにつれて流速が 0 になるような設定を行う。

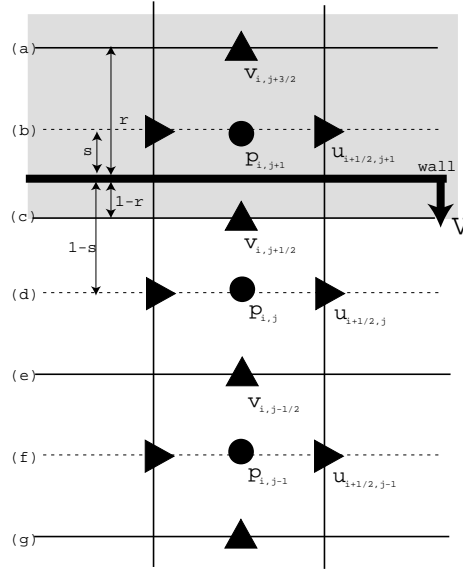


図 2. 2: 移動境界の境界条件

$$v_{i,j+3/2} = V \quad (2.52)$$

$$v_{i,j+1/2} = (1-r)v_{i,j+1/2} + r \cdot V \quad (2.53)$$

$$u_{i+1/2,j} = (1-s)u_{i+1/2,j} \quad (2.54)$$

$$u_{i+1/2,j-1} = -2 \cdot s \cdot u_{i+1/2,j} \quad (2.55)$$

その後壁面は図 2. 3の位置まで移動する。壁面が (c) の位置を超えた瞬間に仮想領域は格子一個分下に移動する。また r を定義していた範囲が (a)(c) 間だったものが (c)(e) 間となる。この場合の境界条件は以下のように設定する。

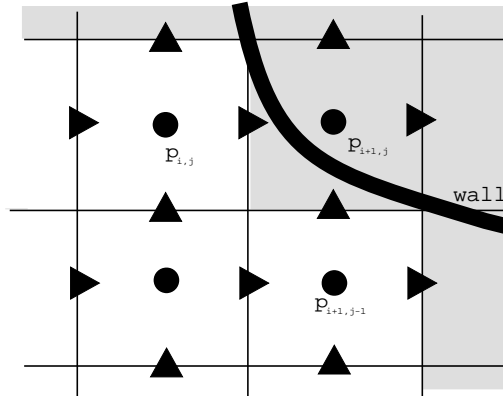


図 2.4: 特異点での境界条件

$$p_{i+1,j} = (p_{i,j} + p_{i+1,j-1})/2 \quad (2.61)$$

第 3 章

領域分割法と並列計算

3.1 領域分割

並列計算機上で CIP 法を用いた流れの解析を行う。まず領域分割法に基づいて計算領域を図 3.1 のように軸方向に等分して各 PE に分配した。CIP 法では速度 u^{n+1}, v^{n+1} を計算するためにはそれぞれ図 3.2, 3.3 に示す圧力 p 、速度 u, v が必要である。またポアソン方程式 (式 2.11) を SOR 法を用いて計算するためには図 3.4 に示す圧力 p 、速度 u, v が必要である。

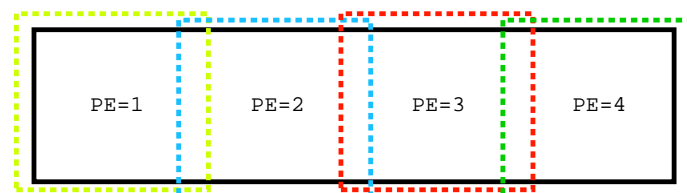


図 3.1: 領域分割 (PE=4)

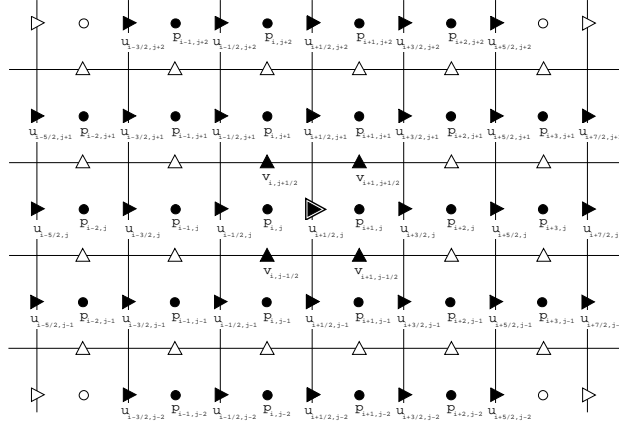


図 3.2: $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ の計算に必要な p, u, v

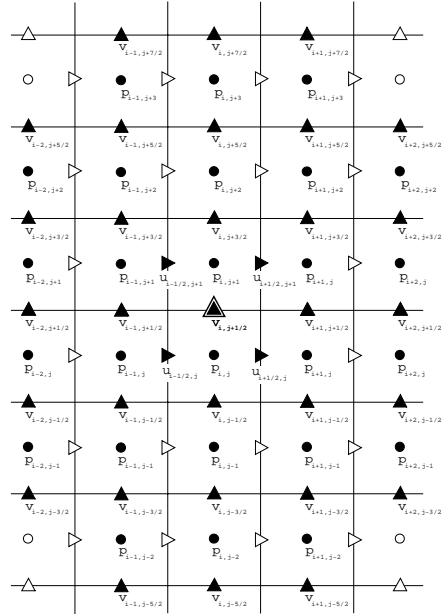


図 3.3: $v_{i,j+1/2}^{n+1}$ の計算に必要な p, u, v

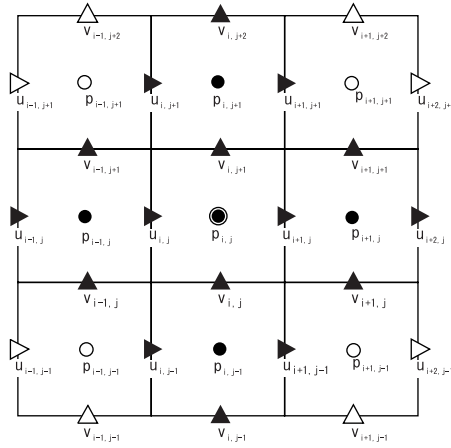


図 3.4: $p_{i,j}^{n+1}$ の計算に必要な p, u, v

ここで図 3.5 のように圧力 p を 6 個、速度 u は 7 個、速度 v は 6 個、各領域の境界で共有させた。領域分割された計算領域外側に仮想領域として左右それぞれ、 p, u, v を 3 つデータを持たせることで、CIP 法を用いた速度の計算の際、計算量が若干増える。しかし速度の計算を行う途中で通信の必要がなく、逐次計算の場合と同じように計算できる。また実際の計算では速度の計算時間は全体の 0.1% 未満であり、全体の計算時間にはほとんど影響しない。

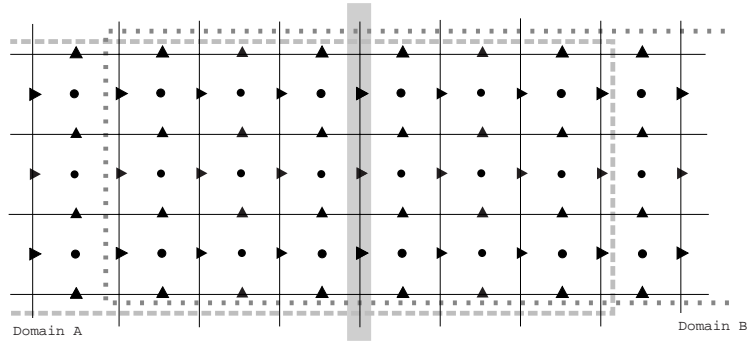


図 3.5: 領域分割

3.2 並列計算

並列計算は以下の手順に従って行う。

1. 各 PE に計算領域を分割する。
2. 圧力の境界条件を設定する。
3. 圧力の計算を行う。
4. 圧力の共有部分の通信して更新する。
5. 各 PE の残差の和を集計し終了判定を行う。
6. 収束するまで 2 から 5 を繰り返す。
7. 速度を CIP 法を用いて陽的に計算する。
8. 速度の共有部分を通信して更新する。
9. 2 にもどる。

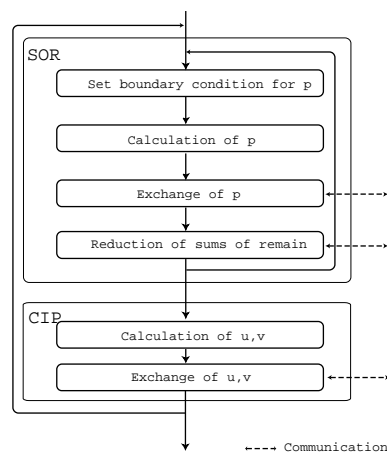


図 3. 6: CIP 法を用いた N-S 方程式の並列計算手順

まず圧力のポアソン方程式 (式 2. 11) は SOR 法を用いて陰的に計算する。SOR 法では左右上下の圧力の値を用いて計算を行い、自分自身の値を更新する。よって反復毎に更新された値が必要であり、左右いずれかの点が別の PE で計算されていた場合があり、反復毎に通信を行って最新の値に更新する必要がある。そのため領域分割された領域における共有部分のデータの交換を毎回行う。またすべての計算領域における残差の和を反復計算の終了判定とするため、毎回通信を行い各 PE の残差の和を集計する。

CIP 法の計算は陽的に行うため、次のタイムステップの速度が計算された後に領域で共有している仮想領域のデータ $u^{n+1}, v^{n+1}, \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1}, \frac{\partial}{\partial y} u^{n+1}, \frac{\partial}{\partial x} v^{n+1}, \frac{\partial}{\partial y} v^{n+1}$ を更新するため 1 度通信を行う。

第 4 章

予備実験

前章での並列アルゴリズムを検証するため、予備実験を行なった。実験は SGI CrayT3E を使用して行った。なお並列アルゴリズムの実装には通信ライブラリとして MPI を用いた。

4.1 計算モデル

図 4.1 のような形状の計算モデルを定義した。左側をポアゾイユ流れとし、壁面の境界条件は no-slip とした。右側の出口では圧力は 0, 軸方向の速度勾配を 0 とした。

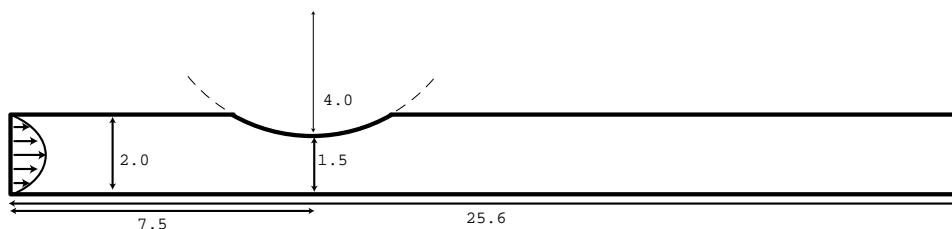


図 4.1: 計算モデル

4.1.1 計算手順

計算は以下の手順で行った。

1. 変数の初期化を行う。
2. 格子点において流体領域と固体領域を区別するフラグを立てる。
3. 壁面と出入口の境界条件を設定する。
4. 圧力のポアソン方程式を p^n, u^n, v^n の値を用いて、SOR 法による緩和を行い計算を行い p^{n+1} を求める。
5. 圧力 p^{n+1} , 速度 u^n, v^n から CIP 法を用いて速度 u^{n+1}, v^{n+1} を求める。
6. 3 ~ 6 を繰り返し、時間を進める。

4.2 解析結果

図 4. 1の計算領域を x 方向に 512, y方向に 40 分割した。レイノルズ数 (Re) は 100 とし、時間刻みを 0.001とし、SOR 法での圧力の反復計算は残差の和が 1.0×10^{-8} まで小さくなるか、もしくは反復回数が 50000 に達するまで行った。解析結果は逐次計算の場合と並列計算の場合 (PE=32) の 5000step での圧力分布を示している。反復回数の違いの影響から、若干分布のパターンは異なるが、ほぼ同様な圧力分布を示しており、領域分割による影響が流れのパターンに影響を及ぼすことはないと確認できた。

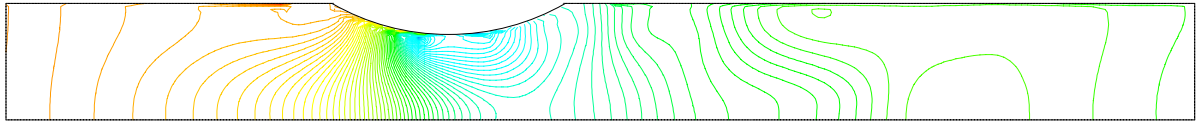


図 4. 2: 圧力分布 (逐次計算)

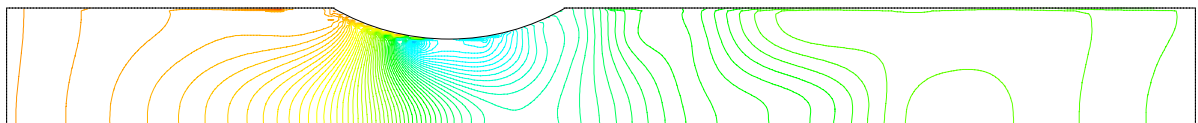


図 4. 3: 圧力分布 (並列計算 PE=32)

4.3 計算時間

計算時間と通信時間を示す。ここでの計算時間は通信時間とその同期ための待ち時間を含むものである。時間の計測は 0step ~ 5000step までとした。PE 数が増えることでポアソン方程式の収束に反復回数を要する。したがって通信時間も PE 数の増加に伴って若干増えている。逐次計算時の計算時間と PE=32 の並列計算を比較すると 21.8 倍高速化された。

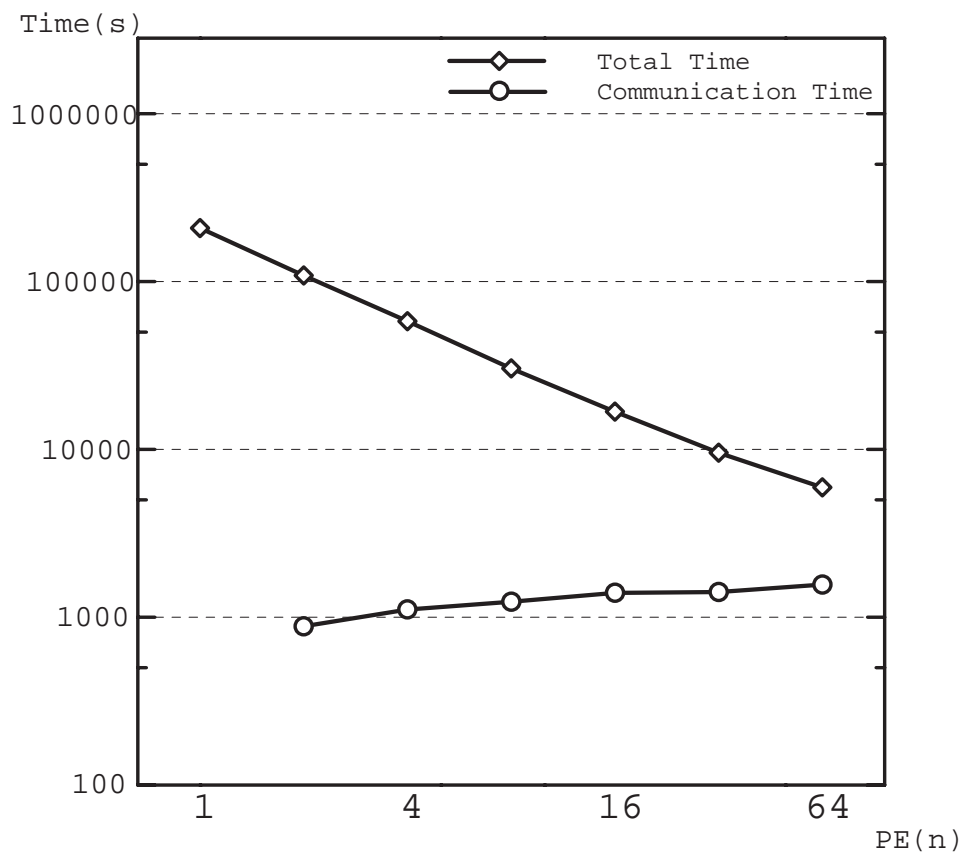


図 4.4 計算時間および通信時間

第 5 章

実験

5.1 凹管内の振動するポアズイユ流れ

5.1.1 計算モデル

3つの凹部を持つ管内に流入条件として振動的なポアズイユ流れを与える計算を行った。計算領域の形状は図 5.1 に示した。凹部分は円形状であり、半径 (R_2)、幅 (R_1) を変化させた 2 つのケースについて計算を行った。管の全長は 800 とした。Case1 では R_1 を 20、 R_2 を 350 とし、Case2 では R_1 を 15、 R_2 を 200 とした。

