Title	構造的な不確かさを考慮した磁気軸受のロバスト性解析・設計に関する研究
Author(s)	堀川, 徳二郎
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1225
Rights	
Description	Supervisor:藤田 政之, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

構造的な不確かさを考慮した磁気軸受のロバスト性解析・設計に関する研究

指導教官　藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

堀川 徳二郎

1999 年 2 月 15 日

目 次

第1章　諸論

1.1　研究の背景

磁気軸受は回転体を磁気的な力により非接触で支持する軸受である．回転体を完全非接触で支持することができれは，

- 摩擦・摩耗の問題がない．
- 超高速回転が可能．
- 振動・騒音が小さい．
- 潤滑油を必要としないため真空中などでの使用が可能．

といった長所を期待できる．一方で価格が高い，心理的な不安感があるといった短所もあるが，ターボ分子ポンプ，人工衛星姿勢制御用フライホイールなど実用例も多い [1, 2]．

磁気軸受は本来不安定な系であるのでその実現にはフィードバック制御による安定化が不可欠である．さらにフィードバック制御を取り入れることで軸受剛性や減衰特性を望ましいものにすることができるなどその役割は大きい．しかし，フィードバック制御を適用する際には実在する磁気軸受を数式モデルとして表現する必要がある．数式モデルは磁気軸受の情報をうまく表現することが望まれるが，制御系設計用の数式モデルは設計に適したモデルでなければならず，数式モデルの誘導過程には必ず何らかの理想化や簡略化が行われている．したがって，数式モデルが実システムを忠実に表現することはなく，何らかの不確かさが存在することになる．一般にパラメータの誤差，無視した非線形性，モデル化されなかったダイナミクスや制御装置の実装に伴う不確かさなどを挙げることができ，磁気軸受においては回転速度の変化や負荷の変動なども考えられる．

これらの不確かさが存在しても安定性を保持し，制御性能を劣化させない制御手法がロバスト制御であり近年盛んに研究が行われている．ロバスト制御ではモデルの不確かさを陽に考慮した制御系設計が行われるが，不確かさをどのように表現するかが重要な問題となる．従来，不確かさは複素数の摂動を用いて非構造的に表現されることが多かった．複素平面上で円板上の不確かさとして表現するこの方法では，特に高周波でモデル化されないダイナミクスを覆うような不確かさを含むことができ，また一般的で容易な解析法を展開することができる．しかし，不確かさの記述が保守的であるために得られる解析結果もまた保守的となる可能性がある．

これに対して不確かさを構造的に表現することで保守性の軽減が期待される．構造的な不確かさを考慮したモデルのロバスト性解析には構造化特異値 μ が用いられるが，実数の不確かさに対する μ の計算は難しいとされてきた．しかし，近年，実複素混合 μ や実数 μ の計算法についての研究がなされ，より真値に近い μ の計算法についても提案されている [23, 12]．

このような研究の発展により構造的な不確かさを考慮したモデルに対する解析および設計が可能となってきている．それに合わせて解析，設計に有効となるようなモデルについての考察も必要である．不確かさを考慮したモデリングは設計者の主観に委ねられる部分もあり，保守性の軽減を意識し，信頼性のあるモデルの構築は大変重要な問題である．

1.2　従来研究

本研究で研究対象とする横軸形磁気軸受には多くの研究がなされており，古くは PID 制御による制御系設計 [1, 2]，状態フィードバックを用いた最適制御の適用例などがある [3]．しかし，これらは不確かさを陽に考慮した設計法ではなく，モデルの不確かさの具体的な記述はなされていない．その後 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を中心としてロバスト制御理論を適用した例が数多く報告されており [5, 6, 7, 8]，文献 [7] では $\mathcal{H}_\infty$ 制御と μ-解析を組み合わせた μ-設計法によって制御系を構成する研究がなされている．しかし，これらの研究ではモデルの不確かさは非構造的に記述されており，これらの手法で設計されたコントローラは保守的である可能性がある．

また，1 個の電磁石を用いて実現できるつり下げ形磁気浮上系においてはモデルの不確かさの構造とその記述方法が議論されている [10]．磁気軸受は実現するために 8-10 個の電磁石を必要とするが，各々の電磁石についてはつり下げ形磁気浮上系と類似している．しかし，磁気軸受は多入出力系であるため複数の自由度をその相互作用を考慮して制御しなければならず，困難な点も多い．

1.3　研究の目的

本研究では，多入出力系である磁気軸受における不確かさを構造的にとらえた場合のモデルとそのロバスト性解析，設計について検討することを目的としている．

はじめに磁気軸受を数式モデルとして表現し，この数式モデルをもとにノミナルプラントを定義する．そして，ノミナルプラントと実システムの間のギャップをどのように表現すればよいかを検討し，横軸形磁気軸受において不確かさを考慮したモデルの一例を提案する．次に従来の手法で設計したコントローラに対して提案したモデルを用いてロバスト性解析を行う．この解析には実複素混合構造化特異値 (mixed μ) を用いる．最後に提案したモデルが妥当なものであるかどうか解析結果，シミュレーション結果をふまえて考察を行う．

第2章　制御系における不確かさとロバスト性解析

本章では，準備として不確かさの表現法である加法的な不確かさ，乗法的な不確かさと線形分数変換 (Linear Fractional Transformation, LFT) について述べる．また，ロバスト性解析の指標となる構造化特異値とこれを用いた解析法について説明する [21, 22].

2.1　不確かさの記述

2.1.1　加法的な不確かさ

制御系の設計では，実システムを数式モデルで表し，得られた数式モデルをもとにコントローラを設計する．しかし，数式モデルの導出過程においては様々な仮定や理想化がなされており，実システムを正確に表現することは困難である．そこで，得られたモデルをノミナルなプラントとし実システムとの間に存在する誤差を不確かさとして表す.

加法的な不確かさを考慮したプラント G_p はノミナルプラントで表現されない不確かさを Δ_A とおくと Figure 2.1(a) のように表され，(2.1) 式で定義される．

$$G_p = G + w_A\Delta_A; \quad ||\Delta_A||_\infty \leq 1 \tag{2.1}$$

ここで，

G :　ノミナルプラント

w_A :　不確かさの大きさを表す重み

2.1.2　乗法的な不確かさ

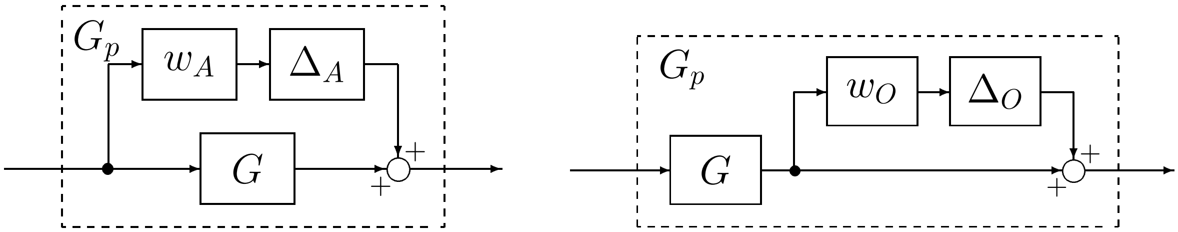
乗法的な不確かさを考慮したプラント G_p はノミナルプラントで表現されない不確かさを Δ_O とおくと Figure 2.1(b) のように表され，(2.2) 式で定義される．ただし，ここでは出力側の乗法的な不確かさを考えている．

$$G_p = (I + \Delta_O w_O)G; \quad ||\Delta_O||_\infty \leq 1 \tag{2.2}$$

ここで，

G :　ノミナルプラント

w_O :　不確かさの大きさを表す重み



(a) Plant with additive uncertainty　　(b) Plant with multiplicative output uncertainty

Figure 2.1: Plant with uncertainty

2.1.3　線形分数変換 (LFT)

線形分数変換 (Linear Fractional Transformation, LFT) は，不確かさを考慮したシステムに有効な表現形式であり，μ-解析においてよく用いられる．Figure 2.1 のような不確かさを含むプラントやこれらを複数個含むプラントは常にこの形式で表現できる．

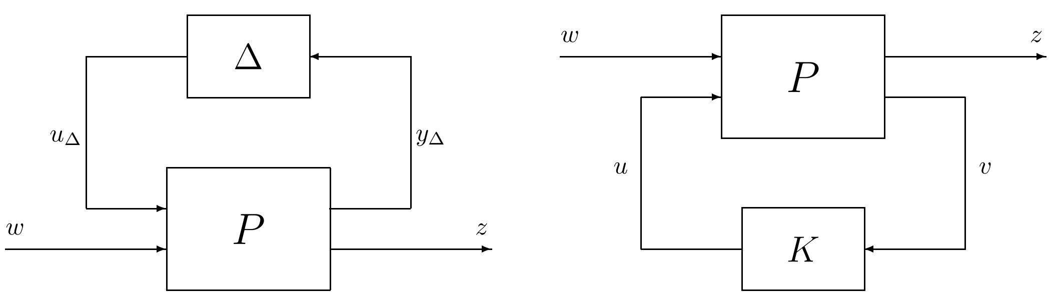
次元が $(n_1+n_2)\times(m_1+m_2)$ で分割された行列 P を考える．

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

このとき，Figure 2.2 のように $m_1\times n_1$ の行列 Δ と $m_2\times n_2$ の行列 K に対して，P と Δ，P と K を結合して w から z の伝達関数 F，N を構成する変換を LFT と呼び，(2.4)，(2.5) 式で定義される．

$$F = F_u(P,\Delta) \triangleq P_{22} + P_{21}\Delta(I-P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \tag{2.4}$$
$$N = F_l(P,K) \triangleq P_{11} + P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{2.5}$$

特に，Figure 2.2(a) の場合を上 LFT，Figure 2.2(b) の場合を下 LFT と呼ぶ．



(a) Upper LFT in terms of Δ　　(b) Lower LFT in terms of K

Figure 2.2: LFT representation

2.2 ロバスト性解析

2.2.1 構造化特異値

LFT は複数の不確かさを含むシステムを表現することができ，不確かなシステムの表現に有効であるが，LFT 表現されたシステムの解析は最大特異値では十分に行うことができない．そこで，構造的な不確かさを考慮した制御系のロバスト性解析には構造化特異値が用いられる．

Figure 2.3 のような $M\Delta$-構造について考える．まず，構造的な不確かさを表現するためにつぎのようなブロック構造 $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{C}^{n\times n}$ を定義する．重複スカラブロックとフルブロックの 2 種類のブロックがあり，非負整数 S と F はそれぞれ重複スカラブロックとフルブロックの数を表す．

$$\mathbf{\Delta} = \{\mathrm{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \ldots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \ldots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathcal{C}, \Delta_j \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}\} \tag{2.6}$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n \tag{2.7}$$

である．

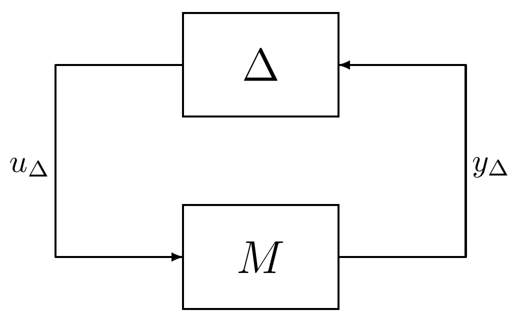


Figure 2.3: $M\Delta$-structure for robustness analysis

定義 2.1 ブロック構造 $\mathbf{\Delta}$ が与えられているとする．このとき，$M \in \mathcal{C}^{n\times n}$ に対して構造化特異値 $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$ をつぎのように定義する．

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) \triangleq \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) | \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\}} \tag{2.8}$$

ただし，$\det(I - M\Delta) = 0$ となる $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ が存在しないときは，$\mu(M) = 0$ とする．

明らかに $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$ は M だけでなくブロック構造 $\mathbf{\Delta}$ にも依存している．

ここで定義 2.1 では複素数の摂動ブロックのみを扱う複素構造化特異値を定義しており，複素数の摂動 Δ のもとでの安定性や性能の評価を行うものである．しかし，プラントのパラメータ変動による摂動などは複素数の摂動ではなく実数の摂動として表す方が自然である．複素構造化特異値は解析が容易であるが，一方で解析結果が保守的になるといった問題点がある．近年，実数と複素数の摂動を混合したブロック構造に対して実複素混合構造化特異値を計算する

アルゴリズムが発展している [23]．そこで，(2.9) 式のようにブロック構造 $\mathbf{\Delta}$ を与えて，(2.8) 式と同様に実複素混合構造化特異値を定義する．

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta} = \{\mathrm{diag}[\delta_1^r I_{r_1}, \ldots, \delta_k^r I_{r_k}, \delta_{k+1}^c I_{r_{k+1}}, \ldots, \delta_m^c I_{r_m}, \Delta_{r_{m+1}}, \ldots, \Delta_{r_l}] : \\ \delta_i^r \in \mathcal{R}, \delta_i^c \in \mathcal{C}, \Delta_{r_i} \in \mathcal{C}^{r_i \times r_i}\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2.2　構造化特異値を用いたロバスト性解析

はじめにノミナル安定 (NS)，ノミナル性能 (NP)，ロバスト安定 (RS)，ロバスト性能 (RP) の概念を以下のように定義しておく．

定義 2.2 ノミナル安定 (NS)，ノミナル性能 (NP)，ロバスト安定 (RS)，ロバスト性能 (RP) の概念を以下のように定義する．

ノミナル安定 (NS)． モデルの不確かさがないとき，システムが安定である．

ノミナル性能 (NP)． モデルの不確かさがないとき，システムが性能仕様を満足する．

ロバスト安定 (RS)． ノミナルモデルから最悪ケースの不確かさを有するモデルまで，すべての摂動を受けたプラントに対してシステムが安定である．

ロバスト性能 (RP)． ノミナルモデルから最悪ケースの不確かさを有するモデルまで，すべての摂動を受けたプラントに対してシステムが性能仕様を満足する．

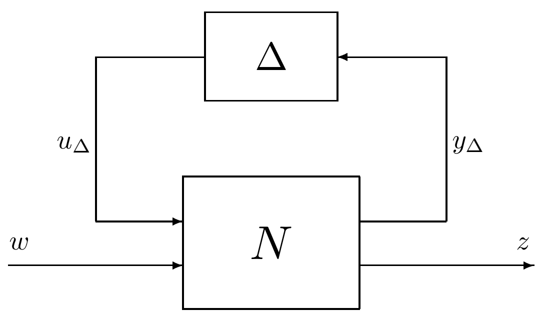


Figure 2.4: $N\Delta$-structure for robustness analysis

つぎに構造化特異値を用いたロバスト性解析について考える．まず，ロバスト性解析を行うために不確かさを構造的に表現したモデルとコントローラにより閉ループ系を構成し，Figure 2.4 のような $N\Delta$-構造を定義する．ただし，N は内部結合行列で，一般化プラント P とコントローラ K の線形分数変換 (LFT) である．

$$N = F_l(P, K) \stackrel{\triangle}{=} P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{2.10}$$

また，一般化プラント P はノミナルプラント，不確かさや性能に関する重み，ブロック線図の結合などの情報をすべて含んでいる．ここで，内部結合行列を

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

のように分割すると，不確かさを考慮した閉ループ系の w から z までの伝達関数は，つぎのように表される．

$$F = F_u(N, \Delta) \triangleq N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \tag{2.11}$$

このとき，ノミナル安定 (NS)，ノミナル性能 (NP)，ロバスト安定 (RS) およびロバスト性能 (RP) のための条件として以下の結果が得られる [21]．

定理 2.1

$$\mathrm{NS} \;\Leftrightarrow\; \text{内部結合行列}\, N \,\text{が安定} \tag{2.12}$$

$$\mathrm{NP} \;\Leftrightarrow\; \bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_P} < 1,\ \forall\omega,\ \text{かつ NS} \tag{2.13}$$

$$\mathrm{RS} \;\Leftrightarrow\; \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1,\ \forall\omega,\ \text{かつ NS} \tag{2.14}$$

$$\mathrm{RP} \;\Leftrightarrow\; \mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1,\ \forall\omega,\ \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix},\ \text{かつ NS} \tag{2.15}$$

ただし，Δ_P は性能を評価するために加えた仮想的な摂動，μ は構造化特異値である．

ここで，ロバスト性能解析について考える．Figure 2.4 の閉ループ系がロバスト性能であるということは，すべての摂動 Δ，$||\Delta||_\infty \le 1$ に対して

$$\bar{\sigma}(N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}) < 1,\ \forall\omega \in \mathcal{R} \tag{2.16}$$

が成立することである．ここで，$\Delta = 0$ のときは (2.13) 式のノミナル性能の条件となる．いま Figure 2.4 のシステムに対して，z から w への仮想的な摂動 Δ_P でループを閉じた fugure 2.5 のシステムを考える．このとき (2.15) 式のロバスト性能の条件は，Figure 2.5 のように構造的な不確かさ

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix} : ||\Delta||_\infty \le 1, ||\Delta_P||_\infty \le 1 \right\} \tag{2.17}$$

をもつシステムがロバスト安定であることと等価となる．つまりロバスト性能解析の問題はロバスト安定性解析の問題に帰着され，構造化特異値 μ によって解析することができる．

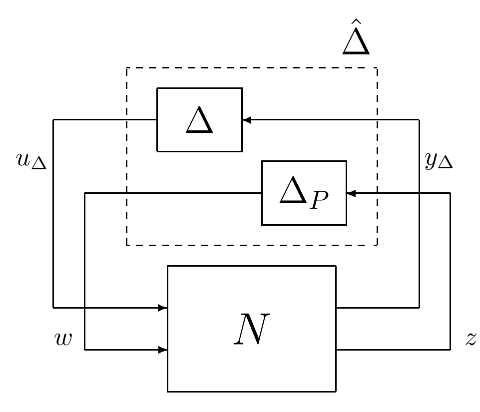


Figure 2.5: RP as aspecial case of structured RS

第3章　磁気軸受のモデリング

3.1　磁気軸受システム

本研究で制御対象とする4軸制御横軸形磁気軸受の概略図をFigure 3.1に示す．中央に誘導電動機，その両側にラジアル磁気軸受，さらにその外側にギャップセンサが取り付けられた構造となっている．

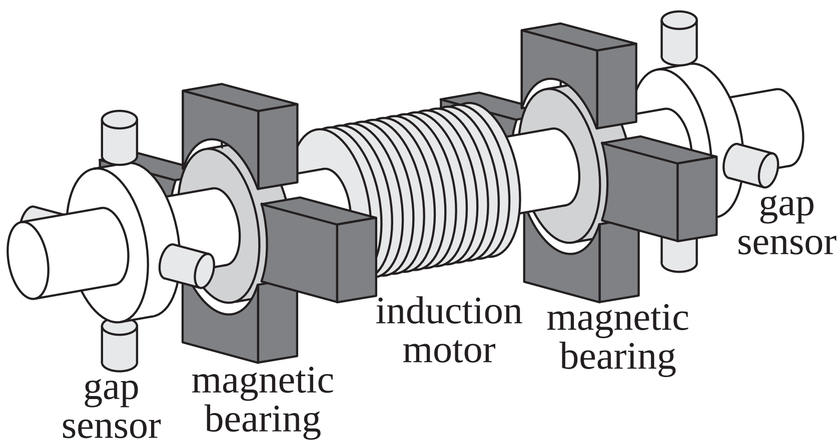


Figure 3.1: Model of magnetic bearing

3.2　磁気軸受のモデリング

本節では，制御対象である4軸制御横軸形磁気軸受の数式モデルを導出する [3, 4]．ロータはFigure 3.2に示すように電動機回転子の両端に磁気軸受があり，さらに片側には負荷質量が取り付けられて左右非対称な構造をしているとする．また，ロータは剛体であると仮定する．

