Title	項書換え系における到達可能性の決定問題
Author(s)	安藤，欣司
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1239
Rights	
Description	Supervisor:外山 芳人，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

項書換え系における到達可能性の決定問題

指導教官　外山芳人 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

学生番号 710005
安藤欣司

1999 年 2 月 15 日

審査委員主査　外山芳人教授
審査委員　石原哉助教授
審査委員　二木厚吉教授

目 次

第 1 章

はじめに

1.1　研究の背景・目的

項書換え系 (Term Rewriting System, TRS) とは、計算を項の書換えで表現する数学的な計算モデルである。項書換え系は、等式を左辺から右辺への書換えとみなす事により自然な計算モデルが得られるため、関数型言語、代数的仕様のような等式に基づくプログラミングや、等式論理による定理自動証明やプログラムの変換・検証などを研究する上で、重要な役割を担っている [4]。項書換え系では書換え規則によってある項からある項へ到達できるとき、2 つの項は書換え系に関してを到達可能性をもつという。また、ある性質が判定できることを決定可能であるといい、判定できないことを決定不能という。このよう決定可能・決定不能を扱う問題を決定問題という。一般的に項書換え系における到達可能性の決定問題は決定不能である。そのため、項書換え系における到達可能性が決定可能であるためのさまざまな十分条件が研究されてきた。

従来までの項書換え系における到達可能性が決定可能である代表的な十分条件として、W.S.Brainerd(1969) による両辺に変数を持たない条件である基底項書換え系 (GTRS)[17] がある。最近では、K.Salomaa(1988)[14] による左辺の深さが 1 以上かつ右辺の深さが 1 以下の条件である項書換え系 (monadic TRS) や、これを拡張した J.Coquide ら (1994)[13] による左辺の変数の深さ 1 以上かつ右辺の変数の深さが 1 以下である項書換え系 (semi-monadic TRS) がある。また、F.Jacquenmard[15] による両辺に共通して現れる変数の左辺での深さが 1 以下の条件である成長項書換え系 (growing TRS) があがる。これらの研究は木オートマトンによる解析で行なわれている。木オートマトンは項書換え系のさまざまな決定問題に対して、大変に有効であることを知られている [11,16]。これは、木オートマトンでは書換え規則を状態遷移規則として活用することによって、受理言語を正規表

現的に扱うことができるためである。

本論文では、木オートマトンを活用して到達可能性の決定問題について取り上げていく。本論文の目的として、二つがあげられる。一つの目的として、一般到達可能性を提案 [8] し、成長項書換え系では一般到達可能性が決定可能であることを示すことである。一般到達可能性は到達可能性を拡張したもので、以下のように定義する。

定義 項書換え系 R、項 s,t、項の集合 $S,T(s\in S,t\in T)$ が与えられたとき、以下の条件をみたすとき、一般到達可能性をもつという。

$s \underset{R}{\Rightarrow} T$ 項 s から項の集合 T に含まれる項 t へ項書換え系 R によって到達可能である。

$S \underset{R}{\Rightarrow} T$ 項の集合 S に含まれるすべての項 s から項の集合 T に含まれる項 t へ項書換え系 R によって到達可能である。

この決定可能を示すために木オートマトンを導入する。一般到達可能性は、項 s が成長項書換え系 R と項の集合 T によって作成した木オートマトンを受理されるかで判定できる。このことによって、F.Jacquemard が示した到達可能性 [15] を真に含む性質をであることを示される。

また、本論文のもう１つの目的は、メンバーシップ強条件付き項書換え系を提案し、この項書換え系において到達可能性が決定可能であることを示すことである。メンバーシップ強条件付き項書換え系は以下のような条件をみたす項書換え系 R である。

定義 項書換え系 R が以下の条件をみたすとき、R をメンバーシップ強条件付き項書換え系という。

- R での書換え規則の両辺に共通して現れる変数だけがメンバーシップ条件をもつ。
- メンバーシップ条件の集合 M には、M での項書換え系 R_M が付随している。ここで、R に含まれるすべての集合の集まりを $\mathcal{M}$ とすると、M の各要素は $R\cup\biguplus_{M\in\mathcal{M}} R_M$ に関して合流性と停止性をもち、かつ $R\cup\biguplus_{M\in\mathcal{M}} R_M$ に関して正規形である M の要素は有限個である。
- R の左辺は、メンバーシップ条件の集合での関数記号を使った項をもたない。

メンバーシップ条件付き項書換え系 [12] は項書換え系と同様に一般的に到達可能性は決定不能である。メンバーシップ強条件付き項書換え系は、メンバーシップ項書換え系のメンバーシップ条件を強くすることによって、到達可能性の決定可能を導くものである。また、成長項書換え系での両辺に共通して現れる変数が深さ１という十分条件を変数を集合

として制限することによって、制限を取り除いている。この決定可能を示すために、一般到達可能性と同様に木オートマトンを導入した。そのため、メンバーシップ条件である項書換え系において、より強力であると考えられる。

この項書換え系の到達可能性が決定可能であることが証明されたことによって、メンバーシップ強条件付き項書換え系は深さによる制限がないので、K.Salomaa(1988)、J.Coquideら (1994)、F.Jacquenmard(1996) らが提案した高さの制限による項書換え系を大きく拡張したものであるといえる。このことから、両辺に共通して現れる変数が集合に制限されたシステムの解析において、大変有効な手法であるといえる。

1.2 構成

本論文の構成は次の通りとなっている。まず、2章で本論文を通して使用される項書換え系および木オートマトンに関する用語を定義する。次に、3章で一般到達可能性を提案し、この決定問題についての証明を行なう。また、4章ではメンバーシップ強条件付き項書換え系を提案し、この決定問題についての証明を行なう。最後に5章で本論文の結果と今後の課題について述べる。

第 2 章

準備と従来の結果

この章では、項書換え系に関する基本的な用語、本研究で使われる概念や性質、従来の結果、本研究で利用する木オートマトンについて定義する。

2.1 基本用語

この節では、項書換え系に関する基本的な用語や概念を定義する。

定義 2.1.1 関数記号の集合を $\mathcal{F} = \{f, g, h, \cdots\}$、変数の集合を $\mathcal{V} = \{x, y, z, \cdots\}$（ただし、$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} \neq \phi$）とする。このとき、**項** $s, t, u, \cdots$ は写像 $arity : \mathcal{F} \to \mathcal{N}$ を用いて次のように再帰的に定義される。

- $x \in \mathcal{V}$ は項である。
- $f \in \mathcal{F}, arity(f) = n\,(n \geq 0)$ に対し、$t_1, \cdots, t_n$ が項であるならば $f(t_1, \cdots, t_n)$ も項である。

$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ により生成される項全体からなる集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$、$\mathcal{F}$ だけからなる変数をもたない項（**基底項**）の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と記す。また、$arity(f) = 0$ の項を**定数**と呼ぶ。

二つの項 t_1, t_2 が同一ならば $t_1 \equiv t_2$ と記す。また、項 $t \equiv f(t_1, \cdots, t_n)$ に出現している変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表し、最外の関数記号 f を $root(f(t_1, \cdots, t_n)) = f$ で記し**根記号**と呼ぶ。

定義 2.1.2　文脈 Cとは、$\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ の要素のことである（ただし $\square$ は $\mathcal{F}$に含まれない定数とする）。$n(\geq 0)$ 個の $\square$ の出現をする文脈 Cを $C[\square, \cdots, \square]$ で表し、$C[\square, \cdots, \square]$ に出現する $\square$ を左から順に $t_1, \cdots, t_n$で置き換えて得られる項を $C[t_1, \cdots, t_n]$ で表す。特に $C[\ ]$ は $\square$ の出現が一つの文脈を表す。

定義 2.1.3　正整数の列の集合を N_+^*を用いて項に出現する関数記号の**出現位置**を以下のように定める。

- 根記号の出現位置をϵ（空列を意味する）とする。
- $C[f(t_1, \cdots, t_n)]$ における fの出現位置が u のとき、各 t_iの根記号の出現位置を $u{\cdot}i$ とする。

この出現位置に関して、$u \prec v \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists w, v = u{\cdot}w$ で半順序$\prec$を定義する。また、項 t の**部分項**で出現位置 u を根とする部分項 t'を t/u で記す。この時、出現位置 $u \prec v$に対して、t'は vの内側に出現するという。特に $u \neq \epsilon$のとき t'を t の真部分項と呼ぶ。

定義 2.1.4　項の**深さ**とはその項に対する出現位置の文字列数である。次のように項 t の出現位置 u として、項 t の深さ $|u|$ を再帰的に定義できる。

- $u = \epsilon$であるとき、$|u| = 0$ とする。
- $u = v{\cdot}w$（vは１つの列）であるとき、$|u| = 1 + |w|$ とする。

定義 2.1.5　代入θは変数から項への写像である。これは

$$\theta(f(t_1, \cdots, t_n)) \equiv f(\theta(t_1), \cdots, \theta(t_n))$$

のように項から項への写像に拡張される。以後は$\theta(t)$ を $t\theta$ で略記する。

例 2.1.6　項、部分項、出現位置、高さ、代入

$\mathcal{F}$が a, b を定数、gを引数１の関数、f, h を引数２の関数とするとき、以下のように記す。

$$\mathcal{F} = \{f/2, h/2, g/1, a/0, b/0\}$$

このとき、$x, a, b, g(x), g(a), f(a, b), f(h(a, x), g(g(g(y)))), \cdots$などは $\mathcal{F}$から作られる項であり、項は無限に存在する。

