| | |
|---|---|
| Title | 二重様相論理に関する幾つかの結果 |
| Author(s) | 丸山，晃生 |
| Citation | |
| Issue Date | 1999-03 |
| Type | Thesis or Dissertation |
| Text version | author |
| URL | http://hdl.handle.net/10119/1247 |
| Rights | |
| Description | Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士 |

# 二重様相論理に関する幾つかの結果

丸山 晃生

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999 年 2 月 15 日

**キーワード：** 二重様相論理, 部分論理式性, 有限モデル性, 決定可能性, クリプキ完全性.

## 1 序論

日常的な思考に現れる推論を行なう際、その多くの推論は、その時点における様々な状況・状態や、時間の流れなどに影響を受けることがよくある。そこで、その状況・状態、時間の流れなどを考慮するために、様相論理の導入はとても有益なことである。単様相論理に関する様々な論理的性質は、すでに見出されている部分が多い。単様相論理に関する研究は、２０世紀のはじめ頃からかなり進められ、非常に多くのことが調べられている。一方、幾つか様相演算子を有する多くの多様相論理については、完全性や決定可能性に関するごく初歩的な事柄に対しても未解決のままであり、理論的に多くの問題が残されている。様相論理の応用の点から見ると、単様相論理では不十分なことが多く、様々な場面で多様相論理の有用性が求められている。その中でも特別な二重様相論理として、独立に公理化可能な論理に対しては、fusion の概念が S. Thomason 1980 によりはじめて導入され、最近では、M. Kracht と F. Wolter がクリプキ意味論を用いることによって独立に公理化可能な二重様相論理に関する一般的な結果を得ている [1].

本論文では、二重様相論理に関する研究について紹介し、それらの論理について構文論と意味論の両面から議論する。１）基本的な単様相論理の fusion に対する幾つかの体系について構文論的研究を行ない、 cut 除去定理、決定可能性、Craig の補間定理といった論理的性質についての結果を得た。２）二つの様相演算子を相互依存させる公理を fusion に付け加えて得られた二重様相論理に対して意味論的に議論し、また特別な公理を持つ二重様相論理に対してのクリプキ完全性や有限モデル性を示し、その応用として決定可能性を導いた。

## 2　二重様相論理

本論文では、$\Box$ と $\blacksquare$ の二種類の様相演算子を導入する。このとき、$A$ が論理式のときには、$\Box A$ と $\blacksquare A$ はともに論理式である。また特に、ある二重様相論理 $\mathbf{L}$ に $A$ が属しているとき、$\Box A$ と $\blacksquare A$ はともに $\mathbf{L}$ に属する。ここで、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ は、それぞれ $\Box$ と $\blacksquare$ を様相演算子としてもつ単様相論理とする。そのとき、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を含む最小の二重様相論理を $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の fusion と定め、$\mathbf{M} \bigotimes \mathbf{N}$ と表記する。

$\mathbf{K}$ は公理 $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ を含む最小の様相論理であり、また、公理として $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ をもつ論理を正規の様相論理と呼ぶ。$\mathbf{L} \bigoplus Q$ は、集合 $\mathbf{L} \cup Q$ を含む最小の様相論理をあらわすものとする。次に挙げた論理は、よく知られた正規の単様相論理である。

$\mathbf{KT} = \mathbf{K} \bigoplus \{\Box p \supset p\}$,

$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \bigoplus \{\Box p \supset \Box\Box p\}$,

$\mathbf{S4} = \mathbf{K} \bigoplus \{\Box p \supset p, \Box p \supset \Box\Box p\}$,

$\mathbf{S5} = \mathbf{K} \bigoplus \{\Box p \supset p, \neg\Box\neg p \supset \Box\neg\Box\neg p\}$.