3.2.1　ロータおよびステータの座標系

ステータは空間に固定しているものとし，固定子軸系 X_S，Y_S，Z_S を定める．ステータには10個の電磁石が取り付けられており，Figure 3.2のように f_{l1}，f_{r1}，$\cdots$ の力でロータを吸引する (l は左，r は右を意味する)．

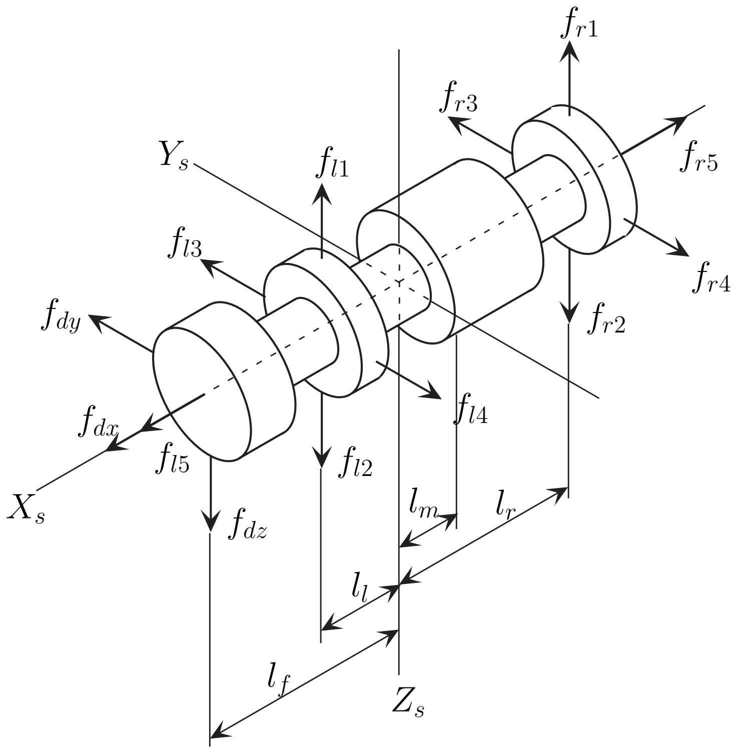


Figure 3.2: Coordinates of stator and attractive forces by electromagnets

ロータには Figure 3.3 に示すようにロータに固定した座標 X_r，Y_r，Z_r をとる．原点 O からみたロータの重心 G の座標を (x_s, y_s, z_s)，X_r，Y_r，Z_r 軸方向の速度成分を u，v，w とする．またロータの各軸回りの各速度を p，q，r とする．電動機ステータおよび電磁石がロータに及ぼす各軸方向の外力を X，Y，Z，外力が重心回りに作るモーメントの成分を L，M，N とする．

3.2.2　ロータとステータの座標系の関係

ロータの座標系とステータの座標系には Figure 3.4 のような関係がある．ロータの重心 G は (x_s, y_s, z_s) だけ原点よりずれた位置にあり，かつ X_r 軸は，X_s 軸が水平面内で角度 ψ 回転し，鉛直面内で角度 θ 回転した位置にあるとする．そして，電動機の回転により X_r 軸回りに回転角 ϕ を生じ，それにつれて Y_r 軸，Z_r 軸が回転する．ここで，磁気軸受によってある程度有効に制御が行われた場合，ψ, θ は微小角であると考えることができ，次の関係が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \dot{z}_s \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

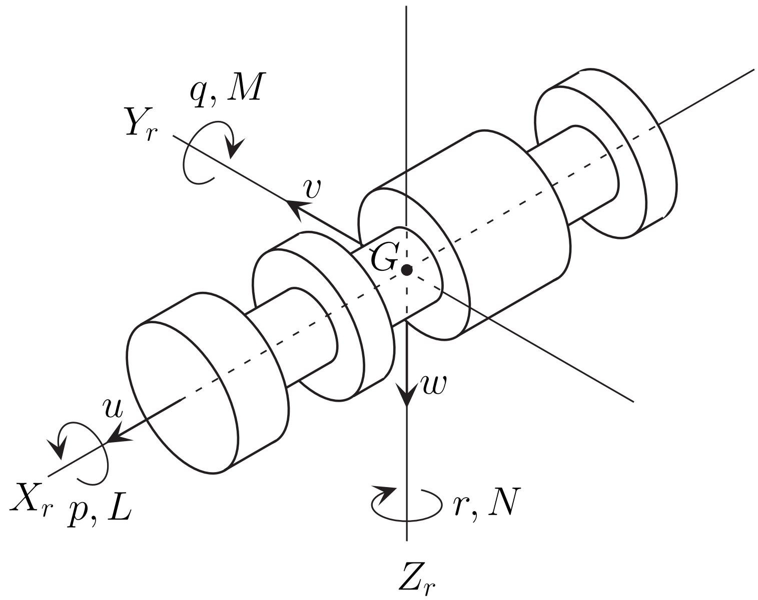


Figure 3.3: Coordinates of rotor

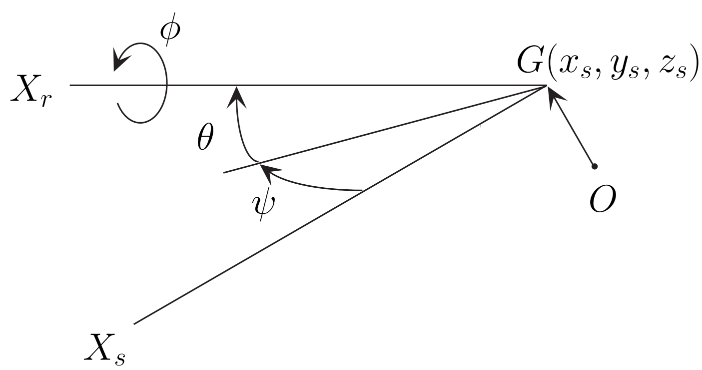


Figure 3.4: Relation between coordinates of stator and rotor

3.2.3 運動方程式

ロータは剛体であり，かつ回転軸 X_r に対して回転対称であるとすると，3 次元空間におけるロータの運動に対して以下の (3.3)–(3.8) 式が成り立つ．

$$m(\dot{u} + qw - rv) = X \tag{3.3}$$

$$m(\dot{v} + ru - pw) = Y \tag{3.4}$$

$$m(\dot{w} + pv - qu) = Z \tag{3.5}$$

$$J_x\dot{p} = L \tag{3.6}$$

$$J_y\dot{q} + (J_x - J_y)rp = M \tag{3.7}$$

$$J_y\dot{r} + (J_x - J_y)pq = N \tag{3.8}$$

ここで，

m :　ロータの全質量
J_x :　X_r 軸回りの慣性モーメント
J_y :　Y_r 軸回りの慣性モーメント (Z_r 軸回りの慣性モーメントと等しい)

ロータには以下の力，トルクが作用する．

- X_s 軸に作用する力
  $f_{l5} - f_{r5} + f_{dx} - \beta x_s$
- Y_s 軸に作用する力
  $f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} + f_{dy} + \alpha(y_s - l_m\psi)$
- Z_s 軸に作用する力
  $f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + f_{dz} + \alpha(z_s + l_m\theta) + mg$
- X_s 軸に作用するトルク
  $T_m - T_0 - \rho p$
- Y_s 軸に作用するトルク
  $(f_{l1} - f_{l2})l_l - (f_{r1} - f_{r2})l_r - f_{dz}l_f + \alpha(z_s + l_m\theta)lm$
- Z_s 軸に作用するトルク
  $(f_{l3} - f_{l4})l_l - (f_{r3} - f_{r4})l_r + f_{dy}l_f - \alpha(y_s - l_m\psi)lm$

ここで，
α :　電動機ロータが半径方向に偏心したときの不平衡吸引力の係数 (> 0)
β :　電動機ロータが軸方向に偏心したときの復元力の係数 (> 0)
T_m :　電動機トルク
T_0 :　クーロン摩擦
ρ :　制動摩擦トルクの係数

(3.1)，(3.2) 式と同様にして，力 X，Y，Z，トルク L，M，N は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{l5} - f_{r5} + f_{dx} - \beta x_s \\ f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} + f_{dy} + \alpha(y_s - l_m\psi) \\ f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + f_{dz} + \alpha(z_s + l_m\theta) + mg \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m - T_0 - \rho p \\ (f_{l1} - f_{l2})l_l - (f_{r1} - f_{r2})l_r - f_{dz}l_f + \alpha(z_s + l_m\theta)lm \\ (f_{l3} - f_{l4})l_l - (f_{r3} - f_{r4})l_r + f_{dy}l_f - \alpha(y_s - l_m\psi)lm \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

つぎに平衡状態における吸引電磁石とロータの間のギャップを W とする．平衡状態から重心が (x_s, y_s, z_s) にずれ，電動機ロータの軸が θ，ψ だけ傾いたとき，ギャップ g_{l1}，g_{r1}，$\cdots$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned} &g_{l1} = W + z_s - l_l\theta,\quad g_{r1} = W + z_s + l_r\theta,\quad g_{l2} = W - z_s + l_l\theta, \\ &g_{r2} = W - z_s - l_r\theta,\quad g_{l3} = W - y_s - l_l\psi,\quad g_{r3} = W - y_s + l_r\psi, \\ &g_{l4} = W + y_s + l_l\psi,\quad g_{r4} = W + y_s - l_r\psi \end{aligned} \tag{3.11}$$

また，理想的な運転状態 (平衡状態) においては各変数値はつぎのようになる．

$$
\begin{aligned}
&X = Y = Z = 0,\quad L = M = N = 0,\quad x_s = y_s = z_s = 0,\quad u = v = w = 0,\\
&p = \frac{T_m - T_0}{\rho},\quad q = r = 0,\quad \theta = \psi = 0,\quad \phi = pt,\quad g_{l1} = g_{r1} = \cdots = W,\\
&f_{l1} - f_{l2} = \frac{l_r}{l_l + l_r} mg,\quad f_{r1} - f_{r2} = \frac{l_l}{l_l + l_r} mg,\quad f_{l3} = f_{l4},\quad f_{r3} = f_{r4}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

(3.3)–(3.8) 式は非線形の式であるが，平衡点近傍においては $\phi = pt$，$p = (T_m - T_0)/\rho$ となる以外は，u，v，w，q，r，θ，ψ などは微小量であると考えることができるので，このことを用いて線形化を行う．その結果，平衡点近傍における運動方程式は以下のようになる．

$$m\dot{u} = X \tag{3.13}$$

$$m(\dot{v} - pw) = Y \tag{3.14}$$

$$m(\dot{w} + pv) = Z \tag{3.15}$$

$$J_x \dot{p} = L \tag{3.16}$$

$$J_y \dot{q} + (J_x - J_y) rp = M \tag{3.17}$$

$$J_y \dot{r} + (J_x - J_y) pq = N \tag{3.18}$$

(3.13) 式は (3.1)，(3.9) 式より

$$m\ddot{x}_s + \beta x_s = f_{l5} - f_{r5} + f_{dx} \tag{3.19}$$

となるので，x_s については独立して考えることができる．同様に (3.16) 式は，(3.2)，(3.10) 式より

$$J_x \dot{p} + \rho p = T_m - T_0 \tag{3.20}$$

となるので，電動機角速度についてもまた独立して考えることができる．したがって，以下では $x_s = 0$，$u = 0$，$p =$ 一定であるとする．

(3.1)，(3.9)，(3.14)，(3.15) 式から v，w，Y，Z，ϕ などを消去し，また (3.2)，(3.10)，(3.17)，(3.18) 式から q，r，M，N，ϕ などを消去して重心の動きに関する式および回転軸の揺れに関する式を導くことができる．

$$
\begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{z}_s \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{m} \begin{bmatrix} y_s \\ z_s \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_{l3} - f_{l4} - f_{r3} - f_{r4} \\ f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + mg \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix} + \frac{\alpha l_m}{m} \begin{bmatrix} -\psi \\ \theta \end{bmatrix} \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \frac{pJ_x}{J_y} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \frac{1}{J_y} \begin{bmatrix} (f_{l1} - f_{l2}) l_l - (f_{r1} - f_{r2}) l_r \\ (f_{l3} - f_{l4}) l_l - (f_{r3} - f_{r4}) l_r \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{l_f - l_m}{J_y} \begin{bmatrix} -f_{dz} \\ f_{dy} \end{bmatrix} + \frac{\alpha l_m}{J_y} \begin{bmatrix} z_s \\ -y_s \end{bmatrix} + \frac{\alpha {l_m}^2}{J_y} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

(3.21)，(3.22) 式をまとめて (3.23)，(3.24) 式を得る．

$$
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{f} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{f}_d \tag{3.23}
$$

$$
\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \tag{3.24}
$$

ここで，

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} y_s \\ z_s \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \dot{\boldsymbol{x_1}}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{l1} - f_{l2} - \frac{l_r}{l_l+l_r}mg \\ f_{r1} - f_{r2} - \frac{l_l}{l_l+l_r}mg \\ f_{l3} - f_{l4} \\ f_{r3} - f_{r4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_d = \begin{bmatrix} f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_{l1} - W \\ g_{r1} - W \\ g_{l3} - W \\ g_{r3} - W \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha/m & 0 & 0 & -\alpha l_m/m \\ 0 & \alpha/m & \alpha l_m/m & 0 \\ 0 & \alpha l_m/J_y & \alpha {l_m}^2/J_y & 0 \\ -\alpha l_m/J_y & 0 & 0 & \alpha {l_m}^2/J_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pJ_x/J_y \\ 0 & 0 & pJ_x/J_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/m & 1/m \\ -1/m & -1/m & 0 & 0 \\ l_l/J_y & l_r/J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_l/J_y & l_r/J_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \\ 0 & -(l_f - l_m)/J_y \\ (l_f - l_m)/J_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l_l & 0 \\ 0 & 1 & l_r & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -l_l \\ -1 & 0 & 0 & l_r \end{bmatrix}$$

3.2.4 電磁石の電圧，電流と力の関係

電磁石コイルの電圧を制御入力とするため，電磁石部について定式化を行う．まず電磁石について以下の仮定をおく．

1. 電磁石の吸引力は，(コイル電流 / ギャップの長さ)^2 に比例する．
2. 8 個の電磁石はすべて等しい．
3. 電圧，電流の関係の式では速度起電力は小さいとして無視する．
4. 平衡点付近における微小変化を取り扱う．

これらの仮定よりインダクタンス L を一定とし，抵抗を R とすると

$$e_j = L\frac{di_j}{dt} + Ri_j \tag{3.25}$$

ただし，

$j = l1, l2, l3, l4, r1, r2, r3, r4$ (以下同様)

また， 仮定 1 より電流，ギャップ，吸引力の間には次の関係があるとする．

$$f_j = k\left(\frac{i_j}{g_j}\right)^2 \tag{3.26}$$

ただし，

k: 比例定数

ここで，平衡点近傍での微小変化を考えるため，電流，ギャップ，吸引力の定常値 I_j，W，F_j を用いて

$$i_j = I_j + i'_j \tag{3.27}$$
$$g_j = W + g'_j \tag{3.28}$$
$$f_j = F_j + f'_j \tag{3.29}$$

とおくと，(3.26) 式は次式のように線形化される．

$$f'_j = 2F_j \left(\frac{i'_j}{I_j} - \frac{g'_j}{W} \right) \tag{3.30}$$

一方，コイル電圧の変化分を

$$e'_{l2} = -e'_{l1},\quad e'_{r2} = -e'_{r1},\quad e'_{l4} = -e'_{l3},\quad e'_{r4} = -e'_{r3}$$

のように与えることにすると，コイル電流の変化分も同様に

$$i'_{l2} = -i'_{l1},\quad i'_{r2} = -i'_{r1},\quad i'_{l4} = -i'_{l3},\quad i'_{r4} = -i'_{r3}$$

の関係がある．また，(3.25) 式の変化分についての式を行列形式で書く．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{i} = -\frac{R}{L}\boldsymbol{I}\boldsymbol{i} + \frac{1}{L}\boldsymbol{I}\boldsymbol{e} \tag{3.31}$$

ここで，

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i'_{l1} & i'_{r1} & i'_{l3} & i'_{r3} \end{bmatrix}^T,\quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e'_{l1} & e'_{r1} & e'_{l3} & e'_{r3} \end{bmatrix}^T$$

次に (3.11)，(3.12)，(3.29)，(3.30) 式から力について次の式を得る．

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{i} \tag{3.32}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{W}(F_{l1}+F_{l2}) & \frac{2l_l}{W}(F_{l1}+F_{l2}) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{W}(F_{r1}+F_{r2}) & -\frac{2l_r}{W}(F_{r1}+F_{r2}) & 0 \\ \frac{2}{W}(F_{l3}+F_{l4}) & 0 & 0 & \frac{2l_l}{W}(F_{l3}+F_{l4}) \\ \frac{2}{W}(F_{r3}+F_{r4}) & 0 & 0 & -\frac{2l_r}{W}(F_{r3}+F_{r4}) \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{C}_3 &= 2\mathrm{diag}\left[\left(\frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}} \right), \left(\frac{F_{r1}}{I_{r1}} + \frac{F_{r2}}{I_{r2}} \right), \left(\frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}} \right), \left(\frac{F_{r3}}{I_{r3}} + \frac{F_{r4}}{I_{r4}} \right) \right]
\end{aligned}$$

3.2.5　状態方程式

(3.32) 式を (3.23) 式に代入し，$\boldsymbol{f}$ を消去すると次式となる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{f}_d \tag{3.33}$$

さらに (3.33) 式と (3.31) 式をまとめて書くと次の状態方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{z}} \\ \dot{\boldsymbol{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{R}{L}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{L}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{e} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{f}_d \tag{3.34}$$

また，出力 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}$ とすると出力方程式が得られる．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

上式では，重心の座標 y_s，z_s，回転軸の傾き θ，ψ が状態変数となっている．しかし，ギャップセンサ，電磁石の配置の点から考えると電磁石ギャップ部でのロータの変位を状態変数としたほうがわかりやすく，検出，制御上の精度も高いと考えられる．そこで，ギャップ $\boldsymbol{g}$ をもとに状態変数を $\begin{bmatrix} \boldsymbol{g} & \dot{\boldsymbol{g}} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}$ とすると (3.11) 式の関係から状態方程式，出力方程式は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{g}} \\ \ddot{\boldsymbol{g}} \\ \dot{\boldsymbol{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}_1\left(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\right)\boldsymbol{C}_3^{-1} & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_3^{-1} & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{R}{L}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \dot{\boldsymbol{g}} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{L}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{e} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{f}_d \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \dot{\boldsymbol{g}} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

