JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	拡大次元閾値フィルタとその画像信号への応用
Author(s)	前川, 靖明
Citation	
Issue Date	2000-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1339
Rights	
Description	Supervisor:金子 峰雄, 情報科学研究科, 修士

JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

修 士 論 文

拡大次元閾値フィルタとその画像信号への応用

指導教官　金子峰雄

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学

前川靖明

2000 年 2 月 15 日

Copyright © 2000 by Yasuaki Maekawa

目 次

第 1 章

序論

線形フィルタは、信号分析の理論と線形システムの理論に強く関連していることから、信号処理において主要な役割を担っている。これらの優れたシステムの理論にも関わらず、線形フィルタは万能ではない。線形フィルタの問題点として、1) 鋭いエッジを霞ませる傾向がある。2)impulsive noise を効果的に取り除くことができない。以上の 2 点が挙げられる [1][2]。

一方、非線形手法は、基礎となる理論が少なく、線形フィルタのようには体系化されてはいない。そのため、非線形フィルタは線形フィルタの欠点それぞれに対処すべく個別的に考えられてきた．このため,，性能の評価やデザインの最適化を行なうことが非常に難しい．様々な非線形フィルタをカバーする優れた基礎となる理論が、高性能信号処理をデザインするために、エンジニアにとって必要とされる。

画像処理において、エッジの保持が、人間の視覚という点からみて、効果的である。非常に便利であると証明された非線形フィルタとして、メディアンベースのフィルタがあげられる。このフィルタが成功した理由としては、エッジの保持と impulsive noise に対する効果的な除去があげられる。しかしながら、メディアンフィルタは、入力データの rank-order 情報だけを使い、その temporal order 情報を破棄してしまう。このため，画像の細かい部分が失われてしまう．このため，入力データの rank と temporal order 情報，両方を使用する，rank order ベースのフィルタが近年，幾つか開発されてきた．これまでに、FIR-median hybrid フィルタ、重み付けメディアンフィルタ [3]、weighted order statistic フィルタ [4]、スタックフィルタ [5]、そして Boolean フィルタのような、様々な非線形フィルタが開発されてきた。

この論文では、非線形フィルタの subclass である EDT フィルタリングを提案し、そのいくつかの性質についての研究を行う。EDT フィルタは、たった一つの FIR フィルタと

閾値操作から成り立つ一方、subclass としていくつかのメディアンタイプ非線形フィルタを含んでいる。更に、メディアン操作を平均化操作に置き換えること無しに、非線形 FIR フィルタを含む可能性がある。

この論文は以下のように編成される。Section2 では、これまでに開発されてきた様々な非線形フィルタについて記す。更に、FIR フィルタも含めた、各非線形フィルタ間の類似性についても示す。Section3 では、EDT フィルタの基本的なコンセプトについて述べる。FIR フィルタの拡大次元閾値性質を Section4 で記す。ここで、FIR フィルタは、閾値操作を含む EDT フィルタとして実装される。Section5 では、DT フィルタについての周波数特性について記す。Section6 では，画像信号に対する EDT フィルタの出力結果を示す．そして Section7 では、負のフィルタ係数と適合する閾値の扱いについて記す。最後に、Section8 で結論を述べる。

第 2 章

非線形フィルタ

2.1　非線形フィルタの種類

2.1.1　メディアンフィルタ

メディアンフィルタの出力を計算するため，まず，奇数個のサンプル値がソートされる．そして，その中間値がフィルタの出力として使われる．もしフィルタの長さが $N = 2K + 1$ ならば，フィルタリング操作は次のような式で表される．

$$Y(n) = \mathrm{MED}[X(n-K), \cdots, X(n), \cdots, X(n+K)] \tag{2.1}$$

ここで $X(n)$ と $Y(n)$ はそれぞれ，入出力 sequence の n 番目のサンプルである．

殆んどのケースで信号が有限長であることを仮定しておくと合理的である．フィルタ window の一部分が入力信号の外側にあるときは，入力信号として必要なだけ，最も外側の入力サンプルを複写する．

メディアンフィルタの拡張としては，rank order フィルタがある．これらのフィルタは，i 番目に大きいサンプルが結果となることを除いて，メディアンと同じように演算をする．

メディアンフィルタの他の簡単な拡張には，再帰型メディアンフィルタがある．$2K + 1$ の window の再帰型メディアンは，次のように予め導かれた出力サンプルによって式 (2.1) の入力 sample のいくつかを置き換えることによって定義される．

$$Y(n) = \mathrm{MED}[Y(n-K), Y(n-K+1), \cdots, Y(n-1), X(n), \cdots, X(n+K)] \tag{2.2}$$

2.1.2 重み付けメディアンフィルタ

重み付けメディアンフィルタは標準的なメディアンフィルタの一般化として知られている，最も簡単な rank order ベースのフィルタである．この重み付けメディアンフィルタは，メディアンフィルタよりもデザイン面における柔軟性に富んでいる．ここでは，非負の整数重みがフィルタの係数として割り当てられる．

