Title	二階述語論理の表現能力に関するゲーム論的アプローチ
Author(s)	池田，潔
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1245
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

A Gametheoretic Approach to Second-Order Definability

池田 潔

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999 年 2 月 15 日

キーワード： 表現能力、記述の複雑さ、Ehrenfeucht のゲーム、二階述語論理.

本研究は、有限モデル論の方法論を利用して有限構造における二階述語論理の表現能力を調べることを主な目的としている。

1 背景

一階述語論理等の形式言語に対する意味論研究の一分野として 1954 年に Tarski によって創始されたモデル論は、モデルの代数的、集合論的な性質を公理系の統語論的な性質との関連で研究する分野である。古典的なモデル論においては環、体などを扱う代数理論への応用として主に一階述語論理の表現能力が調べられてきた。これは一階述語論理においてはコンパクト性定理あるいは Löwenheim–Skolem の定理といった基本的な定理が成り立つからであり、これらの定理が一階述語論理の表現能力の限界を調べる上で有効な役割を果たすためである。例えばコンパクト性定理によって、我々は有限集合全体のクラスを表現することが不可能であることを証明することができる。また、Löwenheim–Skolem の定理により、一階述語論理のどのような公理もモデルの非可算性を表現できないことが分かる。これらの定理は古典的モデル論におけるモデル構成の手法を使って証明されるのであるが、これら古典的な手法は無限構造を対象に含めた上で有効性を発揮するものとなっている。

これに対して有限モデル論は対象領域を有限なものに制限したときのモデルの性質を調べる研究分野である。有限領域だけを取り扱うことから特に計算機科学との関連で近年盛んに研究されてきたが、構造を有限なものだけに制限すると古典的モデル論の主要な定理がほとんど成り立たないことも同時に分かってきている。例えば Trakhtenbrot の定

理 (1950) が示すところによれば、有限構造だけを考えたときには完全性定理が成り立つような形式体系は存在しない。この Trakhtenbrot の定理は Turing machine の停止問題の決定不能性を用いて証明されており、ここで有限モデル論は計算論的な側面と深い関わりを持っていることが分かる。この関わり合いは特に以下に述べる記述の複雑さの理論において顕著に見られる。

2 記述の複雑さの理論

計算の複雑さの解析は問題を解決するのに必要な時間あるいは空間の量を測定するものであるが、対照的に、記述の複雑さの解析は有限構造において問題を定義するのに必要な変数、量化記号等の論理学的な性質の複雑さを調べるものである。以下の定理に示されるように、両者の複雑さの間には密接な結び付きがある。

Theorem 1 [2] Let K be a class of ordered finite structures.

$$\begin{array}{lll} K \in \text{LOGSPACE} & \text{iff} & K \text{ is axiomatizable in FO(DTC)} \\ K \in \text{NLOGSPACE} & \text{iff} & K \text{ is axiomatizable in FO(TC)} \\ K \in \text{PTIME} & \text{iff} & K \text{ is axiomatizable in FO(IFP)} \\ K \in \text{NPTIME} & \text{iff} & K \text{ is axiomatizable in } \Sigma^1_1 \\ K \in \text{PSPACE} & \text{iff} & K \text{ is axiomatizable in FO(PFP)} \end{array}$$

※ Σ^1_1は二階述語論理式で、$\exists X_1 \cdots \exists X_n \psi$の形をしたもの ($\psi$：一階述語論理式)

上の定理の右側に現れるΣ^1_1以外の logic は fixed-point logic と呼ばれるものである。これらは有限構造における一階述語論理の表現能力の弱さを補うために fixed-point operator を付け加えて、再帰的演算を表現できるように拡張した言語である。Theorem 1により我々は計算量理論の主要な問題を fixed-point logic の表現能力の問題に帰着させることができる。例えば $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 問題は、有限構造において FO(IFP) とΣ^1_1が同等な表現能力を持つか否かの問題に同値であることが分かる。

3 Ehrenfeucht のゲーム

Σ^1_1や fixed-point logic の表現能力を調べることは、Theorem 1の観点から見れば計算量クラス間の関係を調べることにつながるので非常に重要である。先に述べたように言語の表現能力を調べるための古典的モデル論の手法は有限構造においてはほとんど成り立たないのだが、有限構造においても有効性を保つ数少ない手法の一つとして以下に述べる Ehrenfeucht のゲーム理論的方法がある。

Ehrenfeucht game $G_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は 2 人の player、*spoiler*と *duplicator*によって行われる。game においては二人は有限構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$の上に交互に小石を置いていく。まず spoiler が

$\mathcal{A}$ または $\mathcal{B}$を選び、選んだ構造の中の一つの要素の上に小石を置く。次に duplicator が反対側の構造から要素を選んでその上に小石を置く。次はまた spoiler が $\mathcal{A}$ か $\mathcal{B}$を選ぶ$\cdots$ というように game は進み、それぞれの構造の上に m 個の小石が置かれたところで終了する。ここで、m 個の小石から得られる $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$への写像が partial isomorphism になっていれば duplicator の勝ち、そうでなければ spoiler の勝ちである。さてこのとき次の二つは同値である。