以上で，磁気軸受のラジアル方向の状態方程式，出力方程式が得られた．これは，外乱 d_y，d_z を考えない場合は 4 入力，4 出力系であり，状態変数の数は 12 である．$\alpha = 0$ の場合についてブロック線図を描くと Figure 3.5 のようになる．

図は，上から順に，ロータの鉛直方向 (左側，右側)，ロータの水平方向 (左側，右側) の運動に対応しており，1 入出力のつり下げ型磁気浮上系を 4 個並べた形に描ける．しかし，図中の ⓐ を介して鉛直方向の運動と水平方向の運動が干渉し (ジャイロ効果)，ⓑ を介して右側の運動と左側の運動が干渉している．干渉の度合はロータの質量や形状，回転速度によって異なるが，鉛直方向と水平方向の干渉は，特に回転速度 p に比例して大きくなり，$p = 0$ のとき干渉はなくなる．

この性質を利用して，$p = 0$ のとき，鉛直方向に関するシステムと水平方向に関するシステムの並列システムとして取り扱えるように状態変数を並べ換えておく．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_v \\ \dot{\boldsymbol{x}}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_v & p\boldsymbol{A}_{vh} \\ -p\boldsymbol{A}_{vh} & \boldsymbol{A}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_v \\ \boldsymbol{x}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_v \\ \boldsymbol{u}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{fv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{fh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{dz} \\ f_{dy} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_v \\ \boldsymbol{y}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_v \\ \boldsymbol{x}_h \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_v{}^T & \dot{\boldsymbol{g}}_v{}^T & \boldsymbol{i}_v{}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g'_{l1} & g'_{r1} & \dot{g}'_{l1} & \dot{g}'_{r1} & i'_{l1} & i'_{r1} \end{bmatrix}^T, \\
&\boldsymbol{x}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_h{}^T & \dot{\boldsymbol{g}}_h{}^T & \boldsymbol{i}_h{}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g'_{l3} & g'_{r3} & \dot{g}'_{l3} & \dot{g}'_{r3} & i'_{l3} & i'_{r3} \end{bmatrix}^T, \\
&\boldsymbol{u}_v = \begin{bmatrix} e'_{l1} & e'_{r1} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{u}_h = \begin{bmatrix} e'_{l3} & e'_{r3} \end{bmatrix}^T, \\
&\boldsymbol{A}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_{4v} & 0 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_{5v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(R/L)\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_{4h} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_{5h} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(R/L)\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{A}_{vh} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_v = \boldsymbol{B}_h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ (1/L)\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{fv} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{f1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{fh} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{f1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{C}_v = \boldsymbol{C}_h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{A}_1 = \frac{\alpha}{l_l + l_r} \begin{bmatrix} (l_r - l_m)\left(\frac{1}{m} - \frac{l_l l_m}{J_y}\right) & (l_l - l_m)\left(\frac{1}{m} - \frac{l_l l_m}{J_y}\right) \\ (l_r - l_m)\left(\frac{1}{m} + \frac{l_r l_m}{J_y}\right) & (l_l - l_m)\left(\frac{1}{m} + \frac{l_r l_m}{J_y}\right) \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} - \frac{l_l^2}{J_y} & -\frac{1}{m} + \frac{l_l l_r}{J_y} \\ -\frac{1}{m} + \frac{l_l l_r}{J_y} & -\frac{1}{m} - \frac{l_r^2}{J_y} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \frac{J_x}{J_y(l_l + l_r)} \begin{bmatrix} -l_l & l_l \\ l_r & -l_r \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{A}_{4v} = -\frac{2}{W}\mathrm{diag}\left[F_{l1} + F_{l2}, F_{r1} + F_{r2}\right], \quad \boldsymbol{A}_{4h} = -\frac{2}{W}\mathrm{diag}\left[F_{l3} + F_{l4}, F_{r3} + F_{r4}\right], \\
&\boldsymbol{A}_{5v} = 2\mathrm{diag}\left[\frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}}, \frac{F_{r1}}{I_{r1}} + \frac{F_{r2}}{I_{r2}}\right], \quad \boldsymbol{A}_{5h} = 2\mathrm{diag}\left[\frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}}, \frac{F_{r3}}{I_{r3}} + \frac{F_{r4}}{I_{r4}}\right], \\
&\boldsymbol{B}_{f1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{l_l l_f}{J_y} \\ \frac{1}{m} - \frac{l_r l_f}{J_y} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

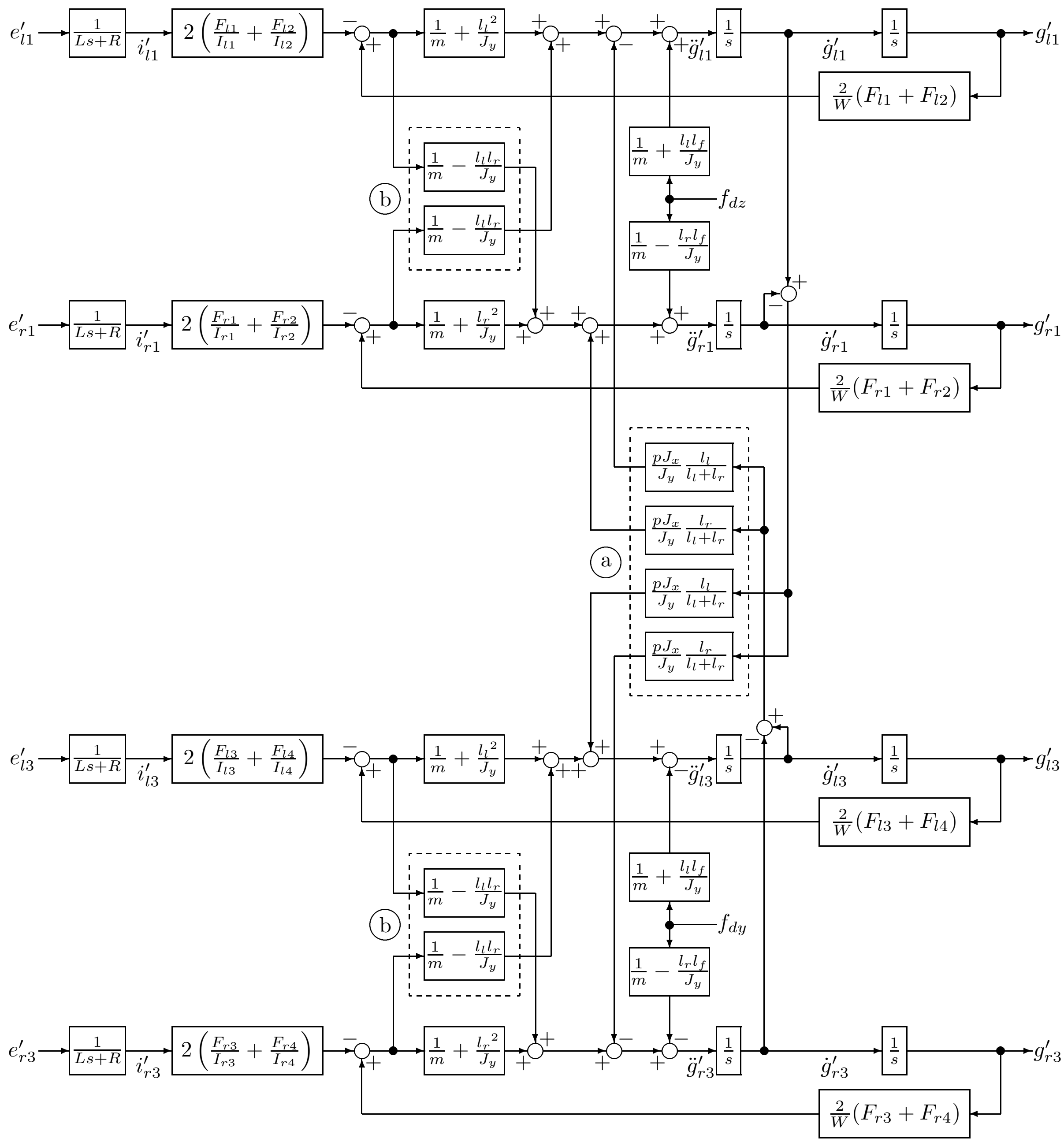


Figure 3.5: Block diagram of magnetic bearing

第 4 章　磁気軸受における不確かさ

4.1　磁気軸受における不確かさ

一般に，システムを制御する際には，対象となるシステムの数式モデルを作成し，これを用いて制御系を設計する．しかし，実システムを数式モデルとして表現するには何らかの仮定や理想化が必要で，数式モデルが実システムを忠実に表現することは難しい．

第 3 章で導出した磁気軸受の数式モデルについても同様に仮定や理想化を行って導かれたものであり，実在する磁気軸受と数式モデルの間の誤差が，磁気軸受の数式モデルに存在する不確かさとなる．不確かさの原因として考えられるものを以下に示す．

1. パラメータの誤差
   数式モデル中のパラメータは，実験や測定などによりその値を決定することになる．しかし，実際には測定するごとにその値はばらつくことになり，測定誤差を避けることは困難である．
2. モデル化されなかったダイナミクス
   電磁石部における複雑なダイナミクスやうず電流の影響が考えられる．また，浮上対象であるロータは，本来弾性体であって高次の振動モードをもっている．
3. 無視した非線形性
   数式モデルを導出する際には線形化を施したが，特に電磁石吸引力の強い非線形性が考えられる．
4. 制御装置の実装に伴う不確かさ
   センサノイズの影響やセンサフィルタの周波数特性，パワーアンプの特性，駆動電源の飽和がある．さらに制御装置の演算時間遅れなども考えられる．

4.2　ノミナルプラント

第 3 章で導出した数式モデル (3.38)，(3.39) 式より，磁気軸受のダイナミクスはロータの回転速度によって変化する．これは，(3.38) 式のジャイロ効果と呼ばれる干渉項によるものであり，$p = 0$ のとき鉛直方向の運動と水平方向の運動は干渉がなく独立している．そこで，ロータが停止しているときに系を安定化させるコントローラを設計するため，$p = 0$ のときをノミナルプラント G とし，G は二つのプラント G_v，G_h からなるとする．

$$G = \begin{bmatrix} G_v & 0 \\ 0 & G_h \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ここで，

　G_v :　水平方向の運動に対応したプラント $(= \boldsymbol{C}_v(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_v)^{-1}\boldsymbol{B}_v)$
　G_h :　鉛直方向の運動に対応したプラント $(= \boldsymbol{C}_h(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)^{-1}\boldsymbol{B}_h)$

Table 4.1: Physical parameters

Parameter	Value
Mass of the Rotor: m	13.9 kg
Moment of Inertia about: X	0.01348 kg·m^2
Moment of Inertia about: Y	0.2326 kg·m^2
Distance between Center of Mass and Left Electromagnet: l_l	0.13 m
Distance between Center of Mass and Right Electromagnet: l_r	0.13 m
Distance between Center of Mass and Motor: l_m	0 m
Steady Attractive Force: $F_{l1,r1}$	90.9 N
Steady Attractive Force: $F_{l2,l3,l4,r2,r3,r4}$	22.0 N
Steady Current: $I_{l1,r1}$	0.63 A
Steady Current: $I_{l2,l3,l4,r2,r3,r4}$	0.31 A
Steady Gap: W	550 μm
Resistance: R	10.7 Ω
Inductance: L	0.285 H

また，制御対象である磁気軸受の各物理パラメータを Table 4.1 のように設定する [7]．このときのノミナルプラントの特異値軌跡を Figure 4.1 に示す．本稿で使用するパラメータでは磁気軸受は左右対象の構造となっているので，$l_l = l_r = l_f = l$ とおけば Figure 3.5 のブロック線図は Figure 4.2 のように簡略化することができる．

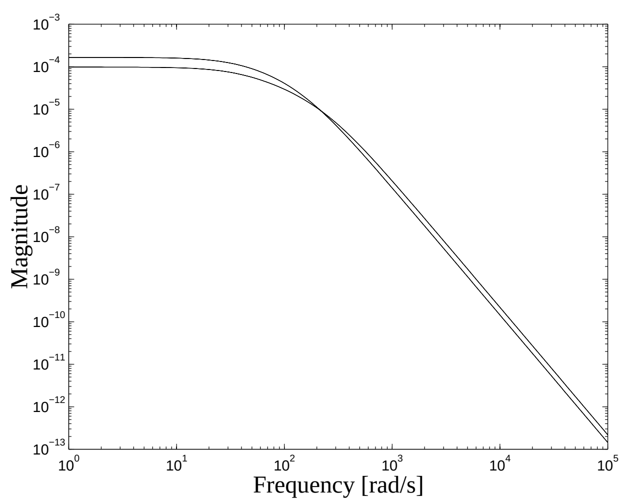


Figure 4.1: Singular value plot of nominal plant G

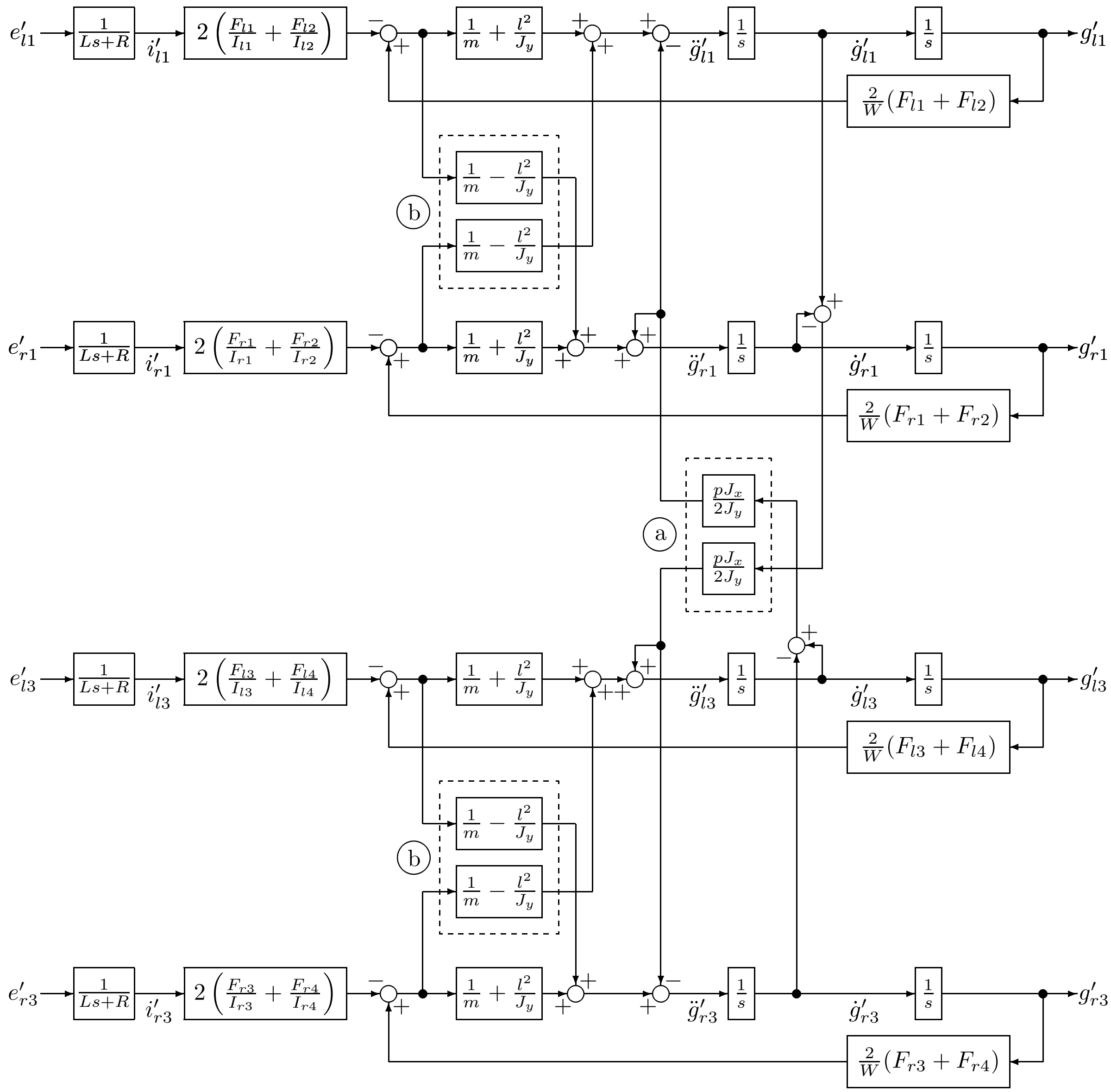


Figure 4.2: Block diagram of magnetic bearing

4.3　非構造的な不確かさの記述

ノミナルプラント G に対して，回転速度 $p \neq 0$ のときのプラントを摂動を受けたプラント G_p とし，Figure 4.3 のようにこれを乗法的な摂動 Δ_p を用いて表現する．

$$G_p = (I + \Delta_p)G \tag{4.2}$$

ここで，

Δ_p :　回転速度によって変動する乗法的な摂動

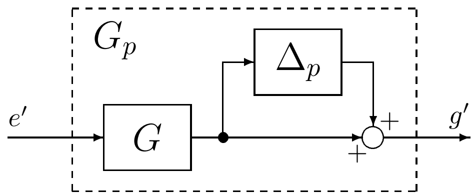


Figure 4.3: Nominal plant with multplicative perturbation Δ_p

Figure 4.4 に回転数が，$p = 5000$，10000rpm のときの Δ_p の特異値軌跡を示す．ここでは，回転速度の変化に伴うダイナミクスの変動を不確かさと捉えたが 1 入出力のつり下げ形磁気浮上系において磁気浮上系に存在する様々な不確かさが議論されている [9, 10]．これらの結果を参考にして乗法的な不確かさに関する重み W_T を (4.3) 式のように定める [7]．W_T はすべての周波数域で乗法的な摂動 Δ_p の最大特異値 $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ よりも大きくなるようにする．

$$W_T = \left(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 19}\right)\left(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 500}\right)\left(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 1500}\right)\begin{bmatrix} 0.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

4.4　構造的な不確かさの記述

4.1 節で述べたように制御系設計のための数式モデルに不確かさが存在することは避けられない．4.3 節では実システムと数式モデルの間のギャップを乗法的な不確かさを用いて非構造的な不確かさとして表現した．非構造的な不確かさの表現は数学的な解析が容易であるが，一方で不確かさの記述が保守的であるため得られる解析結果も保守的となる．

そこで本節では，4.3 節で出力側の乗法的な不確かさとしてひとまとめにして捉えた不確かさがどのような構造をもっているのかを考え，構造的な不確かさとして取り扱う．本稿では，以下の 3 種類の不確かさについて検討する．

