

Title	Formal Topology における Bishop のコンパクト性
Author(s)	河井, 達治
Citation	
Issue Date	2015-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	ETD
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/12746">http://hdl.handle.net/10119/12746</a>
Rights	
Description	Supervisor:石原 哉, 情報科学研究科, 博士

氏名	河井達治		
学位の種類	博士(情報科学)		
学位記番号	博情第313号		
学位授与年月日	平成27年3月20日		
論文題目	Bishop Compactness in Formal Topology (Formal Topology における Bishop のコンパクト性)		
論文審査委員	主査	石原 哉	北陸先端科学技術大学院大学 教授
		緒方 和博	同 教授
		寺内 多智弘	同 教授
		東条 敏	同 教授
		SAMBIN, Giovanni	パドヴァ大学 教授

### 論文の内容の要旨

Since the publication of *Foundation of Constructive Analysis*, Bishop and coworkers have developed a large body of analysis constructively. However, the gap between the notion of compactness for topological spaces and for Bishop metric spaces has been a major obstacle to finding the right notion of general topology which naturally extends that of Bishop metric space.

Independently of Bishop, Sambin initiated a study of constructive general topology using a point-free approach. His notion, formal topology, has been quite successful in constructivising many results of classical general topology, and has established itself as the most promising approach to general topology in constructive mathematics.

However, the precise connection between Bishop metric space and formal topology has not been established, and this prevents us from applying the wealth of results obtained in formal topology to Bishop metric spaces. This thesis tries to improve this unsatisfactory situation by establishing a precise connection between the notions of compactness and local compactness for Bishop metric spaces and the corresponding notions for formal topologies.

As the first main result of this thesis, we obtained a point-free characterisation of compact metric spaces in terms of formal topology. We identified the full subcategory of formal topologies which is essentially equivalent to that of compact metric spaces. We show that the notion of compact overt enumerably completely regular formal topology characterises that of compact metric space up to isomorphism.

Our second main result generalises the above mentioned characterisation to the class of Bishop locally compact metric spaces. We show that the notion of inhabited enumerably locally compact regular formal topology characterises that of Bishop locally compact metric space up to isomorphism. As an application of these characterisations, we prove a point-free version of the well-known fact that any Bishop locally

compact metric space has a one-point compactification. The point-free result immediately yields the corresponding result for Bishop locally compact metric spaces.

*Keywords:* Constructive mathematics; Formal topologies; Point-free characterisations;  
Compact metric spaces; Locally compact metric spaces

## 論文審査の結果の要旨

Errett Bishop の著書「Foundations of Constructive Analysis」出版以来、Bishop をはじめとする研究者達は解析学の多くの部分を構成的に展開している。しかしながら、距離空間における Bishop のコンパクト性（完備かつ全有界）と位相空間におけるコンパクト性（Heine-Borel コンパクト）の間にはギャップがあり、距離空間における Bishop のコンパクト性の自然な拡張となる位相空間におけるコンパクト性の特徴づけは困難な未解決問題であった。

Giovanni Sambin は、(Bishop とは独立に) ポイント・フリーなアプローチから構成的位相空間の研究を始めた。Sambin の提案した formal topology は、古典的位相空間での様々な結果を構成的に証明することができるため、構成的数学において位相空間を論ずる最も有力な概念である。Formal topology では Heine-Borel の流儀でコンパクト性が定義されている。

本論文は、距離空間における Bishop のコンパクト性および局所コンパクト性に対応する formal topology における概念を明らかにし、それらの正確な特徴づけを与えている。

Erik Palmgren が提案した Bishop の局所コンパクト距離空間から formal topology への埋め込みにより、Bishop のコンパクト距離空間はオヴァート (overt) で正則 (regular) なコンパクト formal topology に埋め込まれることが知られている。本論文の1つの主要結果は、Giovanni Curi が与えた枚挙可能正則 (enumerably regular) の概念を援用することにより、Bishop のコンパクト距離空間はオヴァートで枚挙可能正則なコンパクト formal topology に (同形を除いて) 正確に対応することを示したことである。

本論文のもう1つの主要結果は、上記特徴づけを Bishop の局所コンパクト距離空間へ拡張したことである。Formal topology における局所コンパクト性の概念に枚挙可能性を導入することにより枚挙可能局所コンパクト formal topology の概念を提案し、Bishop の局所コンパクト距離空間は非空 (inhabited) で正則な枚挙可能局所コンパクト formal topology に (同形を除いて) 正確に対応することを示した。

また、本論文ではこの応用としてオヴァートで正則な枚挙可能局所コンパクト formal topology は1点コンパクト化できることを示し、Bishop の局所コンパクト距離空間は1点コンパクト化できることが即座に得られることを示している。これらの特徴づけを用いることにより formal topology における様々な成果を Bishop のコンパクト距離空間および局所コンパクト距離空間へ応用することが可能になった。

以上、本論文は Bishop のコンパクト距離空間および局所コンパクト距離空間を特徴づける

formal topology における概念を与えたものであり、学術的に貢献するところが大きい。よって博士（情報科学）の学位論文として十分に価値あるものと認めた。