また、項 $t \equiv f(g(a), h(b, g(x))$ とするとき、部分項の集合 Sとする。

$$T = \{f(g(a), h(b, g(x))), g(a), a, h(b, g(x)), b, g(x), x\}$$

このとき、出現位置の集合 Pとする。

$$U = \{\epsilon, 1, 2, 1{\cdot}1, 2{\cdot}1, 2{\cdot}2, 2{\cdot}2{\cdot}2\}$$

このとき、この出現位置の集合 Uに対する深さの集合を Hとする。

$$H = \{0, 1, 2, 3\}$$

また、$\theta_a(x) = a, \theta_b(x) = g(b)$ とすると、以下のようになる。

$$\theta_a(t) = f(g(a), h(b, g(\underline{a}))$$
$$\theta_b(t) = f(g(a), h(b, g(\underline{g(b)})))$$

2.2　項書換え系

この節では、文献 [5,10] に従って項書換え系 (TRS) を定義する。項書換え系を計算モデルと考えると、項が計算の対象を表し、項の書換えが計算に対応する。

定義 2.2.1　書換え規則とは、項 l, rの順序対 (l, r) で $l = x \notin \mathcal{V}$ である。 また、順序対 (l, r) に対して、項 lを**左辺**、項 rを**右辺**と呼ぶ。書換え規則の集合 Rによる 2 項関係 $\underset{R}{\to}$ を以下のように定義する。

$$t \underset{R}{\to} s \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\{l \to r\} \in R, \exists C[\ ], \exists\theta, t \equiv C[l\theta] \text{ かつ } C[r\theta]$$

Rが明らかな場合には $t \underset{R}{\to} s$ を $t \to s$ で略記する。ここで、$t \underset{R}{\to} s$ を t から s への**リダクション**と呼ぶ。また、t の部分項 $l\theta$の出現を**リデックス**と呼ぶ。Rについてリダックスを持たない項を Rに関する**正規形**と呼ぶ。正規形の集合を NFと記す。関係 $\underset{R}{\to}$ の反射推移閉包を $\overset{*}{\underset{R}{\to}}$ 、推移閉包を $\overset{+}{\underset{R}{\to}}$ 、対象閉包 $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}}$ で表す。

定義 2.2.2　項書換え系 (TRS) は、関数記号 $\mathcal{F}$、書換え規則の集合 $R = \{l_1 \to r_1, \cdots, l_n \to r_n\}$ によって定義される組 $(\mathcal{F}, R)$ である。

以後、書換え規則の集合 Rで項書換え系を表す。

例 2.2.3　項書換え系

次の例は $0, S(0), S(S(0)), \cdots$ を自然数 $0, 1, 2, \cdots$ とみなした場合、自然数上の加算に対応する項書換え系 R_1である。

$$\mathcal{F} = \{0/0, s/1\}$$

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} x + 0 & \rightarrow & x \\ x + S(y) & \rightarrow & S(x+y) \end{array} \right\}$$

この項書換え系において、次のようなリダクション列が存在する。

$$\underline{S(S(0)) + S(0)} \rightarrow S(\underline{S(S(0)) + 0}) \rightarrow S(S(S(0)))$$

このリダクション列は項 $S(S(0)) + S(0)$ を評価した結果が正規形 $S(S(S(0)))$ となることを表し、$2 + 1$ を計算した解が 3 であるという事を意味する。ここで、下線はリダックスに対応する。

定義 2.2.4[1,2,6]　全規則の両辺の項が基底項であるとき、その書換え系を**基底項書換え系** (Ground Term Rewriting System, GTRS) という。

定義 2.2.5　項 t に出現する変数がすべて相異なるとき、項 t は**線形**であり、そうでないとき**非線形**であるという。全規則の両辺の項が線形であるとき、その書換え系を**線形系**であるという。

定義 2.2.6[15]　**成長項書換え系** (growing TRS) とは、すべての書換え規則 $l \rightarrow r$が以下の条件を満たす線形項書換え系である：両辺に同時に現れる変数 $x \in \mathcal{V}$について、lの部分項 x の出現位置が u ならば $|u| \leq 1$。以後、R_Gで成長項書換え系を表す。

例 2.2.7　成長項書換え系

$\mathcal{F} = \{f/2, h/2, g/1, a/0, b/0\}$ とする。このとき、以下の R_2は成長項書換え系である。

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} f(\underline{x}, g(y)) & \rightarrow & g(\underline{x}) \\ f(x, \underline{y}) & \rightarrow & h(g(\underline{y}), a) \end{array} \right.$$

まず、一番目の書換え規則について、両辺に同時に現れる変数 x について、左辺の x の深さは１以下である。また、２番目の書換え規則について、両辺に同時に現れる変数 yについて、左辺の x の深さは１以下である。

2.3 性質と従来の結果

この節で項書換え系に関する性質 [9] を定義する。ここで述べる性質は項書換え系において、一般的には決定不能であることが知られている [9]。そのため、さまざまな十分条件の研究が行なわれている。また、この節では代表的な十分条件について取り上げておく。

定義 2.3.1 項書換え系 R、二つの基底項 $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が与えられたとき、$s \xrightarrow[R]{*} t$ が成り立つならば、項 s, t が Rに関して**到達可能性**をもつという。

到達可能性の決定問題として、以下の十分条件が代表的である。

- 基底項書換え系において、到達可能性は決定可能である [17]。
- R'をすべての書換え規則 $l \to r$が以下の条件を満たす線形項書換え系とする：項 l, r の出現位置を u_l, u_rとすると、深さについて $|u_l| \geq 1$ かつ $|u_r| \leq 1$。このとき、R'において、到達可能性は決定可能である [14]。
- R' をすべての書換え規則 $l \to r$が以下の条件を満たす線形項書換え系とする：$x \in \mathcal{V}ar(l), y \in \mathcal{V}ar(r)$ とする。すべての x, yに対して、x, yの出現位置を u_x, u_yとすると、深さについて $|u_x| \geq 1$ かつ $|u_y| \leq 1$ である。このとき、R'において、到達可能性は決定可能である [13]。
- 成長項書換え系において、到達可能性は決定可能である [15]。

定義 2.3.2 項書換え系 R、項 s が与えられたとき、$s \xrightarrow[R]{*} tinNF$であるような正規形 t が存在するならば、項 s が Rに関して**正規化性**をもつという。

正規化性の決定問題として、以下の十分条件が代表的である。

- 成長項書換え系において、正規化性は決定可能である [15]。

定義 2.3.3 Rにおいて、任意の項 t_1, t_2, t が $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ならば、$t_1 \xrightarrow{*} s \xleftarrow{*} t_2$となる項 s が存在するとき、Rは**合流性（チャーチ・ロッサー性）**を持つという。

合流性の決定問題として、以下の十分条件が代表的である。

- 基底項書換え系において、合流性は決定可能である [1,2,6]。

定義 2.3.4　Rにおいて、無限のリダクション列 $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$が存在しない時、$R$は停止性を持つという。

定義 2.3.5[3]　Rにおいて、任意の基底項 t_1, t_2, s が $t_1 \overset{*}{\leftarrow} s \overset{*}{\to} t_2$ならば、$t_1 \overset{*}{\to} t \overset{*}{\leftarrow} t_2$となる基底項 t が存在するとき、$R$が**基底合流性**を持つという。

基底合流性の決定問題として、以下の十分条件が代表的である。

- R'をすべての書換え規則 $l \to r$が以下の条件を満たす停止性をもつ書換え系とする：左辺 lが基底項または右辺の真部分項。このとき、R' において、基底合流性は決定可能である [16]。

2.4　木オートマトン

この節では、本研究で利用する木オートマトンについて文献 [11] に従って定義する。木オートマトンは、書換え系のさまざまな決定問題に対して有効な解析手法であることが知られている [16]。

定義 2.4.1　記号集合 $\mathcal{F}$、状態の有限集合 Q、終端状態の有限集合 $Q_f (\subset Q)$ とする。また、$f \in \mathcal{F}, arity(f) = n$ で $\{q_1, \cdots, q_n, q\} \in Q$ とすると、Δは $f(q_1, \cdots, q_n) \to q$の形の規則をもつ$\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup Q)$ に関する基底書換え系である。このとき、木オートマトンは、$(\mathcal{F}, Q, Q_f, \Delta)$ の４つの集合から成り立っている。

基底項 t が木オートマトン $\mathcal{A}(\mathcal{F}, Q, Q_f, \Delta)$ によって受理されることは、$t \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q$ [1]であるような $q \in Q_f$が存在することの必要十分条件である。また、木オートマトン $\mathcal{A}$ に受理される基底項の集合を**受理言語** $L(\mathcal{A})$ と呼ぶ。木オートマトンの代表的な性質として、以下の命題がある。更に詳しい性質については文献 [7,9,11] を参照することが望ましい。

命題 2.4.2　有限木オートマトンを受理する基底項の集合の受理言語は論理演算に閉じている。

言い替えると、すべての木オートマトン $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$において、$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, \mathcal{T}(\mathcal{F}) \backslash L(\mathcal{A}_1)$ をそれぞれ受理する木オートマトンが存在する。

[1] $t \xrightarrow[\Delta]{*} q$でも記す。

命題 2.4.3　木オートマトンにとって、メンバーシップ関係は決定可能である。

言い換えると、ある基底項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ と木オートマトン $\mathcal{A}$ が与えられた時、$t \in L(\mathcal{A})$ であるかどうかが決定可能である。

命題 2.4.4　木オートマトンにとって、空の問題は決定可能である。

言い替えると、木オートマトン $\mathcal{A}$ に対して $L(\mathcal{A}) = \phi$ であるかないかを決定するアルゴリズムが存在する。

例 2.4.5　木オートマトン

$\mathcal{A} = (\mathcal{F}, Q, Q_f, \Delta)$ とする。

$\mathcal{F} = \{f/2, g/1, a/0\}, Q = \{q_a, q_g, q_f\}, Q_f = \{q_f\},$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{rcl} a & \rightarrow & q_a \\ g(q_a) & \rightarrow & q_g \\ f(q_g, q_a) & \rightarrow & q_g \\ f(q_a, q_a) & \rightarrow & q_f \end{array} \right\}$$