1. パラメータの不確かさ
2. モデル化されなかったダイナミクス
3. 無視した非線形性

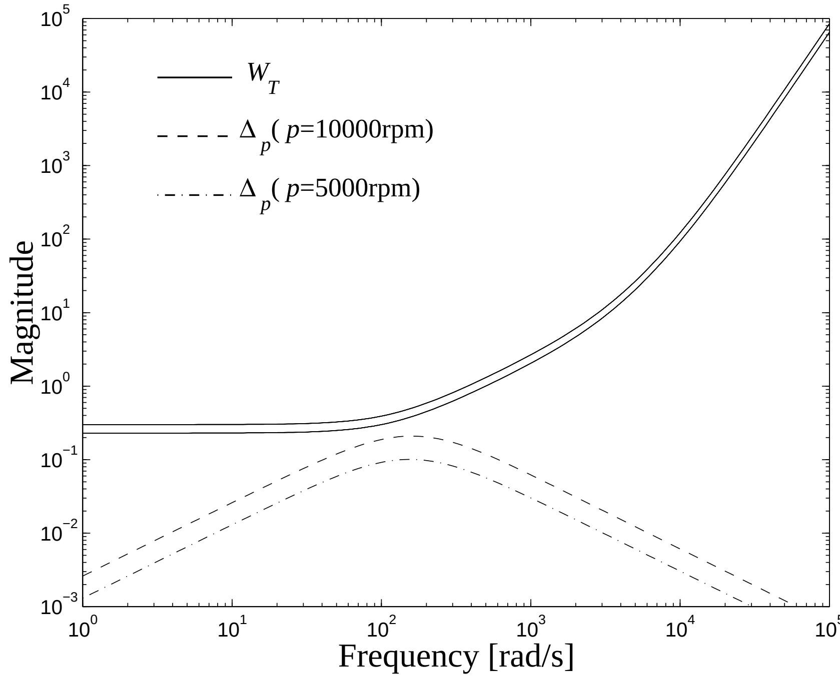


Figure 4.4: Singular value plot of the weighting function W_T, the perturbation Δ_p

4.4.1 パラメータの不確かさ

磁気軸受のモデルは，多くのパラメータから構成されている．しかし，それらのパラメータの値は種々の要因によって変動することが予想される．そこで，この変動をパラメータの不確かさとして取り扱う．ここでは，ロータに負荷質量が取り付けられた場合に質量 m と慣性モーメント J_x, J_y が変動するものとする．ところで，ロータの質量 m，慣性モーメント J_x, J_y，およびロータの重心から磁気軸受までの距離 l などはそれぞれが独立して変動するものではなく，質量の変動に伴って慣性モーメントが変動するといったように相関関係があるものである．そこで

$$\frac{1}{M_1} = \frac{1}{m} + \frac{l^2}{J_y} \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{M_2} = \frac{1}{m} + \frac{l^2}{J_y} \tag{4.5}$$

$$\tag{4.6}$$

とおき，M_1，M_2 が変動するものとする．また，ジャイロ効果の影響についても

$$J_p = \frac{pJ_x}{2J_y} \tag{4.7}$$

とおき，回転速度の変動に伴って J_p が変動するものとする．これらの不確かさを以下のように記述する．

$$M_1 = M_{10} + k_{m1}\delta_m \tag{4.8}$$

$$M_2 = M_{20} + k_{m2}\delta_m \tag{4.9}$$

$$J_p = J_{p0} + k_p\delta_p \tag{4.10}$$

ここで，

M_{10}, M_{20}, J_{p0} :　公称値

k_{m1}, k_{m2}, k_p :　不確かさの大きさを表す重み

δ_m, δ_p :　加法的な摂動 ($\delta_m, \delta_p \in [-1, 1]$)

4.4.2　モデル化されないダイナミクス

モデル化されなかったダイナミクスとして電磁石のダイナミクスを考える．電磁石電圧から電磁石電流までの伝達関数は $\frac{1}{Ls+R}$ となるが，このような式でダイナミクスが表されるためには，磁気飽和，ヒステリシスはない，漏れ磁束，うず電流の影響などはないといった仮定がおかれている．実際の電磁石の特性は非常に複雑であり，$\frac{1}{Ls+R}$ の周波数応答は Figure 4.5 のように公称値の周波数応答を中心として帯状に分布すると予想される [10]．そこでその帯の幅をモデル化されないダイナミクスとして以下のように表現する．

$$\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{L_0 s + R_0} + w_{e_j}(s)\delta_{e_j}(s);\ |\delta(j\omega)| \le 1\ \forall\omega \tag{4.11}$$

ここで，

L_0, R_0 :　公称値

$w_{e_j}(s)$:　重み関数 ($j = l1, r1, l3, r3$，以下同様)

$\delta_{e_j}(s)$:　加法的な摂動

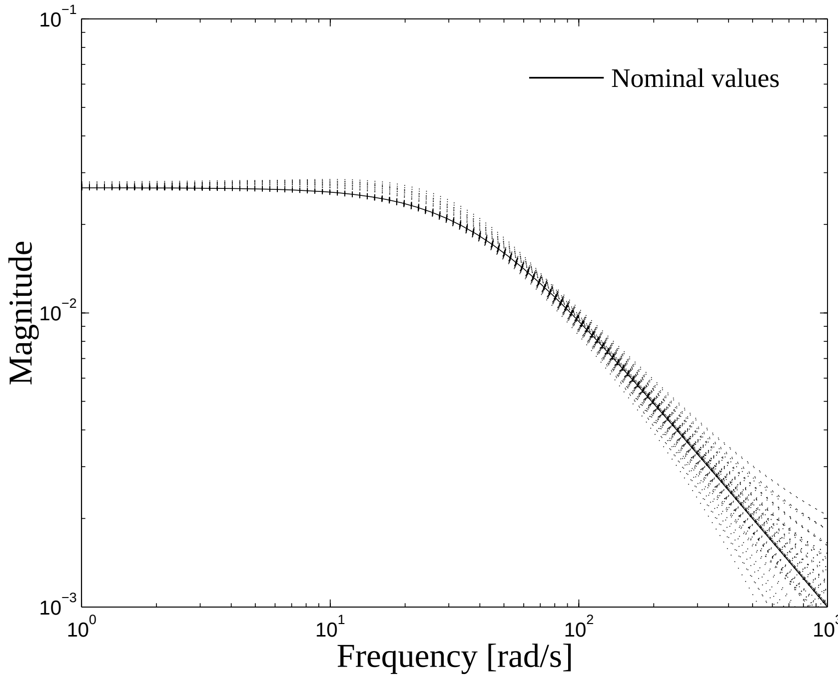


Figure 4.5: Frequency response of transferfunction $\frac{1}{Ls+R}$

4.4.3 線形化による不確かさ

数式モデルと実システムの間には線形化を行ったことによる線形化誤差が存在している．特に電磁石吸引力は強い非線形性を有しており，これを平衡点近傍で線形化したことによる線形化誤差について考える．

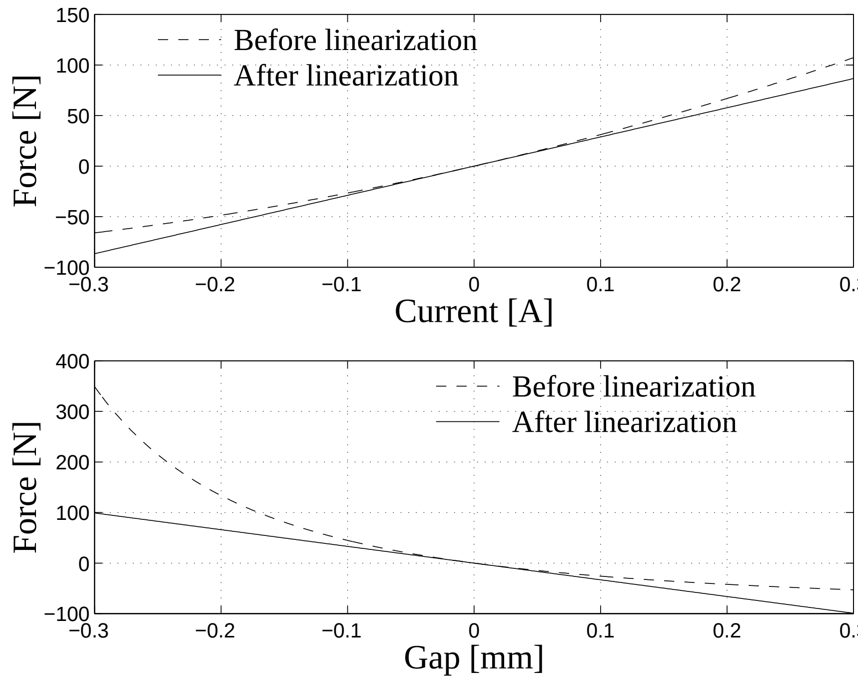


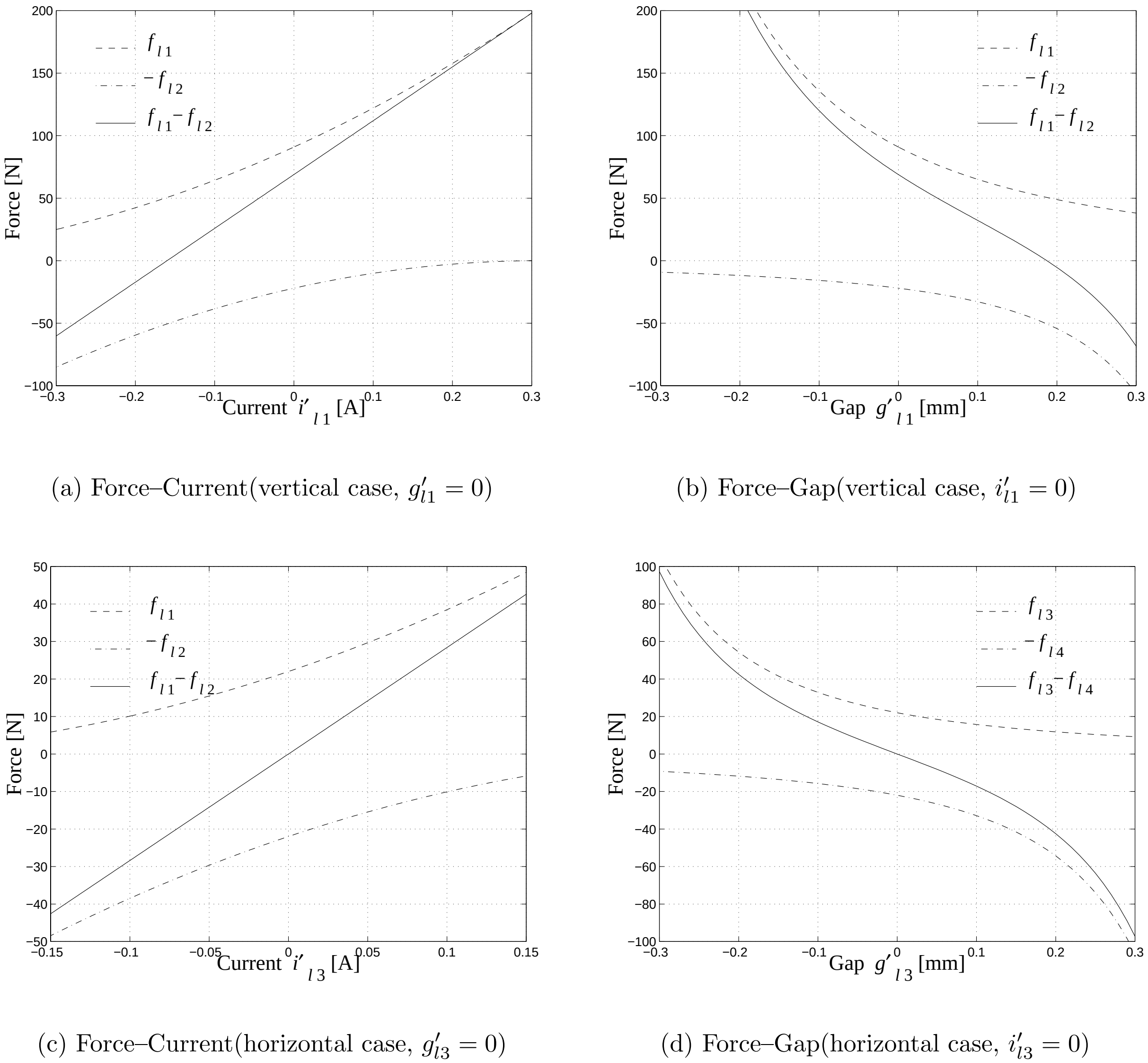
Figure 4.6: Characteristics of electromagnetic attractive force

線形化することにより電磁石吸引力の特性は Figure 4.6 のようになる．しかし，実際には電磁石吸引力は上下，左右の電磁石吸引力の差として入力されることになるので Figure 4.7 に示されている $f_{l1} - f_{l2}$，$f_{l3} - f_{l4}$ を平衡点近傍で線形化することになる．ここで，(3.30) 式より

$$
\begin{aligned}
f'_{l1} - f'_{l2} &= 2F_{l1}\left(\frac{i'_{l1}}{I_{l1}} - \frac{g'_{l1}}{W}\right) - 2F_{l2}\left(\frac{i'_{l2}}{I_{l2}} - \frac{g'_{l2}}{W}\right) \\
&= 2\left(\frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}}\right) i'_{l1} - \frac{2}{W}\left(F_{l1} + F_{l2}\right) g'_{l1} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_{l3} - f'_{l4} &= 2F_{l3}\left(\frac{i'_{l3}}{I_{l3}} - \frac{g'_{l3}}{W}\right) - 2F_{l4}\left(\frac{i'_{l4}}{I_{l4}} - \frac{g'_{l4}}{W}\right) \\
&= 2\left(\frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}}\right) i'_{l3} - \frac{2}{W}\left(F_{l3} + F_{l4}\right) g'_{l3} \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$i'_{l2} = -i'_{l1}$，$g'_{l2} = -g'_{l1}$，$i'_{l4} = -i'_{l3}$，$g'_{l4} = -g'_{l3}$ の関係を用いた．上式の第 1 項，第 2 項はまさにブロック線図に現れる形であり，Figure 4.8 に示されている接線の傾きである． Figure 4.8(a)，4.8(c) については $f'_{l1} - f'_{l2}$，$f'_{l3} - f'_{l4}$ のように差をとることで線形化前の特性が直線に近くなるので，線形化後の特性 (破線) と重なっている．これまでの議論はロータの左側の鉛直方向 ($l1$，$l2$)，水平方向 ($l3$，$l4$) について行ってきたが，ロータの右側 ($r1$，$r2$，$r3$，$r4$) についても同様のことがいえる．



(a) Force–Current(vertical case, $g'_{l1} = 0$)

(b) Force–Gap(vertical case, $i'_{l1} = 0$)

(c) Force–Current(horizontal case, $g'_{l3} = 0$)

(d) Force–Gap(horizontal case, $i'_{l3} = 0$)

Figure 4.7: Characteristics of electromagnetic attractive force

ここで，Figure 4.8 に示した傾きを

$$K_{i_{l1}} = 2\left(\frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}}\right) \tag{4.14}$$

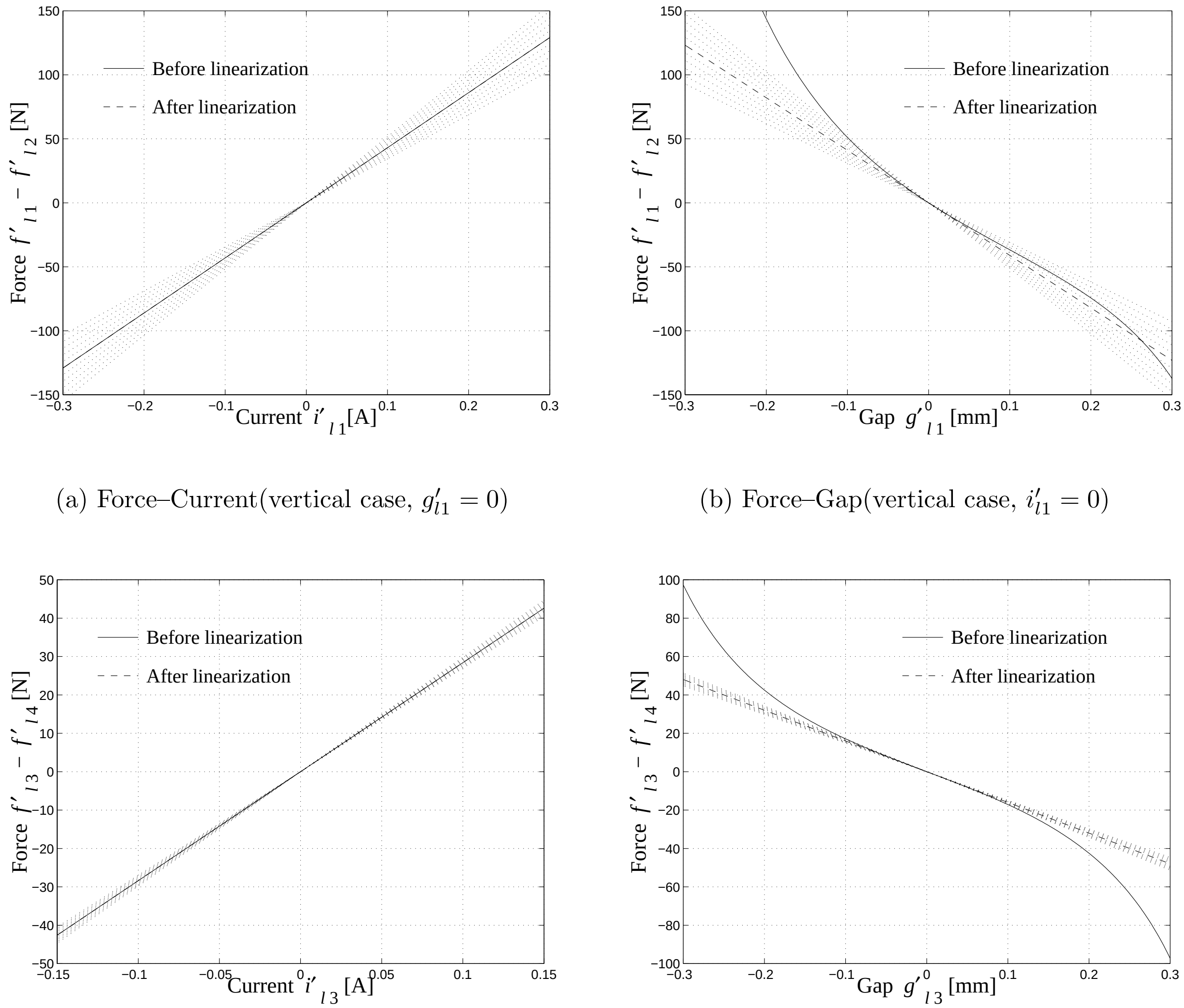
$$K_{i_{r1}} = 2\left(\frac{F_{r1}}{I_{r1}} + \frac{F_{r2}}{I_{r2}}\right) \tag{4.15}$$

$$K_{i_{l3}} = 2\left(\frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}}\right) \tag{4.16}$$

$$K_{i_{r3}} = 2\left(\frac{F_{r3}}{I_{r3}} + \frac{F_{r3}}{I_{r4}}\right) \tag{4.17}$$

$$K_{g_{l1}} = \frac{2}{W}\left(F_{l1} + F_{l2}\right) \tag{4.18}$$

$$K_{g_{r1}} = \frac{2}{W}\left(F_{r1} + F_{r2}\right) \tag{4.19}$$



(a) Force–Current(vertical case, $g'_{l1} = 0$)

