Title	消去法による項書換え系の停止性
Author(s)	中村，正樹
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1249
Rights	
Description	Supervisor:外山 芳人，情報科学研究科，修士

消去法による項書換え系の停止性

中村 正樹

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999 年 2 月 15 日

キーワード： 項書換え系，停止性，変換，消去法，依存対.

本論文では，項書換え系（TRS）の停止性について述べる．本研究の目的は，TRS の停止性判定を支援する消去法の改良である．消去法は，従来知られている方法では停止性を示しにくい TRS を，停止性を示しやすい TRS に変換する手法である．消去法による変換は決定可能な手続きであるため，従来知られている決定可能な停止性判定手法と組み合わせることで，より適用範囲の広い停止性判定手続きが得られる．本研究では，変換後の TRS に現れる冗長な規則を取り除くことで改良を行なう．本研究によって得られた改良消去法は，従来の消去法では扱えなかった TRS にも適用することができる．

1　研究の背景

TRS は，計算機上の手続きを効率的に実現する形式的な理論である．TRS は，等式推論として定理自動証明，仕様記述，関数型言語などの計算機分野のさまざまな分野で広く使われている．TRS は，項の間の関係を記述する規則と呼ばれる方向づけられた等式の集合である．項の書換えは，与えられた項を規則の左辺とマッチングし，同じ規則の右辺と置き換えることで行なわれる．

TRS は，無限の書換え列を持たないときに停止性を持つという．停止性は，TRS の重要な性質のひとつである．TRS を計算モデルとしてみる場合，停止性を持った TRS においては，任意の項に対して解の存在が保証され，単純な深さ優先探索で見つけることができる．残念ながら TRS が停止性を持つかどうかという問題は決定不能であることが知られている．しかし，いくつかの特殊な条件のもとでは停止性判定が成功する手法が提案されている．

停止性判定には，大きく分けて意味的な手法と構文的な手法がある．構文的な手法では，項の構造の構文的な解析のみで停止性の証明を行なう．代表的な構文的手法のひとつ

に 1982 年に Dershowiz によって提案された再帰経路順序がある．再帰経路順序による二項間の順序付けは決定可能であるため，停止性判定の実装に適している．しかし，単純化順序の制限があるので，再帰経路順序で停止性を示すことのできる TRS は限られている．一方，意味的な手法では，全ての項を自然数等の整礎な順序を持つ集合上に解釈する．全ての停止性を持つ TRS に対して，停止性を保証する整礎な順序集合が存在することが分かっている．

再帰経路順序による停止性判定では停止性を示すことのできない TRS が多く存在する．このような TRS の停止性を示すための手法に TRS の変換による方法がある．TRS の 変換は，複雑な構造の TRS を単純化することで停止性判定を容易にする．変換手法のひとつである消去法は，停止性を保証するのに不必要と思われる関数記号を規則から消去することで変換を行なう．

次の TRS R_1を考える．

$$R_1 = \{f(f(x)) \to f(g(f(x)))\}$$

TRS R_1は，文字列中の連続する fの出現を gによって分断する規則と見ることができる．

$$ffff \cdots \to ffgff \cdots \to fgfgff \cdots \to fgfgfgf \cdots \to \cdots$$

TRS R_1が停止性を持つことは自明である．しかし，TRS R_1は，再帰経路順序によって停止性を示すことができない．TRS R_1 は，左辺 $f(f(x))$ が右辺 $f(g(f(x)))$ に埋め込まれる形になっている．再帰経路順序によって順序付けができたと仮定すると，単純化順序の性質より，$f(g(f(x)) > f(f(x))$ が導かれ矛盾する．

このような従来の停止性判定法には適用範囲外の TRS の停止性を示すため，1995 年に Ferreira, Zantema により置換消去法が提案された．TRS R_1 は，置換消去法により関数記号 g の出現を新たな定数記号 $\diamond$ に置き換えることで TRS $\mathcal{E}(R_1)$ に変換される．

$$\mathcal{E}(R_1) = \left\{ \begin{array}{lcl} f(f(x)) & \to & f(\diamond) \\ f(f(x)) & \to & f(x) \end{array} \right.$$

１つ目の規則は，TRS R_1の規則に出現する関数記号 gを定数記号 $\diamond$ で置き換えたものである．２つ目の規則は，置き換えによって消失した関数記号 g 以下の部分項を保存するために付け加えられた規則である．置換消去法には，変換後の $\mathcal{E}(R)$ が停止性を持つならば R は停止性を持つという性質がある．この性質を変換の正当性と呼ぶ．TRS $\mathcal{E}(R_1)$ は，再帰経路順序によって停止性を示すことができるため，置換消去法の正当性より，TRS R_1は停止性を持つ．置換消去法による変換は，規則の数が有限ならば自動的に行なうことができる．したがって，再帰経路順序のような停止性判定手法と組み合わせることによって決定可能な停止性のクラスを広げることができる．

一方，1997 年に Arts, Giesl によって提案された依存対は，TRS の無限書換え列の解析に有効な概念である．与えられた TRS の規則の左辺の最外関数記号を関数定義記号と呼ぶ．依存対により関数定義記号の出現を記述することで，無限書換え列の性質を簡明に記述できる．

2　研究の成果

本研究では，置換消去法の改良を試みる．具体的には，変換後の規則に現れる関数定義記号の出現に注目し，不必要な規則を除去することで改良を行なう．TRS R_2は，従来の消去法では停止性のある TRS に変換することができない例である．

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} f(a) & \to & f(b) \\ b & \to & g(a) \end{array} \right.$$

置換消去法による変換では，TRS R_2は停止性を持たない TRS $\mathcal{E}(R_2)$ に変換されてしまう．

$$\mathcal{E}(R_2) = \left\{ \begin{array}{rcl} f(a) & \to & f(b) \\ b & \to & \diamond \\ b & \to & a \end{array} \right.$$

TRS $\mathcal{E}(R_2)$ が停止性を持たないのは，変換後に規則 $b \to a$ が加えられるためである．規則 $b \to a$ は，置き換えによって失われた関数記号 g 以下の部分項 a を保存するために付け加えられた規則である．置換消去法では，正当性を保証するために，消去する関数記号以下の部分項は必ず変換後の規則の右辺に保存されるように定義されている．本研究では，依存対による置換消去法の解析により，関数定義記号の出現しない部分項を保存する必要がないことを示す．項 $g(a)$ の部分項 a は，TRS R_2の関数定義記号を含まない項である．本研究によって改良された消去法においては，TRS R_2は，規則 $b \to a$ の現れない TRS $\mathcal{E}'(R_2)$ に変換される．

$$\mathcal{E}(R_2) = \left\{ \begin{array}{rcl} f(a) & \to & f(b) \\ b & \to & \diamond \end{array} \right.$$

TRS $\mathcal{E}'(R_2)$ は，再帰経路順序によって停止性を示すことができる．したがって，本研究によって TRS R_2を含めたより広い適用範囲を持つ停止性判定手続きが得られたことになる．

置換消去法の正当性の証明では，弱書き順序という項の集合上の順序が本質的な役割を果たす．弱書換え順序を生成する手法として切り落とし法を紹介する．切り落とし法を用いて，TRS Rと変換して得られる TRS R'に関する変換の正当性が成り立つための包含関係を示す.

本研究では，さらに Zantema による分配消去法 (1994)，Ferreira による一般消去法 (1995) を紹介し，条件付きではあるが置換消去法と同様に改良を行なう．改良された分配消去法，一般消去法について切り落とし法を用いた変換の正当性の証明を行なう.