項 $f(a, a)$ はこの木オートマトンの受理言語である。

$$f(\underline{a}, a) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(q_a, \underline{a}) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad \underline{f(q_a, q_a)} \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad q_f$$

しかし、項 $f(g(a), g(a))$ と $f(a, g(a))$ はそれぞれこの木オートマトンの受理言語ではない。

$$f(g(\underline{a}), g(a)) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(g(q_a), \underline{a}) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(\underline{g(q_a)}, q_a) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(q_g, q_a) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad q_g$$

$$f(a, g(\underline{a})) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(\underline{a}, g(q_a)) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(q_a, \underline{g(q_a)}) \quad \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \quad f(q_g, q_a)$$

第 3 章

一般到達可能性

この章では、一般到達可能性を定義し、成長項書換え系では一般到達可能性が決定可能であることを証明する。

3.1　一般到達可能性

一般到達可能性は、到達可能性を拡張したものである。到達可能性は、「ある項 s がある項 t へ到達できる事」を示しているが、一般到達可能性はこの項 s と項 t を拡張したものである。一般到達可能性は、以下のような 2 つの性質である。正確な定義は以下の定義 3.1.1、定義 3.1.2 になる。

I. ある項がある項の集合に到達できる

II. ある項の集合がある項の集合に到達できる

定義 3.1.1　一般到達可能性 $s \underset{R}{\Rrightarrow} T$とは、項書換え系 R、項 s、項の集合 Tが与えられたとき、$s \xrightarrow[R]{*} t \in T$をみたす項 t が存在することである。

定義 3.1.2　一般到達可能性 $S \underset{R}{\Rrightarrow} T$とは、項書換え系 R、2 つの項の集合 S, Tが与えられたとき、項の集合 Sに含まれる任意の項 s に対して、$s \xrightarrow[R]{*} t \in T$をみたす項 t が存在することである。

3.2 木オートマトンの作成

この節で成長項書換え系において一般到達可能性を判定するために使われる木オートマトンの作成方法を説明する。ここでの木オートマトンは、F.Jacquemard が提案した [15] 木オートマトンを拡張したものである。

定理 3.2.1 ある線形項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ において、 t の代入例である基底項の集合を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_t$が存在する。

定義 3.2.2 記号集合 $\mathcal{F}$として、成長項書換え系 R_Gにおける一般到達可能性を判定するために木オートマトン $\mathcal{A}$ を以下のように構成する。

(1) $\mathcal{A}_T$を作成する

項の集合 Tを受理する木オートマトン $\mathcal{A}_T = (\mathcal{F}, Q, Q_T, \Delta_T)$ を作成する。

(2) $\mathcal{A}_l$ を作成する

全ルールの引数の集合 $\mathcal{L} = \biguplus_{f(l_1,...,l_n)\to r\in R_G} \{l_1, ..., l_n\}$ とする。このとき、すべての $l \in \mathcal{L}$ について、lの代入例の集合を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_l$を作成する。このとき、$\mathcal{A}_l$はそれぞれ互いに素 (disjoint) である。

(3) $\mathcal{A}$ を作成する

$\mathcal{A}_0 := \biguplus_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{A}_T$ とし、以下の推論規則を繰り返し適用することで $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, Q, Q_T, \Delta)$ を得る。このとき、それぞれの木オートマトンは互いに素である。

推論規則

$$\frac{f(l_1, \cdots, l_n) \to r \in R_G \quad r\theta \xrightarrow[\Delta_k]{*} q \quad \theta : \mathcal{V} \to Q}{f(q_1, \cdots, q_m) \to q \in \Delta_{k+1}}$$

すべての $l_i (1 \le l_i \le n)$ において、以下の q_iを得る。

$$q_i = \begin{cases} \mathcal{A}_l\text{の終端状態} & (l_i \notin \mathcal{V}) & \cdots\text{条件 1} \\ x\theta & (l_i = x \in \mathcal{V}) & \cdots\text{条件 2} \\ Q\text{ のいずれかの状態} & (l_i\text{はそれ以外}) & \cdots\text{条件 3} \end{cases}$$

F.Jacquemard[15] は作成 (1) での項の集合を正規形の集合 NFとしたが、本研究では一般到達可能性を判定するため、項の集合 Tを受理する木オートマトンとした。

3.3 決定可能性

この節では、前節で定義した木オートマトンによって、成長項書換え系において一般到達可能性が決定可能であることを証明する。また、ここでの証明は F.Jacquemard の証明 [15] の正規形の集合を集合 T として、証明を行なった。

補題 3.3.1 すべての k、すべての基底項 $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ と $\mathcal{A}_l(l \in \mathcal{L})$ のすべての終端状態 q_l について、 $s \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_l$ ならば、$s \xrightarrow[R_G]{*} l\sigma$ で項 $l\sigma$ は lの基底代入例である。

[証明] kに関する帰納法によって証明を行なう。

1. $k = 0$ とする。それぞれの互いに素な木オートマトンの和として、$\mathcal{A}_0$を作成している。そのため、ある木オートマトン $\mathcal{A}_l(l \in \mathcal{L})$ の終端状態 q_lとして、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} q_l$ならば、項 s は lの基底代入例である。

2. kのとき、成り立つと仮定する。また、ある木オートマトン $\mathcal{A}_l(l \in \mathcal{L})$ の終端状態 q_l として、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_l$と仮定する。

   このとき、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_l$のリダクションの流れにおいて、$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$の規則を $d(\geq 0)$ 回使ったリダクションとして、d に関する帰納法を行なう。

   (a) $d = 0$ ならば、kにおける帰納法の仮定より成り立つ。

   (b) $d > 0$ ならば、リダクションの流れにおいて、$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$の規則を初めて使ったときについて考える。このとき、この規則を $f(q_1, \cdots, q_n) \to q$として、この規則は仮定の $f(l_1, \cdots, l_n) \to r \in R_G, r\theta \xrightarrow{*} q \in \Delta_k$ より推論規則によって $\mathcal{A}_k$に付け加えられたものとする。

   このとき、証明は以下の図のように表される。

$$
\begin{array}{ccccccc}
s \equiv & C[f(s_1, \cdots, s_n)] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[f(q_1, \cdots, q_n)] & & \\
 & {}_*\downarrow_{R_G} & & \downarrow_{\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k} & & \\
 & C[f(l_1, \cdots, l_n)\sigma] & & C[q] & \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} & q_l \\
 & \downarrow_{R_G} & & \uparrow_{\mathcal{A}_k} & & \\
 & C[r\sigma] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[r\theta] & &
\end{array}
$$

ここで、初めのリダクションが $C[f(s_1,\cdots,s_n)] \xrightarrow[R_G]{*} C[f(l_1,\cdots,l_n)]$ となることを示すために、代入σを定義する。R_Gは線形なので、それぞれ $l_i (1 \leq i \leq n)$ に対してある代入σ_iとして、σを互いに素な代入の和 $(\sigma = \uplus_{i=1}^{n} \sigma_i)$ とする。

このとき、それぞれの i について、$l_i = x \in \mathcal{V}$ならば、$x\sigma_i = s_i$とする。また、その他のとき、推論規則の条件 1 から q_iは A_lの終端状態である。d に関する帰納法の仮定から、$s_i \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_i$は $s_i \xrightarrow[R_G]{*} l_i\sigma_i$となるある基底代入$\sigma_i$が存在することを示す。

写像θは推論規則で定義している。それぞれの $i (1 \leq i \leq n)$ について、$l_i = x \in \mathcal{V}ar(r)$ は $x\theta = q_i$（推論規則の条件 2 ）と $x\theta = s_i \xrightarrow[R_G]{*} q_i$を含んでいるので、$r\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} r\theta$である。他のときは、成長項書換え系より $\mathcal{V}ar(r) \cap \mathcal{V}ar(f(l_1,\cdots,l_n)) \subseteq \{l_1,\cdots,l_n\}$ である。また、推論規則の条件 2 も $r\theta \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_i$を含んでいる。

d に関する帰納法の仮定より、$C[r\sigma]$ は lの基底代入例にリダクションされる。よって、s は基底代入例にリダクションされる。□

補題 3.3.2 ある 2 つの項 s, t、ある項の集合 Tとすると、すべての kにおいて、$L(\mathcal{A}_k) \subseteq \{s \mid \exists t \in T. s \xrightarrow[R_G]{*} t\}$ が成立する。

[証明] 補題 3.3.1 を使って、kに関する帰納法によって証明を行なう。

1. $k = 0$ とする。このとき、$\mathcal{A}_0$の作成方法より $L(\mathcal{A}_0) = L(\mathcal{A}_T)$ となるため、このときは成り立つ。
2. kのとき、成り立つと仮定する。$k+1$ について、$\mathcal{A}_{k+1}$の終端状態 q_fとして、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_f$ と仮定する。

ここで、補題 3.3.1 の証明と同様に、$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$の規則を使った回数 d に関する帰納法を使うと、証明は以下の図に表される。

$$
\begin{array}{ccccc}
s \equiv \ C[f(s_1,\cdots,s_n)] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[f(q_1,\cdots,q_n)] & & \\
{}_*\!\downarrow_{R_G} & & \downarrow_{\Delta_{k+1}\setminus\Delta_k} & & \\
C[f(l_1,\cdots,l_n)\sigma] & & C[q] & \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} & q_f \in Q_T \\
\downarrow_{R_G} & & \uparrow_{\mathcal{A}_k} & & \\
C[r\sigma] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[r\theta]] & &
\end{array}
$$

ここで、補題 3.3.1 より $C[f(s_1, \cdots, s_n)] \xrightarrow[R_G]{*} C[f(l_1, \cdots, l_n)]$ がいえる。また、他のリダクションについても補題 3.3.1 の証明と同様に行う。