これらの基本的な単様相論理を組み合わせた二重様相論理について議論する。

## 3　二重様相論理の体系

はじめに、単様相論理 $\mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ の体系 $\mathbf{K}^*, \mathbf{KT}^*, \mathbf{S4}^*, \mathbf{S5}^*$ について述べる。体系 $\mathbf{K}^*$ は、体系 $\mathbf{LK}$ に次の推論規則を付け加えた体系である。

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\Box)$$

つぎに体系 $\mathbf{LK}^+$ は、体系 $\mathbf{LK}$ に次の推論規則を付け加えた体系とする。

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\ (\Box \to)$$

そのとき体系 $\mathbf{KT}^*, \mathbf{S4}^*, \mathbf{S5}^*$ は、$\mathbf{LK}^+$ にそれぞれ次の推論規則を付け加えた体系である。

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\to \Box)\ ,\quad \frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\to \Box)\quad ,\quad \frac{\Box\Gamma \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box A}\ (\to \Box)$$

$\mathbf{M}^*, \mathbf{N}^* \in \{\mathbf{K}^*, \mathbf{KT}^*, \mathbf{S4}^*, \mathbf{S5}^*\}$ に対して、$\mathbf{M}^* \bigotimes \mathbf{N}^*$ という型の形式体系を、$\mathbf{M}^*$ と $\mathbf{N}^*$ の推論規則を組み合わせることによってできた体系とする。勿論、それぞれの様相演算子は区別しておくものとする。ここで、任意の論理式 $C$ に対して、$\to C$ が $\mathbf{M}^* \bigotimes \mathbf{N}^*$ で証明可能であることと $C$ が $\mathbf{M} \bigotimes \mathbf{N}$ に属することが必要十分であることは容易に示される。

$\mathbf{M}^*$ と $\mathbf{N}^*$ がともに $\mathbf{S5}^*$ でないとき、$\mathbf{M}^* \bigotimes \mathbf{N}^*$ が cut 除去定理を満たすことは容易に確かめることができる。もし少なくとも $\mathbf{M}^*$ と $\mathbf{N}^*$ の一方が $\mathbf{S5}^*$ である場合は、$\mathbf{M}^* \bigotimes \mathbf{N}^*$ に対する cut 除去定理が成り立たない。しかしながら、それらの体系が部分論理式性をも

つことを、高野の方法 [3] により導くことができる。その結果として、それらの体系に対しても決定可能性や Craig の補間定理といった論理的性質を示すことができるのである。

## 4 意味論的アプローチ

つぎに、クリプキによるセマンティクスを用いて、ある意味で拡張した fusion について議論する。ここで、$\tau_i$ と $\sigma_i$ はともに □ と ■ からなる列とする。本論文では、fusion に $\tau_i p \supset \sigma_i p$ 型の公理を付け加えた二重様相論理について考える。

ここで、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が カノニカルな単様相論理であるとき、$\mathbf{M} \bigotimes \mathbf{N} \bigoplus \{\tau_i p \supset \sigma_i p \mid i \in I\}$ のクリプキ完全性を、カノニカルなクリプキモデルを構成することによって示すことができた。しかしながら、従属的に公理化された二重様相論理の研究の困難さ故、その論理に対する有限モデル性の一般的な議論は解決されていない。そこで、今後の研究に対する踏台として、その二重様相論理の幾つかについて有限モデル性を示し、その応用として決定可能性を導出した。

## 5 結論

• 構文論的研究の結果：
幾つかの基本的な単様相論理の fusion に対する体系について、cut 除去定理を示した。また、cut 除去定理の成り立たない二重様相論理の体系に対しては高野の方法を用いて部分論理式性を導き、その結果として、それらの決定可能性や Craig の補間定理といった論理的性質を導出した。

• 意味論的アプローチによる結果：
二つの様相演算子を相互依存させる公理を fusion に付け加えて得られた二重様相論理に対するクリプキ完全性を示した。また、幾つかの二重様相論理に対し有限モデル性を示し、その結果として、決定可能性を導いた。

今後の課題として、より一般的な二重様相論理に対する論理的性質の導出が期待される。また、より多くの様相演算子をもつ論理に対する一般的な研究は興味深いものである。

## 参考文献

[1] M.Kracht and F.Wolter, Properties of independently axiomatizable bimodal logics, Journal of Symbolic Logic 56, (1991) pp.1469-1485.

[2] M.Ohnishi and K.Matsumoto, Gentzen method in modal calculi, Osaka Math. J. 9, (1957) pp.113-130

[3] M.Takano, Subformula property as a substitute for cut-elimination in modal propositional logic, Mathematica Japonica 37, (1992) pp.1129-1145.