実数値の信号に対し，重み付けメディアンフィルタは 2 つの異なるしかし等価な方法で定義できる．次の定義は，正の整数重みの場合に使うことができる．

Definition 2.1

離散時間での入力ベクトル$\underline{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_N]$ に対して，下の整数重みと関連付けられる，長さ Nの重み付けメディアンフィルタの出力 Yは，式 (2.4) で与えられる．

$$\underline{W} = [W_1, W_2, \cdots, W_N] \tag{2.3}$$

$$Y = \mathrm{MED}[W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_N \diamond X_N] \tag{2.4}$$

ここで MED[·] はメディアン操作を意味し，$\diamond$は複写を表す．

$$K \diamond X = \overbrace{X, \cdots, X}^{K\ times} \tag{2.5}$$

このフィルタリングの手続きは次のようにして行なわれる．まず，フィルタ window 内のサンプルを大きい順にソートする．次に，対応する重み W_iの値だけ各サンプル X_iを複写する．そのようにして出来た新しい sequence の中間値を出力として選ぶ．計算例を以下に示す．

Example 2.1

整数重み [1,2,3,2,1] を持つ長さ 5 の重み付けメディアンフィルタについて考える．以下で表す sequence に対してフィルタを適用する．このため window はサンプル値 8 で中央に位置する．

$$\underline{X} = [-1, 5, 8, 11, -2]$$

ソートと複写をした後，フィルタ window 内のサンプルは，11,11,8,8,8,5,5,-1,-2 となる．この中間値を出力として用いるので，フィルタの出力は，フィルタ window 長が 5 のメディアンフィルタでは 5 を出力するのに対して，ここでは $Y = 8$ となる．

重み付けメディアンフィルタの 2 番目の定義は，整数ではない正の重みの使用を許す．

Definition 2.2

正の実数重みに対する重み付けメディアンフィルタの出力は，次のようにして計算できる．

フィルタ window 内のサンプルを大きい順にソートする．次に，合計がちょうど重みの総計の半分を越えるまで，ソートされた集合の最も大きいものから，対応する重みを足し合わせる．重み付けメディアンフィルタの出力は，最後に加えられた重みに対応しているサンプルの値である．実際の計算例を以下で示す．

Example 2.2

次のような重み$\underline{W}$と入力$\underline{X}$を持つ長さ 5 の重み付けメディアンフィルタを考える．

$$\underline{W} = [0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1], \quad \underline{X} = [1, 5, 8, 11, 2]$$

ソートした後，対応する重みを持つソートされた入力集合を得る．

sequence の左から始めて，合計が 0.45 以上になるまで重みを加える．最初の重みは，サンプル値が 11 に対応している 0.2 であり，0.45 より小さい．そのため次の重みを加える．次に大きいサンプル値は 8 であるため，これに対応する重み 0.3 が加えられる．そうすると合計が 0.45 を越えて 0.5 となる．この時に加えられた重みに対応しているサンプルが出力となるので，出力は 8 となる．

メディアンフィルタが rank order フィルタに拡張されるように，重み付けメディアンフィルタは Weighted Order Statistical(WOS) フィルタに拡張できる．

2.1.3 Weighted Order Statistical(WOS) フィルタ

離散時間における入力$\underline{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_N]$ に対し，長さ Nの WOS フィルタの出力 Y は，重み$\underline{W}$と関連している．そして閾値T_hは$Y = T_h$によって与えられる．WOS フィルタの出力 Yは，次に示す集合の何番目かの要素である．

$$\begin{aligned} Y = T_h \quad &: \quad \text{th largest element of the set} \\ &\quad\;\; [W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_N \diamond X_N] \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1.4 スタックフィルタ

スタックフィルタは，非線形フィルタを一般化したものである．このフィルタは，代表的な非線形フィルタであるメディアンフィルタや重み付けメディアンフィルタを包含している広範で，且つ重要なフィルタである．

スタックフィルタの出力は，次の 3 段階により算出される．

1. **閾値分解**

   M値の信号 Xのレベル m での閾値分解は次の式で定義される．

$$x_i^m = T^m(X_i) = \begin{cases} 1 & : \text{if} \quad X_i \geq m \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.7}$$

   時刻 n における入力が，フィルタ window 幅 $2N+1$ の信号ベクトルであれば，

$$T^m(X(n)) = [T^m(x(n-N)), \cdots, T^m(x(n+N))] \tag{2.8}$$

2. **ブール関数値出力の計算**

   各レベル毎の 2 値信号を入力として，共通のブール関数 fにより出力 $y^m(n)$ を算出する．

$$y^m(n) = f(x^m(n)) \tag{2.9}$$

3. **ブール関数値出力の合成**

   ブール関数出力群の合成をすることによりスタックフィルタの出力 $y(n)$ を算出する．

$$y(n) = \sum_{m=1}^{M-1} y^m(n) \tag{2.10}$$

2.2 各非線形フィルタ間における類似性

2.2.1 重み付けメディアンフィルタと線形 FIR フィルタとの間の類似

サイズ Nの 1-D FIR フィルタのインパルス応答係数を H_iとする．もし全ての i に対して $H_i \geq 0$ そして$\sum_{i=1}^{N} H_i = 1$ ならば，FIR フィルタの出力 Yは次のように計算できる．