(b) Force–Gap(vertical case, $i'_{l1} = 0$)

(c) Force–Current(horizontal case, $g'_{l3} = 0$)

(d) Force–Gap(horizontal case, $i'_{l3} = 0$)

Figure 4.8: Slopes of characteristics of electromagnetic attractive force and sectors

$$K_{g_{l3}} = \frac{2}{W}(F_{l3} + F_{l4}) \tag{4.20}$$

$$K_{g_{r3}} = \frac{2}{W}(F_{r3} + F_{r4}) \tag{4.21}$$

とおき，これらの傾きを変動させることでセクタを作って線形化によって表されなかった不確かさを表現する．これを以下のように記述する．

$$K_{i_{l1}} = K_{i_{l1}0} + k_{i_{l1}}\delta_{i_{l1}} \tag{4.22}$$

$$K_{i_{r1}} = K_{i_{r1}0} + k_{i_{r1}}\delta_{i_{r1}} \tag{4.23}$$

$$K_{i_{l3}} = K_{i_{l3}0} + k_{i_{l3}}\delta_{i_{l3}} \tag{4.24}$$

$$K_{i_{r3}} = K_{i_{r3}0} + k_{i_{r3}}\delta_{i_{r3}} \tag{4.25}$$

$$K_{g_{l1}} = K_{g_{l1}0} + k_{g_{l1}}\delta_{g_{l1}} \tag{4.26}$$

$$
\begin{aligned}
K_{g_{r1}} &= K_{g_{r1}0} + k_{g_{r1}}\delta_{g_{r1}} && (4.27)\\
K_{g_{l3}} &= K_{g_{l3}0} + k_{g_{l3}}\delta_{g_{l3}} && (4.28)\\
K_{g_{r3}} &= K_{g_{r3}0} + k_{g_{r3}}\delta_{g_{r3}} && (4.29)
\end{aligned}
$$

ここで，

K_{i_j0}, K_{g_j0} :　公称値 ($j = l1, r1, l3, r3$，以下同様)

k_{i_j}, k_{g_j} :　不確かさの大きさを表す重み

$\delta_{i_j}, \delta_{g_j}$:　加法的な摂動 ($\delta_{i_j}, \delta_{g_j} \in [-1, 1]$)

4.4.4　構造的な不確かさを考慮したモデル

以上の不確かさを Figure 4.2 のノミナルモデルに取り入れ，モデルを再構築すると構造的な不確かさを考慮したモデルは Figure 4.9 のようになる．

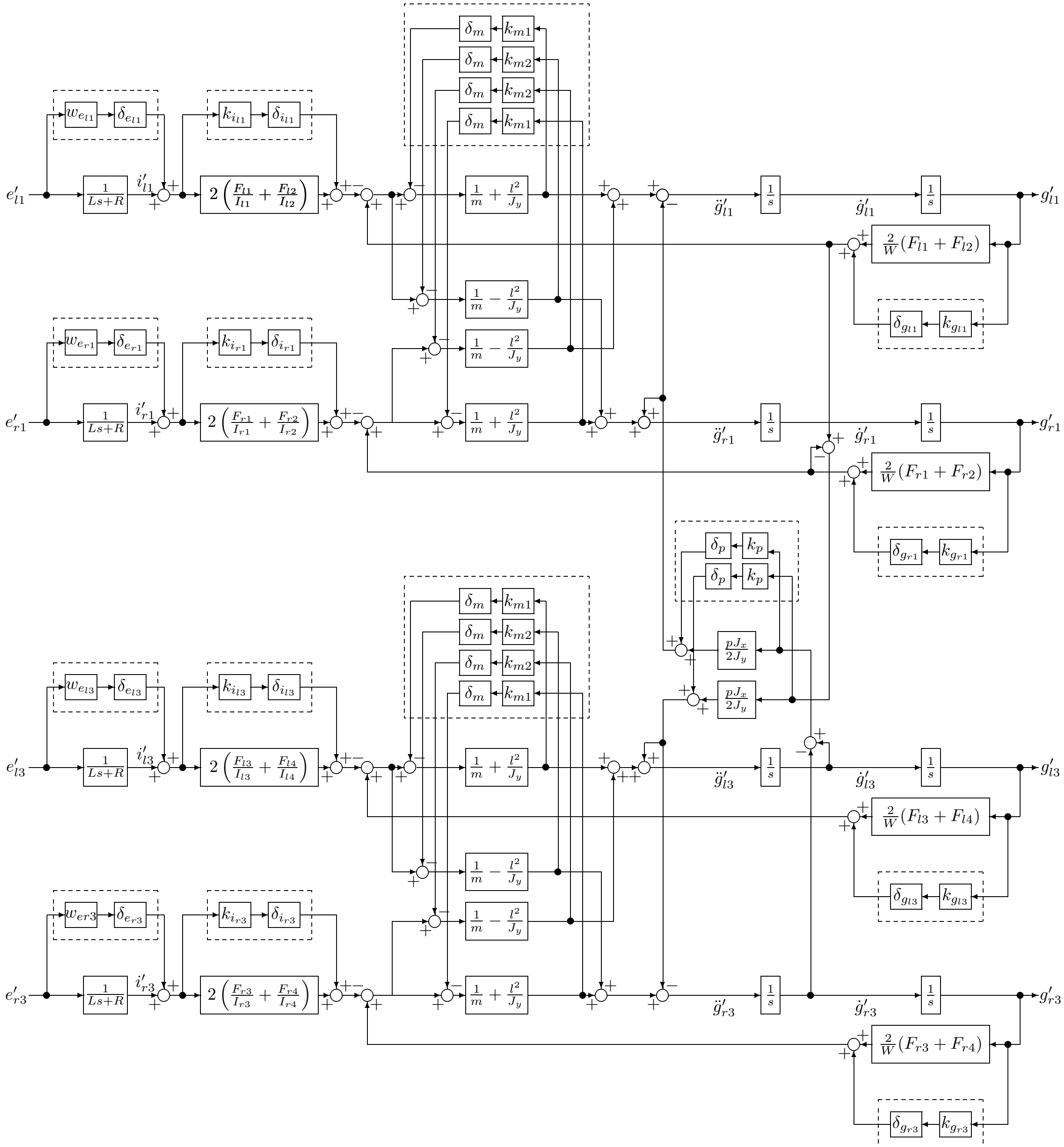


Figure 4.9: Block diagram of magnetic bearing with structured uncertainty

第5章　ロバスト性解析

5.1　構造化特異値を用いたロバスト性解析

構造的な不確かさを考慮したモデルに対して，付録Aにおいて設計したコントローラ K_1，K_2 を用いて閉ループ系を構成し，実複素混合構造化特異値 (mixed μ) を用いた解析を行う．この解析は制御系CADであるMATLAB，μ-Analysis and Synthesis Toolbox を利用して行う．ここで，コントローラ K_1，K_2 は不確かさを非構造的に記述したモデルについて，μ-設計法によって設計したコントローラである．

始めにFigure 4.9のように不確かさを記述したモデルにおいて閉ループ系を構成し，またブロック構造 Δ を抽出することでFigure 5.1のような $N\Delta$-構造を構成する．ただし，ブロック構造 Δ は

$$\begin{aligned}\Delta = \{&\mathrm{diag}[\delta_{i_{l1}}, \delta_{i_{r1}}, \delta_{i_{l3}}, \delta_{i_{r3}}, \delta_{g_{l1}}, \delta_{g_{r1}}, \delta_{g_{l3}}, \delta_{g_{r3}}, \delta_m I_{8\times 8}, \delta_p I_{2\times 2}, \delta_{e_{l1}}, \delta_{e_{r1}}, \delta_{e_{l3}}, \delta_{e_{r3}}] : \\ &\delta_{i_{l1}}, \delta_{i_{r1}}, \delta_{i_{l3}}, \delta_{i_{r3}}, \delta_{g_{l1}}, \delta_{g_{r1}}, \delta_{g_{l3}}, \delta_{g_{r3}}, \delta_m, \delta_p \in \mathcal{R}, \delta_{e_{l1}}, \delta_{e_{r1}}, \delta_{e_{l3}}, \delta_{e_{r3}} \in \mathcal{C}, \}\end{aligned} \tag{5.1}$$

であり，N は内部結合行列で

$$N = F_l(P, K) \triangleq P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{5.2}$$

である．Table 5.1，5.2 にコントローラ K_1，K_2 に関する内部結合行列 N の極を示す．

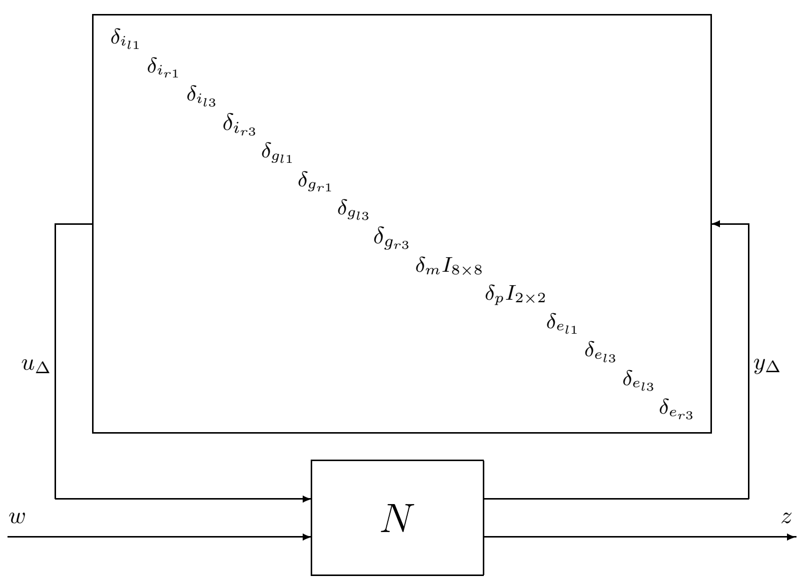


Figure 5.1: $N\Delta$-structure for mixed μ-analysis

Table 5.1: Poles of interconnection matrix N in terms of K_1

Real part	Imaginary part	Real part	Imaginary part
-1.5615e+04	0.0000e+00	-4.9421e+01	0.0000e+00
-1.2797e+04	0.0000e+00	-4.9421e+01	0.0000e+00
-9.4248e+03	0.0000e+00	-4.9421e+01	0.0000e+00
-9.4248e+03	0.0000e+00	-4.9421e+01	0.0000e+00
-9.4248e+03	0.0000e+00	-4.7585e+01	0.0000e+00
-9.4248e+03	0.0000e+00	-4.7585e+01	0.0000e+00
-5.6126e+03	0.0000e+00	-4.7585e+01	0.0000e+00
-5.1265e+03	0.0000e+00	-4.7585e+01	0.0000e+00
-3.1416e+03	0.0000e+00	-4.2419e+01	0.0000e+00
-3.1416e+03	0.0000e+00	-4.2384e+01	0.0000e+00
-3.1415e+03	0.0000e+00	-3.8559e+01	0.0000e+00
-3.1415e+03	0.0000e+00	-3.8546e+01	0.0000e+00
-2.4425e+02	0.0000e+00	-3.7544e+01	0.0000e+00
-2.4305e+02	0.0000e+00	-3.7544e+01	0.0000e+00
-1.5248e+02	0.0000e+00	-3.7544e+01	0.0000e+00
-1.5173e+02	0.0000e+00	-3.7544e+01	0.0000e+00
-1.1660e+02	0.0000e+00	-6.2832e-02	0.0000e+00
-1.1655e+02	0.0000e+00	-6.2832e-02	0.0000e+00
-1.1476e+02	0.0000e+00	-6.2832e-02	0.0000e+00
-1.1475e+02	0.0000e+00	-6.2832e-02	0.0000e+00

Table 5.2: Poles of interconnection matrix N in terms of K_2

Real part	Imaginary part	Real part	Imaginary part
-6.2832e-02	0.0000e+00	-1.5173e+02	0.0000e+00
-6.2832e-02	0.0000e+00	-1.5248e+02	0.0000e+00
-6.2832e-02	0.0000e+00	-2.2253e+02	0.0000e+00
-6.2832e-02	0.0000e+00	-2.2263e+02	0.0000e+00
-1.8532e+01	0.0000e+00	-2.3753e+02	0.0000e+00
-1.8535e+01	0.0000e+00	-2.4304e+02	0.0000e+00
-1.9442e+01	0.0000e+00	-2.4372e+02	0.0000e+00
-1.9506e+01	0.0000e+00	-2.4424e+02	0.0000e+00
-3.7544e+01	0.0000e+00	-7.4710e+02	-9.1228e-06
-3.7544e+01	0.0000e+00	-7.4710e+02	9.1228e-06
-3.7544e+01	0.0000e+00	-7.4710e+02	4.2321e-06
-3.7544e+01	0.0000e+00	-7.4710e+02	-4.2321e-06
-4.7585e+01	0.0000e+00	-3.1574e+03	0.0000e+00
-4.7585e+01	0.0000e+00	-3.1585e+03	0.0000e+00
-4.7585e+01	0.0000e+00	-3.2316e+03	0.0000e+00
-4.7585e+01	0.0000e+00	-3.3353e+03	3.2418e+02
-4.9421e+01	0.0000e+00	-3.3353e+03	-3.2418e+02
-4.9421e+01	0.0000e+00	-3.6823e+03	0.0000e+00
-4.9421e+01	0.0000e+00	-3.7606e+03	0.0000e+00
-4.9421e+01	0.0000e+00	-3.7619e+03	0.0000e+00
-6.8665e+01	0.0000e+00	-9.1545e+03	0.0000e+00
-6.8665e+01	0.0000e+00	-9.4173e+03	0.0000e+00
-6.8665e+01	-5.5212e-05	-9.4272e+03	0.0000e+00
-6.8665e+01	5.5212e-05	-9.4411e+03	0.0000e+00
-1.2746e+02	0.0000e+00	-9.6617e+03	0.0000e+00
-1.2820e+02	0.0000e+00	-1.0354e+04	0.0000e+00
-1.3655e+02	0.0000e+00	-5.1244e+04	0.0000e+00
-1.3663e+02	0.0000e+00	-1.6581e+05	0.0000e+00

Table 5.3: Constant additive weight

Symbol	Weight
$k_{i_{l1}}, k_{i_{r1}}, k_{i_{l3}}, k_{i_{r3}}$	0 N/A
$k_{g_{l1}}, k_{g_{r1}}$	1.01×10^5 N/m
$k_{g_{l3}}, k_{g_{r3}}$	1.11×10^4 N/m
k_{m1}	1.64 kg
k_{m2}	3.32×10^2 kg
k_p	3.03×10 rad/s

つぎにモデルの不確かさの大きさを表す重みを決定する．ジャイロ効果の影響を不確かさと考えた δ_p については，コントローラを設計する際に乗法的な不確かさの重みを回転数が 10000rpm のときの乗法的な摂動に基づいて決定したので，ここでも重み k_p を 10000rpm に相当する大きさにとる．$k_{g_{l1}}$，$k_{g_{r1}}$ および $k_{g_{l3}}$，$k_{g_{r3}}$ についてはロータが定常値から 0.1 mm 変動した場合を想定して，それぞれ公称値の 24.6%，6.95% とする．また，質量および慣性モーメントに関する不確かさの重み k_{m_1}，k_{m_2} は質量が約 3.3 kg 変動したことに相当するように公称値の 23.7% とする．以上を Table 5.3 に示す．

電磁石部分の不確かさに関する重みは，インダクタンス L の変動 $\pm 9\%$，抵抗 R の変動 $\pm 1\%$ に加えて高周波のモデル化されなかったダイナミクスを覆うように

$$w_j = 1.12 \times 10^{-3} \times \frac{(s+71.8)(s+12.5)}{(0.518s+25.6)(0.559s+26.6)} \tag{5.3}$$

とする．ここで，$j = l1, r1, l3, r3$ である．

さらに制御性能の解析に関して，制御性能の指標となる重み伝達関数 W_S をコントローラを設計する際に設定した

$$W_S = \frac{1}{1+\frac{s}{2\pi \cdot 0.01}} \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 350 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 350 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

とする．

5.1.1　ノミナル性能解析

閉ループ系がノミナル性能であるためには，(2.13) 式より

$$\bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_P} < 1, \ \forall\omega$$

であればよい．コントローラ K_1，K_2 それぞれに関して N_{22} の最大特異値 $\bar{\sigma}(N_{22})$ を Figure 5.2 に示す．$\bar{\sigma}(N_{22})$ は，低周波においてコントローラ K_1 で 0.835，コントローラで K_2 で 0.750，高周波においてどちらも 0 となり，ノミナル性能の条件を満足している．

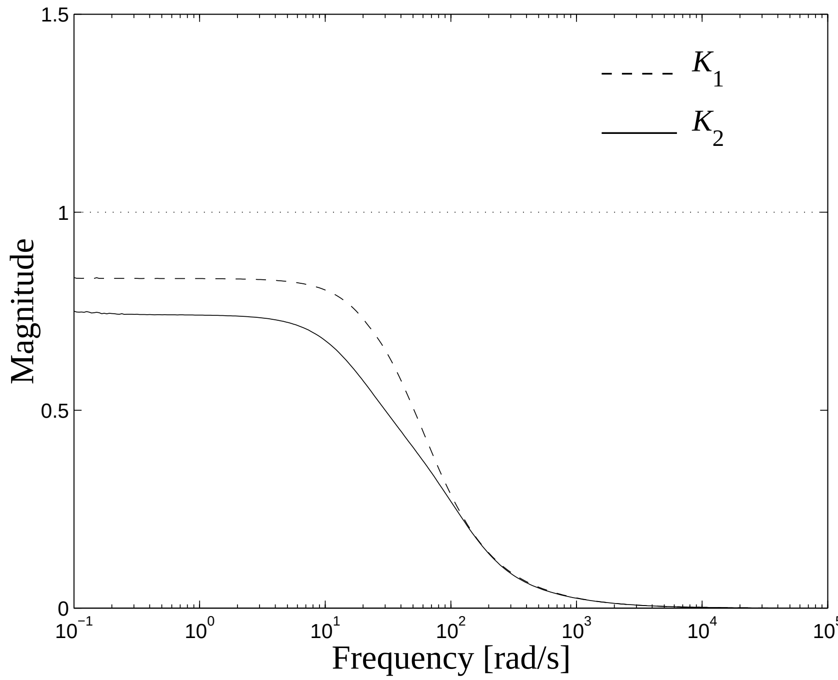


Figure 5.2: Maximum singular value plots $\bar{\sigma}(N_{22})$ with controller K_1, K_2