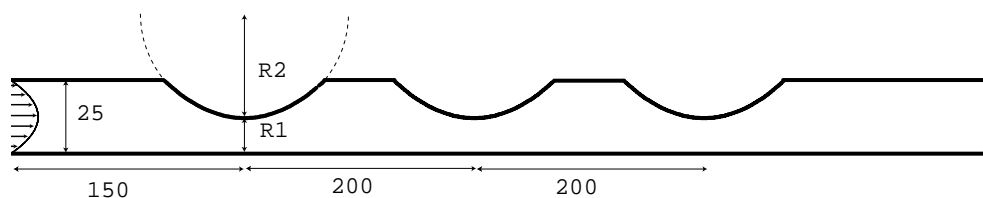


図 5.1: 計算モデル

5.1.2 流入条件

流入条件には振動するポアズイユ流れを与える。以下にその流れを定義する。まずポアズイユ流れの速度分布は以下のように与えられる。

$$u = \frac{P}{i\omega\tau} \left(1 - \frac{\cosh(\lambda y)}{\cosh(\lambda h)}\right) e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

$$\lambda = (1 - i)k \quad (5.2)$$

$$k = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

ただし ν は粘性係数である。式 5.1 を積分すると、管断面平均速度が得られる。

$$U = \int_0^h u dy \quad (5.4)$$

$$= \frac{P}{i\omega\tau} e^{i\omega t} \left(h - \frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda \cosh(\lambda h)}\right) \quad (5.5)$$

ここで管断面平均速度 U を時間 t で微分すると

$$\frac{dU}{dt} = \frac{i\omega P}{i\omega\tau} e^{i\omega t} \left(h - \frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda \cosh(\lambda h)}\right) \quad (5.6)$$

$$= \frac{P}{\rho} e^{i\omega t} \left(\frac{h\lambda \cosh(\lambda h) - \sinh(\lambda h)}{\lambda \cosh(\lambda h)}\right) \quad (5.7)$$

括弧内の分子を整理し、式 5.7 の右辺第 1 項は以下になる。

$$h(1 + i)k(e^{kh}(\cos(kh) + i\sin(kh)) + e^{-kh}(\cos(kh) - i\sin(kh))) \quad (5.8)$$

$$= hk((e^{kh} + e^{-kh})\cos(kh) - (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh)) \\ + i h k((e^{kh} + e^{-kh})\cos(kh) + (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh)) \quad (5.9)$$

ここで、実数部と虚数部に分ける。

$$Re1 = hk((e^{kh} + e^{-kh})\cos(kh) - (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh)) \quad (5.10)$$

$$Im1 = hk((e^{kh} + e^{-kh})\cos(kh) + (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh)) \quad (5.11)$$

式 5.7 の右辺第 2 項についても同様に行う。

$$Re2 = (e^{kh} - e^{-kh})\cos(kh) \quad (5.12)$$

$$Im2 = (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh) \quad (5.13)$$

式 5.7 の分母についても実数部と虚数部に分ける。

$$Re3 = k((e^{kh} + e^{-kh})\cos(kh) - (e^{kh} - e^{-kh})\sin(kh)) \quad (5.14)$$

$$Im3 = k((e^{kh} + e^{-kh}) \cos(kh) + (e^{kh} - e^{-kh}) \sin(kh)) \quad (5.15)$$

よって式 5.7は

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = \frac{P}{\rho} & \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right) \\ & \times \left((Re1 - Re2) Re3 + (Im1 - Im2) Im3 \right. \\ & \left. + i((Im1 - Im2) Re3 - (Re1 - Re2) Im3) \right) / (Re3^2 + Im3^2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

ここで実数部が 0 になるための τ は

$$\begin{aligned} & \cos(\omega \tau) \left((Re1 - Re2) Re3 + (Im1 - Im2) Im3 \right) \\ & - \sin(\omega \tau) \left((Im1 - Im2) Re3 - (Re1 - Re2) Im3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

よって

$$\tan(\omega \tau) = \frac{\sin(\omega \tau)}{\cos(\omega \tau)} = \frac{(Re1 - Re2) Re3 + (Im1 - Im2) Im3}{(Im1 - Im2) Re3 - (Re1 - Re2) Im3} \quad (5.18)$$

したがって τ は、以下ようになる。

$$\tau = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{(Re1 - Re2) Re3 + (Im1 - Im2) Im3}{(Im1 - Im2) Re3 - (Re1 - Re2) Im3} \right) \quad (5.19)$$

ここで式 5.5の U は時間平均が 0 であり、最大と最小の単振動をする。よって式で計算した位相差 τ を代入することで最大最小の流量が得られる。

$$U = \frac{P}{i \omega \rho} e^{i\tau} \left(h - \frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda \cosh(\lambda h)} \right) \quad (5.20)$$

これは時間平均速度が U で、最大流量が 2U で最小流量が 0 である。よって平均レイノルズ数は以下ようになる。

$$Re = 2h \cdot U / \nu \quad (5.21)$$

これを満たす P を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} P = U \omega \rho (Re3^2 + Im3^2) / & \left((Re1 - Re2) Re3 + (Im1 - Im2) Im3 \right) \sin \\ & + \left((Im1 - Im2) Re3 - (Re1 - Re2) Im3 \right) \cos \end{aligned} \quad (5.22)$$

この値を式 5.1 に代入することで振動するポアズイユ流れが得られる。図 5. 2 にその概形を示す。図 5. 2 は 2 周期分の流入を表しており、 y は管断面の位置、 t は時間、 u は速度である。最初流入速度は徐々に増加していき、 $1/4$ 周期で最大となる。また $3/4$ 周期では平均流速は 0 で、管壁に近い部分は負の速度で中心付近は正の速度を持つ。よってレイノルズ数は図 5. 3 のように変化する。

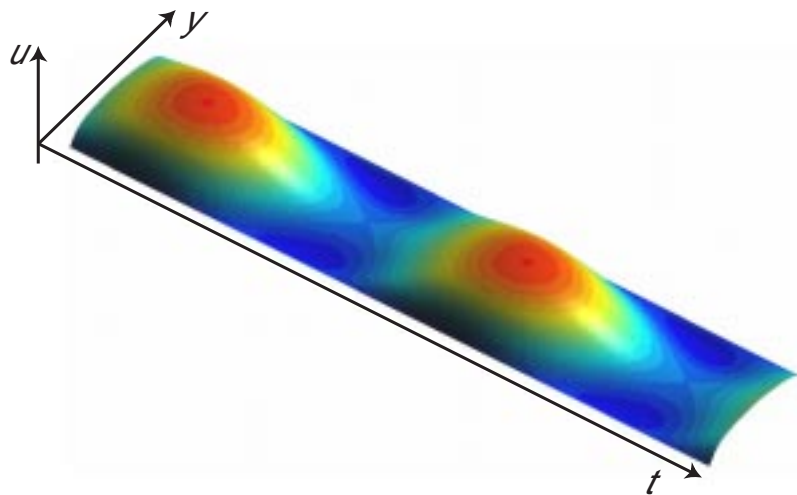


図 5. 2: 振動するポアズイユ流れ

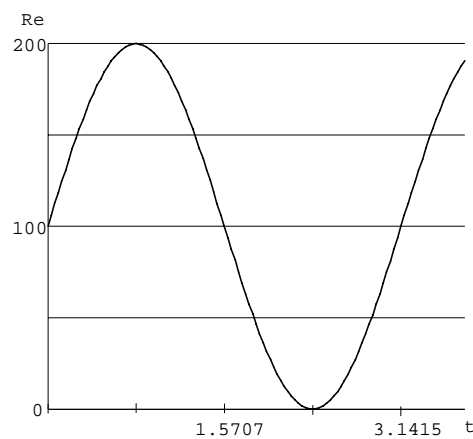


図 5. 3: レイノルズ数

5.1.3 計算結果

計算結果を示す。図 5.1 に示した計算領域を x 方向に 1600, y 方向に 50 分割した。時間刻み (Δt) は case1 の場合 $\pi/2000$, case2 の場合 $\pi/4000$ とした。またポアソユ流れの振動周期は π とした。またポアソユ流れの振動周期は π とした。最初に、流入条件であるポアソユ流れの断面のパターンを、各格子点に断面の幅に応じて初期条件として与え、計算が安定する $t = \pi/100$ まで計算を行った。その後ポアソユ流れの振動を開始させた。各図はそれぞれの周期での流れのパターンを示している (左から圧力、速度、流線)。また表示範囲は図 5. 4 の通りで (a) は 0~350 までの範囲、(b) は 340~690 までの範囲を示している。圧力については (a), (b) それぞれの範囲での最大最小を基準に色づけしている。

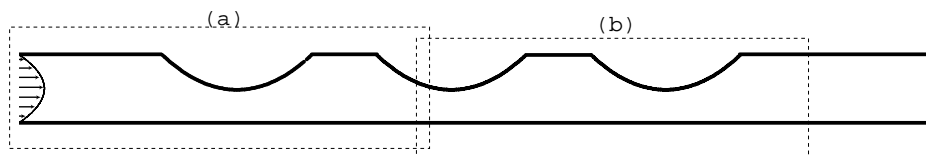


図 5. 4: 結果の表示範囲

Case1 では 0 周期 (図 5. 5, 5. 6 で管全体にポアソユ流れが分布しており、また 3 つの凹部分の左右では圧力勾配が高くなっている。その後徐々に流入速度は増加していき、1/4 周期で最大のレイノルズ数となり、その後速度は減少し、2/5 周期 (図 5. 9, 5. 10) では凹部分の右側に剥離が起こっている。また出口方向が圧力の高い領域となっている。3/5 周期 (図 5. 11, 5. 12) で凸部の右側に渦が見られる。これは管壁で逆流が起きており、その影響であると考えられる。3/4 周期で最小のレイノルズ数 0 になり、4/5 周期 (図 5. 13, 5. 14) においても壁面の逆流は起きており、凹部分の右側に逆流の大きな場所があり、その付近では渦ができています。1 周期 (図 5. 15, 5. 16) 流入は初期状態に戻るが流れのパターンは渦の影響で蛇行している。またどの周期においてもそれぞれ 3 つの凹部分付近の流れのパターンはほぼ同じである。

また Case 2 では 0 周期 (図 5. 17, 5. 18 で、Case 1 と比較すると、その付近での速度は大きくなっている。また圧力勾配の大きいところが凹部分に集中している。また 2/5 周期 (図 5. 21, 5. 22) では剥離による渦は Case 1 よりも大きく、渦のある場所で圧力が低くなっていることが確認できる。その後 3/5 周期 (図 5. 23, 5. 24) で渦が大きく成長し、その影響から流

れは大きく乱されている。また渦の場所の圧力が低くなっていることがはっきりと確認できる。4/5 周期 (図 5.25, 5.26) でも大きな渦が存在し、流れが大きく乱れている。その後 1 周期 (図 5.27, 5.28) で流入は初期状態に戻るが、流れは大きく蛇行している。Case1, Case2 を比較して、凹部分の大きさの違いが流れのパターンに大きな影響を及ぼしているのが分かる。

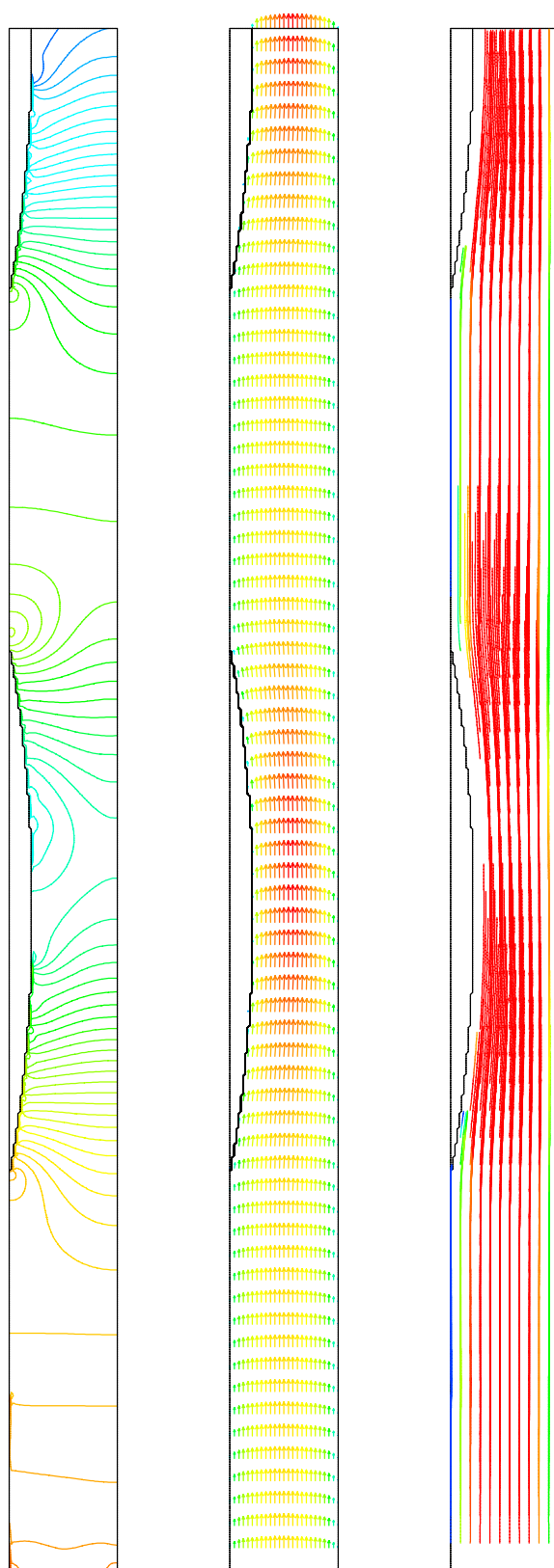


图 5.5: Case1 0/5 周期 (a)

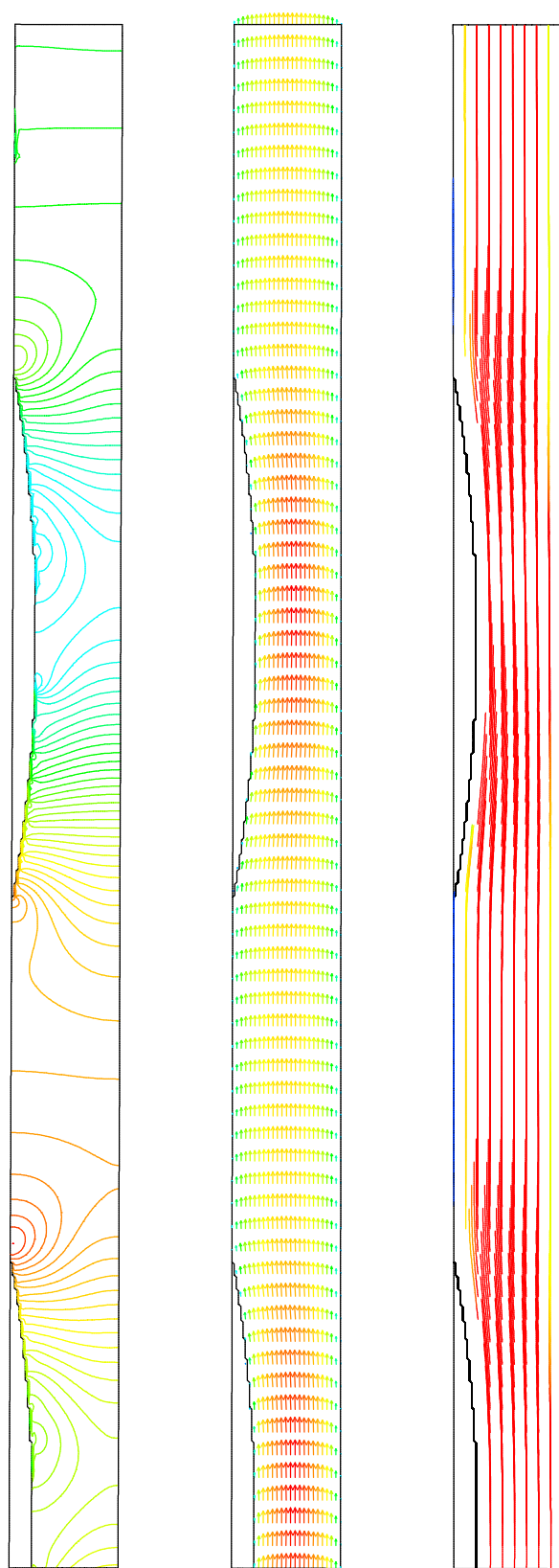


图 5.6: Case1 0/5 周期 (b)