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{N} H_i X_i \\ &= \text{average}\{W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_N \diamond X_N\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここでW_iは$H_i = W_i / \sum_{i=1}^{N} W_i$のような正の整数である．もし median で式 (2.11) の average を置き換えるならば，重み付けメディアンフィルタの定義が得られる．

X_iのサンプル中間値は，$\gamma = 1$ の時，式 (2.12) を最小化する値βであり，サンプル平均は，$\gamma = 2$ の時，式 (2.12) を最小化する値βである．

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^{N} |X_i - \beta|^{\gamma} \tag{2.12}$$

もし，以下のように式 (2.12) で重みW_iを採用するならば，$\gamma = 2$ の時に式 (2.13) を最小化する値βは次のように表すことができる．

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^{N} W_i |X_i - \beta|^{\gamma} \tag{2.13}$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{N} W_i X_i / \sum_{i=1}^{N} W_i \tag{2.14}$$

これは重み付け平均として使うことができる．同様に，もし$\gamma = 1$ ならば，式 (2.13) を最小化するβは次のようになる．

$$\beta = \mathrm{MED}[W_1 \diamond X_1, \cdots, W_N \diamond X_N]$$

つまり，重み付けメディアンである．

2.2.2 重み付けメディアンフィルタと WOS フィルタの類似性

重み付けメディアンフィルタは同じ重みと閾値を持つ WOS フィルタと等価である．WOS フィルタは重み付けメディアンフィルタに比べていくつかの特別な性質を持つ．例えば，非同期重み付けメディアンフィルタと呼ばれる WOS フィルタは，負のインパルス (正のインパルス) を消去し正のインパルス (負のインパルス) を保持するようにすることができる．重み付けメディアンフィルタもまた再帰的に操作することができる．再帰型重み付けメディアンフィルタの出力は次のように与えることができる．

$$Y(n) = \mathrm{MED}[W_{-K} \diamond Y(n-K+1), \cdots, W_{-1} \diamond Y(n-1), \mathbf{W}_0 \diamond X(n), \cdots, W_K \diamond X(n+K)] \tag{2.15}$$

2.2.3 重み付けメディアンフィルタとスタックフィルタの類似性

重み付けメディアンフィルタは，スタックフィルタに包含されるフィルタである [9]．入力信号 x_jに対する重みを w_jとすると，閾値レベル m における 1 の割合は

$$r^m(n) = \frac{\sum_{j=-N}^{N} x^m(n+j) \cdot w_j(n)}{\sum_{j=-N}^{N} w_j(n)} \tag{2.16}$$

と与えられ，重み付けメディアンフィルタをスタックフィルタで実現するには，ブール関数 f_{WM}を次のような形で与えることにより可能となる．

$$f_{WM} = \begin{cases} 1 & : \text{ if } \ r^m \geq 0.5 \\ 0 & : \text{ otherwise} \end{cases} \tag{2.17}$$

2.3 Binary domain における閾値分割

サンプルが整数値である M値の signal vector$\underline{X}$の閾値分割は，$\underline{X}$を次のように，$M-1$ 個の binary signal vector に分割することを意味する．

$$x_i^m = T^m(X_i) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } X_i \geq m \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \tag{2.18}$$

Example 2.3

次のような整数値を持つ 5 値の signal vector を考える．

$$\underline{X} = [0, 0, 2, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 0]$$

式 (2.18) に従って，この signal を閾値分割すると，次のようになる．

$$\underline{x}^4 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$
$$\underline{x}^3 = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$
$$\underline{x}^2 = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$
$$\underline{x}^1 = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$$

original の signal X_iは次のようにして再構築できる．

$$X_i = \sum_{m=1}^{M-1} x_i^m$$

ここで X_iは$\underline{X}$の i 番目のサンプルである．

もし入力サンプル $\underline{X}$をメディアンフィルタで処理を行なうと，中間値は次のように出力される．但し，フィルタ window 長は入力サンプル$\underline{X}$と同じ長さとする．

$$Y = \mathrm{MED}[\underline{X}] = \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{MED}[\underline{x}^m]$$

ここで

$$\underline{x}^m = [x_1^m, \cdots, x_N^m] \tag{2.19}$$

binary domain 上でのメディアン操作は簡単な Boolean 演算に代えることができる．例えば，長さ 3 のメディアンフィルタ内のサンプルが x_1, x_2, x_3であるならば，メディアンフィルタは Boolean 表記での $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$と等価である．

閾値分割と binary フィルタリングのアプローチは stack filter で導かれる．その出力は次のように与えられる．

$$S(\underline{X}) = \sum_{m=1}^{M-1} f(\underline{x}^m) \tag{2.20}$$

ここで $f(.)$ は stacking の性質を満たす Boolean 関数である．Boolean 関数 f は，各 $i \in \{1, \cdots, N\}$ に対して $u_i \geq v_i$の時，それらのそれぞれの出力が $f(\underline{u}) \geq f(\underline{v})$ ならば，stacking の性質を有する．binary 関数は入力変数の補数を含まない Boolean 表記として表すことができる時に限り，stacking 性質を持つ．