5.1.2 ロバスト安定性解析

Figure 4.9 のように不確かさを記述したモデルとコントローラ K_1，K_2 から構成した $N\Delta$-構造 (Figure 5.1) に対して，ロバスト安定性解析を実複素混合構造化特異値 (mixed μ) を用いて行う．閉ループ系がロバスト安定であるためには (2.14) 式より

$$\mu_\Delta(N_{11}) < 1,\ \forall\omega \tag{5.5}$$

であればよい．Figure 5.3 に Table 5.3 および (5.3) 式の不確かさの重みに対する $\mu_\Delta(N_{11})$ を示す．

コントローラ K_1 について，$\mu_\Delta(N_{11})$ のピーク値は 0.640 である．これは，最悪ケースの摂動が不安定を引き起こすことなく，$1/0.640 = 1.56$ 以下の大きさの摂動 Δ に対して安定性が保たれることを意味する．

同様にコントローラ K_2 について，$\mu_\Delta(N_{11})$ のピーク値は 0.542 である．したがって，コントローラ K_2 では，最悪ケースの摂動が不安定を引き起こすことなく，$1/0.542 = 1.85$ 以下の大きさの摂動 Δ に対して安定性が保たれることを意味する．

解析に用いたコントローラ K_1，K_2 は Fugure 5.4(a) の重みに対して設計したものである．しかし，実際には第 4 章で議論したような構造を持ち，大きさが Table 5.3 および (5.3) 式の重みで表されるような不確かさが存在している．Figure5.4(b) に回転数 $p = 10000$rpm のときの乗法的な摂動の最大特異値 $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ (破線) に加えて，このような不確かさを考慮したときの乗法的な摂動 Δ_p の最大特異値を点線で示す．ただし，プロットが複数あるのは不確かさの種々の組み合わせをプロットしているからであり，回転数変化以外の不確かさが 0 となる組み合わせでは $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ に等しくなる．

Figure5.4(b) より，Table 5.3 および (5.3) 式の重みで表されるような不確かさを考えた場合には 300rad/s 以下の周波数域で，設計時に許容するとした不確かさの大きさ W_T よりも大き

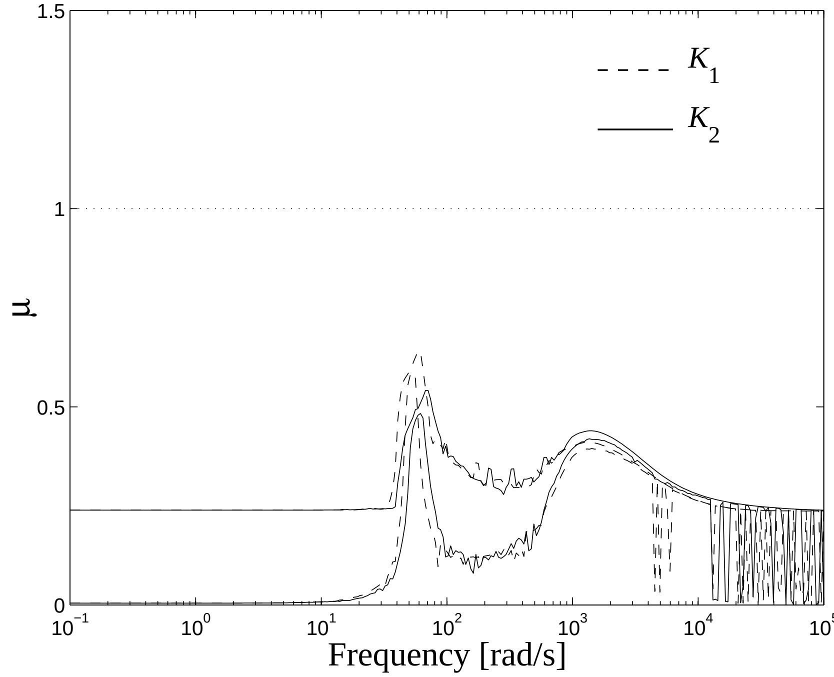
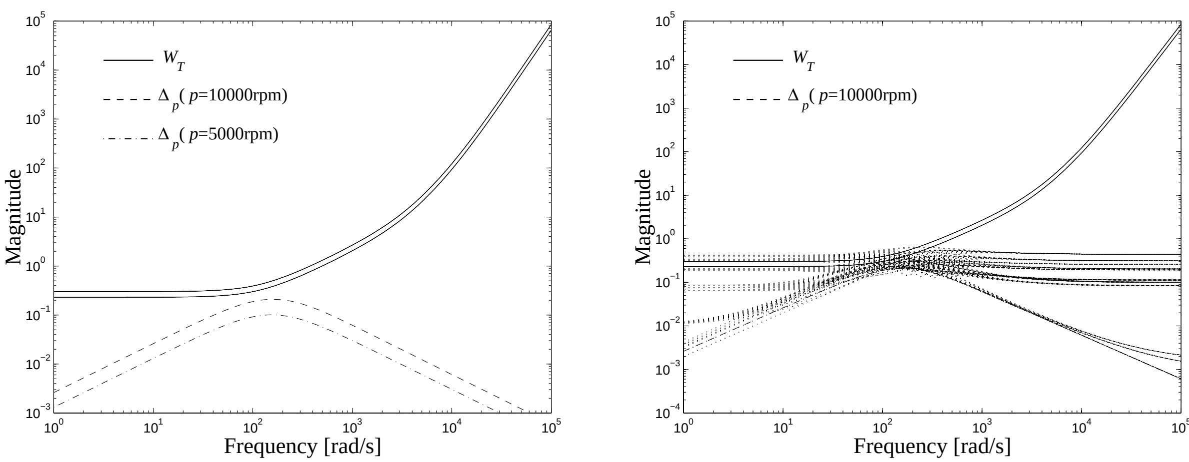


Figure 5.3: Mixed μ-plots for robust stability analysis of closed loop system with controller K_1, K_2



(a) Unstructured uncertainty using controller design

(b) Combinations of miscellaneous uncertainties

Figure 5.4: Singular value plot of the weighting function W_T, the perturbation Δ_p and combinations of miscellaneous uncertainties with nominal plant(dotted lined)

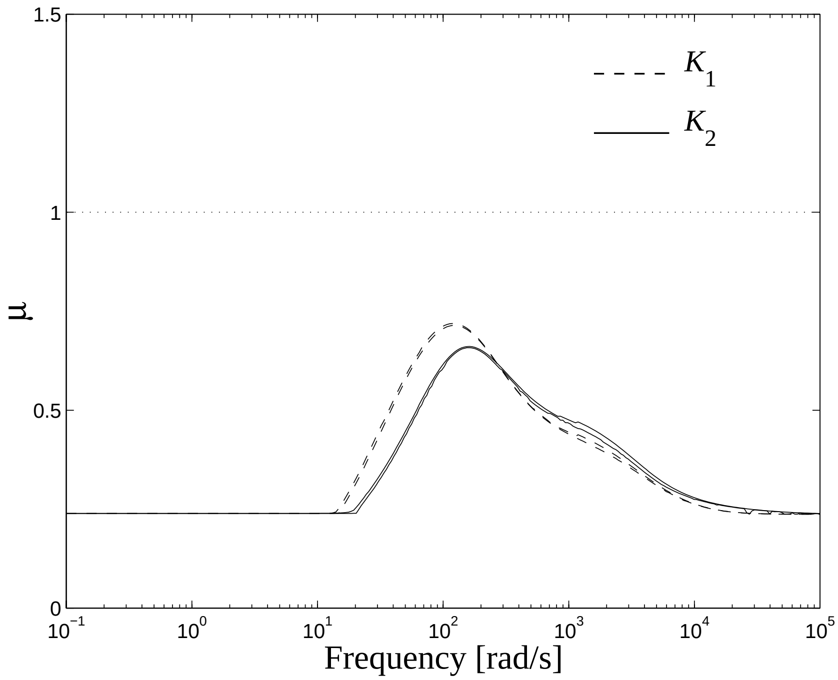


Figure 5.5: Complex μ-plots for robust stability analysis of closed loop system with controller K_1, K_2

くなっている．しかし，このような不確かさを考えた場合においても Figure 5.3 では余裕をもってロバスト安定性を満たしている．この解析から非構造的な不確かさの評価は保守的であることがわかる．

また，(5.1) 式のブロック構造において，不確かさをすべて複素数として複素構造化特異値 (complex μ) を用いて解析を行った結果を Figure 5.5 に示す．この場合の $\mu_\Delta(N_{11})$ のピーク値は，コントローラ K_1 について 0.719，コントローラ K_2 について 0.661 となる．いずれも実数の不確かさを用いた mixed μ 解析に比べて μ のピーク値が大きくなり，複素数の不確かさだけを考えることで保守的な結果となることがわかる．

5.1.3 不確かな要素のロバスト安定性への影響

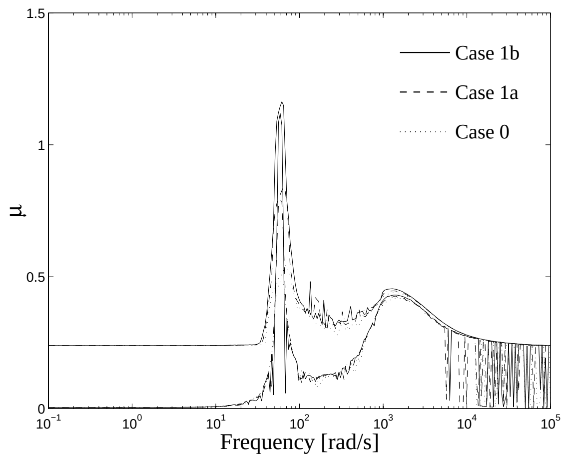
本稿では，Figure 4.9 のようにパラメータの不確かさ，モデル化されないダイナミクスによる不確かさ，線形化による不確かさについて考慮するモデルを提案している．そこで，これらの不確かな要素がどのようにロバスト安定性に影響するかを調べる．

いま，Table 5.3 および (5.3) 式の不確かさの重みを Case 0 の重みと呼ぶことにする．Case 0 の重みに対して Table 5.4 の Case 1 - Case 4 のように重みを変化させたとき，μ-プロットが Figure 5.3 と比較してどのように変化するかをみる．Case 1 - Case 4 の場合の解析結果を Figure 5.6 に示す．ただし，ここではコントローラ K_2 に関してのみ示してある． Figure 5.6 からそれぞれの不確かな要素が影響を及ぼす周波数を知ることができる．

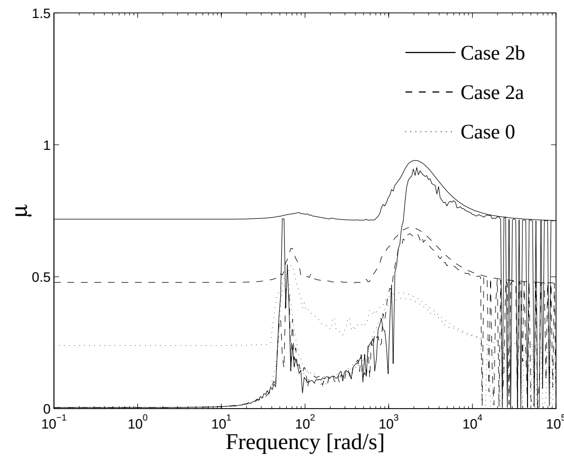
線形化による不確かさの重み k_{g_j} を大きくすると 60 rad/s で μ の値が大きくなり，それ以外の周波数ではほとんど変化はない．質量，慣性モーメントの変化によるパラメータの不確かさの重み k_{m1}，k_{m2} を大きくすると全ての周波数域で μ の値が大きくなる．また，ジャイロ効

Table 5.4: Modification of weight for uncertain factor

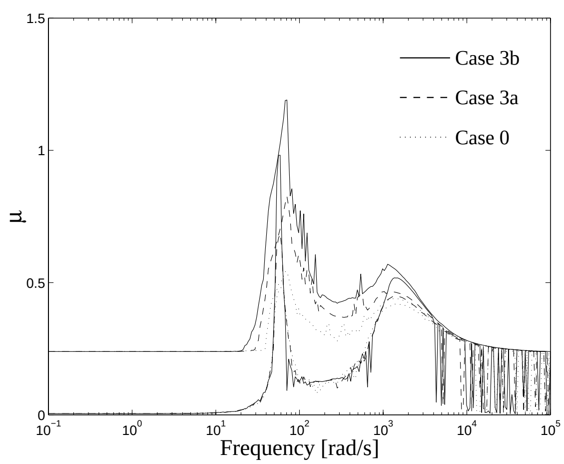
Case 1a	Case 1b	Case 2a	Case 2b	Case 3a	Case 3b	Case 4a	Case 4b
$2 \times k_{g_j}$	$3 \times k_{g_j}$	k_{g_j}	k_{g_j}	k_{g_j}	k_{g_j}	k_{g_j}	k_{g_j}
k_{m1}	k_{m1}	$2 \times k_{m1}$	$3 \times k_{m1}$	k_{m1}	k_{m1}	k_{m1}	k_{m1}
k_{m2}	k_{m2}	$2 \times k_{m2}$	$3 \times k_{m2}$	k_{m2}	k_{m2}	k_{m2}	k_{m2}
k_p	k_p	k_p	k_p	$3 \times k_p$	$6 \times k_p$	k_p	k_p
w_{e_j}	w_{e_j}	w_{e_j}	w_{e_j}	w_{e_j}	w_{e_j}	$3 \times w_{e_j}$	$6 \times w_{e_j}$



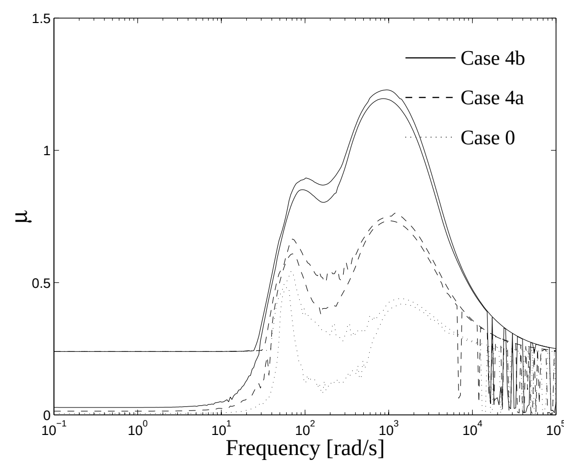
(a) case 1a, 1b



(b) Case 2a, 2b



(c) Case 3a, 3b



(d) Case 4a, 4b

Figure 5.6: μ-plots for modification of weight

果の影響によるパラメータの不確かさの重み k_p を大きくすると 20 rad/s から 6000 rad/s の間の周波数域で変化が見られるが，特に 70 rad/s で μ の値が大きくなる．そしてジャイロ効果がロバスト安定性に及ぼす影響は重みが大きくなるにつれて周波数域が広くなることに気付く．電磁石部のモデル化されない動特性の重み w_{e_j} を大きくすると約 30 rad/s から 30000 rad/s の広い周波数域で μ の値が大きくなることがわかる．

5.1.4 ロバスト性能解析

ロバスト性能は，

$$||W_S(I+G_pK)^{-1}||_\infty \tag{5.6}$$

の特性を表し，不確かさを有するプラント G_p に対する制御性能の劣化について評価する．ロバスト性能解析を行うために (5.1) 式のブロック構造と性能を評価するために導入する仮想的な摂動 Δ_P からブロック構造 $\hat{\Delta}$ を定義する．

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

ただし，Δ_P は複素フルブロックである．このとき閉ループ系がロバスト性能であるためには (2.15) 式より

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1, \ \forall\omega \tag{5.8}$$

であればよい．ここでは，不確かさの重みはロバスト安定性解析に用いたものと同じ Table 5.3 および (5.3) 式の重みとする．制御性能に関する重みはノミナル性能解析と同様に (5.4) 式の重み伝達関数を用いる．これらの不確かさおよび性能仕様に関して解析した結果を Figure 5.7 に示す．$\mu_{\hat{\Delta}}(N)$ のピーク値はコントローラ K_2 を用いて構成した閉ループ系については 0.947 となりロバスト性能を達成している．コントローラ K_1 を用いて構成した閉ループ系については $\mu_{\hat{\Delta}}(N)$ のピーク値は 1.21 となりロバスト性能を保証していないが，1/1.21=0.826 以下の大きさの摂動であればロバスト性能が保証されることを意味する．

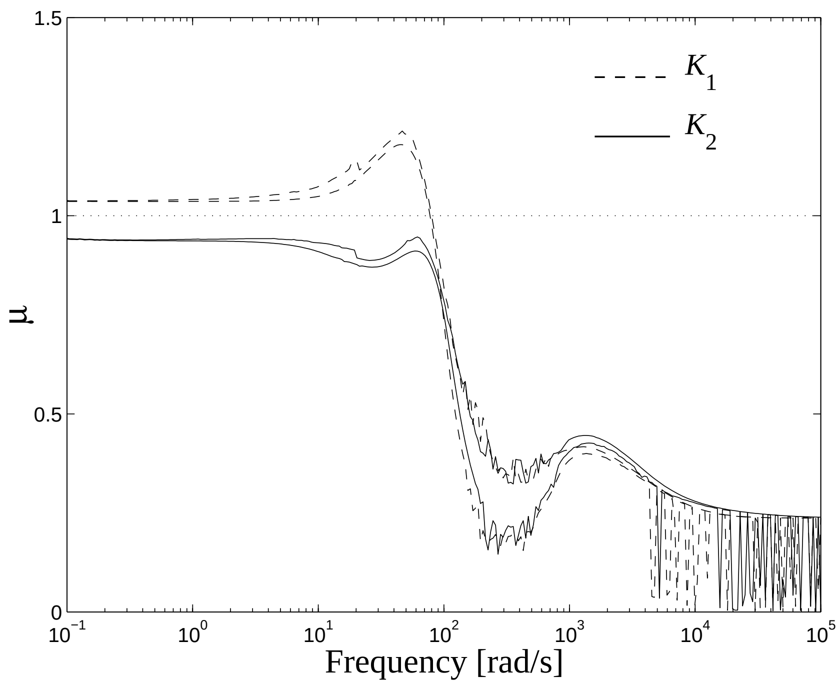


Figure 5.7: μ-plots for robust performance ayanlysis of closed loop system with controller K_1, K_2

第6章　浮上シミュレーション

6.1　シミュレーション結果

付録 A で μ-設計法により設計したコントローラ K_1，K_2 を用いて閉ループ系を構成し磁気軸受の浮上シミュレーションを行った．浮上シミュレーションでは，Figure 6.1 に示すようにロータの左側に外乱 f_{dl1}，f_{dl3} を加えて，このときの定常値からのギャップの変動 g'_{l1}，g'_{l3} を観測する．