$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$の規則を $d(\geq 0)$ 回使ったとして、d に関する帰納法の仮定より、$C[r\sigma]$ は項 $t \in T$にリダクションされる。よって、s は項 $t \in T$にリダクションされる。□

補題 3.3.3　ある 2 つの項 s, t、ある項の集合 Tとすると、$L(\mathcal{A}) \supseteq \{s \mid \exists t \in T. s \xrightarrow[R_G]{*} t\}$ が成立する。

[証明]　$s \xrightarrow[R_G]{*} t \in T$であると仮定する。このとき、このリダクション数を d 回として、d に関する帰納法より $s \in L(\mathcal{A})$ であることを証明する。

1. $d = 0$ のとき、$\mathcal{A}_0 := \biguplus_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{A}_T$ より $L(\mathcal{A}_T) \subseteq L(\mathcal{A})$ なので、$s \in L(\mathcal{A})$ である。
2. $d > 0$ のとき、初めてのリダクションの流れとして、代入σと $f(l_1, \cdots, l_n) \to r \in R_G$ を使用したと仮定する。

このとき、証明は以下の図に表される。

$$
\begin{array}{ccccc}
s \equiv & C[f(l_1, \cdots, l_n)\sigma] & \xrightarrow[R]{} & C[r\sigma] & \xrightarrow[R]{*} t \in T \\
& {}_*\!\downarrow_{\mathcal{A}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{A}} & \\
& C[f(q_1, \cdots, q_n)] & & C[r\theta] & \\
& & {}_{\mathcal{A}}\!\searrow & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{A}} & \\
& & & C[q] & \\
& & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{A}} & \\
& & & q_f \in Q_T &
\end{array}
$$

帰納法の仮定より $C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f$が導ける。このとき、このリダクションを仮定して、$r\theta \to q \in \Delta$を使う。

写像θは $\mathcal{A}$ によるこのリダクションから導ける。$l_i \in \mathcal{V}$であるそれぞれの $l_i (1 \leq i \leq n)$ について、対応する q_iは写像θよって定義される。このとき、q_iは推論規則の条件 1 をみたす。これから、Δの推論規則の作成から $C[f(q_1, \cdots, q_n)] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C[q]$ が可能であり、$s \in T$である。□

定理 3.3.4　成長書換え系 R_G に関して項の集合 $T = L(A_T)$ へ到達可能である項の集合を受理する木オートマトン $\mathcal{A}$ が存在する。

[証明]　定理 3.3.3 と定理 3.3.4 より $\exists q_f \in Q_f.s \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f \Leftrightarrow \exists t \in T.s \xrightarrow[R_G]{*} t$ が成立する。□

定理 3.3.5　成長項書換え系 R_G、項の集合 $T = L(\mathcal{A}_T)$ において、一般到達可能性 $s \underset{R_G}{\Rightarrow} T$ は決定可能である。

[証明]　定理 3.3.4 より一般到達可能性 $s \underset{R}{\Rightarrow}{}_G T$の決定問題は $\exists q_f \in Q_f.s \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f$が決定可能であるかに変換できる。また、定理 2.4.3 より $\exists q_f \in Q_f.s \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f$は決定可能なので、証明される。□

定理 3.3.6　成長項書換え系 R_G、項の集合 $S = L(\mathcal{A}_S)$、項の集合 $T = L(\mathcal{A}_T)$ において、一般到達可能性 $S \underset{R_G}{\Rightarrow} T$は決定可能である。

[証明]　一般到達可能性 $S \underset{R_G}{\Rightarrow} T$は、定義から $\forall s \in S.\exists t \in T.s \xrightarrow[R_G]{*} t$ となる。また、これは、以下のように変換できる。

$$\begin{aligned} \forall s \in S.\exists t \in T.s \xrightarrow[R]{*} t \quad &\Leftrightarrow \quad S \subseteq \{s \mid \exists t \in T.s \xrightarrow[R]{*} t\} = L(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \quad L(\mathcal{A}_S) \subseteq L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

ここで、$L(\mathcal{A}_S) \subseteq L(\mathcal{A})$ は定理 2.4.2 と定理 2.4.3 より決定可能である。よって、一般到達可能性 $S \underset{R_G}{\Rightarrow} T$も決定可能である。□

3.4　一般到達可能性からの展開

ここで、F.Jacquemard が提案した [15] 到達可能性が一般到達可能性によって証明できることを示す。

系 3.4.1[15]　R_Gにおいて（一般ではない）到達可能性 $s \xrightarrow[R]{*} t$ は決定可能である。

[証明]　$T = \{t\}$ とすれば、系 3.4.1 は定理 3.3.4 より直接受ける。□

さらに、木オートマトンによって受理可能な項の集合 Tを変化されることにより、定理 3.3.4 の系が得られる。代表的なものとして、正規形の集合を取り上げる。

系 3.4.2　R_Gに関する正規形の集合 NFに対して一般到達可能性 $s \underset{R_G}{\Rightarrow} T$は決定可能である。言い替えると、$R_G$に関する正規化性が決定可能である [7]。

例 3.4.3　R_Gに関する正規化性

成長項書換え系を以下の R_3として、R_3に関する正規形へリダクションされる項の集合を受理する木オートマトン $\mathcal{A}$ を作成する。このとき、正規形の集合 Tを受理する木オートマトンを $\mathcal{A}_{NF}$とする。

$\mathcal{F} = \{f/2, g/1, a/0\}$ として、

$$R_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} f(a,x) & \to & x \\ g(x) & \to & x \end{array} \right\}$$

(1) $\mathcal{A}_{NF} = (\mathcal{F}, Q_{NF}, Q_{NFf}, \Delta_{NF})$ とする。

$Q_{NF} = Q_{NFf} = \{q_a, q_f\}$

$$\Delta_{NF} = \left\{ \begin{array}{rcl} a & \to & q_a \\ f(q_a, q_f) & \to & q_f \\ f(q_f, q_f) & \to & q_f \end{array} \right\}$$

(2) a を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_{l_1} = (\mathcal{F}, Q_1, Q_{1f}, \Delta_1)$ とする。

$Q_{NF} = Q_{NFf} = \{q_1\}, \Delta_1 = \{a \to q_1\}$

(3) $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{F}, Q, Q_{NFf}, \Delta_0)$ とする。$Q = \{q_a, q_f, q_1\}$

$$\Delta_0 = \left\{ \begin{array}{rcl} a & \to & q_a \\ f(q_a, q_f) & \to & q_f \\ f(q_f, q_f) & \to & q_f \\ a & \to & q_1 \end{array} \right\}$$

(i) $\mathcal{A}_1$を作成

$$\frac{\{f(a,x) \to x \in R_G \quad q_a \xrightarrow{*} q_a \in \Delta_0}{f(q_1, q_a) \to q_a \in \Delta_1}$$

(ii) $\mathcal{A}_2$を作成

$$\frac{\{f(a,x) \to x \in R_G \quad q_f \xrightarrow{*} q_f \in \Delta_1}{f(q_1, q_f) \to q_f \in \Delta_2}$$

(iii) $\mathcal{A}_3$を作成

$$\frac{\{f(a,x) \rightarrow x \in R_G \quad q_1 \xrightarrow{*} q_1 \in \Delta_2}{f(q_1,q_1) \rightarrow q_1 \in \Delta_3}$$

(iiii) $\mathcal{A}_4$を作成

$$\frac{\{g(x) \rightarrow x \in R_G \quad q_a \xrightarrow{*} q_a \in \Delta_3}{g(q_a) \rightarrow q_a \in \Delta_4}$$

(v) $\mathcal{A}_5$を作成

$$\frac{\{g(x) \rightarrow x \in R_G \quad q_f \xrightarrow{*} q_f \in \Delta_4}{g(q_f) \rightarrow q_f \in \Delta_5}$$

(vi) $\mathcal{A}_6$を作成

$$\frac{\{g(x) \rightarrow x \in R_G \quad q_1 \xrightarrow{*} q_1 \in \Delta_5}{g(q_1) \rightarrow q_1 \in \Delta_6}$$

これ以上、推論規則が適用できないので、木オートマトンは $\mathcal{A}$ が以下のように作成される。

$\mathcal{A} = (\mathcal{F}, Q, Q_{NFf}, \Delta)$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{rclrcl} a & \rightarrow & q_a, & a & \rightarrow & q_1 \\ f(q_a,q_f) & \rightarrow & q_f, & f(q_f,q_f) & \rightarrow & q_f \\ f(q_a,q_1) & \rightarrow & q_a, & f(q_f,q_1) & \rightarrow & q_f \\ f(q_1,q_f) & \rightarrow & q_1, & g(q_a) & \rightarrow & q_a \\ g(q_f) & \rightarrow & q_f, & g(q_1) & \rightarrow & q_1 \end{array} \right\}$$

第 4 章

メンバーシップ強条件付き項書換え系の到達可能性

この章では、メンバーシップ強条件付き項書換え系を定義し、この項書換え系では到達可能性が決定可能であることを証明する。

4.1 メンバーシップ強条件付き項書換え系

メンバーシップ強条件付き項書換えは、外山が提案したメンバーシップ条件項書換え系 [12] に制限を加えたものである。また、成長項書換え系では、両辺に同時に現れる変数が左辺での出現の深さ 1 以内となっているが、メンバーシップ強条件付き項書換えでは、両辺に同時に現れる変数にメンバーシップ条件をつけることにより深さに対する制限を取り除く。