第 3 章

基本コンセプト

この論文を通して，議論は 2 次元信号処理のケースに限定する．

$S \subset Z^2$を考慮する信号の範囲とする．そして，$x : S \rightarrow Z_+$を Sに対して定義された M 値の入力信号とする．つまり，$0 \leq x(i,j) < M$．

EDT フィルタリングで採用される変換法は，メディアンフィルタやスタックフィルタにおける閾値分割と同じである．しかし，各々の分割された信号は，拡張された次元の信号 (3 次元信号) を形成するため，新しい座標軸に沿って配列される．つまり，2 次元信号は，次のような方法で 3 次元信号に変換される．

$$x^e(i,j,k) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{when } x(i,j) \geq k \\ 0 & : \quad \text{when } x(i,j) < k \end{cases} \tag{3.1}$$

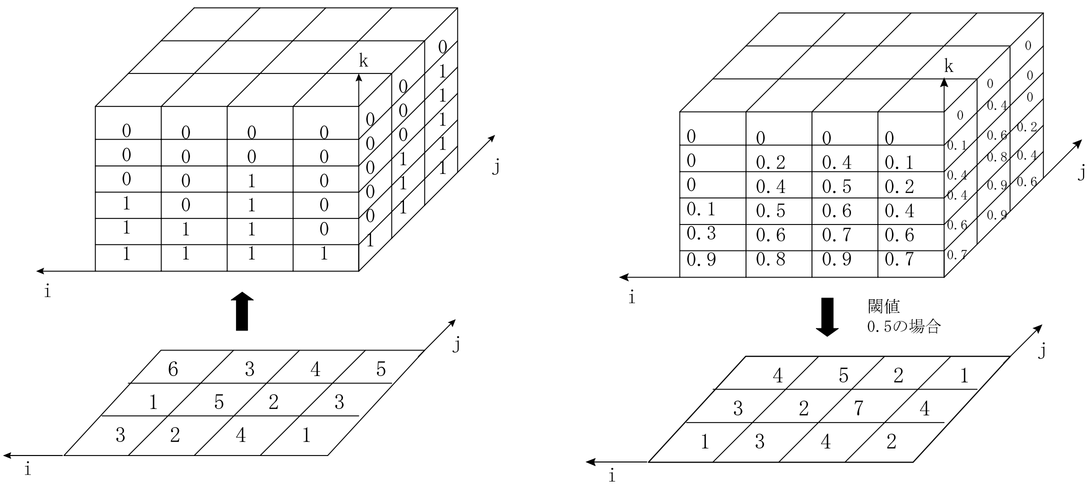
図 3.1はこの変換を表す．

次に，フィルタリングされた 3 次元の信号 $y^e(i,j,k)$ を得るため，3 次元フィルタを適用する．フィルタリングの式は以下のように表される．

$$y^e(i,j,k) = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in S_H} h(\alpha,\beta,\gamma) x^e(i-\alpha, j-\beta, k-\gamma) \tag{3.2}$$

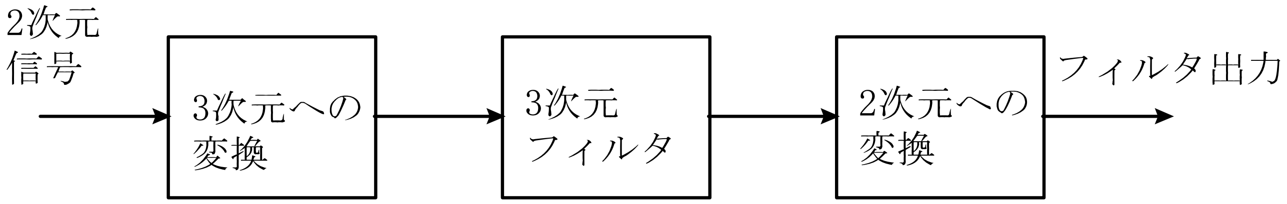
ここで $S_H \subset Z^3$はフィルタ係数のサポート範囲，そして $h(\alpha,\beta,\gamma)$ は 3 次元フィルタの係数である．最後に，閾値 T_hを使うことにより，$y^e(i,j,k)$ は，2 次元信号 $y_{EDF}(i,j)$ に逆変換される．

$$\begin{gathered} y_{EDT}(i,j) = k \\ \text{where } y^e(i,j,k) \geq T_h > y^e(i,j,k+1) \end{gathered} \tag{3.3}$$



次元の拡大と次元の縮小
(2次元から3次元) (3次元から2次元)

図 3.1: 次元の拡大と次元の縮小



$$x^e(i,j,k) = \begin{cases} 1 & : \text{ when } x(i,j) \geq k \\ 0 & : \text{ when } x(i,j) < k \end{cases}$$

$$y_{EDT}(i,j) = k$$

$$\text{where} \quad y^e(i,j,k) \geq T_h > y^e(i,j,k+1)$$

T_h : 閾値

$$y^e(i,j,k) = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in S_H} h(\alpha,\beta,\gamma)x^e(i-\alpha, j-\beta, k-\gamma)$$