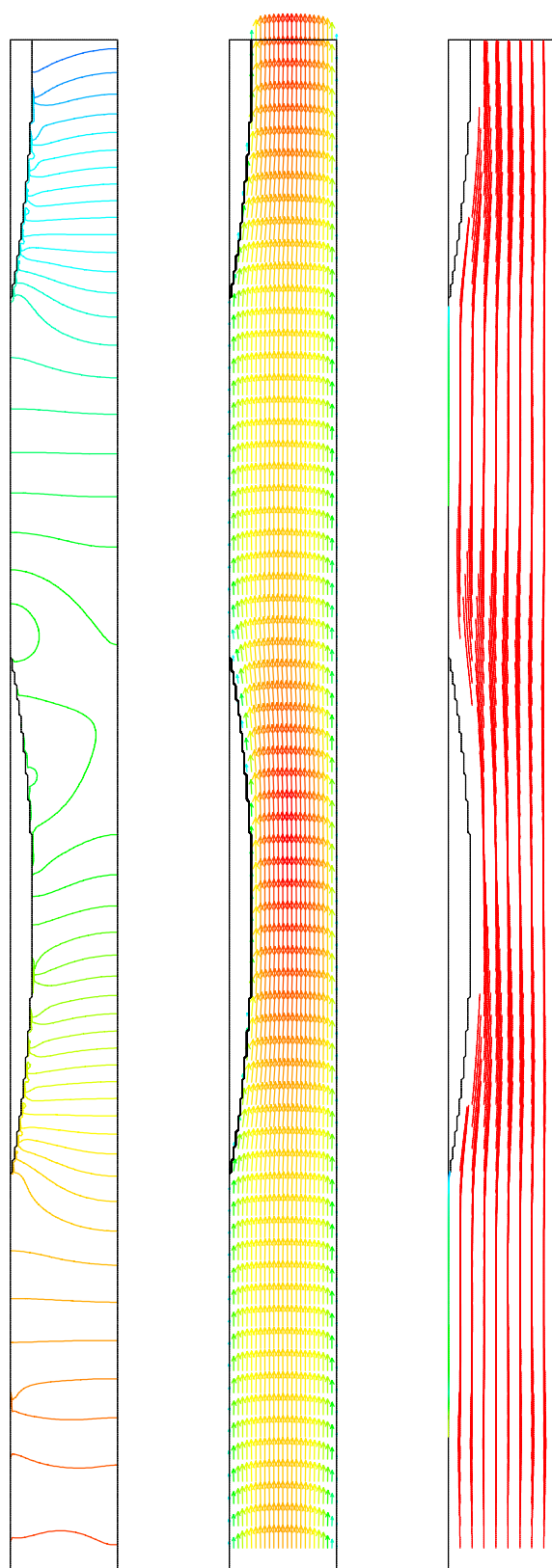


图 5.7: Case1 $1/5$ 周期 (a)

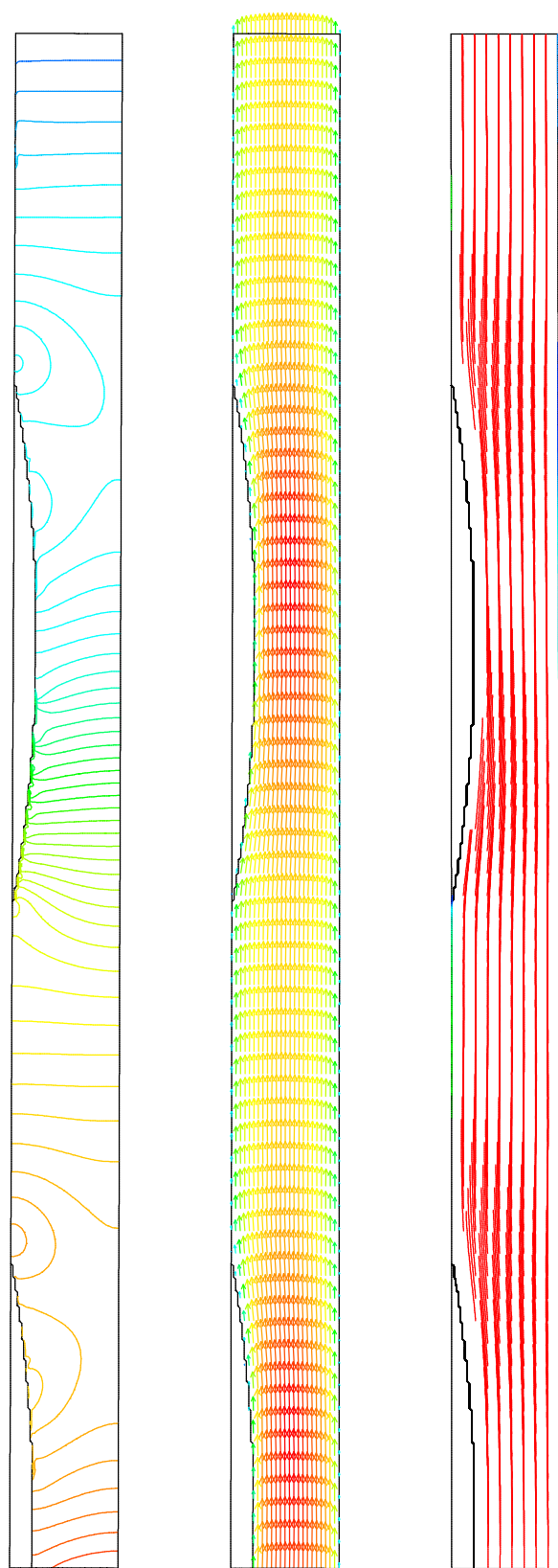


图 5.8: Case1 $1/5$ 周期 (b)

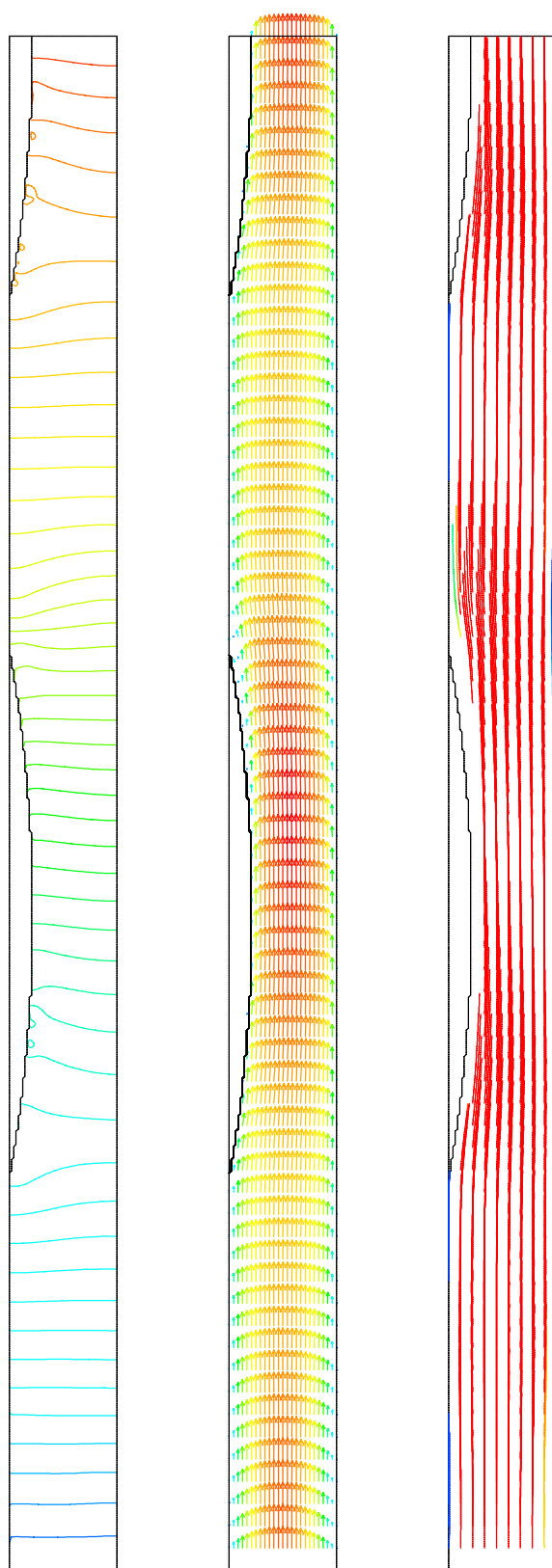


图 5.9: Case1 $2/5$ 周期 (a)

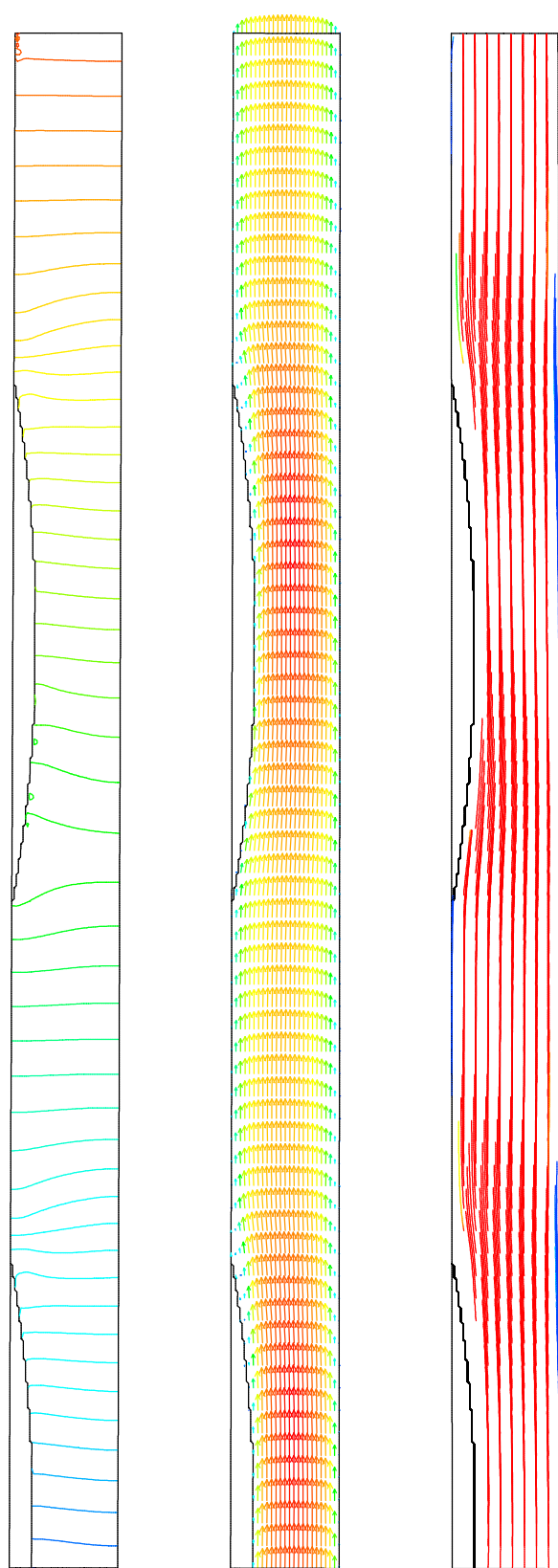


图 5.10: Case1 2/5 周期 (b)

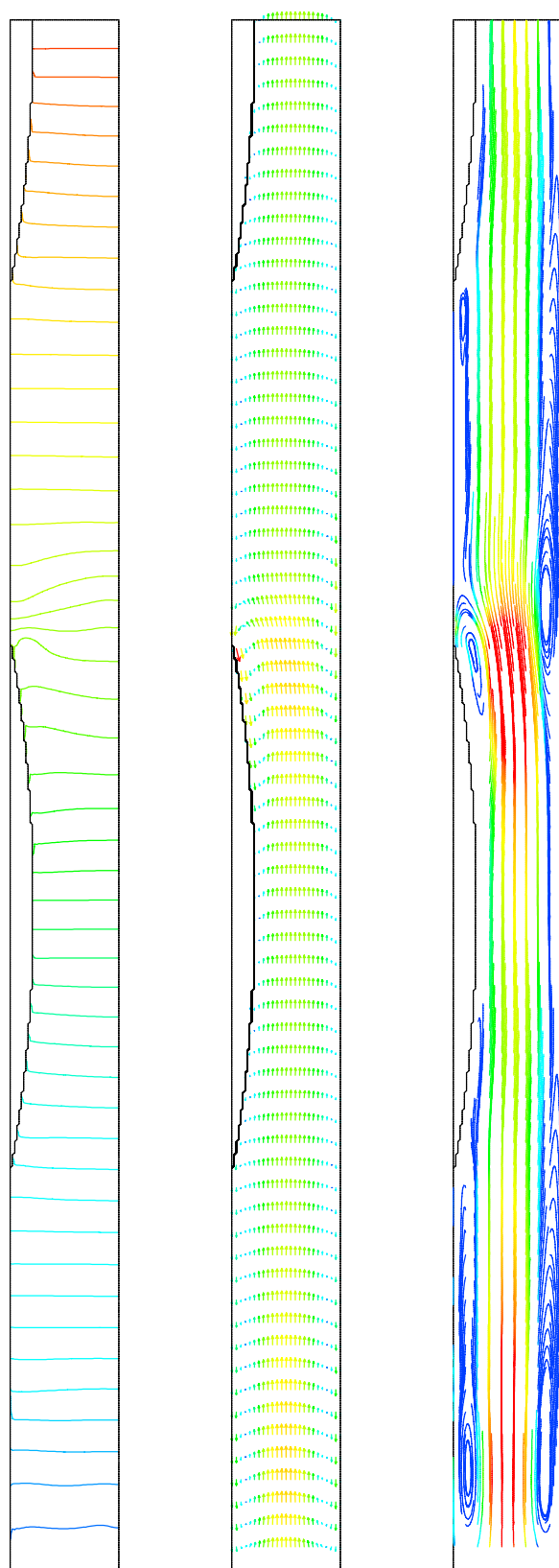


图 5.11: Case1 3/5 周期 (a)

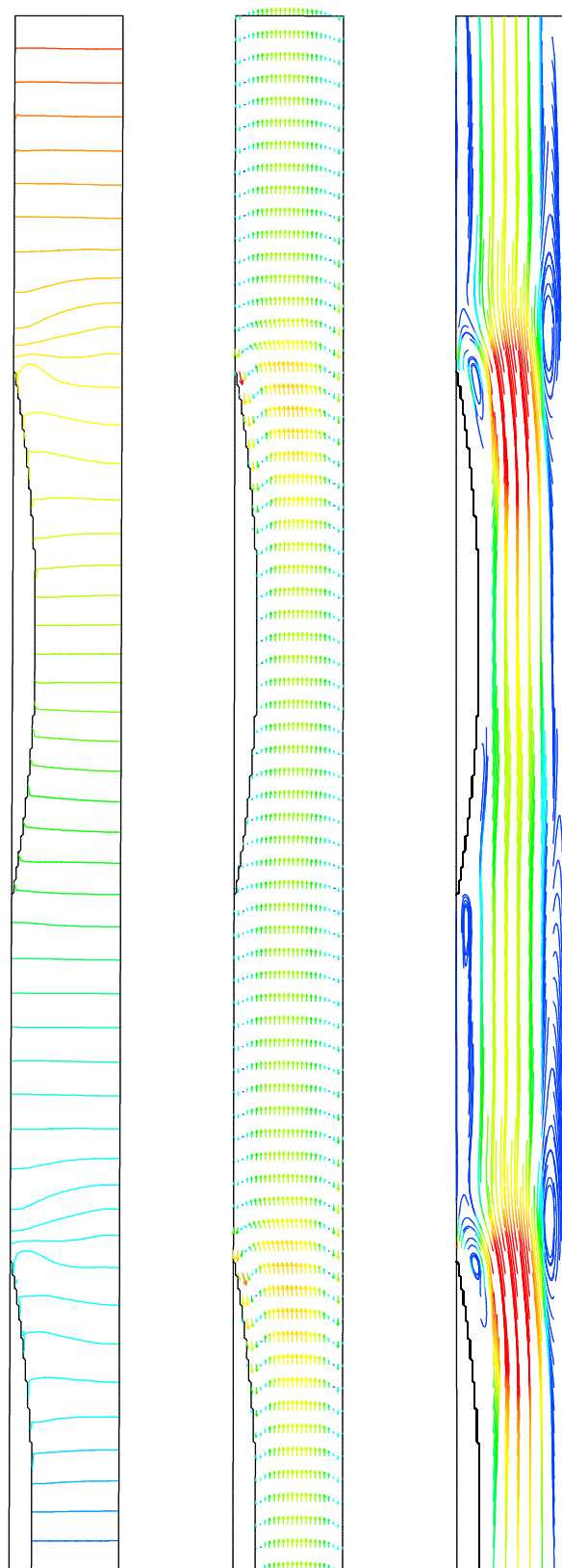


图 5.12: Case1 $3/5$ 周期 (b)