集合として、本論文では以下のように定義した論理値、Z_3などを使う。

例 4.1.1 **論理値** $(Bool)$ は以下のように帰納的に定義される。

- T, F は論理値である。
- B, Cがともに論理値ならば、以下のいずれも論理値である。

$$(\neg B), (B \wedge C), (B \vee C)$$

ここで、論理値の規則は以下のようになる。

$$\mathcal{F}_B = \{\mathsf{T}/0, \mathsf{F}/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2\}$$

$$R_B = \left\{ \begin{array}{lllllll} \neg\mathsf{T} & \to & \mathsf{F}, & \neg\mathsf{F} & \to & \mathsf{T} \\ \wedge(\mathsf{T},\mathsf{T}) & \to & \mathsf{T}, & \wedge(\mathsf{T},\mathsf{F}) & \to & \mathsf{F} \\ \wedge(\mathsf{F},\mathsf{T}) & \to & \mathsf{F}, & \wedge(\mathsf{F},\mathsf{F}) & \to & \mathsf{F} \\ \vee(\mathsf{T},\mathsf{T}) & \to & \mathsf{T}, & \vee(\mathsf{T},\mathsf{F}) & \to & \mathsf{T} \\ \vee(\mathsf{F},\mathsf{T}) & \to & \mathsf{T}, & \vee(\mathsf{F},\mathsf{F}) & \to & \mathsf{F} \end{array} \right\}$$

また、項 t が論理値であるとき、$t \in Bool$と記す。

例 4.1.2 Z_3とは、$0, S(0), S(S(0)), \cdots$を自然数$0, 1, 2, \cdots$とみなした場合、Z_3を自然数上で自然数 3 で割ったときの余りを正規形としてもつ集合である。ここで、Z_3の規則は以下のようになる。

$$\mathcal{F}_{Z_3} = \{0/1, S/1\}$$

$$R_{Z_3} = \{S(S(S(x))) \to x\}$$

$$Z_3 = \{t | t \xrightarrow[R_{Z_3}]{*} 0, \text{または}\, t \xrightarrow[R_{Z_3}]{*} S(0), \text{または}\, t \xrightarrow[R_{Z_3}]{*} S(S(0))\}$$

また、項 t が Z_3に含まれるとき、$t \in Z_3$と記す。

ここで、項 t が集合 Mに含まれるとき、$t \in M$と記し、その集合の規則 R_Mを記すと、以下の項書換え系が定義される。

定義 4.1.3[18] $M_1, \cdots, M_n$を集合としたとき、**メンバーシップ条件付き項書換え系** (Membership Conditional TRS) とは、書換え規則において、$\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \mathcal{V}ar(l) \cup \mathcal{V}ar(r)$ であるとき、$l \to r.x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n$の形となる規則が存在する項書換え系である。

例 4.1.4 メンバーシップ条件付き項書換え系

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_{Z_3} \cup \{f/2, g/2\}$,

$$\begin{array}{llll} f: & Bool \times Bool & \to & Bool \\ g: & Z_3 & \to & Bool \end{array}$$

とする。このとき、以下の R_4はメンバーシップ条件付き書換え系である。

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{lcll} f(x,y) & \rightarrow & g(z). & x,y \in Bool, z \in Z_3 \\ f(g(x),y) & \rightarrow & y. & x \in Bool, y \in Z_3 \end{array} \right\}$$

ここで、メンバーシップ強条件付き項書換え系を定義するために以下の諸定義を行なう。

定義 4.1.5　Rが、項 t について合流性をもつとは、任意の t_1, t_2について、$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\rightarrow} t_2$ならば、$t_1 \overset{*}{\rightarrow} s \overset{*}{\leftarrow} t_2$となる項 s が存在することである。

定義 4.1.6　Rが、項 t について停止性をもつとは、t から始まる無限のリダクションが存在しないことである。

定義 4.1.7　Rが以下の条件をみたすとき、Rは**メンバーシップ強条件付き項書換え系** (Strong Membership Conditional TRS) である。

- Rでの書換え規則の両辺に共通して現れる変数だけがメンバーシップ条件をもつ。
- メンバーシップ条件の集合 Mには、Mでの項書換え系 R_Mが付随している。ここで、Rに含まれるすべての集合の集まりを $\mathcal{M}$ とすると、Mの各要素は $R \cup \biguplus_{M \in \mathcal{M}} R_M$に関して合流性と停止性をもち、かつ $R \cup \biguplus_{M \in \mathcal{M}} R_M$に関して正規形である Mの要素は有限個である。
- Rの左辺は、メンバーシップ条件の集合での関数記号を使った項をもたない。

以後、メンバーシップ強条件付き項書換え系を R_{SM}と記す。また、R_{SM}に現れるすべての集合を要素にもつ集合を $\mathcal{M}$ と記す。

例 4.1.8　メンバーシップ強条件付き項書換え系

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_{Z_3} \cup \{f/1, g/1\}$

$$\begin{array}{lccc} f: & Bool & \rightarrow & Bool \\ g: & Z_3 & \rightarrow & Bool \\ h: & Bool & \rightarrow & Z_3 \end{array}$$

とする。このとき、以下の R_5はメンバーシップ強条件付き書換え系である。

$$R_5 = \left\{ \begin{array}{lcll} f(g(x)) & \rightarrow & g(x). & x \in Z_3 \\ g(h(x)) & \rightarrow & f(x). & x \in Z_3 \end{array} \right\}$$

4.2 木オートマトンの作成

この節では、メンバーシップ強条件付き項書換え系において、到達可能性を判定するために使われる木オートマトンを作成する。

以下の定理が参考文献 [15] の補題 2 より明らかである。

定理 4.2.1 R_{SM}に関して正規形の集合 NFを受理する木オートマトン $\mathcal{A}_{NF}$が存在する。

定義 4.2.2 メンバーシップ強条件付き項書換え系の到達可能性を判定するために木オートマトン $\mathcal{A}$ を以下のように構成する。

(1) $\mathcal{A}_U$を作成する

集合 Mでの R_Mに関する正規形の集合を M_{NF}とし、$\mathcal{M}_{NF}$を以下のように定義する。

$$\mathcal{M}_{NF} = \biguplus_{M \in \mathcal{M}} M_{NF}$$

このとき、各 $M_{NF}(\subseteq \mathcal{M}_{NF})$ のすべての $u \in M_{NF}$ について、R_Mによって u へ到達可能な Mの要素を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_u = (\mathcal{F}, Q_u, Q_{uf}, \Delta_u)$ を作成する[1]。また、それぞれの木オートマトンの状態 Q_uは互いに素とする。

このとき、この木オートマトンの和 $\mathcal{A}_U$を以下のようにする。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_U &= (\mathcal{F}, Q_U, Q_{Uf}, \Delta_U) \\ &:= \biguplus_{u \in \mathcal{M}_{NF}} \mathcal{A}_u \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{A}'_{NF}$を作成する

R_{SM}に関する正規形を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_{NF}$を作成する[2]。このとき、$\mathcal{A}'_{NF}$を以下のようにして作成する。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_{NF} &= (\mathcal{F}, Q'_{NF}, Q'_{NFf}, \Delta'_{NF}) \\ &:= (\mathcal{A}_{NF} \setminus \mathcal{A}_U) \cup \mathcal{A}_U \end{aligned}$$

[1]補足 A でこの木オートマトンが作成できることを証明する。

[2]定義 4.2.1 よりこの木オートマトンを作成できる。

(3) $\mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}$を作成する

ここで使用する記号を以下のように定義する。

$\mathcal{V}_c$: 書換え規則 $l \to r.x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n$の両辺に共通する変数の集合 $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}(l) \cap \mathcal{V}(r)$

θ: $l \to r.x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n$で、$\mathcal{V}_c$を上のように与えたとき、条件 $\forall i : \exists u \in M_{i_{NF}}.\theta(x_i) \in Q_{uf}$ をみたす写像: $\mathcal{V}_C \to Q_{Uf}$

$\mathcal{L}$: R_{SM}の全規則の引数の集合 $\mathcal{L} = \biguplus_{f(l_1,\cdots,l_n)\to r \in R_{SM}} \{l_1, \cdots, l_n\}$

このとき、「集合 Mとして、すべての $l \in \mathcal{L}, \theta$について、$\mathcal{V}_c$に $t \xrightarrow{*} q \in Q_{uf}$である項 t を代入した引数の項を受理する」木オートマトン $\mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}$を作成する[3]。

このとき、$\mathcal{A}'_{NF}, \mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}$の終端状態集合は互いに素である。

(4) $\mathcal{A}$ を作成する

$\mathcal{A}_0$を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= (\mathcal{F}, Q, Q'_{NFf}, \Delta_0) \\ &:= \biguplus_{l \in \mathcal{L}, \forall\theta} \mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]} \cup \mathcal{A}'_{NF} \end{aligned}$$

すべての $l \in \mathcal{L}, \theta$に対して、以下の推論規則を用いて$\Delta_k$を$\Delta_{k+1}$に拡張する。

推論規則 $x \in V_c$とすると

$$\frac{f(l_1, \cdots, l_n) \to r.x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n \in R_{SM} \quad r\theta \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q}{f(q_1, \cdots, q_n) \to q \in \Delta_{k+1}}$$

すべての $l_i(1 \le l_i \le n)$ において、以下の q_iを得る。

$$q_i = \begin{cases} Q \text{ のいずれかの状態} & l_i = x \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_c \text{のとき} \\ \mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]} \text{の終端状態} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

繰り返し適用して得られるΔ_kの浮動点をΔ_*とすると、以下のようにして $\mathcal{A}$ を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\mathcal{F}, Q, Q_f, \Delta) \\ &:= \mathcal{A}_* = (\mathcal{F}, Q, Q'_{NFf}, \Delta_*) \end{aligned}$$

[3]付録 B で作成方法を説明する。

4.3 決定可能性

この節では、前節で定義した木オートマトンによって、メンバーシップ条件付き項書換え系において到達可能性が決定可能であることの証明を行なう。この証明は F.Jacquemard の証明 [15] の枠組みを利用した。