$S_H \subset Z^3$はフィルタ係数のサポート範囲

図 3.2: 拡大次元閾値フィルタリングの基本的な流れ

もし閾値が一定であるならば，固定的な閾値と呼び，フィルタ係数のサポート範囲内での入力値によって変わってくるのであれば，適合的な閾値と呼ぶ．

ここまでの一連の処理の流れを図 3.2で表す．

第 4 章

線形フィルタの拡大次元閾値性質

殆んどの場合において，メディアンタイプのフィルタと線形 FIR フィルタの類似性は，平均化操作でのメディアン操作の置換えを基にして議論される．

$$y_{FIR} = \mathrm{average}\{W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_k \diamond X_k\} \tag{4.1}$$

$$y_{WM} = \mathrm{MED}\{W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_k \diamond X_k\} \tag{4.2}$$

以下で，式 (4.3) で表される線形 FIR フィルタが，ちょうど拡張された次元の閾値フィルタリングの極端な例であることを示す．

$$y_L(i,j) = \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} q(\alpha,\beta) x(i-\alpha, j-\beta) \tag{4.3}$$

ここから先，次のことに気をつける．M 値の入力信号 $x(i,j)$，$0 \leq x(i,j) < M$ を考えている間，この拡張された信号 $x^e(i,j,k)$ は k に関して $-\infty$ から ∞ まで定義されると仮定する．

4.1 FIR フィルタの係数が全て正である場合

最初に，FIR の係数は，全て非負であると仮定する．

今，EDT フィルタ係数の support 範囲を，$S_H = [-L, L] \times [-N, N] \times [-M, M-1]$ とする．そしてフィルタ係数を次のように考える．

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \tilde{h}(\alpha, \beta), \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in S_H \tag{4.4}$$

そして，拡張された次元の出力 y^eは，式 (3.2) を元に次のように与えられる．（図 4.1参照）

$$\begin{aligned}
y^e(i, j, k) &= \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \sum_{\gamma=-M}^{M-1} \tilde{h}(\alpha, \beta) \cdot x^e(i-\alpha, j-\beta, j-\gamma) \\
&= \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \sum_{\gamma=-M}^{k-1} \tilde{h}(\alpha, \beta) \cdot x^e(i-\alpha, j-\beta, j-\gamma) \\
&\quad + \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \sum_{\gamma=k}^{M-1} \tilde{h}(\alpha, \beta) \cdot x^e(i-\alpha, j-\beta, j-\gamma) \\
&= \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \tilde{h}(\alpha, \beta) \cdot x^e(i-\alpha, j-\beta) + (M-k)\tilde{H}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで

$$\tilde{H} = \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \tilde{h}(\alpha, \beta) \tag{4.6}$$

このように，1 か 0 の値を持つ 3 次元信号を入力信号として考えていたものを，第 3 軸方向に対して全て足していくと，2 次元の入力信号として考えることができる．式 (4.5) は，2 次元フィルタ window 内の全入力 $x(i, j)$ における，次のような kに対して保持される．