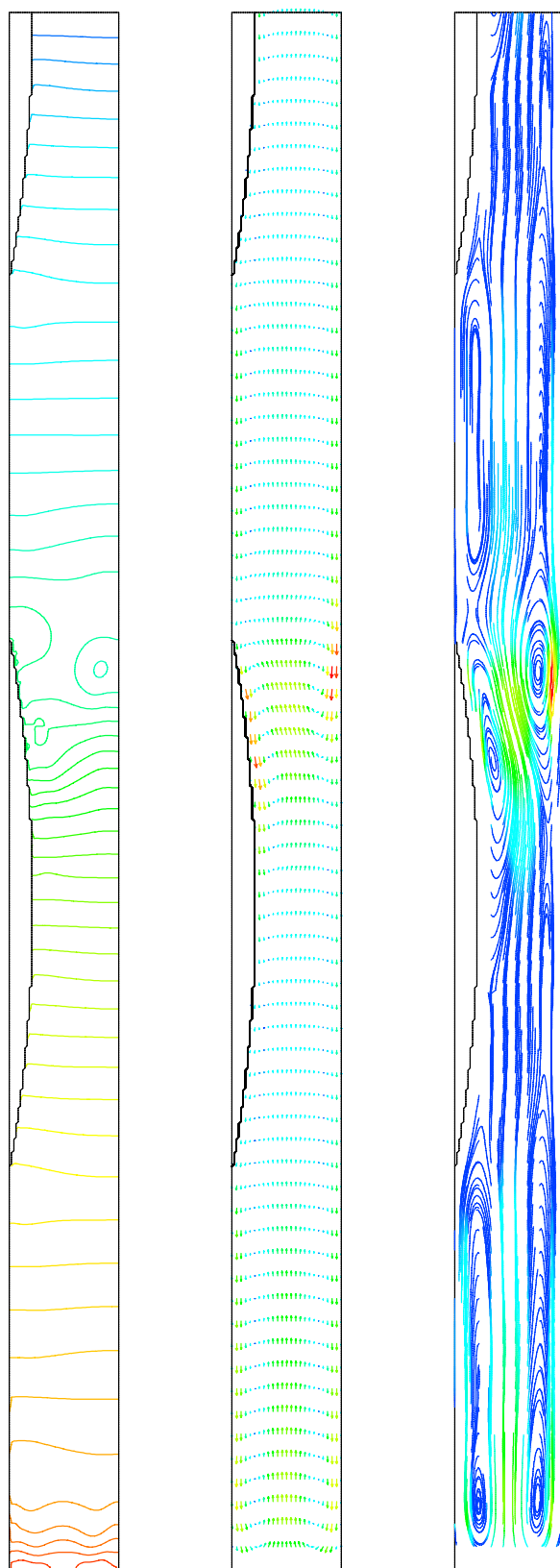


图 5.13: Case1 4/5 周期 (a)

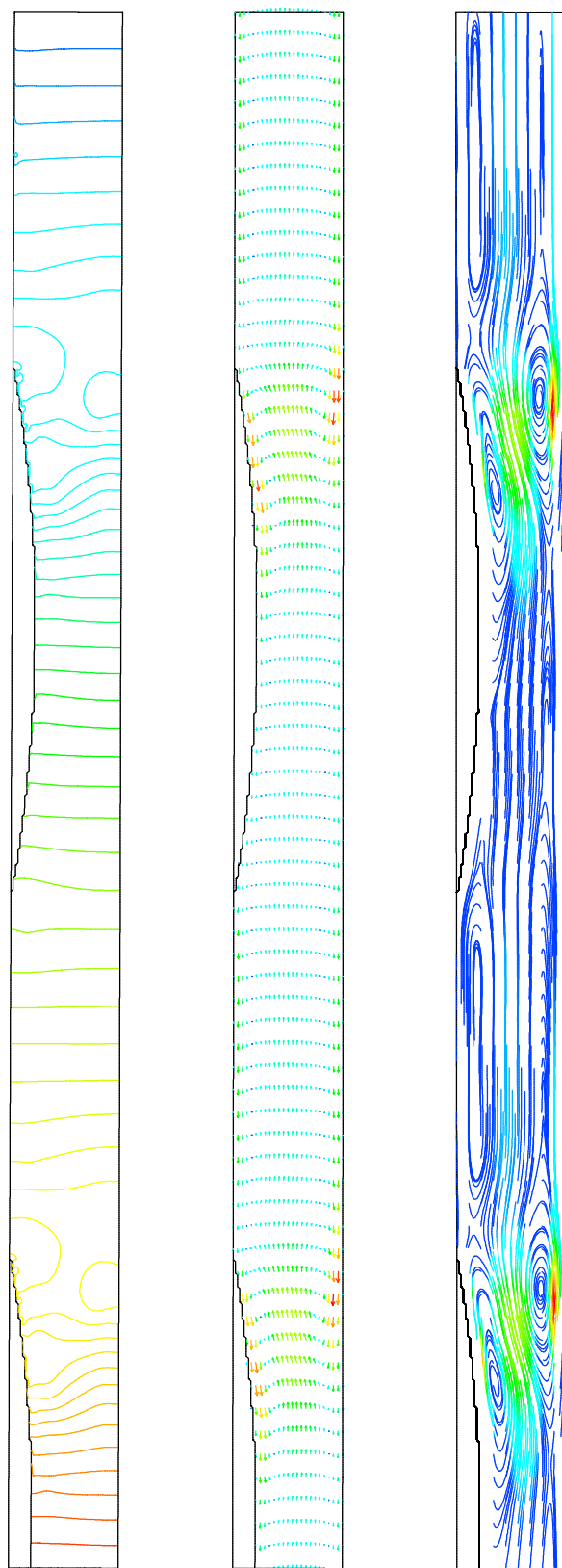


图 5.14: Case1 4/5 周期 (b)

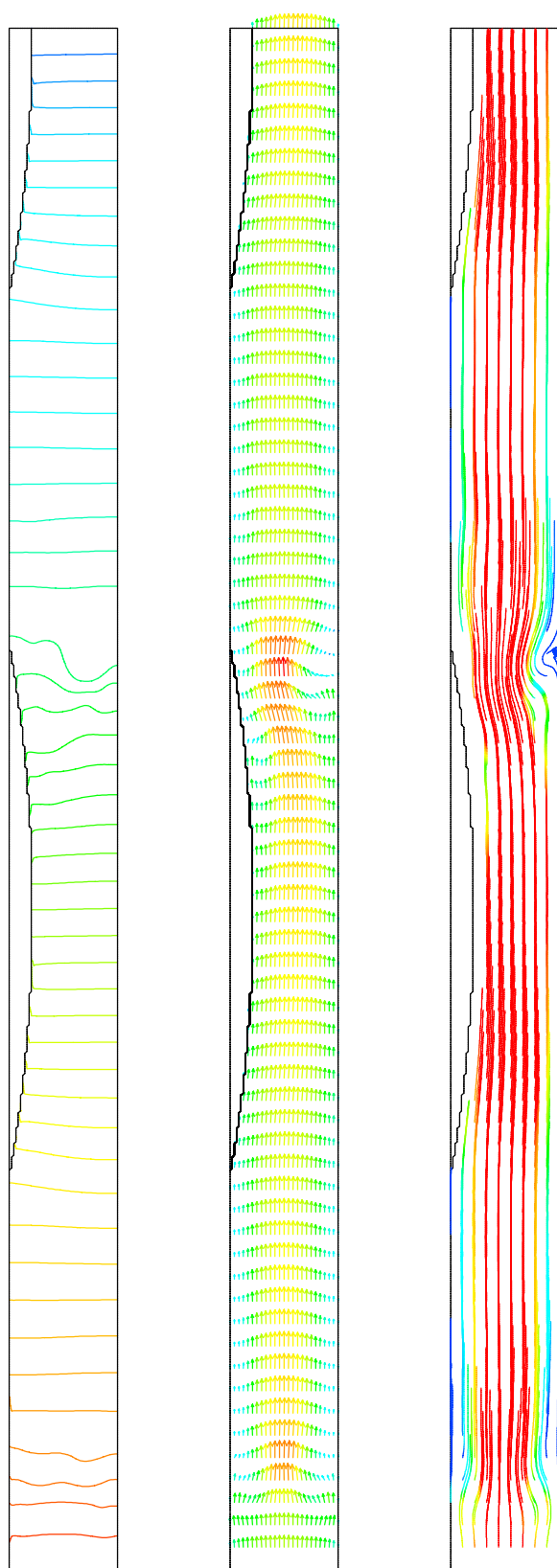


图 5.15: Case1 1 周期 (a)

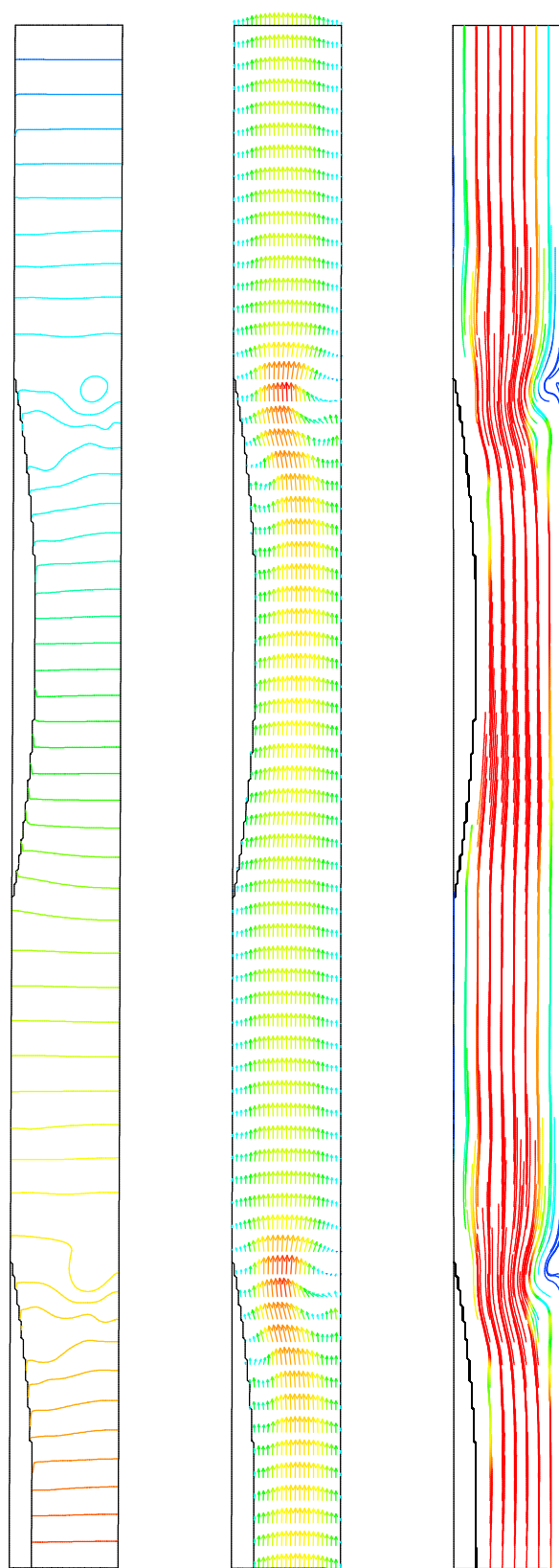


图 5.16: Case1 1 周期 (b)

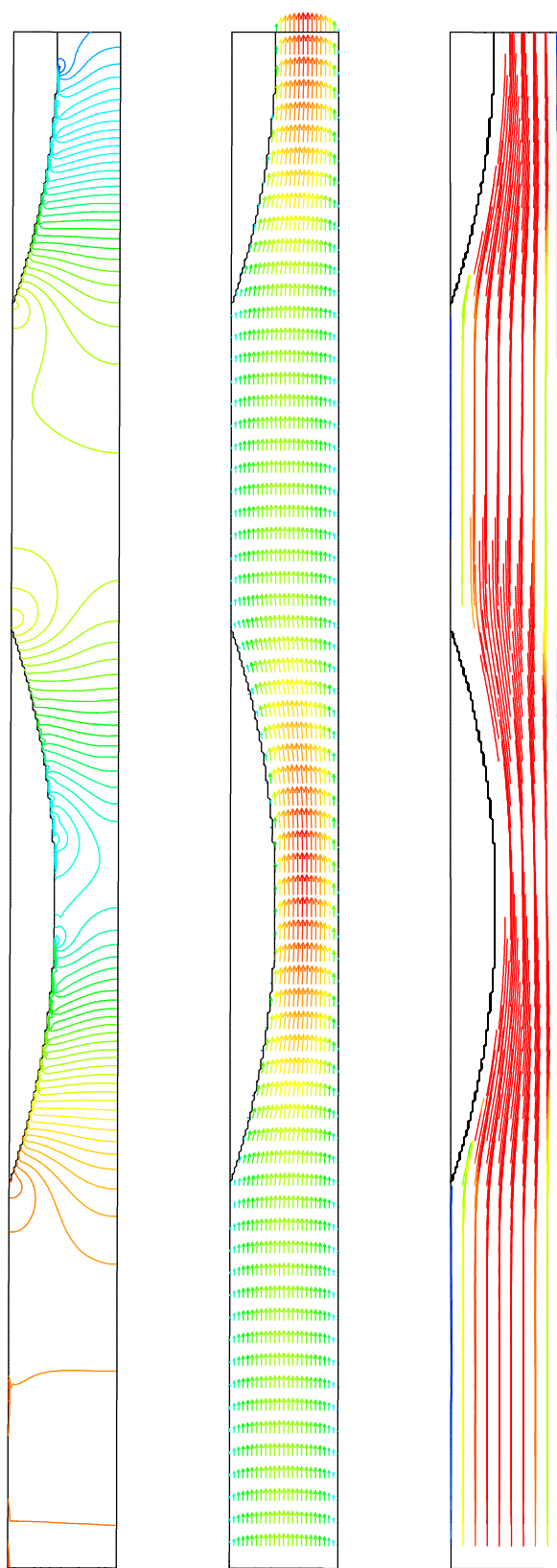


图 5.17: Case2 0/5 周期 (a)

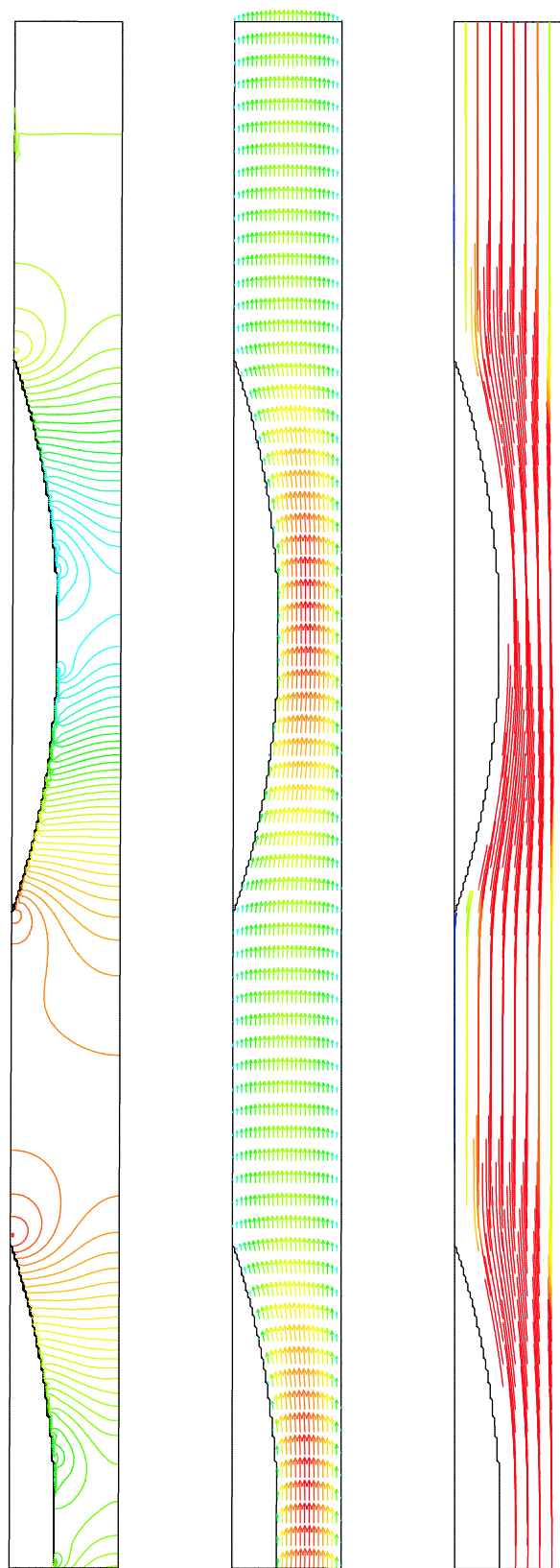


图 5.18: Case2 0/5 周期 (b)