補題 4.3.1　すべての k、すべての基底項 $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ について、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_f$ をみたす $\mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}(l \in \mathcal{L})$ の終端状態 q_f が存在するならば、$s \xrightarrow[R_{SM}]{*} l\sigma$ と $\forall x \in \mathcal{V}_c.x\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} x\theta$ をみたす基底代入 σ が存在する。

[**証明**]　k に関する帰納法によって証明を行なう。

1. $k = 0$ のときは、$\mathcal{A}_0$ の作成方法より $s = l\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} l\theta \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} q_f$ となるので、項 s は l の基底代入で $\forall x \in \mathcal{V}_c.x\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} x\theta$ である。

2. k のときは成り立つと仮定し、$k+1$ の場合を示す。

   $\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$ の規則 $f(q_1, \cdots, q_n) \to q$ は書換え規則 $f(l_1, \cdots, l_n) \to r.x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n$ と $\mathcal{A}_k$ によるリダクション $r\theta \xrightarrow{*} q$ から推論規則によって $\mathcal{A}_k$ に付け加えられて $\mathcal{A}_{k+1}$ となったとする。

   このとき、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_f$ のリダクションにおいて、$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$ の規則を用いた回数を $d(\geq 0)$ とし、d に関する帰納法を行なう。

   (a) $d = 0$ のとき、k における帰納法の仮定より成り立つ。

   (b) $d > 0$ のとき、

   以下の図のリダクション (i)〜(iv) が存在することを示す。

$$
\begin{array}{ccccc}
s \equiv \ C[f(s_1, \cdots, s_n)] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[f(q_1, \cdots, q_n)] & & \\
{}_*\!\downarrow_{R_{SM}} \ (\mathrm{i}) & & \downarrow_{\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k} & & \\
C[f(l_1, \cdots, l_n)\sigma] & & C[q] & \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} & q_f \\
\downarrow_{R_{SM}} \ (\mathrm{ii}) & & \uparrow_{\mathcal{A}_k} \ (\mathrm{iv}) & & \\
C[r\sigma] & \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} & C[r\theta] & & \\
 & (\mathrm{iii}) & & &
\end{array}
$$

(i) ここで、最初のリダクションが $s \xrightarrow[R_{SM}]{*} C[f(l_1, \cdots, l_n)\sigma]$ となることを示すために、代入σを正確に定義する。それぞれ $l_i (1 \leq i \leq n)$ に対してある代入σ_iとして、σを互いに素な代入の和 $(\sigma = \uplus_{i=1}^{n} \sigma_i)$ とする。それぞれの i について、$l_i = x \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_c$のとき、$l_i\sigma_i = s_i$とする。$l_i$がそれ以外のとき、$q_i$は、$\mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]}$の終端状態である。このとき、$k$に関する帰納法の仮定から、$s_i \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_i$ より $s_i \xrightarrow[R_{SM}]{*} l_i\sigma_i$かつ $\forall x \in \mathcal{V}ar(l_i) \cap \mathcal{V}_c.x\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} x\theta$となる基底代入$\sigma_i$が存在する。よって、$s \xrightarrow[R_{SM}]{*} C[f(l_1, \cdots, l_n)\sigma]$ がいえる。

(ii) 明らかである。

(iii) $C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} C[r\theta]$ を示す。$\mathcal{V}ar(l_i) \subseteq \mathcal{V}_c$である l_iについてだけ考えればよい。このような l_iについては、(i) で述べたように $l_i\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} l_i\theta$が成り立つので $C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} C[r\theta]$ がいえる。

(iv) $r\theta \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q$より $C[r\theta] \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} C[q]$ がいえる。

よって、d による帰納法の仮定から、$s \xrightarrow[R_{SM}]{*} C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_f$ がいえる。

よって $C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} q_f \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q$、$k$による帰納法の仮定から、$s \xrightarrow[R_{SM}]{*} l\sigma$をみたす基底代入$\sigma$が存在し、$x \in \mathcal{V}_c$について、$\sigma$ は $x\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} x\theta$である。□

補題 4.3.2 すべての kにおいて、$L(A_k) \subseteq \{s \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) | s$ は R_{SM}に関して正規化可能 $\}$ が成立する。

[**証明**] 補題 4.3.1 を使って、kに関する帰納法によって証明を行なう。

1. $k = 0$ のときは、$\mathcal{A}_0$の作成方法より $L(\mathcal{A}_0) = L(\mathcal{A}'_{NF})$ となるため、成り立つ。

2. kのときは成り立つと仮定し、$s \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_f \in Q_f$であるとき、$s$ は正規形にリダクションされることを示す。

ここで、補題 4.3.1 の証明と同様に、$\Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$の規則を使った回数 d に関する帰納法を使うと、証明は以下の図のように表される。

$$
\begin{array}{rcccccc}
s \equiv & C[f(s_1,\cdots,s_n)] & \xrightarrow[\mathcal{A}_k]{*} & C[f(q_1,\cdots,q_n)] & & \\
 & {}_*\downarrow_{R_{SM}} & & \downarrow_{\Delta_{k+1}\backslash\Delta_k} & & \\
 & C[f(l_1,\cdots,l_n)\sigma] & & C[q] & \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} & q_f \in Q_f \\
 & \downarrow_{R_{SM}} & & \uparrow_{\mathcal{A}_k} & & \\
 & C[r\sigma] & \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} & C[r\theta] & &
\end{array}
$$

ここで、補題 4.3.1 より $C[f(s_1,\cdots,s_n)] \xrightarrow[R_{SM}]{*} C[f(l_1,\cdots,l_n)\sigma]$ がいえる。また、他のリダクションについても補題 4.3.1 の証明と同様に行うことができる。

$C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}_{k+1}]{*} q_f$から d に関する帰納法の仮定を用いて、s が正規形にリダクションされることがただちにわかる。□

補題 4.3.3 $L(A) \supseteq \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) | t$ は R_{SM}に関して正規化可能 $\}$ が成立する。

[**証明**] $s \xrightarrow[R_{SM}]{*} t$ で t は R_{SM}に関して正規形であると仮定する。このとき、R_{SM}の規則によるリダクション数を d 回として、d に関する帰納法より $s \in L(\mathcal{A})$ であることを証明する。

1. $d = 0$ のとき、$\mathcal{A}$ の作り方から $L(\mathcal{A}'_{NF}) \subseteq L(\mathcal{A})$ なので、$s \in L(\mathcal{A})$ である。

2. $d > 0$ のとき、1 回目のリダクションは $x \in \mathcal{V}ar(f(l_1,\cdots,l_n)) \cap \mathcal{V}ar(r)$ として、$\{f(l_1,\cdots,l_n) \to r.x \in M\} \in R_{SM}$を使用したと仮定する。

このとき、証明は以下の図のように表される。

$$
\begin{array}{llclcl}
s \equiv & C[f(l_1,\cdots,l_n)\sigma] & \xrightarrow[R_{SM}]{} & C[r\sigma] & \xrightarrow[R_{SM}]{*} & t \in NF \\
 & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{A}}\ \text{(i)} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{A}} & & \\
 & C[f(q_1,\cdots,q_n)] & & C[r\theta] & & \\
 & & {}_{\mathcal{A}}\!\searrow & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{A}} & & \\
 & & \text{(ii)} & C[q] & & \\
 & & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{A}} & & \\
 & & & q_f \in Q_f & &
\end{array}
$$

帰納法の仮定より $C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f$が導ける。このとき、代入$\theta$を用いて、このリダクションを以下のようにすると仮定する。

$$C[r\sigma] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C[r\theta] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C[q] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f$$

(i),(ii) のリダクションについて証明する。

(i) $l_i \notin \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_c$のとき、$r\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} r\theta$より、$\forall x \in \mathcal{V}_c.x\sigma \xrightarrow[x]{*} \theta$なので、$l_i \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} q_i$をみたす$\mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}$の状態集合 q_iが存在する。よって、$l_i\sigma \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_i$をみたす成立する。また、$l_i \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_c$のときは、$l_i \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} q_i \in Q$ をみたす q_iが存在するので、$l_i \xrightarrow[\mathcal{A}_0]{*} q_i \in Q$ が成立する。よって、$C[f(l_1,\cdots,l_n)] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C[f(q_1,\cdots,q_n)]$ が成り立つ。

(ii) Δの推論規則の作成から上のようにして得た $q_1,\cdot,q_n$について、状態遷移規則 $f(q_1,\cdots,q_n) \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q$が存在するため、以下のリダクションが成立する。

$$C[f(q_1,\cdots,q_n)] \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C[q]$$

以上より、$s \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} q_f \in Q_f$が成立するので、$s \in L(\mathcal{A})$ である。□

定理 4.3.4　メンバーシップ強条件付き項書換え系 R_{SM} に関して正規化可能な項の集合を受理する木オートマトン $\mathcal{A}$ が存在する。

[**証明**]　補題 3.2 と補題 3.3 より明らか。□

定理 4.3.5　メンバーシップ強条件付き項書換え系において、正規化は決定可能である。

[**証明**]　定理 4.3.4 より正規化性の決定問題は $s \in L(\mathcal{A})$ の決定問題に変換できる。また、定理 2.4.3 より $s \in L(\mathcal{A})$ は決定可能である。 □

また、正規化可能性が決定可能であるため、以下の定理が成立することが [15] の定理 10 と同様にして証明できる。

定理 4.3.6　メンバーシップ強条件付き項書換え系について、到達可能性は決定可能である。

4.4 検証

この節では、メンバーシップ強条件付き項書換え系の検証を行なう。

メンバーシップ強条件付き項書換え系が成り立つ十分条件は、定義 4.1.7 で示した以下の条件である。

- Rでの書換え規則の両辺に共通して現れる変数だけがメンバーシップ条件をもつ。
- メンバーシップ条件の集合 Mには、Mでの項書換え系 R_Mが付随している。ここで、Rに含まれるすべての集合の集まりを $\mathcal{M}$ とすると、Mの各要素は $R \cup \biguplus_{M \in \mathcal{M}} R_M$に関して合流性と停止性をもち、かつ $R \cup \biguplus_{M \in \mathcal{M}} R_M$に関して正規形である Mの要素は有限個である。
- Rの左辺は、メンバーシップ条件の集合での関数記号を使った項をもたない。