$$k - M \leq x(i, j) \leq k + M \tag{4.7}$$

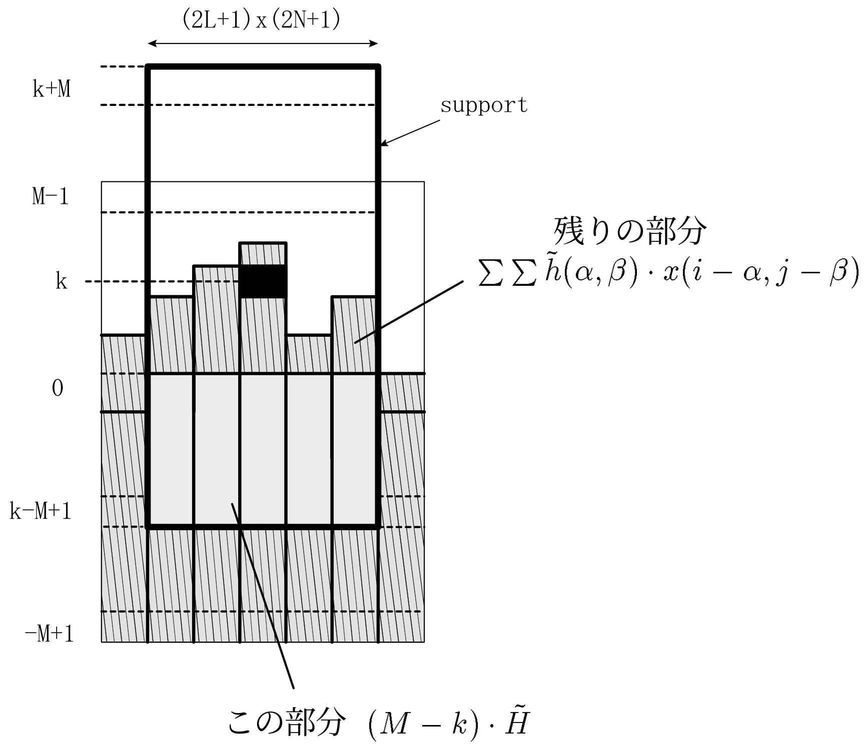


図 4.1: 式 (4.5) の説明

線形 FIR フィルタと同じ出力を得るため，EDT フィルタリングに対し，次のような関係が，適切な閾値 T_h で満たされるべきである．

$$y^e(i,j,y_L(i,j)) \geq T_h \tag{4.8}$$

$$y^e(i,j,y_L(i,j)+1) < T_h \tag{4.9}$$

式 (4.8) では，FIR フィルタの出力と同じ高さにおける出力は T_h 以上であることを示し，式 (4.9) では，FIR の出力結果より 1 つ上の高さにおける出力は T_h 以下であることを示している．

次のページで，$y^e(i,j,y_L)$ を評価する．

$$
\begin{aligned}
y^e(i,j,y_L(i,j)) &= \sum_{\alpha=-L}^{L}\sum_{\beta=-N}^{N}\tilde{h}(\alpha,\beta)\cdot x(i-\alpha,j-\beta)+(M-y_L(i,j))\tilde{H} \\
&= \sum_{\alpha=-L}^{L}\sum_{\beta=-N}^{N}\tilde{h}(\alpha,\beta)\cdot x(i-\alpha,j-\beta) \\
&\quad -\sum_{l=-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\tilde{H}\cdot q(l,n)\cdot x(l,n)+M\cdot\tilde{H} \\
&= \sum_{\alpha=-L}^{L}\sum_{\beta=-N}^{N}[\tilde{h}(\alpha,\beta)-\tilde{H}\cdot q(\alpha,\beta)]\cdot x(i-\alpha,j-\beta)+M\cdot\tilde{H}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

結果として，もし式 (4.11) のように $\{\tilde{h}(\alpha,\beta)\}$ をセットできるならば，式 (4.12) を得る．

$$
\frac{\tilde{h}(\alpha,\beta)}{\tilde{H}} = \frac{\tilde{h}(\alpha,\beta)}{\sum_{l=-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\tilde{h}(l,n)} = q(\alpha,\beta) \tag{4.11}
$$

$$
y^e(i,j,y_L(i,j)) \geq M\cdot\tilde{H} \tag{4.12}
$$

一方でまた，式 (4.16) が得られる．

$$
y^e(i,j,y_L(i,j)+1) = y^e(i,j,y_L(i,j))-\tilde{H} < M\cdot\tilde{H} \tag{4.13}
$$

次の式だけが，$q(l,n)\geq 0$ の元で解を持つために，式 (4.5) に対して制約される．この制約式は，式 (4.11) から得られる．

$$
\sum_{l=-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}q(l,n)=1 \tag{4.14}
$$

以上のことから，次の theorem が導かれる．

Theorem 4.1

係数 $\{q(l,n)\}$, $q(l,n) \geq 0$, $\sum_l \sum_n q(l,n) = 1$ を持つ FIR フィルタは，係数 $\{h(\alpha,\beta,\gamma)\}$ を持つ EDT フィルタリングとして実装できる．

$$h(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma}{M} \cdot q(\alpha,\beta) \tag{4.15}$$

そして，その固定的な閾値 T_h は，$T_h = \Gamma$.

全係数の合計 $\tilde{H}$ が，式 (4.16) より，固定された閾値は式 (4.17) のように書ける．

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} \sum_{\gamma=-M}^{M-1} h(\alpha,\beta,\gamma) = 2\Gamma && (4.16) \\ T_h &= \frac{\bar{H}}{2} && (4.17) \end{aligned}$$

theorem 4.1 は，式 (4.5) に対する条件のため，常に正しいとは限らない．しかしながら，$0 \leq y_L(i,j) \leq M-1$ のような正しい出力を考えるのであれば，もしくは十分に大きなフィルタの範囲を設定するのであれば，theorem4.1 は常に正しい．

4.2 FIR フィルタに負の係数が含まれている場合

$-\Delta < 0$ を $\{q(l,n)\}$ の中で最も小さい係数とする．今，FIR フィルタの出力式は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}
&y_L(i,j)\\
&= \sum_l \sum_n q(l,n)\cdot x(i-l,j-n)\\
&= \sum_l \sum_n (q(l,n)+\Delta)x(i-l,j-n) - \Delta\cdot\sum_l\sum_n x(i-l,j-n)\\
&= \sum_l \sum_n \tilde{q}(l,n)\cdot x(i-l,j-n) - \Delta\cdot\bar{X}(i,j) \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{q} = q(l,n)+\Delta \qquad (4.19)$$

$$\bar{X}(i,j) = \sum_l\sum_n x(i-l,j-n) \qquad (4.20)$$

そして $\{\tilde{q}(l,n)\}$ は，式 (4.19) より，非負である．

非負の係数の場合と同じように，$-M \le \gamma \le M-1$ に対して，$h(\alpha,\beta,\gamma)=\tilde{h}(\alpha,\beta)$ とする．