(i) $\mathrm{G}_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$ において duplicator に必勝法がある。　(ii) $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

ここで $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$とは $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$が、quantifier rank $\leq m$ の一階述語論理式に関して、同じ論理式を充足することをいう。この関係 $\equiv_m$ が game によって判定できることを上の事実は述べているのだが、次の二つの命題が同値であることと上の事実から我々は有限構造のクラス Kが一階述語論理で表現可能か否かを調べることができる。

(i) Kは一階述語論理で表現不可能

(ii) 任意の $m \in N$に対して有限構造 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$が存在して $\mathcal{A} \in K,\ \mathcal{B} \notin K$かつ $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

この手法の応用として例えば偶数個の要素を持つ有限構造のクラス EVEN が一階述語論理で表現できないことを示すことができる（[2] 参照）。これは任意の $m \in N$に対して二つの構造 $\mathcal{A} \in EVEN$、$\mathcal{B} \notin EVEN$を選び、$\mathrm{G}_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$ において duplicator に必勝法があることを示すことによって得られる。

このように Ehrenfeucht の方法の応用を見つけること、またこの方法を一階述語論理以外の言語の場合に拡張することは、有限モデル論の主要なテーマとなっている。例えば、二階述語論理で一変数の述語変数のみを許した言語 MSO に対応する game についてはすでに知られている（[2] 参照）。この MSO game のルールでは二人の player は要素の選択の他に要素の集合を選択することができる。

4　ゲームの二階述語論理への応用

本研究の結果としてはまず MSO game の新たな応用として、EVEN が言語 MSO において表現不可能であることを示したが、これは対応する MSO game において duplicator に必勝法が存在することを示すことによって得られる。この結果は上に述べた [2] の結果を強めている。

次に MSO game を二階述語論理に対応する game にまで拡張することができることを示した。この game においては二人の player はさらに任意の $k \in N$に対して構造 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$上の任意の k変数述語を選択することができる。

さらに上の二階述語論理の game の変形として、Σ^1_1（Theorem 1参照）に対応する game を構成することができた。これについては本稿では二種類の game を提示する。この二つの game は一見したところ、片方の game の方が duplicator にとって他方の game よりも

勝ちやすいように見えるが、どちらも同じくΣ^1_1の表現可能性を特徴づけていることが示される。例えば、duplicator にとって容易な方の game を用いたときは、有限構造のクラス KがΣ^1_1で表現不可能であることは次の game において duplicator に必勝法があることと同値であることが示される。

- ▷ まず spoiler が $k \in N$を選ぶ。
- ▷ また、spoiler は $m \in N$を選ぶ。
- ▷ 次に duplicator が $\mathcal{A}_0 \in K$を選ぶ。
- ▷ ここで spoiler が k変数述語 P_0を $\mathcal{A}_0$に与える。
- ▷ さらに duplicator が $\mathcal{B}_0 \notin K$を選ぶ。
- ▷ また、duplicator は k変数述語 Q_0を $\mathcal{B}_0$に与える。
- ▷ 最後に spoiler と duplicator は game $\mathrm{G}_m((\mathcal{A}_0, P_0), (\mathcal{B}_0, Q_0))$ を行なう。

記述の複雑さの理論によれば、Σ^1_1における表現可能性は NPTIME の計算可能性に対応している（Theorem 1参照）。よって言語の表現可能性の問題としての$\Sigma^1_1 = \Pi^1_1$ 問題は、計算の複雑さにおける有名な NPTIME = co-NPTIME 問題にちょうど対応することになる。つまり、Π^1_1で表現可能でかつΣ^1_1で表現不可能な有限構造のクラスを見つけることができれば、我々は NPTIME $\neq$ co-NPTIME を証明したことになるのである。ここで、もしそのようなクラスがあるならば、Σ^1_1での表現不可能性を証明するのに上で述べられたΣ^1_1 game を利用することができる。すなわち上の game における duplicator の必勝法を構成すれば良いわけである。しかし外観からも分かる通りこの game は非常に複雑であり、そのような必勝法を構成することは現段階ではまだ困難な問題である。この困難さの源は spoiler が任意の k変数述語 P_0を $\mathcal{A}_0$に与え得ることにあり、spoiler がでたらめな述語を与えたときに duplicator がそれに勝つ手を見つけ出すことは一般にはかなり難しい。よって spoiler の k変数述語 P_0の選択の幅を制限して、duplicator の必勝法を構成できるように上の game をさらに単純化することが今後の課題として残されている。

参考文献

[1] C.C.Chang and H.J.Keisler, *Model Theory*, North Holland, 3rd edition, 1990.

[2] H.Ebbinghaus and J.Flum, *Finite Model Theory*, Springer, 1995.

[3] A.Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Fundamenta Mathematicae 49, 129–141, (1961).

[4] M.Y.Vardi, *Computational Model Theory: An Overview*, L. J. of the IGPL, 6, Oxford University Press, 601–623, (1998).