この条件からわかるようにメンバーシップ項書換え系 R_{SM}は集合 Mでの書換え系 R_Mを含んでいない。しかし、$R_{SM} \cup R_M$がこの条件をみたすときは、$R'_{SM} = R_{SM} \cup R_M$として、$R'_{SM}$について、正規化性や到達可能性を判定することができる。そのため、論理値などは含めることができる。一方、$R_{SM} \cup R_M$がこの条件をみたさないときは正規化性と到達可能性を判定することができない。そのため、このようなとき、R_{SM}は R_Mを含めることができない。

また、R_{z_3}のような規則では、以下のようにして規則を変える[4]ことによって、規則が変

[4] R_{Z_3}は Z_3の各要素について合流性と停止性をもち、かつ有限個の正規形 $0, S(0), S(S(0))$ をもつため、変数にこれらの正規形を代入した規則に変えることができる

えられた R_{SM} と R_Mの和集合がこの条件をみたす。そのため、R_{SM}は規則が変えられた R_{Z_3}を含めることができる。

$$R_{Z_3} = \{s(s(s(x))) \to x\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} S(S(S(0))) & \to & 0 \\ S(S(S(S(0)))) & \to & S(0) \\ S(S(S(S(S(0))))) & \to & S(S(0)) \end{array} \right\}$$

4.5　木オートマトンの作成例

この節で、実際にメンバーシップ強条件付き項書換え系における木オートマトンの作成例を表す。

例 4.5.1　メンバーシップ強条件付き項書換え系を以下の R_7とする。

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_B \cup \{f/2, g/1\}$$

$$R_7 = \left\{ \begin{array}{rcl} g(f(x,y)) & \to & x. \quad x \in Bool \end{array} \right\}$$

(1) $\mathcal{A}_U$を作成する

$\mathcal{M}_{NF} = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ より $\mathcal{A}_\mathsf{T}, \mathcal{A}_\mathsf{F}$を作成する。

(i) $\mathcal{A}_\mathsf{T} = (\mathcal{F}, Q_\mathsf{T}, Q_{\mathsf{T}f}, \Delta_\mathsf{T})$ とする

$$Q_\mathsf{T} = \{q_\mathsf{T}, q_0\}, Q_{\mathsf{T}f} = \{q_\mathsf{T}\},$$

$$\Delta_\mathsf{T} = \left\{ \begin{array}{rclrcl} \mathsf{T} & \to & q_\mathsf{T}, & \mathsf{F} & \to & q_0 \\ \neg(q_\mathsf{T}) & \to & q_0, & \neg(q_0) & \to & q_\mathsf{T} \\ \wedge(q_\mathsf{T}, q_\mathsf{T}) & \to & q_\mathsf{T}, & \wedge(q_0, q_0) & \to & q_0 \\ \wedge(q_\mathsf{T}, q_0) & \to & q_0, & \wedge(q_0, q_\mathsf{T}) & \to & q_0 \\ \vee(q_\mathsf{T}, q_\mathsf{T}) & \to & q_\mathsf{T}, & \vee(q_0, q_0) & \to & q_0 \\ \vee(q_\mathsf{T}, q_0) & \to & q_\mathsf{T}, & \vee(q_0, q_\mathsf{T}) & \to & q_\mathsf{T} \end{array} \right\}$$

(ii) $\mathcal{A}_{\mathsf{F}} = (\mathcal{F}, Q_{\mathsf{F}}, Q_{\mathsf{F}f}, \Delta_{\mathsf{F}})$ とする

$$Q_{\mathsf{F}} = \{q_{\mathsf{F}}, q_1\}, Q_{\mathsf{F}f} = \{q_{\mathsf{F}}\},$$

$$\Delta_{\mathsf{F}} = \left\{ \begin{array}{rclrcl} \mathsf{F} & \to & q_{\mathsf{F}}, & \mathsf{T} & \to & q_1 \\ \neg(q_{\mathsf{F}}) & \to & q_1, & \neg(q_1) & \to & q_{\mathsf{F}} \\ \wedge(q_{\mathsf{F}}, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_{\mathsf{F}}, & \wedge(q_1, q_1) & \to & q_1 \\ \wedge(q_{\mathsf{F}}, q_1) & \to & q_{\mathsf{F}}, & \wedge(q_1, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_{\mathsf{F}} \\ \vee(q_{\mathsf{F}}, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_{\mathsf{F}}, & \vee(q_1, q_1) & \to & q_1 \\ \vee(q_{\mathsf{F}}, q_1) & \to & q_1, & \vee(q_1, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_1 \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}_U = \mathcal{A}_{\mathsf{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathsf{F}} := (\mathcal{F}, \{q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{F}}, q_0, q_1\}, \{q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{F}}\}, \Delta_{\mathsf{T}} \cup \Delta_{\mathsf{F}})$

(2) $\mathcal{A}'_{NF}$を作成する

$\mathcal{A}_{NF} \setminus \mathcal{A}_U = (\mathcal{F}, Q_{NF\setminus U}, Q_{NF\setminus Uf}, \Delta_{NF\setminus U})$ とする。

$$Q_{NF\setminus U} = \{q_2, q_3, q_4\}, Q_{NF\setminus Uf} = \{q_3, q_4\},$$

$$\Delta_{NF\setminus U} = \left\{ \begin{array}{rclrclrcl} \mathsf{T} & \to & q_2, & \mathsf{F} & \to & q_2, & & & \\ \neg(q_2) & \to & q_2, & \neg(q_3) & \to & q_4, & \neg(q_4) & \to & q_4 \\ \wedge(q_2, q_2) & \to & q_2, & \wedge(q_2, q_3) & \to & q_4, & \wedge(q_2, q_4) & \to & q_4 \\ \wedge(q_3, q_2) & \to & q_4, & \wedge(q_3, q_3) & \to & q_4, & \wedge(q_3, q_4) & \to & q_4 \\ \wedge(q_4, q_2) & \to & q_4, & \wedge(q_4, q_3) & \to & q_4, & \wedge(q_4, q_4) & \to & q_4 \\ \vee(q_2, q_2) & \to & q_2, & \vee(q_2, q_3) & \to & q_4, & \vee(q_2, q_4) & \to & q_4 \\ \vee(q_3, q_2) & \to & q_4, & \vee(q_3, q_3) & \to & q_4, & \vee(q_3, q_4) & \to & q_4 \\ \vee(q_4, q_2) & \to & q_4, & \vee(q_4, q_3) & \to & q_4, & \vee(q_4, q_4) & \to & q_4 \\ f(q_2, q_2) & \to & q_3, & f(q_2, q_3) & \to & q_3, & f(q_2, q_4) & \to & q_3 \\ f(q_3, q_2) & \to & q_4, & f(q_3, q_3) & \to & q_4, & f(q_3, q_4) & \to & q_4 \\ f(q_4, q_2) & \to & q_4, & f(q_4, q_3) & \to & q_4, & f(q_4, q_4) & \to & q_4 \\ g(q_2) & \to & q_4, & g(q_4) & \to & q_4 & & & \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}'_{NF} := (\mathcal{A}_{NF} \setminus \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}_U$とする

(3) $\mathcal{A}_{l[\mathcal{V}_c\theta]}$ を作成する

引数 $l = f(x, y)$ を受理する木オートマトンを帰納的に作成する

(i) $\mathcal{A}_{x[\mathcal{V}_c\theta]}$を作成する

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{A}_{x[q_{\mathsf{T}}]} & = & \mathcal{A}_{\mathsf{T}} \\ \mathcal{A}_{x[q_{\mathsf{F}}]} & = & \mathcal{A}_{\mathsf{F}}\end{array}$$

(ii) $\mathcal{A}_y$を作成する

$\mathcal{A}_{y\backslash U} = (\mathcal{F}, \{q_5, q_6\}, \{q_6\}, \Delta_{y\backslash U})$ とする

$$\Delta_{y\backslash U} = \left\{\begin{array}{rclrclrcl} \mathsf{T} & \to & q_5, & \mathsf{F} & \to & q_5, & \neg(q_5) & \to & q_5 \\ \neg(q_6) & \to & q_6, & \wedge(q_5, q_5) & \to & q_5, & \wedge(q_6, q_5) & \to & q_6 \\ \wedge(q_5, q_6) & \to & q_6, & \wedge(q_6, q_6) & \to & q_6, & \vee(q_5, q_5) & \to & q_5 \\ \vee(q_6, q_5) & \to & q_6, & \vee(q_5, q_6) & \to & q_6, & \vee(q_6, q_6) & \to & q_6 \\ g(q_5) & \to & q_6, & g(q_6) & \to & q_6, & f(q_5, q_5) & \to & q_6 \\ f(q_5, q_6) & \to & q_6, & f(q_6, q_5) & \to & q_6, & f(q_6, q_6) & \to & q_6 \end{array}\right\}$$

よって、$\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_{y\backslash U} \cup \mathcal{A}_U$である

(iii) $\mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{T}}]}$ を作成する

$\mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{T}}]} = (\mathcal{F}, Q_{l[q_{\mathsf{T}}]}, Q_{l[q_{\mathsf{T}}]f}, \Delta_{l[q_{\mathsf{T}}]})$ とすると

$$Q_{l[q_{\mathsf{T}}]} = \{q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{F}}, q_0, q_1, q_5, q_6, q_7\}, Q_{l[q_{\mathsf{T}}]f} = \{q_7\},$$

$$\Delta_{l[q_{\mathsf{T}}]} = \Delta_{\mathsf{T}} \cup \Delta_{\mathsf{F}} \cup \Delta_{y\backslash U} \cup \left\{\begin{array}{rcl} f(q_{\mathsf{T}}, q_6) & \to & q_7 \\ f(q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{T}}) & \to & q_7 \\ f(q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_7 \end{array}\right\}$$