$y^e(i,j,y_L(i,j))$ の評価は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&y^e(i,j,y_L(i,j))\\
&= \sum_\alpha\sum_\beta \tilde{h}(\alpha,\beta)\cdot x(i-\alpha,j-\beta) + (M-y_L(i,j))\tilde{H}\\
&= \sum_\alpha\sum_\beta \tilde{h}(\alpha,\beta)\cdot x(i-\alpha,j-\beta) - \sum_l\sum_n \tilde{H}\cdot\tilde{q}(l,n)\cdot x(i-\alpha,j-\beta)\\
&\quad +(M+\Delta\cdot\bar{X}(i,j))\cdot\tilde{H}\\
&= \sum_\alpha\sum_\beta [\tilde{h}(\alpha,\beta)-\tilde{H}\cdot\tilde{q}(\alpha,\beta)]\cdot x(i-\alpha,j-\beta)\\
&\quad +(M+\Delta\cdot\bar{X}(i,j))\cdot\tilde{H} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Theorem　4.2

次のような係数 $\{q(l,n)\}$ を考える．

$$\sum_l \sum_n (q(l,n) + \Delta) = 1$$

ここで，$-\Delta < 0$ はフィルタ係数の最小値.

このような係数を持つ FIR フィルタは，次のような係数 $\{h(\alpha,\beta,\gamma)\}$ と適合的な閾値 $T_h(i,j)$ を持つ EDT フィルタリングとして実装できる．

$$h(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma}{M} \cdot (q(\alpha,\beta) + \Delta) \tag{4.22}$$

$$T_h(i,j) = \Gamma \left(1 + \frac{\Delta}{M} \sum_l \sum_n x(i-l, j-n)\right) \tag{4.23}$$

この theorem も，式 (4.5) に対する条件のため，常に正しいとは限らない．しかしながら，theorem4.1 の時と同じように，$0 \leq y_L(i,j) \leq M-1$ のような正しい出力を考えるのであれば，もしくは十分に大きなフィルタの範囲を設定するのであれば，この theorem も常に正しい.

4.3 EDT フィルタと既存の非線形フィルタとの類似性

各非線形フィルタ同士で類似性があるのと同様に，EDT フィルタも，FIR フィルタと類似性があるだけでなく，既存の非線形フィルタとの間にも類似性がある．それを以下に示す．

4.3.1 EDT フィルタとメディアンフィルタ

メディアンフィルタの出力値は次のように書ける．

$$Y = \mathrm{MED}[\underline{X}] = \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{MED}[\underline{x}^m]$$

上の式から，メディアンフィルタの出力値のレベルまで $\mathrm{MED}[\underline{x}^m]$ の値は 1 をとり，出力値より一つ上のレベルでの $\mathrm{MED}[\underline{x}^m]$ の値は 0 となる．つまり，出力値のレベルにおけるフィルタ window 内の 1 の値を持つサンプルの数は，window 内の全サンプルの半分以上，そして出力値より一つ上では半分未満である．このことから，EDT フィルタが次のような時に，EDT フィルタとメディアンフィルタは等価となる．

- 閾値がフィルタ係数の総和の半分であること
- フィルタの係数範囲が第三軸方向に関しては 0 であり，フィルタサイズがメディアンと等しい
- フィルタ window 内の係数が全て等しい

4.3.2 EDT フィルタと重み付けメディアンフィルタ

重み付けメディアンフィルタは，メディアンフィルタと係数の部分しか違わないので，EDT フィルタが次のような時に，EDT フィルタと重み付けメディアンフィルタは等価となる．

- 閾値がフィルタ係数の総和の半分であること
- フィルタの係数範囲が第三軸方向に関しては 0 であり，フィルタサイズが重み付けメディアンと等しい
- 重み付けメディアンフィルタと対応する係数が全て等しい

4.3.3 EDT フィルタと WOS フィルタ

WOS フィルタは，重み付けメディアンフィルタとは，閾値のところだけが違うので，EDT フィルタが次のような時に，EDT フィルタと WOS フィルタは等価となる．

- 閾値が WOS フィルタと等しい
- フィルタの係数範囲が第三軸方向に関しては 0 であり，フィルタサイズが WOS フィルタと等しい
- WOS フィルタと対応する係数が全て等しい

4.3.4 EDT フィルタとスタックフィルタ

フィルタの係数範囲が $[-L, L] \times [-N, N] \times [0]$ のような EDT フィルタを考える．係数を $w(\alpha, \beta)$ とすると，閾値レベル m における 1 の割合は

$$r^m(i,j) = \frac{\sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} x^m(i+\alpha, j+\beta) \cdot w(\alpha, \beta)}{\sum_{\alpha=-L}^{L} \sum_{\beta=-N}^{N} w(i+\alpha, j+\beta)} \tag{4.24}$$

