

Title	時間性を表現する含意を持つ論理
Author(s)	菊池, 健太郎
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1237">http://hdl.handle.net/10119/1237</a>
Rights	
Description	Supervisor:石原 哉, 情報科学研究科, 修士

# 時間性を表現する含意を持つ論理

菊池 健太郎

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999年2月15日

キーワード: クリプキセマンティクス, 直観主義論理, 完全性, 埋め込み.

様相論理のセマンティクスとしてよく知られているクリプキセマンティクスでは, 可能世界の集合, 到達可能関係と呼ばれるその集合上の二項関係, そして各可能世界において成立する基本命題を定める付値からなる三つ組を基にしてそれぞれの論理式の解釈が行なわれる. 直観主義論理や中間論理, あるいは厳密含意を持つ論理といった様相演算子を持たない命題論理に対するクリプキセマンティクスでは, ある可能世界で論理式  $A \rightarrow B$  が成り立つのは, その可能世界から到達可能な全ての可能世界において,  $A$  が成り立つならば  $B$  が成り立つときであるとされる. 半順序関係を到達可能関係とする直観主義論理の場合には, それを時間的な順序関係とみなすことによって,  $A \rightarrow B$  が成り立つのは, それ以後の世界では  $A$  が成り立つならば  $B$  が成り立つときであると考えることができる.

本論文では, 上にあげた直観主義論理等の場合とは  $A \rightarrow B$  の解釈が異なるクリプキセマンティクスを提案する. そこでは, 到達可能関係は直観主義論理の場合と同じように半順序関係であるが,  $A \rightarrow B$  が成り立つことの直観的な意味を,  $A$  が成り立っている間は  $B$  が成り立つこととする. この解釈によって, それぞれの論理式が成立し続ける時間を比較することで, 時間に関するより詳細な表現が可能となる.

一般にクリプキセマンティクスでは, 可能世界の集合と到達可能関係の組をクリプキフレーム (または, 単にフレーム) といい, さらに付値を加えた三つ組をクリプキモデルという. また, あるフレーム上の全ての付値と全ての可能世界で成立する論理式は, そのフレームで恒真であるという. 本論文で提案するクリプキセマンティクスでは,  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  や  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$  といった, 直観主義論理のクリプキセマンティクスでは任意のフレームで恒真となる論理式が, 必ずしも成り立たない可能世界を持つクリプキモデルが存在する. 逆に, 直観主義論理のあるフレームでは恒真とはならない論理式のうちの一つである  $A \vee \neg A$  などが, そこでは任意のフレームで恒真となる.

提案されるクリプキセマンティクスに対する形式体系としては, ヒルベルト流の形式体系が提供される. この体系の公理と推論規則から導出される全ての論理式は, クリプキ

セマンティクスの任意のフレームで恒真であるという健全性を示すことができる。逆に、任意のフレームで恒真となる論理式が全てこの体系で導出されるという性質を完全性という。完全性を示すためには、通常は、導出されない論理式に対してそれが成り立たない可能世界を持つクリプキモデルを構成するという方法をとる。その際、矛盾が導かれないある種の論理式の集合を可能世界とするカノニカルモデルと呼ばれるクリプキモデルを構成する。直観主義論理の場合には、カノニカルモデルの到達可能関係として、可能世界である論理式の集合の間の包含関係をとる。そして、その集合の要素である論理式とその可能世界で成り立つ論理式とが一致するように付値を定める。このようにして、形式体系で導出されない論理式はカノニカルモデルのある可能世界では成立しないことが示され、完全性が証明される。しかしながら、本論文で提案されるクリプキセマンティクスでは、カノニカルモデルを構成する際に、同じ集合を異なる可能世界とみなさなければならない場合があり、したがって、直観主義論理の場合のように到達可能関係として集合の間の包含関係をとることはできない。そのため、カノニカルモデルを構成するには別の方法を考案しなければならず、完全性の証明は本論文では課題として残された。

前述のように、直観主義論理のクリプキセマンティクスと本論文で提案されるクリプキセマンティクスとの間には、恒真性について一方が他方に含まれるという関係があるわけではないが、次のような意味で直観主義論理を提案されるクリプキセマンティクスに対応する論理に埋め込むことが可能である。すなわち、任意の論理式  $A$  に対して、 $A$  が直観主義論理の任意のフレームで恒真になることと  $Tr(A)$  が提案されるクリプキセマンティクスの任意のフレームで恒真になることが同値となるような変換  $Tr$  が存在する。本論文ではそのような変換を具体的に与えることによって、直観主義論理のそれぞれの論理式に対して、提案されるクリプキセマンティクスでそれと同じ意味を持つ論理式が存在することを示した。このことから、本論文で提案されるクリプキセマンティクスでは確かに直観主義論理よりも詳細な表現が可能となっていることがわかる。