(iv) $\mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{F}}]}$ を作成する

$\mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{F}}]} = (\mathcal{F}, Q_{l[q_{\mathsf{F}}]}, Q_{l[q_{\mathsf{F}}]f}, \Delta_{l[q_{\mathsf{F}}]})$ とすると

$$Q_{l[q_{\mathsf{F}}]} = \{q_{\mathsf{T}}, q_{\mathsf{F}}, q_0, q_1, q_5, q_6, q_8\}, Q_{l[q_{\mathsf{F}}]f} = \{q_8\},$$

$$\Delta_{l[q_{\mathsf{F}}]} = \Delta_{\mathsf{T}} \cup \Delta_{\mathsf{F}} \cup \Delta_{y\backslash U} \cup \left\{\begin{array}{rcl} f(q_{\mathsf{F}}, q_6) & \to & q_8 \\ f(q_{\mathsf{F}}, q_{\mathsf{T}}) & \to & q_8 \\ f(q_{\mathsf{F}}, q_{\mathsf{F}}) & \to & q_8 \end{array}\right\}$$

(4) $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{T}}]} \cup \mathcal{A}_{l[q_{\mathsf{F}}]} \cup \mathcal{A}'_{NF}$とする

(i) $\mathcal{A}_1$を作成する

$$\frac{g(f(x,y)) \to x.x \in Bool \in R_7 \quad q_{\mathsf{T}} \xrightarrow[\Delta_0]{*} q_{\mathsf{T}}}{g(q_7) \to q_{\mathsf{T}} \in \Delta_1}$$

$\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{g(q_7) \to q_{\mathsf{T}}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2$を作成する

$$\frac{g(f(x,y)) \to x.x \in Bool \in R_7 \quad q_{\mathsf{F}} \xrightarrow[\Delta_1]{*} q_{\mathsf{F}}}{g(q_8) \to q_{\mathsf{F}} \in \Delta_2}$$

$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{g(q_8) \to q_{\mathsf{F}}\}$

これ以上、推論規則が適用できないので、$\mathcal{A} := \mathcal{A}_2$ とする。

第 5 章

まとめ

5.1 本研究の結果

本論文では、一般到達可能性を提案し、成長項書換え系では一般到達可能性が決定可能であることを示した。この決定可能を示すために木オートマトンを導入した。一般到達可能性は、ある項が成長項書換え系とある項の集合によって作成した木オートマトンを受理されるかで判定できる。この事によって、一般到達可能性は、F.Jacquemard が示した到達可能性 [6] を真に含む性質を示した。このように、一般到達可能性は到達可能性を拡張したものである。

また、本論文では、メンバーシップ強条件付き項書換え系を提案し、この項書換え系において到達可能性が決定可能であることを示した。この決定可能を示すために、一般到達可能性と同様に木オートマトンを導入した。メンバーシップ強条件付き項書換え系は、成長項書換え系での両辺に共通して現れる変数が高さ 1 であるという十分条件を拡張したものであり、高さに対する制限はない。しかし、両辺に共通して現れる変数をメンバーシップと制限している。そのため、両辺に共通する変数がメンバーシップである項書換え系においてさまざまな応用が期待される。

5.2 今後の課題

今後の課題として、成長項書換え系における提案した一般到達可能性を活用することに基底合流性の決定可能性を示すことがあがる。また、メンバーシップ強条件付き項書換え系では、メンバーシップ強条件として、両辺に共通して現れる変数を集合と制限して、この集合での書換え系は合流性と停止性をもち、かつ正規形を有限個としたが、この条件を

緩和することがあがる。

　また、別の概念から項書換え系の十分条件を更に緩和したものを提案し、到達可能性や合流性の決定可能を示していくことである。また、一般到達可能性の課題と同様に基底合流性の決定可能性へつないでいくことがあがる。

謝辞

本研究を行なうにあたり、また学生生活全般に渡り多大なる御指導を頂いた外山芳人教授に謹んで感謝致します。そして、研究活動において、適切な助言と多大なる御指導を頂いた鈴木太朗助手に深く感謝します。

また、本研究に関する議論の場を与えて下さった研究室の皆さんに感謝します。最後に、さまざまな形で学生生活をを支えてくれた家族に心から感謝します。

参考文献

[1] M.Dauchet, T.Heuillard, P.Lesdcanne, S.Tison, “Decidability of the Confluence of Finite Ground Term Rewrite Systems and of Other Related Term Rewrite Systems”, Information and Computaition 88, pp.187-20, 1990.

[2] M.Oyamaguchi, “The Churchi-Rosser Property for Ground Term-Rewriting Systems is Decidable”, Theoretical Computer Science 49, pp.43-79, 1987.

[3] D.Kapur, P.Narendran, F.Otto, “On Ground-Confluence of Term Rewriting Systems ”, Information and Computation 86, pp.14-31, 1990.

[4] Zhang.H, Remy.J.L, “Contextual Rewriting”, Lect.Notes in Comput. Sci. 202, pp.46-62, 1985.

[5] G.Huet, “Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems”, Journal of the Association for Computing Machinery 27, 4 pp.797-821, 1980.

[6] M.Dauchet, S.Tison, “The Theory of Ground Rewrite Systems is Decidable”, Fifth Annual IEEE Syemposium on Logic in Computer Science, pp.242-248, 1990.

[7] E.Hopcroft, D.Ullman, “Introduction To Automata Theory, Languages And Computation”, Addison-Wesley Publishing Co, 1979 (野崎昭弘, 高橋正子, 町田元, 山崎秀記 共訳「オートマトン 言語理論 計算論 I」サイエンス社, 1984).

[8] 安藤欣司, 鈴木太朗, 外山芳人, “項書換え系における到達可能性の決定問題”, 平成10 年度電気関係学会北陸支部連合大会 講演論文集, pp.259, 1998.

[9] J.Leeuwen, “Handbook of Theretical Computer Science, volume B: Formal Models and Semantics”, Elseveir Science Publishiers, pp.163-166, 1990 (広瀬健, 野崎昭弘,

小林孝次郎 監訳「コンピュータ基礎理論ハンドブックII 形式的モデルと意味論」丸善社,1994）.

[10] F.Baader, T.Nipkow, "Term Rewriting and All That" Cambridge University Press, 1998.

[11] H.Comon, M.Dauchet, R.Gilleron, D.Lugiez, S.Tison, M.Tommasi, "Tree Automata Techniques and Applications", www.grappa.univ-lille3.fr/tata.

[12] Y.Toyama, "Membership Conditional Term Rewriting Systems", The Transaction of the IEICE E.72, pp.1224-1229, 1989.

[13] J.Coquide, M.Dauchet, R.Gilleron, S.Vagvolgyi "Bottom-up pushidown automata: classification and connection with rewrite systems", Theoretical Computer Science 127, pp.69-98, 1994.

[14] K.Salomaa, "Deterministic Tree Pushdown Automata and Monadic Tree Rewriting Systems", Journal of Computer and System Sciences 37, pp.367-394, 1988.

[15] F.Jacquenmard, "Decidable Approximations of Term Rewriting Systems", Lecture Notes in Computer Science 1103, pp.362-376, 1996.

[16] R.Gilleron, "Decision Problems for Term Rewriting systems and Recognizable tree languages", Lecture Notes in Computer Science 480, pp.148-159, 1991.

[17] W.S.Brainerd, "Tree generating regular systems", Information and Computation 14, pp.217-231, 1969.

付録

付録 A

メンバーシップが用いる集合を M とすると、R_M は M の各要素について、合流性と停止性をもち、かつ R_M に関する正規形は有限個である。このとき、正規形を u とするとき、u へ到達可能な R_M の要素を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_u$ は作成できる。

証明　有限個の正規形を与えられているとする。このとき、R_M は M の各要素について、合流性と停止性をもっているので、R_M での変数を持った規則に対して、その規則の代わりにその変数にすべての正規形を代入した規則ができる。この書換え系をを R'_M とする。

このとき、R'_M は基底書換え系である。[17] より基底書換え系において、到達可能性が決定可能であり、ある項へ到達可能な項を受理する木オートマトンを作成可能である。□

付録 B

集合 M として、すべての $l_i \in \mathcal{L}, \theta$ について、$\mathcal{V}_c$ に $t \xrightarrow[q]{*} \in Q_{uf}$ である項 t を代入した引数の項を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]}$ を作成する。

作成方法　以下のように、l_i の構造による帰納的な作成を行なう。

- $l_i = t$ が定数であるとき、t だけを受理する木オートマトンを作成する。
- $l_i = x \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_c$ であるとき、まず、すべての項を受理する木オートマトン $\mathcal{A}_{\mathcal{T}(\mathcal{F})}$ を作成する。このとき、$\mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]}$ を以下のように作成する。

$$\mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]} := (\mathcal{A}_{\mathcal{T}(\mathcal{F})} \setminus \mathcal{A}_U) \cup \mathcal{A}_U$$

- $l_i = x \in \mathcal{V}_c.x \in M$ であるとき、R_M に関する正規形を u とすると、$\mathcal{A}_{l_i[\mathcal{V}_c\theta]} := \mathcal{A}_u$ となる。

- $t_1, \cdots, t_n$に対する木オートマトン $\mathcal{A}_{t_i[\mathcal{V}_c\theta]}$が作成できていて、$l_i = C[t_1, \cdots, t_n]$ であるとき、この線形項の代入を受理する木オートマトンを作成する[1]。

[1] [11] よりこのような木オートマトンが存在する