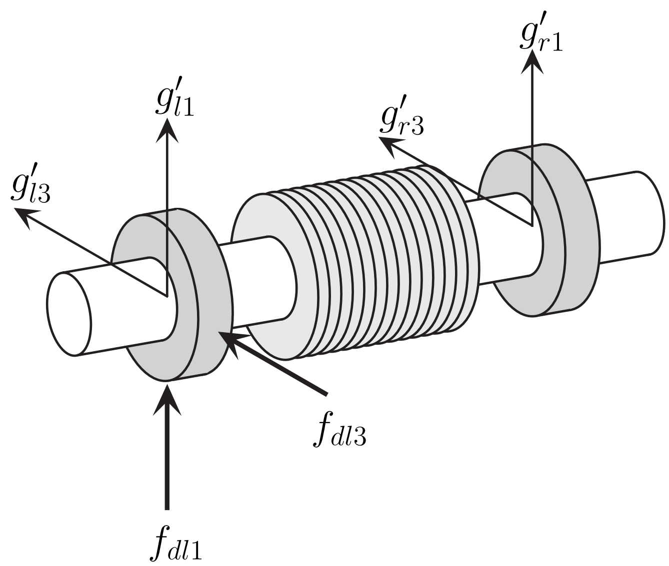


Figure 6.1: Disturbance f_{dl1} and f_{dl3} on simulations

1. ノミナルプラントにステップ状の外乱を加えた場合
   ロータが静止して浮上しているとき (回転数 $p = 0$rpm)，ロータの左側の軸受部において，鉛直方向に $f_{dl1} = 100$N，水平方向に $f_{dl3} = 66$N のステップ状外乱を加えた．このときのロータの左側の定常値からの変位 g'_{l1}，g'_{l3} を Figure 6.2 に示す．どの場合も時間とともに偏差なく収束していくことがわかる．5.1.1 節のノミナル性能解析の結果通り，良好なノミナル性能を保持している．
2. 摂動を受けたプラントにステップ状の外乱を加えた場合
   (a) 回転するロータの鉛直方向にだけステップ状外乱を加えた場合
   ロータが 10000rpm で回転しているとき，鉛直方向だけに $f_{dl1} = 100$N のステップ状外乱を加えた ($f_{dl3} = 0$N)．このときのロータの左側の定常値からの変位 g'_{l1}，g'_{l3} を Figure 6.3 に示す．ジャイロ効果の影響によって鉛直上向きの外乱の影響が水平方向に現れているが，時間とともに収束している．

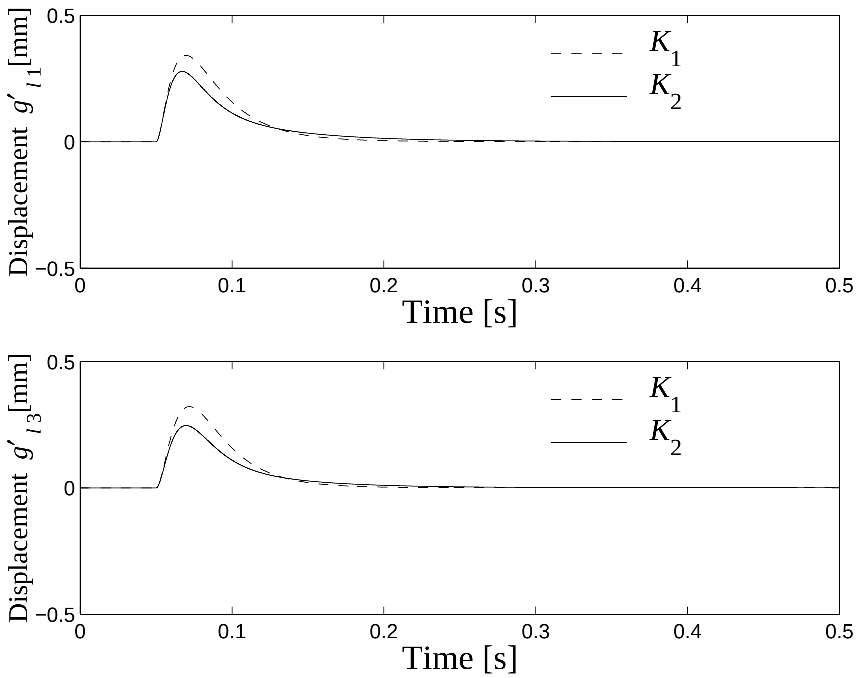


Figure 6.2: Step disturbance response for nominal plant

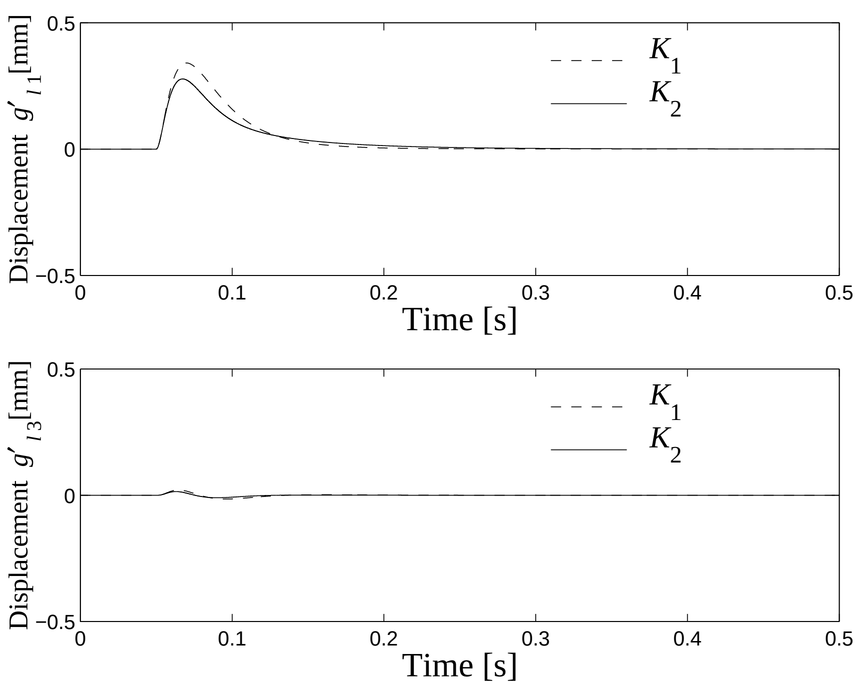


Figure 6.3: Responses against vertical directional step disturbance for perturbed plant($p =$ 10000rpm)

(b) 回転するロータの鉛直方向，水平方向にステップ状外乱を加えた場合
ロータが 10000rpm で回転しているとき，鉛直方向に $f_{dl1} = 100$N，水平方向に $f_{dl3} = 66$N のステップ状外乱を加えた．このときのロータの左側の定常値からの変位 g'_{l1}，g'_{l3} を Figure 6.4 に示す．この場合も時間とともに収束しノミナルプラントのステップ応答 Figure6.2 とほとんど変わらない応答を得ておりロバスト性能を達成しているといえる．

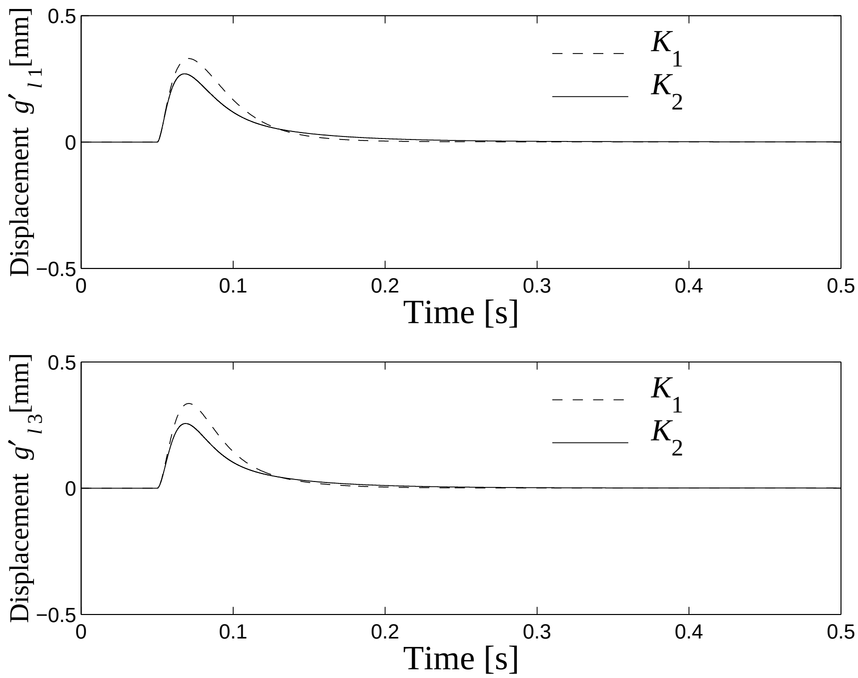


Figure 6.4: Step disturbance response for perturbed plant($p = 10000$rpm)

(c) すべてのパラメータを変動させたプラントにステップ状外乱を加えた場合
Table 5.3 をもとに，線形化誤差として $K_{g_{l1}}$，$K_{g_{r1}}$ を 1.246 倍，$K_{g_{l1}}$，$K_{g_{r1}}$ を 1.0695 倍，電磁石コイルのインダクタンスを 1.09 倍，抵抗を 1.01 倍し，付加質量を約 3.3kg 取り付けたとき，10000rpm で回転するロータにステップ状外乱を加えた．外乱の大きさは鉛直方向に $f_{dl1} = 100$N，水平方向に $f_{dl3} = 66$N である．このときのロータの左側の定常値からの変位 g'_{l1}，g'_{l3} を Figure 6.5 に示す．コントローラ K_2 に関しては回転数以外のパラメータを変動させない場合と比較すると振幅が大きくなり，収束時間も長くなっているがロバスト性能を保持しているといえる．ところがコントローラ K_1 に関してはロータが電磁石に接触するほど振幅が大きくなり良い性能であるとはいえない．この結果は 5.1.3 節でコントローラ K_1 はこのように設定した不確かさに対してロバスト性能を保持しないとした結果と一致している．

以上のシミュレーション結果から，提案したモデルを用いた μ-解析の結果の有効性と非構造的な不確かさの記述の保守性を確認することができる．上記のシミュレーション以外にも数多くのシミュレーションを行ったが，ロバスト安定性に関しては μ-解析によって不安定と結論づけられるような不確かさに対しても安定に浮上する場合がある [1]．この点からは，不確か

[1]ただし，例えば不安定を引き起こすような回転数は $p = 40000$rpm 程度となるなど非現実的なシミュレーションとなり，このような高速回転においては，実システムではロータの弾性振動がおこる可能性もあると考えられ

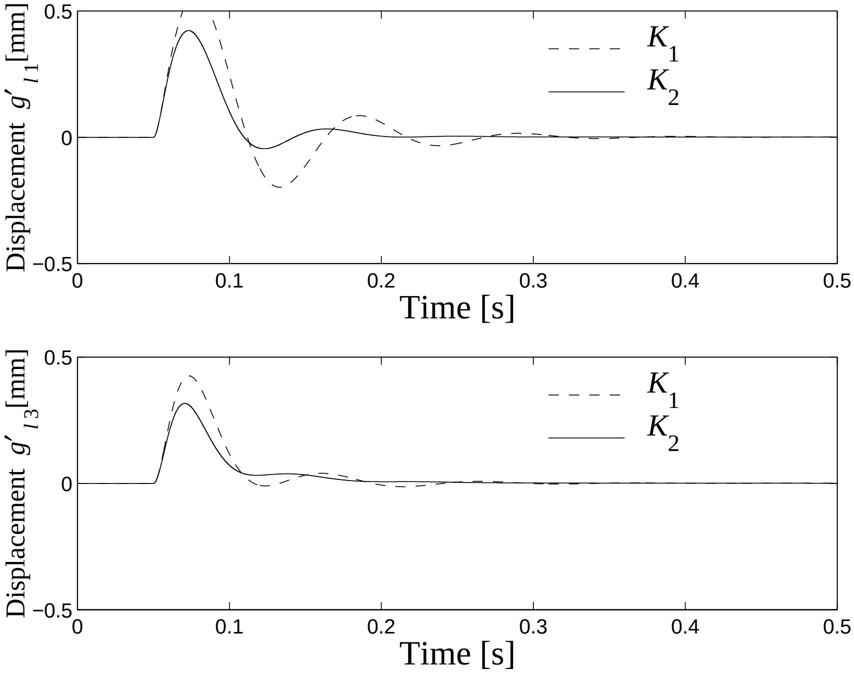


Figure 6.5: Step disturbance response for perturbed plant(miscellaneous parameters is perturbed)

さを考慮したモデルについてさらに検討する必要があり，また信頼性の高いシミュレーションを行うために制御対象の挙動をより良く表現するモデルが必要であるとも考えられる．

るため，本稿ではそのようなシミュレーション結果は割愛した．

第7章　結論

本研究では4軸制御横軸形磁気軸受について，構造的な不確かさを考慮したモデルの一例を提案し，提案したモデルに対して構造化特異値 μ を用いてロバスト性解析を行った．また，提案したモデルおよび解析結果が妥当なものであるか検証するため，磁気軸受の浮上シミュレーションを行った．

この結果，設計時には具体的に記述されていなかったロバスト安定性，ロバスト性能を満たす不確かさの大きさを一部ではあるが確認することができた．また，シミュレーション結果からロバスト性解析の有効性を確認することができた．これにより不確かさを構造的に記述することによって解析結果の保守性を軽減できるといえる．しかし，ロバスト安定性については，μ-解析によって不安定と結論づけられるような摂動に対しても安定に浮上する場合がある．したがって，不確かさを考慮したモデルについては今後も検討する必要があり，一方で信頼性の高いシミュレーションについての考察も必要であると考えられる．

不確かさについてはパラメータの不確かさ，線形化誤差による不確かさ，モデル化されないダイナミクスによる不確かさを考慮したが，これらの他にロータの不つり合いの影響，ロータの弾性振動の影響なども考えられる．超高速回転になるような運転状態を想定する場合には，ロータの弾性振動を考慮したノミナルモデルの導出も必要である．また，実際に制御装置を実装することを考えるとセンサノイズの影響や，パワーアンプの特性といったことも考慮しなければならない．

本研究では，変動する要素で，互いの変動が関連をもつもの (例えば，ロータの質量と慣性モーメント) は一つの不確かなブロックと考えて不確かさを考慮し，これをLFT表現した．しかし，ジャイロ効果の影響を不確かさと考えた部分においては回転数の他に慣性モーメント，重心から磁気軸受の距離の変動も合わせて考慮しなくてはならない．質量に関連する部分が変動した場合，回転数に関係なくジャイロ効果に関連する部分も変動する．つまり，どちらも質量に関連しているにもかかわらず，この両者に独立した不確かさを考えることは，不確かさの記述が冗長であるといえるかもしれない．本研究では磁気軸受は左右対称な構造であるとしたが，非対称な場合では重心から磁気軸受の距離の変動を考えることによってこのようなケースが出てくると思われる．

不確かさの構造を検討してこれをLFT表現し，構造化特異値を利用することでより保守性の少ない解析，設計を行うことができるが，設計に関していえば，一般にプラントの次数の高さはコントローラの次数に反映される．したがって，不確かさの記述が冗長であってはならず，ブロック構造 Δ の次元は最小になることが望ましい．文献 [27] ではLFT表現の最小化に関する研究が報告されており，このような研究成果を磁気軸受に適用することも興味深い．

近年，モデルとモデリングについての研究が盛んに行われている [18, 19]．特にロバスト制御ではモデルの善し悪しは非常に重要であり，今後も制御理論とともにモデル論が発展し，磁気軸受を始めとする磁気浮上技術のさらなる高性能化につながることが期待される．

付 録A　コントローラの設計

A.1　制御問題

磁気軸受の数式モデル (3.38)，(3.39) 式に対して，文献 [7] を参考にコントローラを設計する．ここでは，モデルの不確かさとして，Figure A.1 のようにプラントの出力側で非構造的な乗法的な摂動を考え，不確かさを考慮したプラント G_p を次式で表す．

$$G_p = (I + \Delta_O W_T)G; ||\Delta_O||_\infty \le 1 \tag{A.1}$$

ここで，
G :　ノミナルプラント
W_T :　乗法的な摂動の大きさを表す重み伝達関数

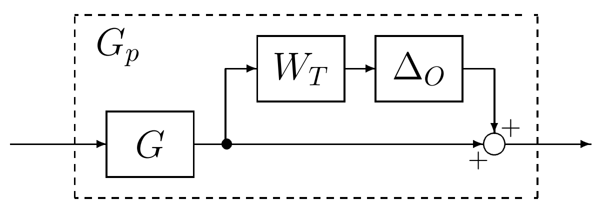


Figure A.1: Nominal plant with multplicative output perturbation

(A.1) 式で表されるプラント G_p に対する閉ループ系がすべての許容される摂動 Δ_O に対して安定であるための条件は以下の式で表される．

$$||W_T GK(I + GK)^{-1}||_\infty < 1 \tag{A.2}$$

ノミナルプラントは 4.2 節で述べたように，回転速度が 0 rpm のとき，ジャイロ効果による鉛直方向と水平方向の干渉がない場合のプラントとする．

$$G = \begin{bmatrix} G_v & 0 \\ 0 & G_h \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

ここで，
G_v :　水平方向の運動に対応したプラント $(= C_v(sI - A_v)^{-1}B_v)$
G_h :　鉛直方向の運動に対応したプラント $(= C_h(sI - A_h)^{-1}B_h)$

ここで，回転数の変化によって引き起こされる出力側の乗法的な摂動を Δ_p とし，Δ_p の最大特異値 $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ をプロットすると Figure A.2 のようになる．また，磁気浮上系には様々な不

確かさが存在している [9, 10]．そこで，不確かさの大きさを表す重み伝達関数 W_T を以下のように定める．W_T の特異値軌跡を Figure A.2 に示す．

$$W_T = \left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 19}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 500}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 1500}\right)\begin{bmatrix} 0.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

閉ループ系の制御性能もまた設計における重要な目標となる．磁気軸受の運転は様々な外乱力を受けることが予想されるので，制御性能を感度関数

$$S = (I+GK)^{-1}$$

によって評価する．性能仕様 (ノミナル性能) を満足するためには，制御性能に関する重み伝達関数を W_S としたとき，次式を満たせばよい．

$$||W_S(I+GK)^{-1}||_\infty < 1 \tag{A.5}$$

ここでは，低周波における外乱の抑制を目的として W_S を (A.6) 式のように定める．W_S の特異値軌跡もまた Figure A.2 に合わせて示す．

$$W_S = \frac{1}{1+\frac{s}{2\pi\cdot 0.01}}\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 350 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 350 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

ノミナル性能条件 (A.5) 式とロバスト安定条件 (A.2) 式を同時に達成するコントローラを得るためには，(A.7) 式の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解けばよい．(A.7) 式はいわゆる混合感度問題である．

$$\left\| \begin{array}{c} W_S(I+GK)^{-1} \\ W_T GK(I+GK)^{-1} \end{array} \right\|_\infty < 1 \tag{A.7}$$