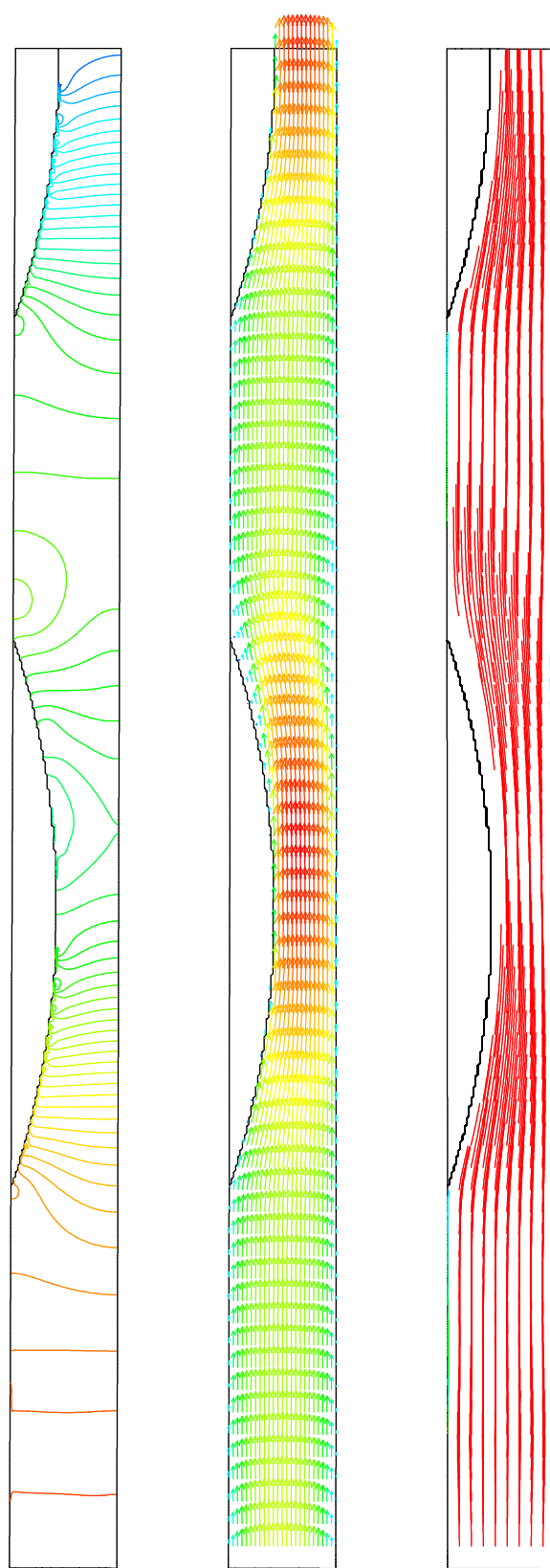


图 5.19: Case2 $1/5$ 周期 (a)

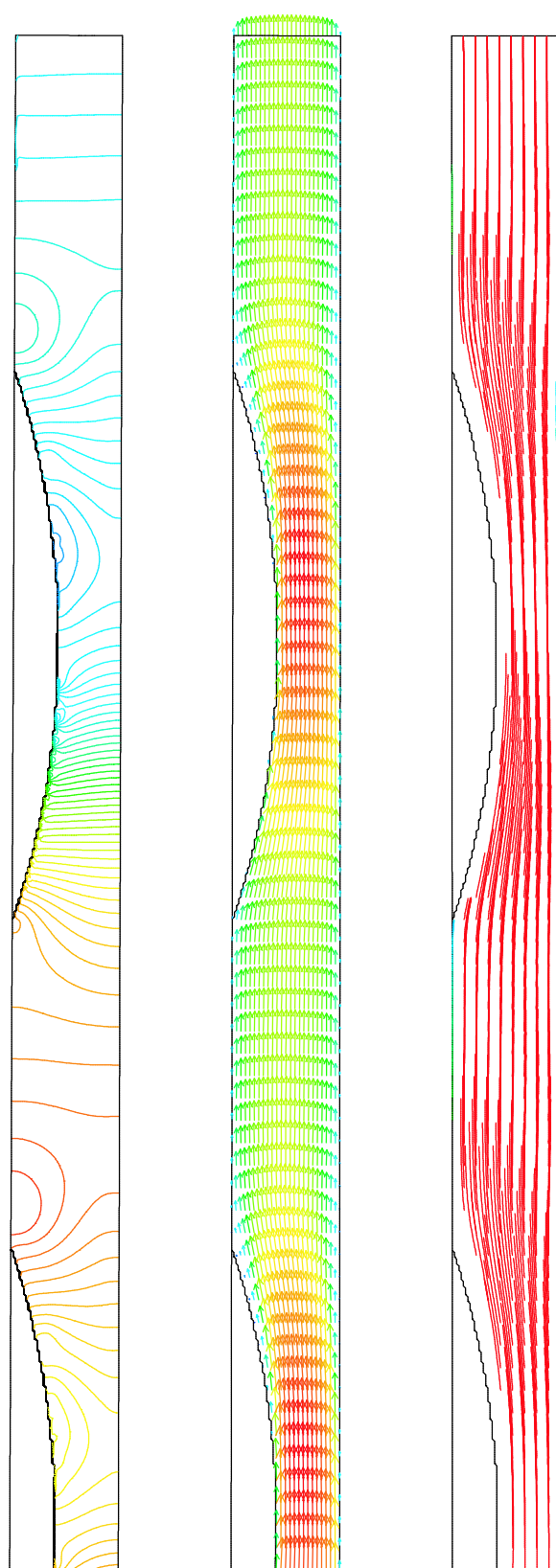


图 5.20: Case2 $1/5$ 周期 (b)

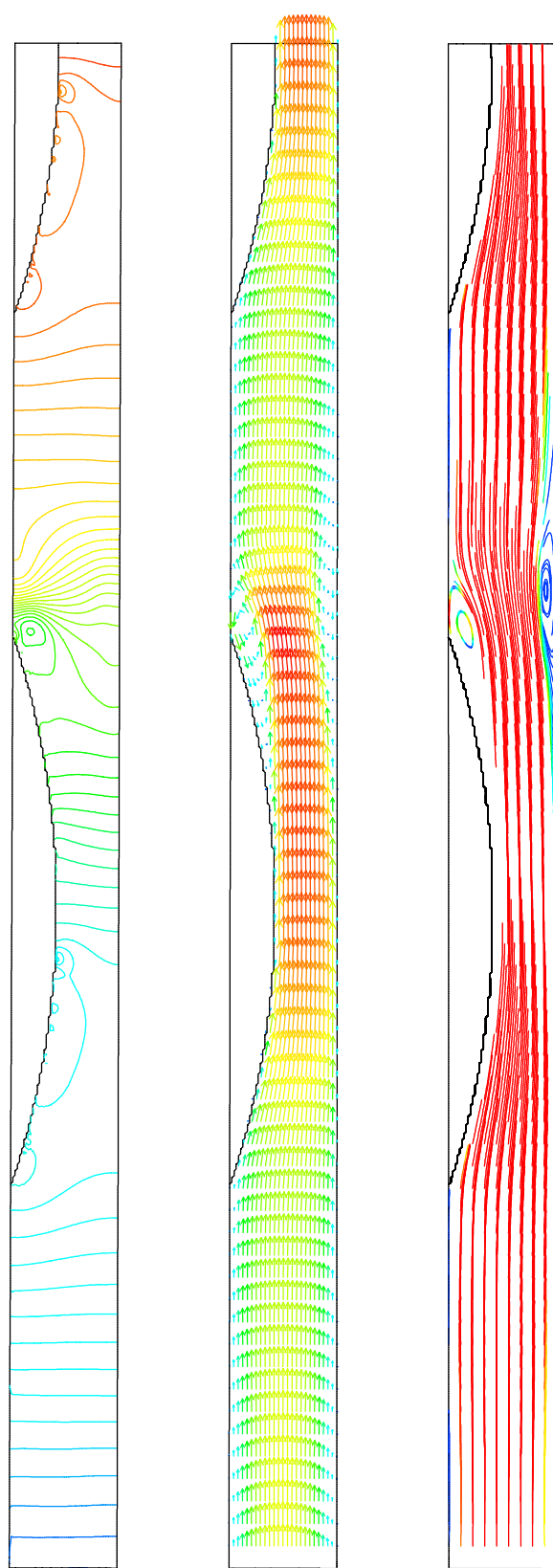


图 5.21: Case2 $2/5$ 周期 (a)

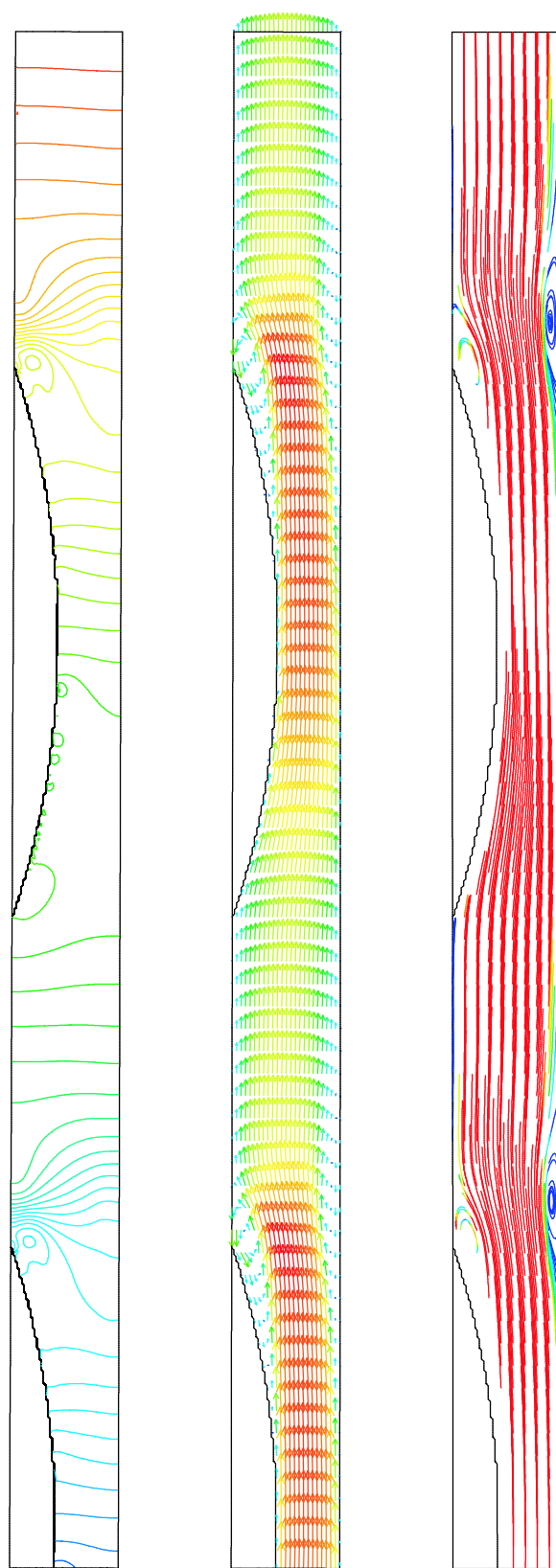


图 5.22: Case2 $2/5$ 周期 (b)

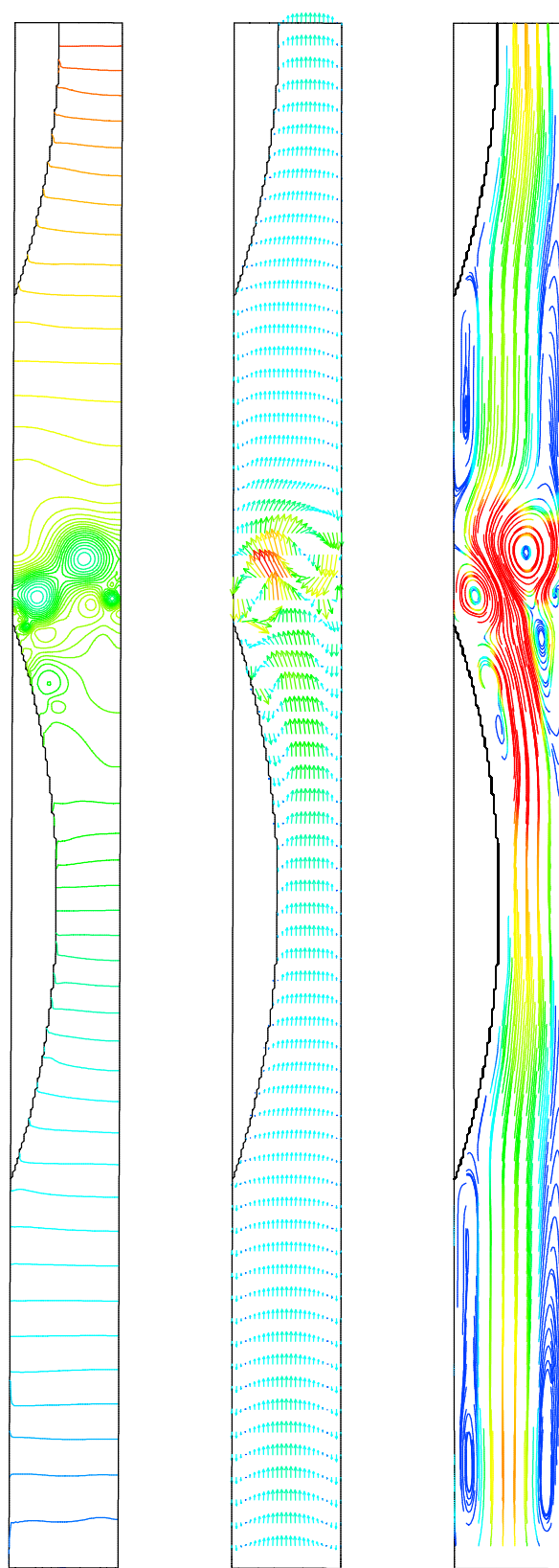


图 5.23: Case2 $3/5$ 周期 (a)

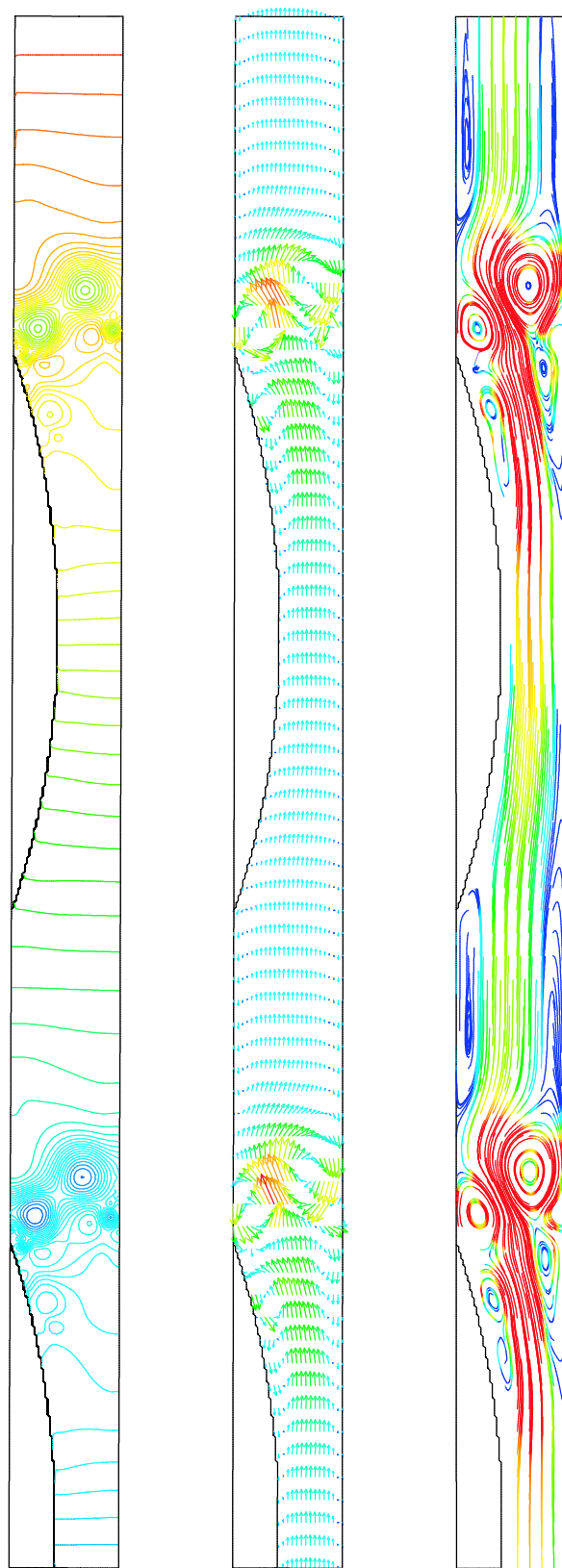


图 5.24: Case2 3/5 周期 (b)

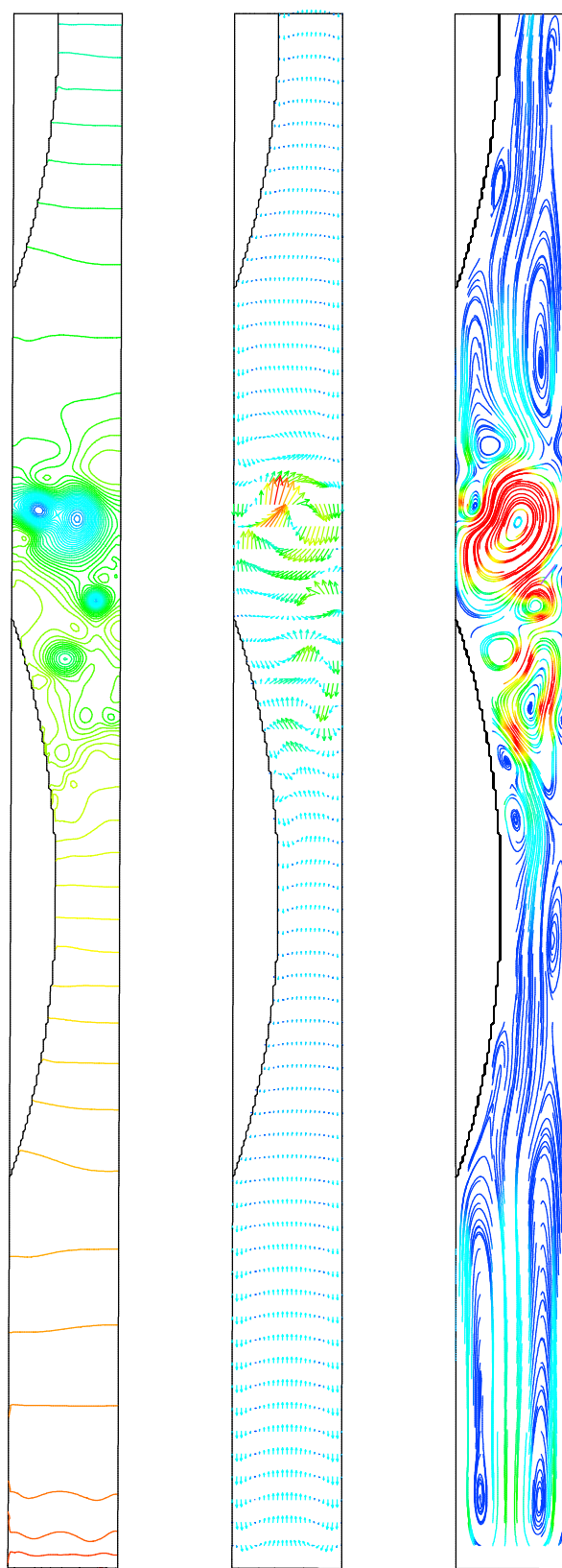


图 5.25: Case2 4/5 周期 (a)

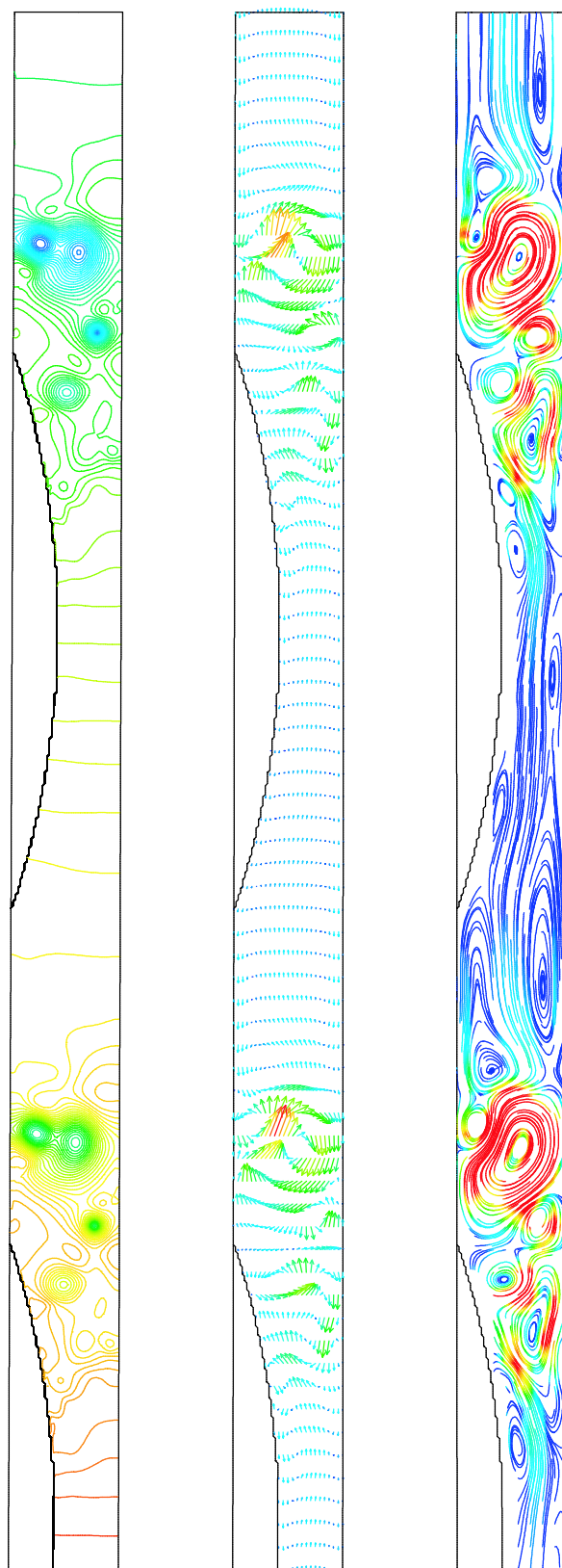


图 5.26: Case2 4/5 周期 (b)

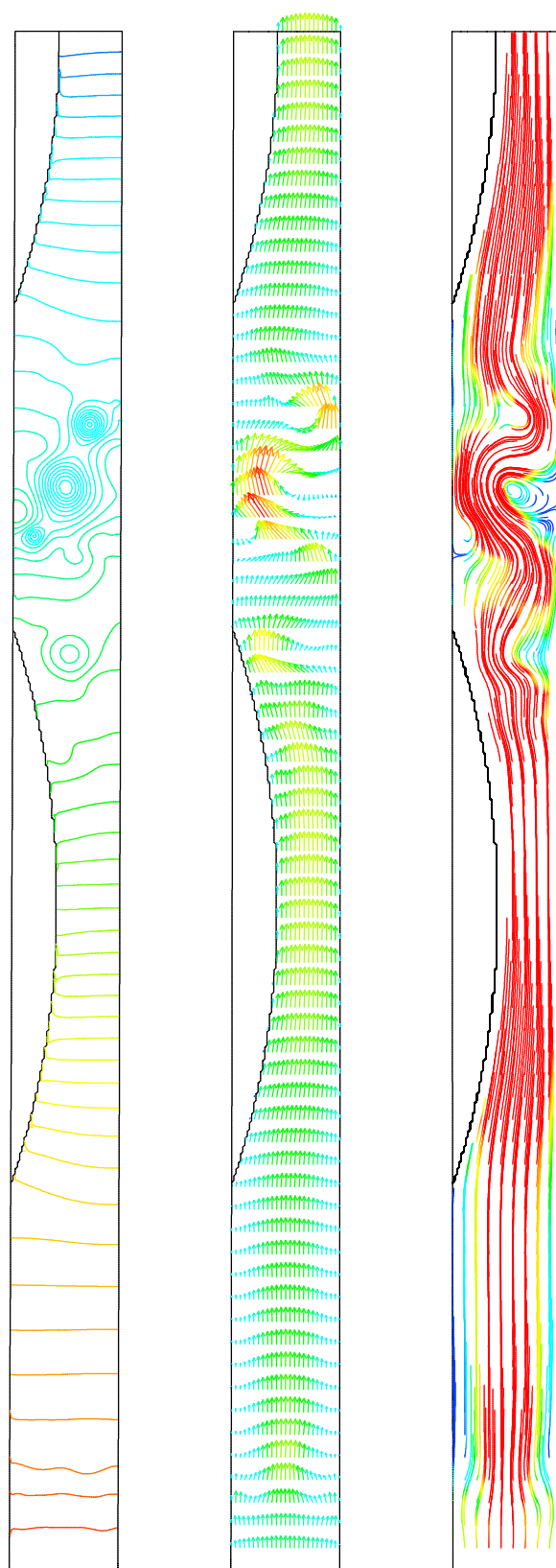


图 5.27: Case2 1 周期 (a)

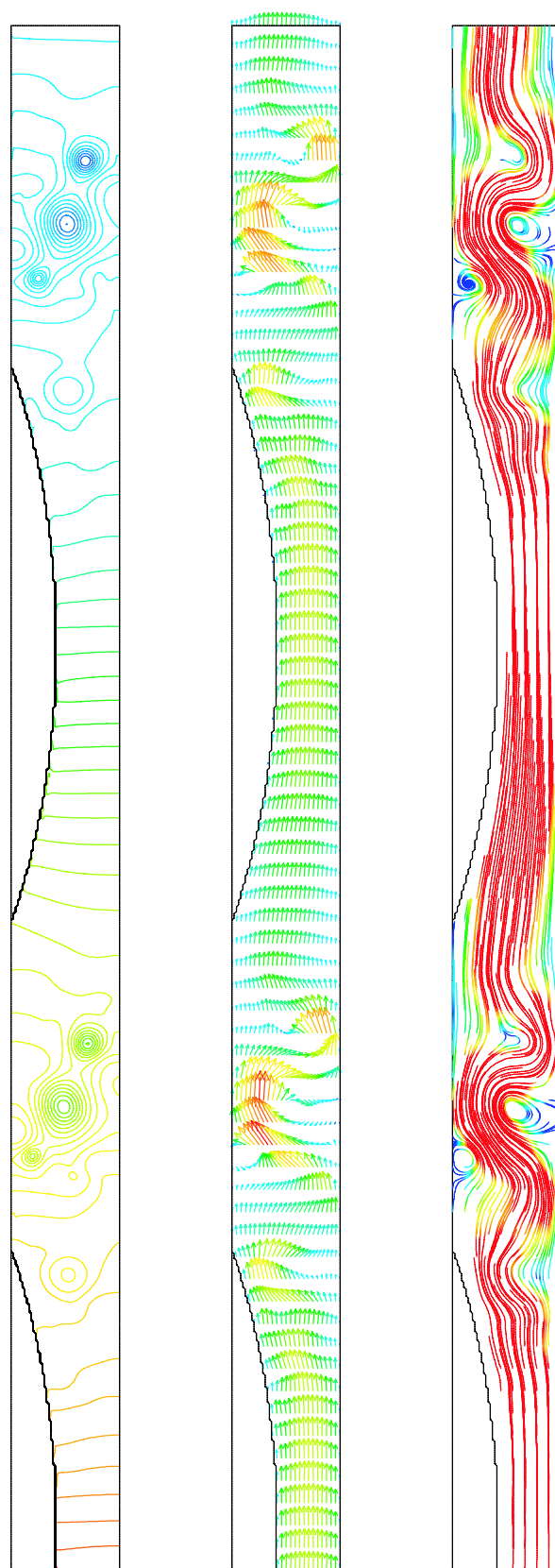


图 5.28: Case2 1 周期 (b)

5.2 壁面が振動する管内流れ

5.2.1 計算モデル

計算モデルとして2次元の管内を流れる流体の計算を行った。計算領域の形状は図5.29に示した。初期状態で図5.29(a)のまっすぐな管全体にあらかじめポアズイユ流れを与えた。次に管の上面に速度分布を与え図5.29(b)の状態まで移動させ、再び図5.29(a)の初期状態まで収縮させた。この振動動作を数回繰り返し流れのパターンを解析した。境界条件として管の壁面は振動部分を含めて non-slip とした。管の出口での圧力は0、軸方向の速度勾配を0とした。また管の入口はポアズイユ流れとなる速度分布を与えた。振動部分の移動速度は以下のように定義した。

$$v = -U \sin\left(\frac{t}{T}\right) \sin\left(\frac{x}{W}\right) \quad (5.23)$$

ここで v, t, T はそれぞれ壁の移動速度、時間、壁の振動周期をあらわし、 x は振動部分の始点からの距離、 W は振動部分の幅、 U は振動部分中心の最大速度をあらわす。これにより CIP 法で壁について移流方程式を計算することで各タイムステップにおける振動部分の位置計算を行うことができる。

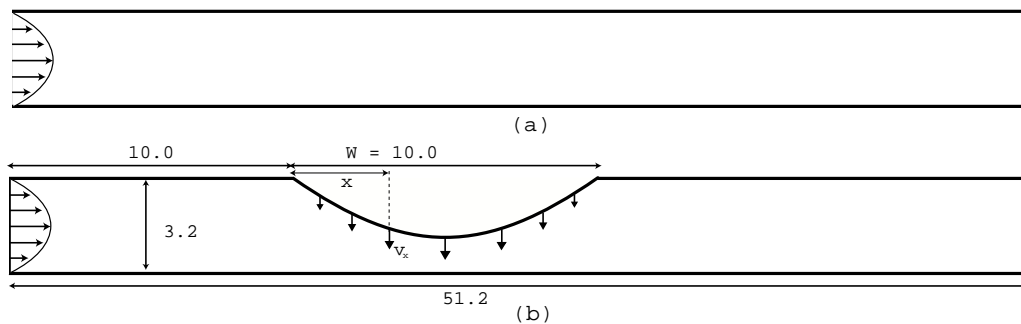


図 5.29: 計算モデル

5.2.2 解析結果

解析結果を示す。格子は等間隔の正方格子を用い、図 5.29 に示した計算領域を x 方向に 512, y 方向に 32 分割した。レイノルズ数 (Re) は 200 とし、時間刻み (Δt) は 0.001 とした。

まず壁面の振動周期 $T=0.4$ を与え計算を行った。壁面の振動部分の中央での最大速度 (U) はポアズイユ流れの平均流速の 5 倍の $U=5$ として計算を行った。この時 $1/2$ 周期で振動部分の中央では管の直径は最大時の 40% となる。また壁面の振動周期 $T=3.2$ の場合の計算を行った。壁面の振動部分の中心での最大速度 (U) は $T=0.4$ の場合と振動の幅が同じになるように $U=5/8$ とした。各図においてそれぞれの振動周期における 0, $1/4$, $1/2$, $3/4$, 1, 2, 3, 4 周期のときの流れのパターン (上から速度ベクトル、圧力、流線) を示した。

0 周期 (図 5.30, 5.38) の時は、 $T=0.4$, $T=3.2$ とともに管全体にポアズイユ流れが分布しており、また圧力については管の入り口が高くなっている。 $1/4$ 周期 (図 5.31, 5.39) では、壁の移動速度は最大になり、流れに壁の移動により速度が加えられ、振動部分右側から出口に向かって多い速度となっている。 $T=0.4$ の場合は壁の移動速度の違いから振動部分の圧力勾配が大きい。流れのパターンは $T=0.4$, $T=3.2$ とともにそれほど大きな違いは見られない。 $1/2$ 周期 (図 5.32, 5.40) では、壁の移動速度は 0、また振動部分の幅は最小となる。 $T=0.4$, $T=3.2$ とともに振動部分の左側に剥離による渦が見られる。比較すると $T=3.2$ の時のほうが大きな渦となっており、またその右下にも別の渦が確認できる。 $3/4$ 周期 (図 5.33, 5.41) では、壁の移動速度は上向きに最大となる。このとき $T=0.4$ と $T=3.2$ では明らかに流れのパターンが異なることが確認できる。 $T=0.4$ の時は大きな逆流が振動部分の右側で起こり、逆流は管の壁付近が大きい。 $T=3.2$ の時は壁の移動速度が流入に対して相対的に小さく逆流は発生するもののそれほど大きいものではない。また左側からの流れと振動部分の移動による流れの影響で大きな渦が発生している。 1 周期 (図 5.34, 5.42) では、管壁は元の状態に戻るが、流れのパターンは 0 周期の状態とは大きく異なり、渦が存在し流れは蛇行している。この振動を繰り返し行ない 2 周期 (図 5.35, 5.43) 3 周期 (図 5.36, 5.44)、 4 周期 (図 5.37, 5.45)、を比較すると流れは同じような流れパターンを繰り返している。ただし $T=0.4$ の場合は振動を繰り返すと渦は大きくなり、大きい速度の蛇行の長さが増している。 $T=3.2$ の場合は振動を繰り返してもほぼ同様なパターンを示している。