混合感度問題は閉ループ系の感度に関してノミナル性能だけを保証するものである．しかしノミナルプラントだけでなく摂動を受けたすべてのプラントに対しての制御性能 (ロバスト性能) を保証してほしい．ロバスト性能を達成するためには以下の式を満足すればよい．

$$||W_S(I+(I+\Delta_O W_T)GK)^{-1}||_\infty < 1; ||\Delta_O|| \le 1 \tag{A.8}$$

(A.8) 式の問題は仮想的な不確かさのブロック Δ_P，$||\Delta_P||_\infty \le 1$ を導入して Figure A.3 のような内部結合構造を構成することで μ-シンセシスの枠組で扱うことができる．まずブロック構造 Δ を定義する．

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_O & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix} : \Delta_O, \Delta_P \in \mathcal{C}^{4\times 4} \right\} \tag{A.9}$$

つぎに一般化プラント P を矛盾のないように

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

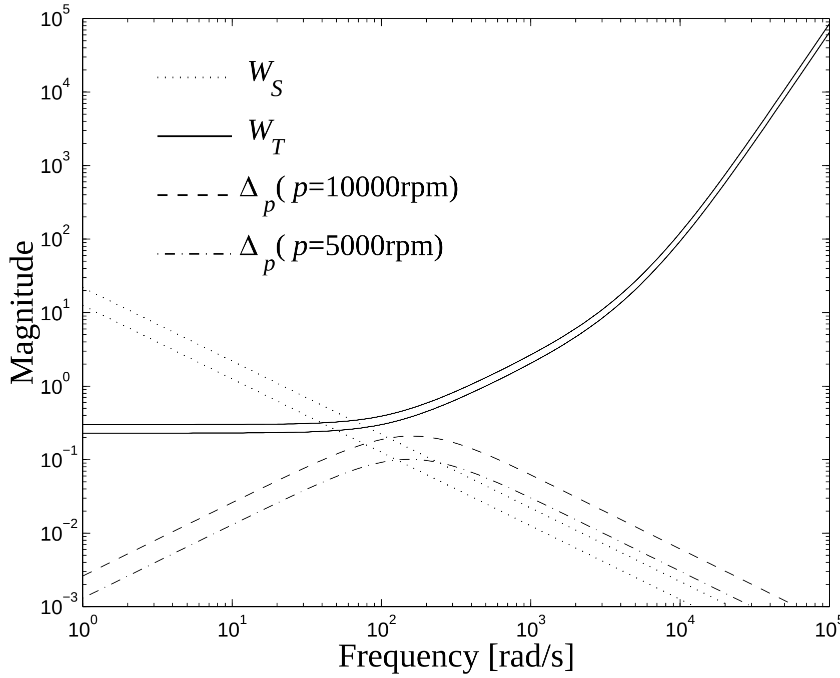


Figure A.2: Singular values plot of the weighting functions W_S, W_T and perturbation Δ_p

と分割し，w から z までの伝達関数を LFT 表現する．

$$F_l(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{A.11}$$

このときロバスト性能を達成することは，構造化特異値 μ を用いた次の条件式と等価である．

$$\sup_{\omega\in\mathcal{R}} \mu_\Delta(F_l(P,K)(j\omega)) < 1 \tag{A.12}$$

ここで用いる手法は DK-イタレーションと呼ばれるもので，μ の上界を得るために安定化コントローラ K とスケーリング行列 D の二つの変数を用いて

$$||DF_l(P,K)D^{-1}|| \tag{A.13}$$

を最小化する問題を考える [26].

A.2 μ-シンセシス

DK-イタレーションでは K または D の一方を固定し，他方を (A.13) 式を最小化するように選ぶことを繰り返し行う．始めに，$D = I$ とおき $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解くことでコントローラ K を得る．すなわち，図 A.3 において $P = P_1$ とすると，$F_l(P_1,K)$ は w から z までの閉ループ伝達関数であるから，つぎの $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題

$$||F_l(P_1,K)||_\infty < \gamma_1, \gamma_1 = 1.23 \tag{A.14}$$

を解くことによりコントローラ K_1 を得る．コントローラ K_1 は 16 次で安定である．1 回目の DK-イタレーションは $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題であり，以下の混合感度問題と等価である．

$$\left\|\begin{array}{c} W_S(I+GK)^{-1} \\ W_TGK(I+GK)^{-1} \end{array}\right\|_\infty < \frac{\gamma_1}{\sqrt{2}} \tag{A.15}$$

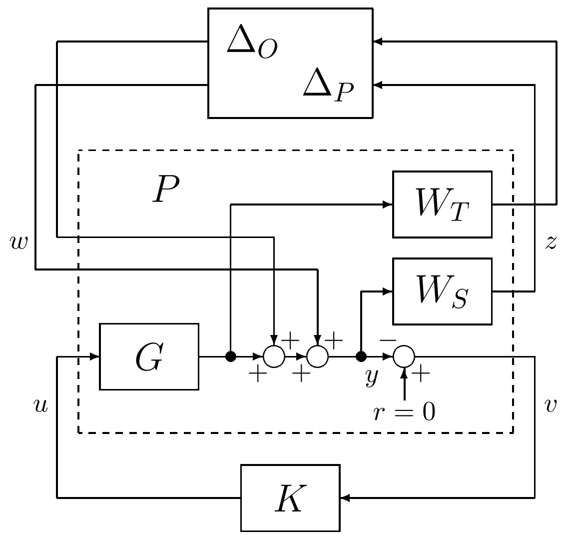


Figure A.3: Control configuration for μ-synthesis

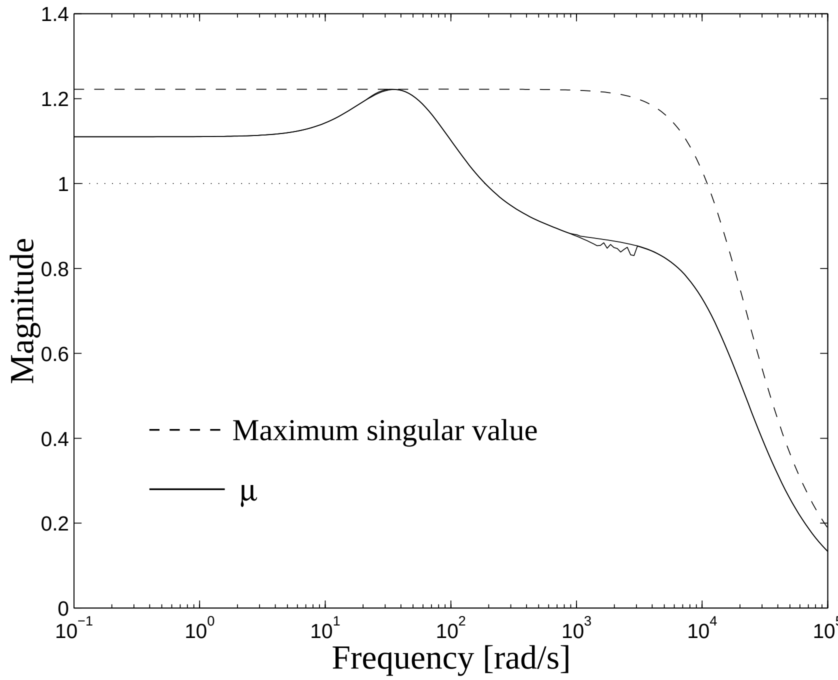
得られたコントローラ K_1 について μ-解析によるロバスト性能の評価を行う．Figure A.4(a) に構造化特異値 $\mu_\Delta(F_l(P_1, K_1))$ と最大特異値 $\bar{\sigma}(F_l(P_1, K_1))$ を示す．図より μ のピーク値は 1 より大きくコントローラ K_1 による閉ループ系はロバスト性能を達成していないことがわかる．

次に 2 回目の DK-イタレーションを行う．$||D_1 F_l(P_1, K_1) D_1^{-1}||$ を最小にするスケーリング行列 D_1 は各周波数毎に計算されるので，これを安定で最小位相の有理関数行列として近似する．ここでは 2 次の伝達関数行列を用いてカーブフィットを行った．結果として得られるスケーリング行列 $D_1(s)$ を一般化プラント P_1 に組み込むことで新しい一般化プラント P_2 を構成する．したがって，つぎの $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解くことでコントローラ K_2 を得る．

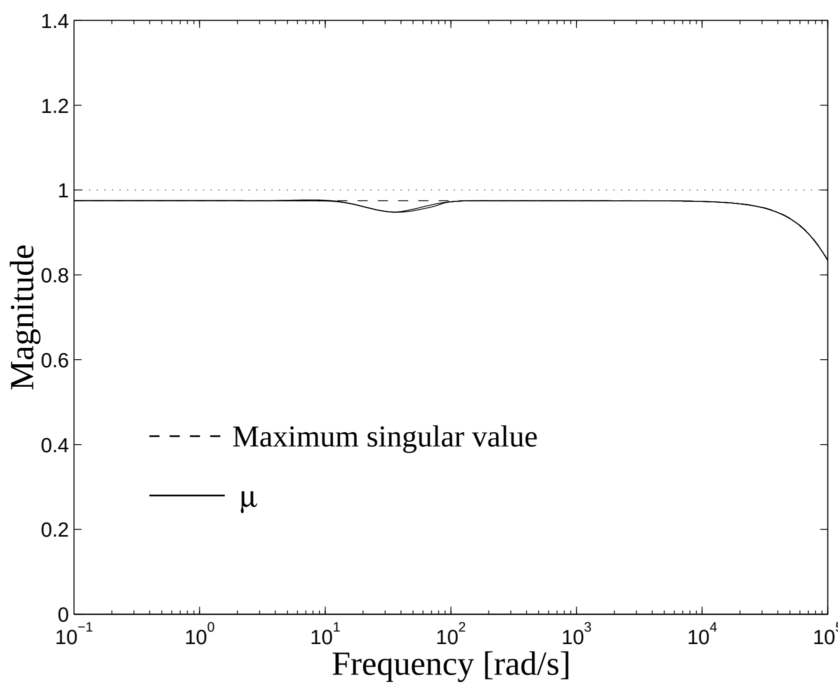
$$||F_l(P_2, K)||_\infty < \gamma_2, \gamma_2 = 1 \tag{A.16}$$

得られたコントローラ K_2 は 32 次で安定である．コントローラ K_2 について μ-解析によるロバスト性能の評価を行う．Figure A.4(b) に構造化特異値 $\mu_\Delta(f_l(P_2, K_2))$ と最大特異値 $\bar{\sigma}(F_l(P_2, K_2))$ を示す．図より μ のピーク値は 1 以下となっていて，K_2 を用いて構成した閉ループ系はロバスト性能を達成している．

また，Figure A.5 にコントローラ K_1，K_2 の特異値軌跡，ループ伝達関数 $L = GK$，感度関数 $S = (I + GK)^{-1}$，相補感度関数 $T = GK(I + GK)^{-1}$ の特異値軌跡を示す．

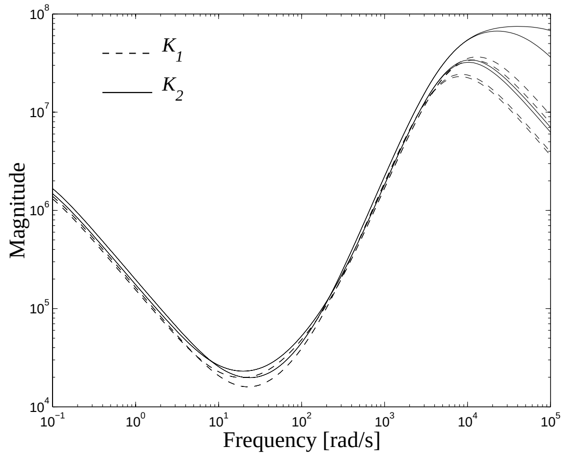


(a) Iteration No.1

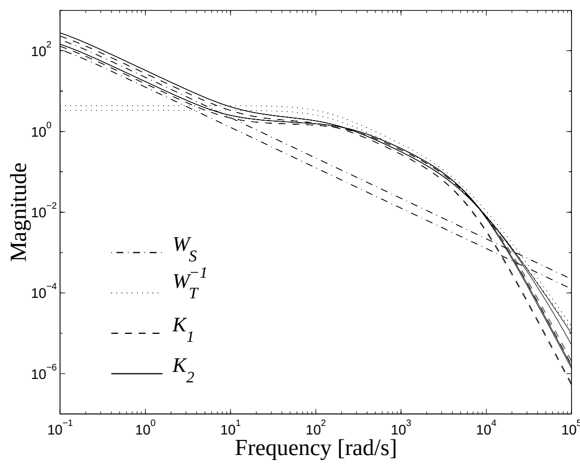


(b) Iteration No.2

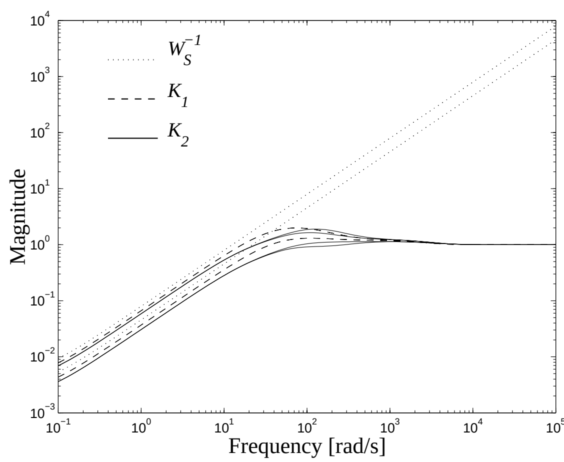
Figure A.4: Maximum singular values of closed loop system and μ-plots



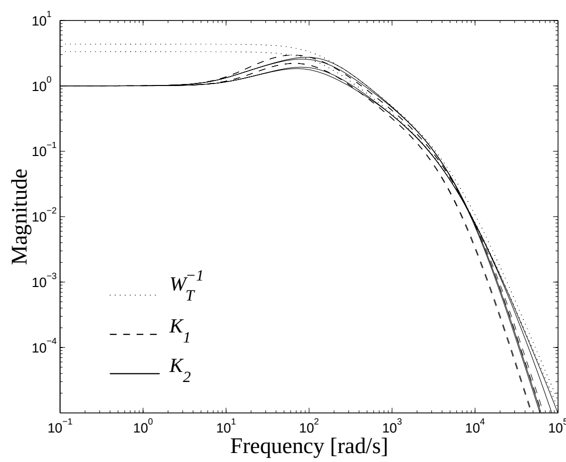
(a) Singular value plots of controller K_1, K_2



(b) Singular value plots of loop transfer function L



(c) Singular value plots of sensitivity function S



(d) Singular value plots of complementary sensitivity function T

Figure A.5: Singular value plots of controller K_1, K_2, loop transfer function $L = GK$, sensitivity function $S = (I + GK)^{-1}$ and complementary sensitivity function $T = GK(I + GK)^{-1}$

謝辞

本研究を進めるにあたり，暖かい御指導と御支援を賜わりました元ロボティクス講座教授，示村悦二郎先生をはじめ，主テーマ指導教官として懇切丁寧に御指導して頂いた藤田政之助教授の心より感謝致します．また，日頃から有益な御助言や御討論を頂きました同講座の望山洋助手，金沢大学工学部の滑川徹助手，同講座博士後期過程の諸先輩方に心より感謝致します．そして，お互いに励まし合い有益な議論の場を持つことのできた同講座の諸兄に感謝致します．

参考文献

[1] 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会 編，磁気浮上と磁気軸受，コロナ社，1993.

[2] 日本機会学会 編，新技術融合シリーズ：第 1 巻 磁気軸受の基礎と応用，養賢堂，1995.

[3] 松村，小林，秋山，横軸形磁気軸受の基本方程式と制御系設計，電気学会論文誌 C，101，6，pp.137-144，1981.

[4] 松村，吸引制御横軸形磁気軸受の基本方程式 (非対称の場合)，昭和 57 年電気学会全国大会 804，1982.

[5] 畠，藤田，松村，Loop Shaping 法による磁気軸受の H^{∞} 制御，電気学会リニアドライブ研究会資料，LD-91-119，1991.

[6] M.Fujita, K.Hatake, F.Matsumura Loop Shaping Based Robust Control of a Magnetic Bearing, IEEE Control Systems Magazine, pp.57-65, August 1993.

[7] M.Fujita, K.Hatake, F.Matsumura and K.Uchida, An experimental evaluation and comparison of H_{∞}/μ control for a magnetic bearing, Preprints, 12th IFAC World Congress, Sydney, vol.4, pp.393-398, 1993.

[8] F.Matsumura, T.Namerikawa, K.Hagiwara and M.Fujita, Application of Gain Scheduled H_{∞} Robust Controllers to a Magnetic Bearing, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.4, No.5, pp.484-493, September 1996.

[9] M.Fujita, T.Namerikawa, F.Matsumura, and K.Uchida, μ-Synthesis of an Electromagnetic Suspension System, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.40, No.3, pp.530-536, 1995.

[10] 藤田，滑川，磁気浮上系の不確かさの構造と μ-設計，電学論 C，118，3，1998.

[11] 藤田，ロバスト制御性能と μ-シンセシス，システム/制御/情報，Vol.37，No.2，pp.93-101，1993.

[12] 杉江，陳，構造化特異値 μ を用いた安定解析 –実数 μ 解析，システム/制御/情報，Vol.42，No.10，pp.521-528，1998.

[13] 木村，制御とモデル，計測と制御，Vol.37，No.4，pp.228-234，1998.

[14] 木村，モデルとは何か，数理科学，No.423，pp.5-10，1998.

[15] 原，ロバスト制御とモデル，数理科学，No.423，pp.26-32，1998.

[16] 杉江，ロバスト制御のための同定とモデル検証，計測と制御，Vol.37，No.4，pp.235-240，1998.

[17] 津村，不確かさと制御系の同時設計，計測と制御，Vol.37，No.4，pp.241-248，1998.

[18] 特集 制御のためのモデリング，計測と制御，Vol.37，No.4，1998.

[19] 特集 モデルとモデリング，数理科学，Vol.423，1998.

[20] システム制御情報学会 編，制御系設計 H_∞ 制御とその応用—，朝倉書店，1994.

[21] S.Skogestad and I.Postlethwaite, Multivariable Feedback Control, John Wiley & Sons, 1997.

[22] J.C.Doyle, A.Packard and K.Zhou, Review of LFTs, LMIs, and μ, Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1227-1260, 1991.

[23] P.M.Young and J.C.Doyle, Computaion of μ with real and complex uncertainties, Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1230-1235, 1990.

[24] K.Zhou, J.C.Doyle and K.Glover, Robust and Optimal Control, Prentice-Hall, 1996.

[25] K.Zhou and J.C.Doyle, Essentials of Robust Control, Prentice-Hall, 1998.

[26] G.J.Balas, J.C.Doyle, K.Glover, A.Packard and R.Smith, μ-Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, The Math Works, 1995.

[27] R.D'Andrea and S.Khatri, Kalman Decomposition of Linear Fractional Transformation Representations and Minimality, Proceedings of 1997 American Control Conference, 1997.