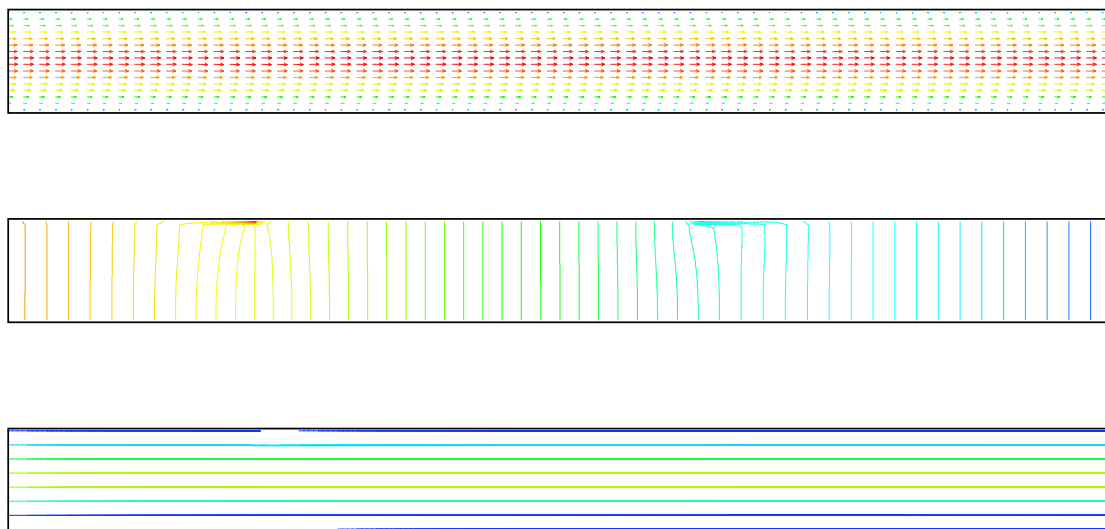


图 5.30: 0 周期 ($T=0.4$)

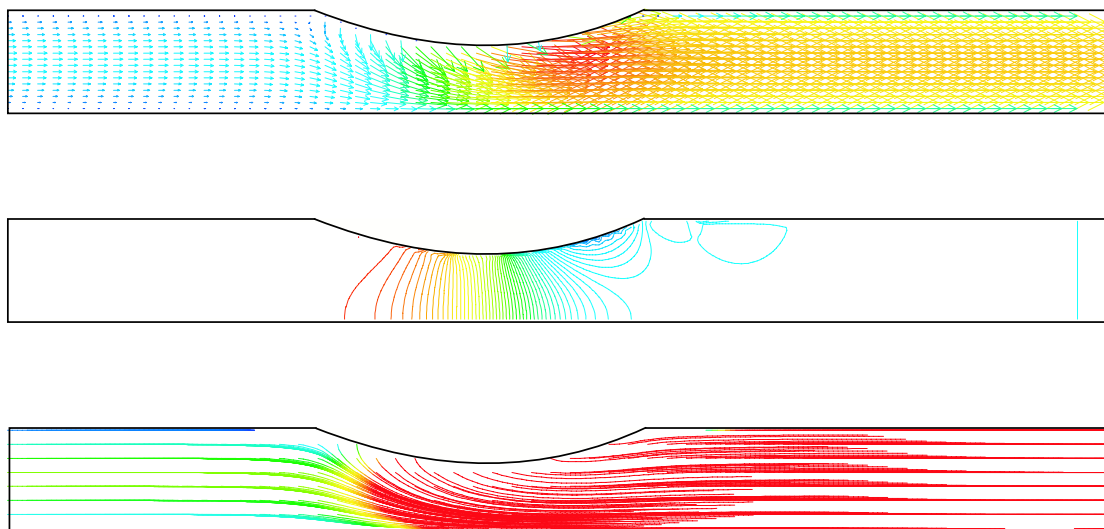


图 5.31: $T=0.4$, $1/4$ 周期

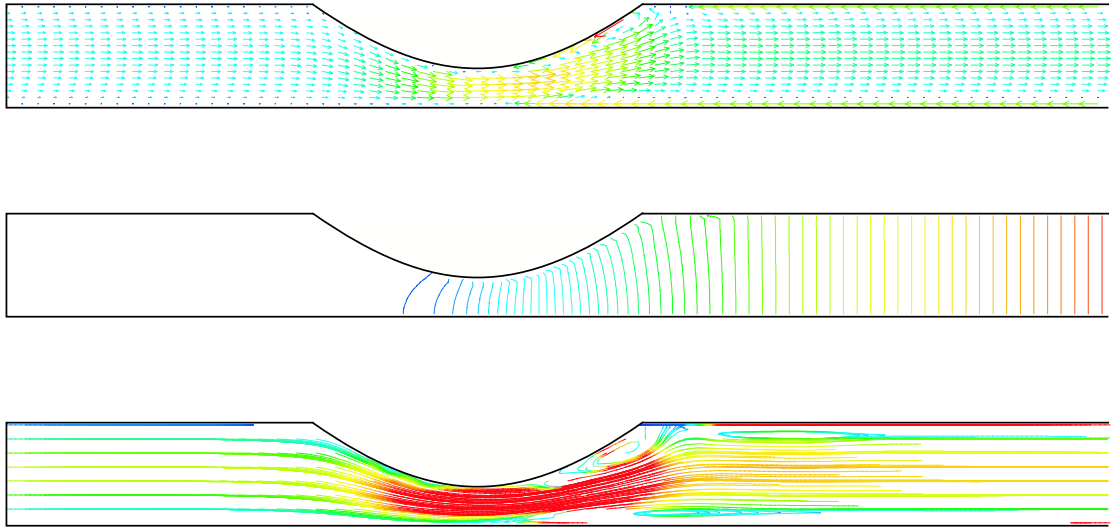


图 5.32: $T=0.4$, $1/2$ 周期

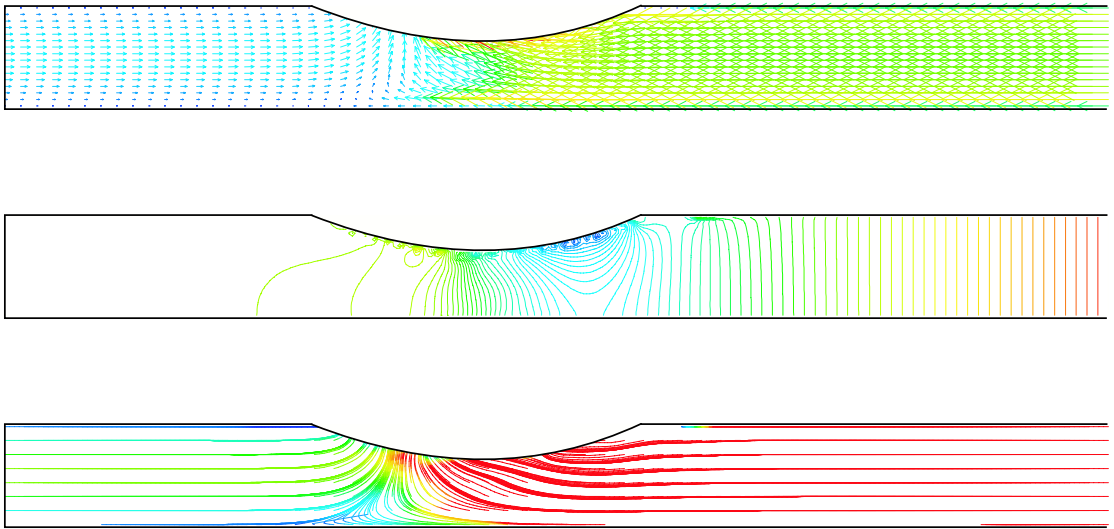


图 5.33 $T=3/4$ 周期

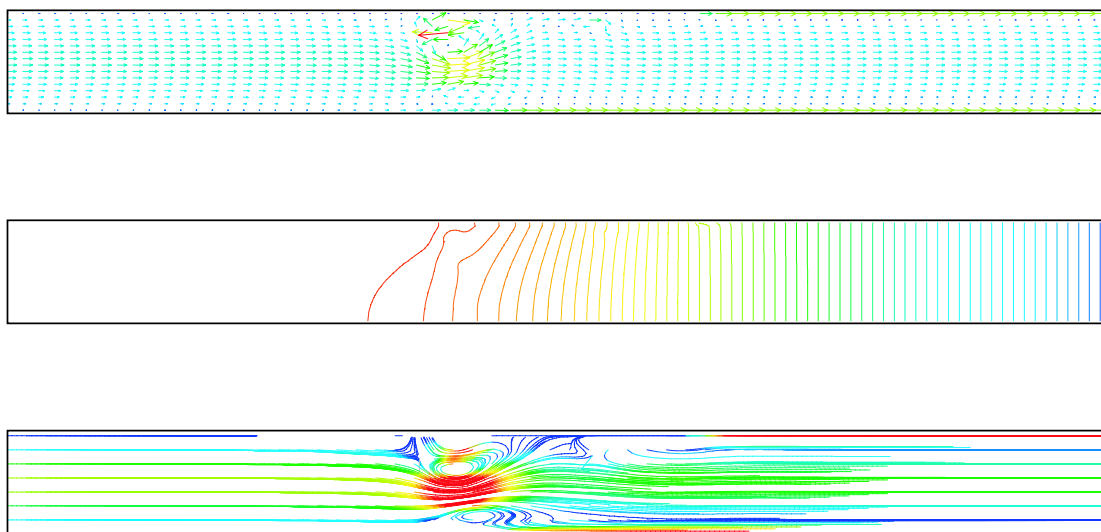


图 5.34: $T=0.4$ 1 周期

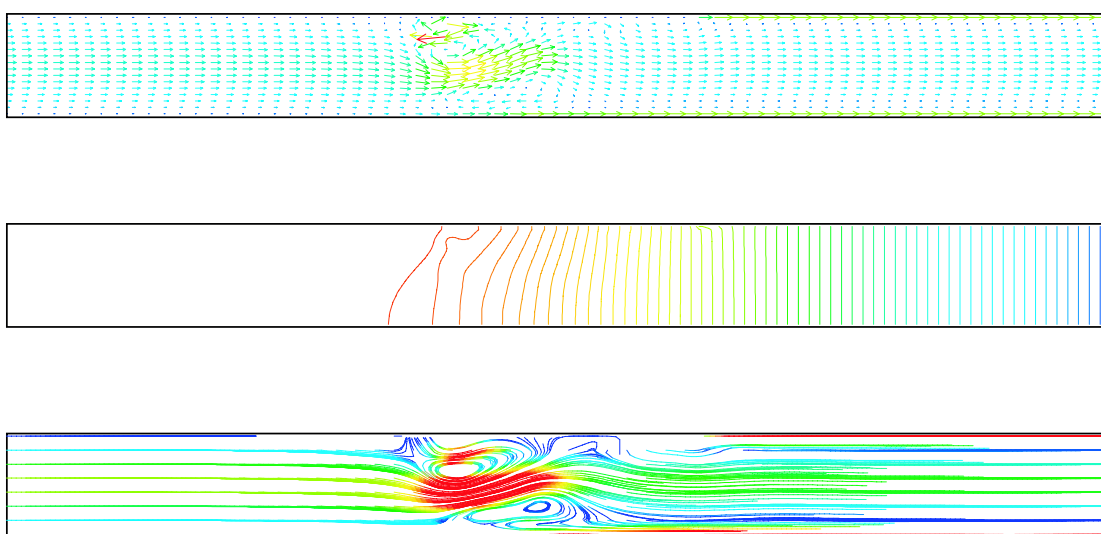


图 5.35: $T=0.8$ 2 周期

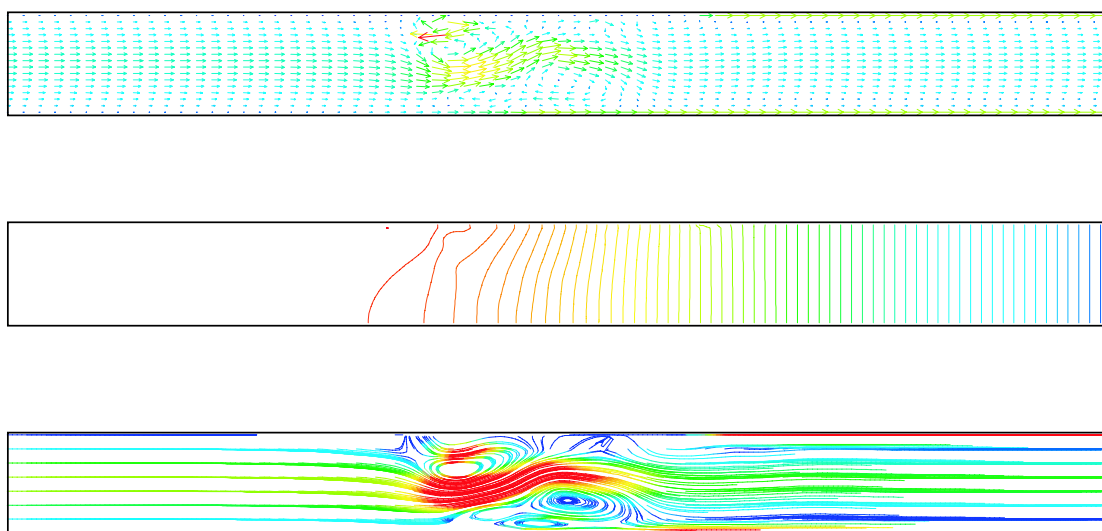


图 5.36: $T=0.4$, 3 周期

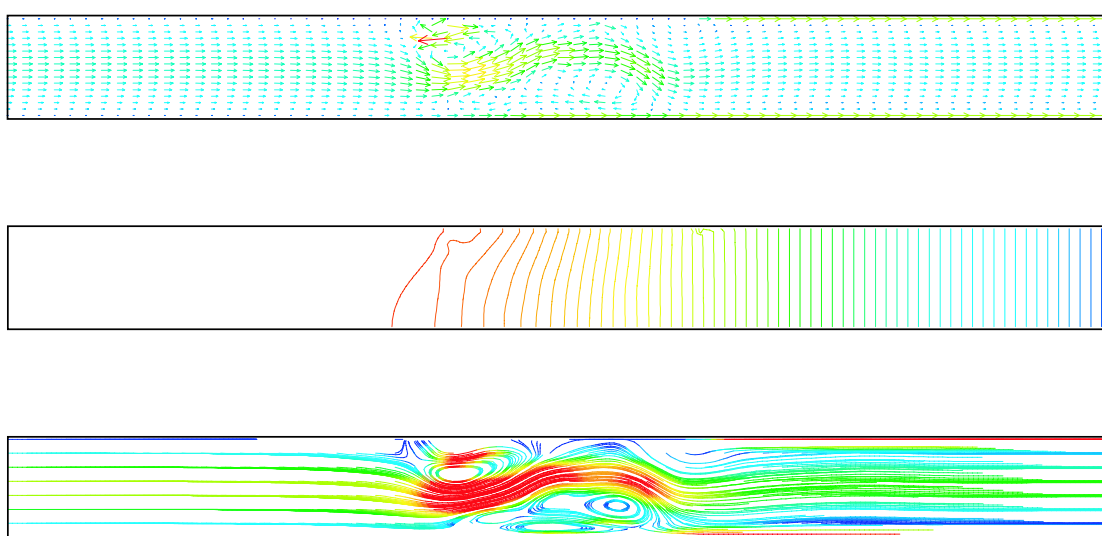


图 5.37: $T=0.4$, 4 周期

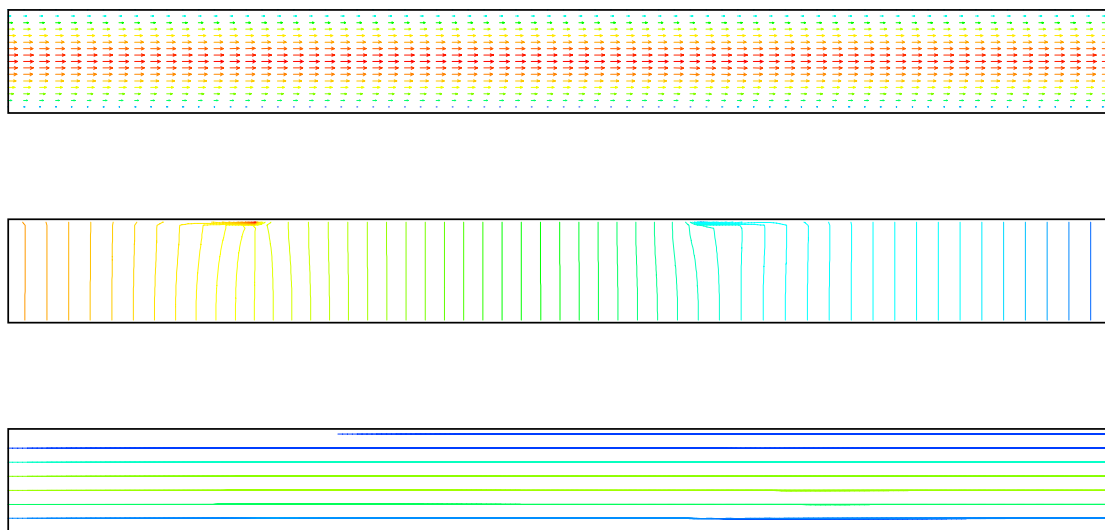


图 5.38: $T=3.20$ 周期

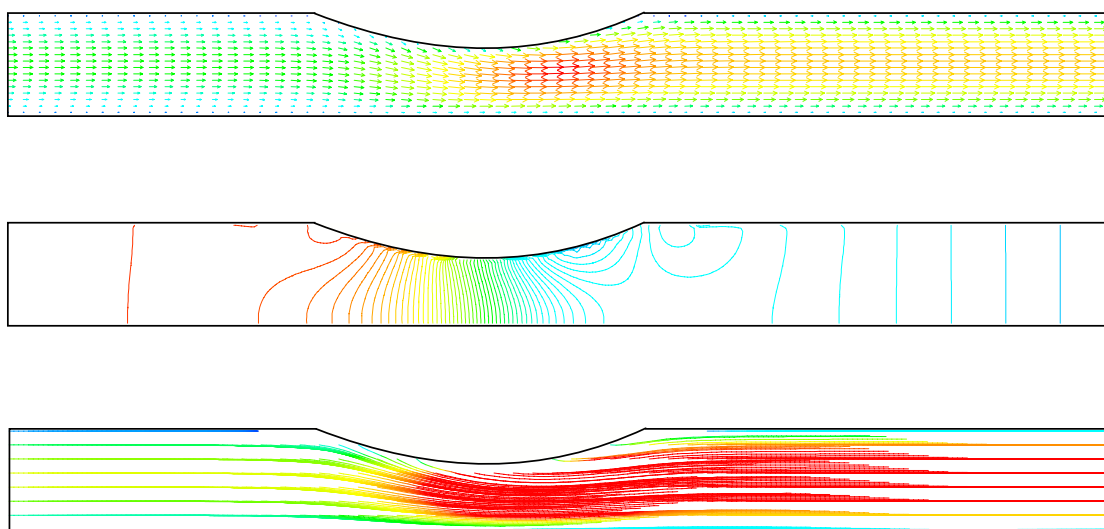


图 5.39: $T=3.25$, $1/4$ 周期

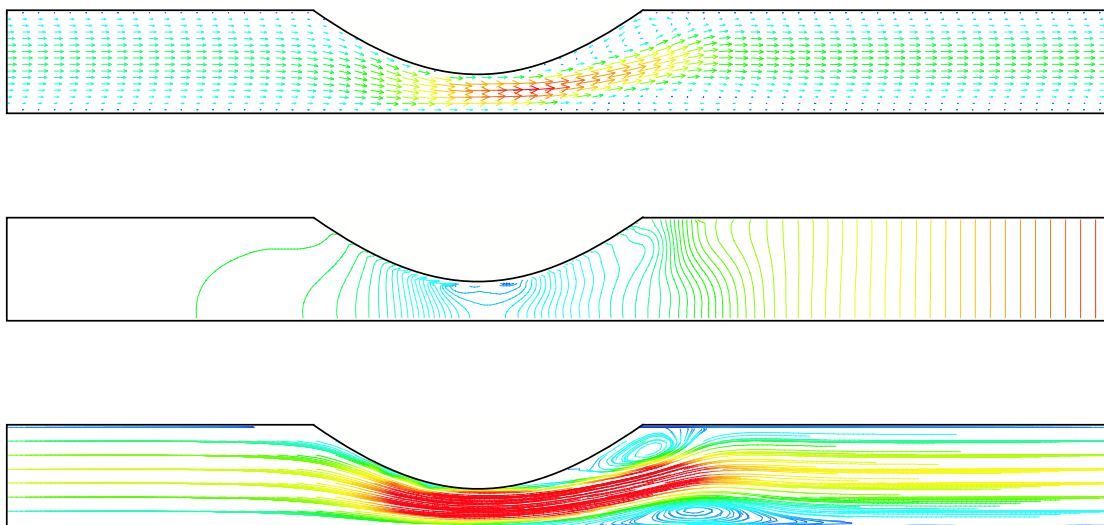


图 5.40: $T=3.2$, $1/2$ 周期

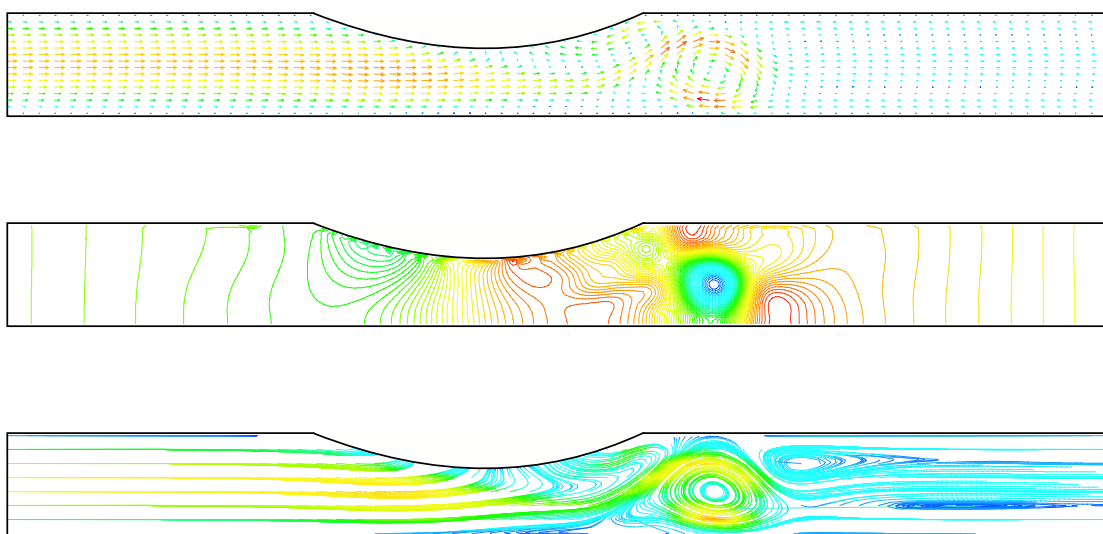


图 5.41: $T=3.2$, $3/4$ 周期

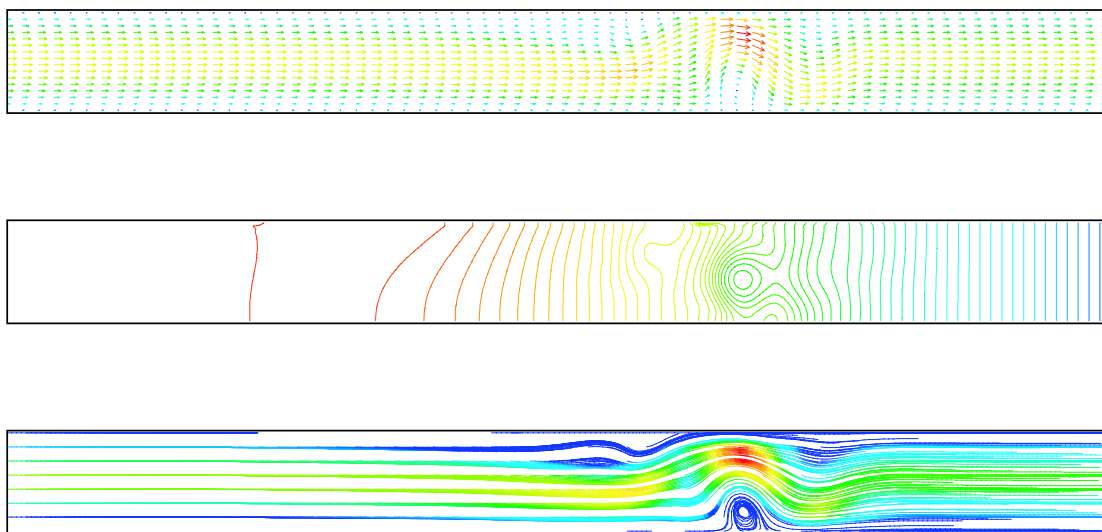


图 5.42: $T=3.2$ 1 周期

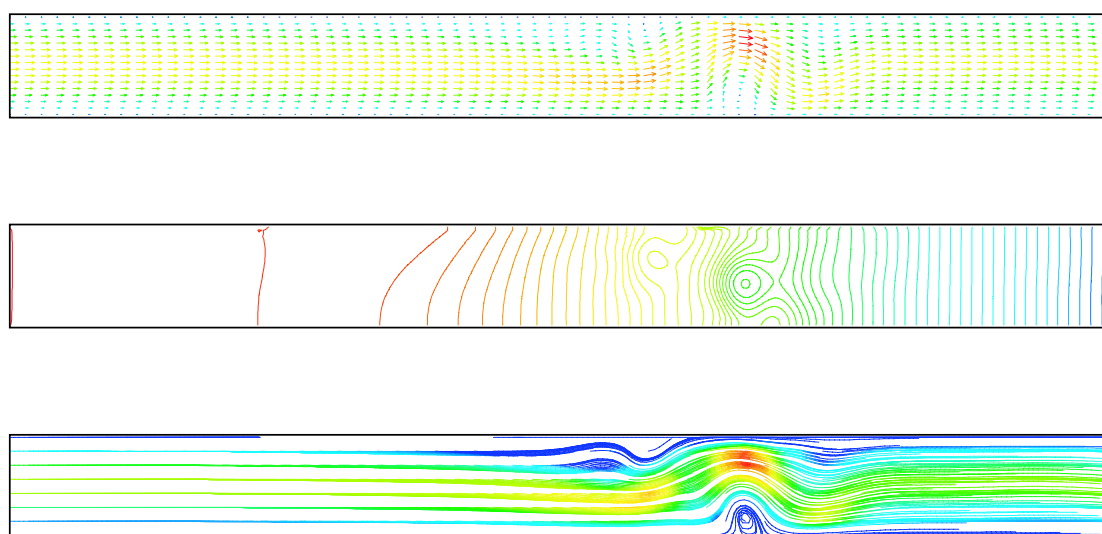


图 5.43: $T=3.2$, 2 周期

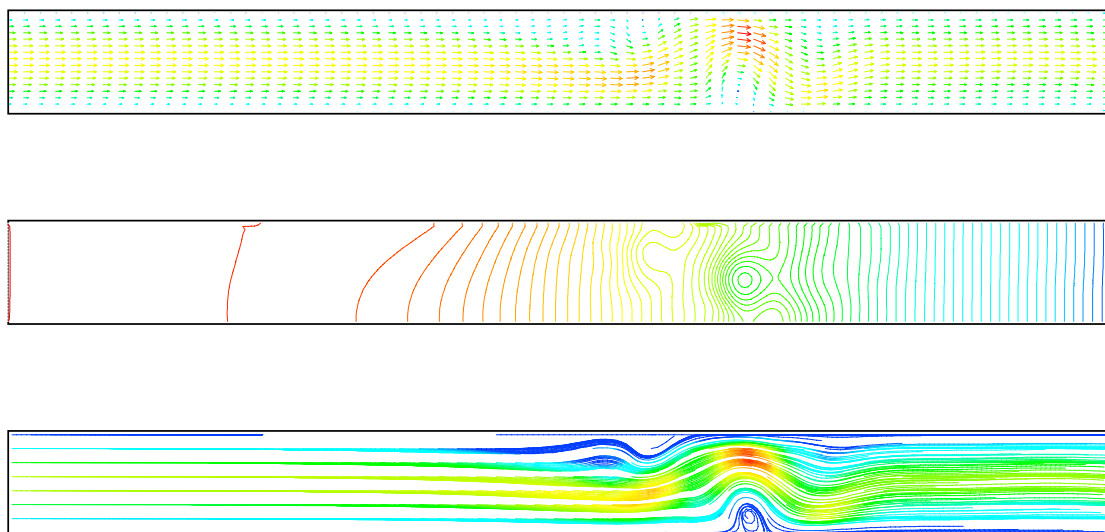


图 5.44: $T=3.2, 3$ 周期

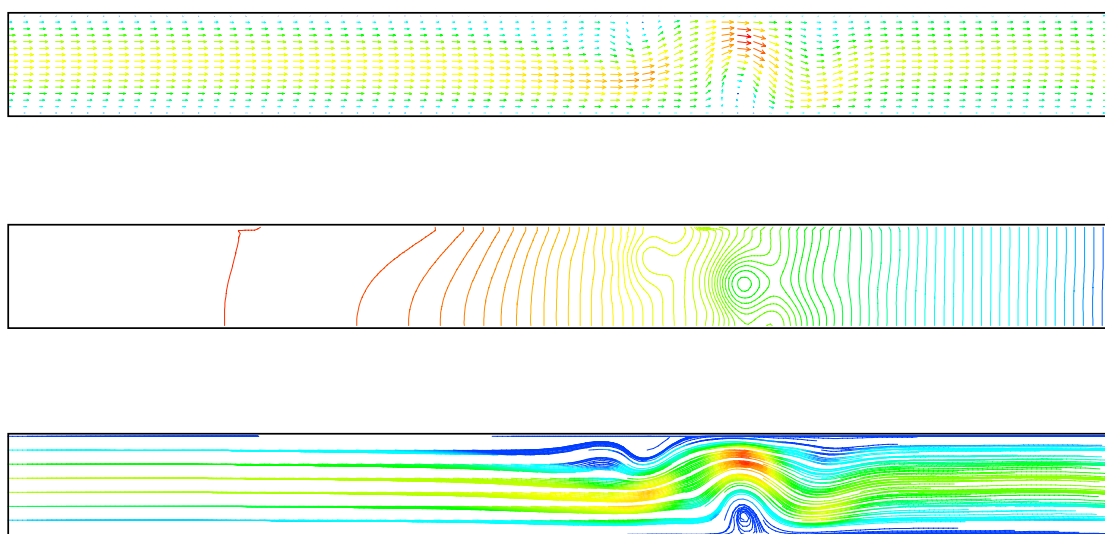


图 5.45: $T=3.2, 4$ 周期

第 6 章

まとめ

本研究では次のことを行った。

1. オイラー的な手法である CIP 法を移動境界問題に適用した。
2. 動的な境界条件を与えた非定常な流れの解析を行った。
3. CP 法を用いた流れの解析を領域分割に基づき並列化を行った。

本研究では次の成果が得られた。

1. 非常に計算時間を要する非定常流れの解析を並列化することで短時間で行うことができた。
2. 計算領域を分割することで、これまでより細かい計算格子を用い境界の曲面をオイラー的な格子で精度良く表すことができ、また流れの物理現象を精度良くとらえることができた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、貴重な御助言、御指導を賜りました松澤照男教授に深く感謝いたします。また、お世話になった研究室の皆様に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 矢部孝:固体、液体、気体の統一解法を目指す CIP 法, 第 7 回計算流体力学シンポジウム講演論文集, pp151-156, 1996
- [2] T.Yabe, Tshikawa P.YW ang: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polyomial interpolation II. Two and three-dimensional solvers, Computer Physics Communications 66, pp233-242, 1991
- [3] TYabe: A universal cubic interpolation solver for compressible and incompressible fluids, Shock Waves, pp187-195, 1991
- [4] 古田展康: CP 法による弾性管内の流れ解析, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 1998
- [5] 荒木宏之, 古田展康, 松澤照男: 管壁が振動する流れの並列計算, 第 11 回計算力学講演会論文集, pp587-588, 1998
- [6] 坂本文: たのしい UNIX, アスキー出版局, 1990
- [7] 河村哲也, 渡辺好夫, 高橋聡志, 岡野覚: 流体解析 II, 朝倉書店, 1997
- [8] 数値流体力学: 荒川忠一, 東京大学出版会, 1994