と与えられ，$(2L+1) \times (2N+1) \times 1$ EDT フィルタをスタックフィルタで実現するには，ブール関数 f_{EDT} を次のような形で与えることにより可能となる．

$$f_{EDT} = \begin{cases} 1 & : \ \text{if} \ \ r^m \geq T_h \\ 0 & : \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.25}$$

上の式における T_h は閾値である．

第 5 章

周波数特性とフィルタ出力

周波数分析とインパルス応答は，メディアンタイプの非線形フィルタリングでは意味がないと信じられている．

しかしながら，EDT フィルタリングの出力を決めるための中心的な処理として、3 次元信号と線形 3 次元フィルタリングを考えるため、3 次元フィルタの周波数特性は、EDT フィルタリングの動作に関する一定の理解を与える（もちろん，フィルタリング後の閾値操作は，これらの周波数分析の意味を曖昧にする）．

片方向の z 変換の正当性を確認するため、次のような拡張された次元の信号 $\tilde{x}^e(i,j,k)$ を考える．

$$\tilde{x}^e(i,j,k) = x^e(i,j,M-k), \quad i,j,k \geq 0 \tag{5.1}$$

この z 変換は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \tilde{X}^e(z_1,z_2,z_3) &= \sum_i \sum_j \sum_{k=M-x(i,j)}^{\infty} z_3^{-k} z_1^{-i} z_2^{-j} \\ &= \frac{z_3^{-M}}{1-z_3^{-1}} \sum_i \sum_j z_3^{x(i,j)} z_1^{-i} z_2^{-j} \end{aligned} \tag{5.2}$$

一方、3 次元線形フィルタの伝達関数は次のように与えられる．

$$H(z_1,z_2,z_3) = \sum_{(i,j,k)\in S_H} h(i,j,k) z_1^{-i} z_2^{-j} z_3^{-k} \tag{5.3}$$

各処理段階における周波数特性を，図 5.1で示す．

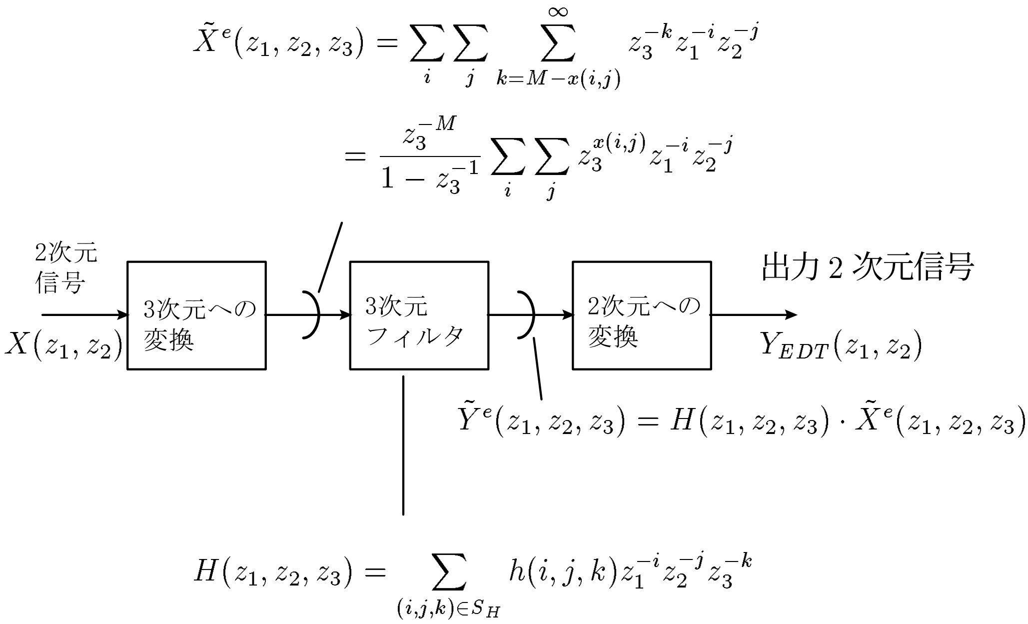


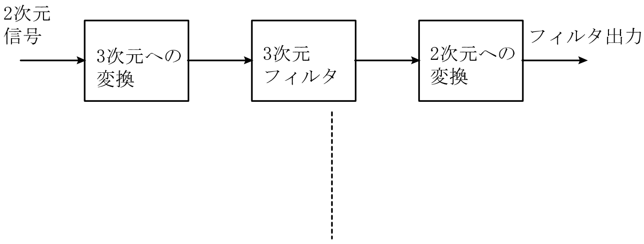
図 5.1: 各処理段階における周波数特性

5.1　EDT フィルタとしての重み付けメディアンフィルタ

重み付けメディアンフィルタは、フィルタの範囲を $[-L, L] \times [-N, N] \times [0]$ として考え，フィルタ係数を $h(i, j, k) = W(i, j)$ とするような EDT フィルタの特殊な例である．これに対応する拡張された次元のフィルタリングの伝達関数は、次のように与えられる．

$$H_{WM}(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=-L}^{L} \sum_{j=-N}^{N} W(i, j) z_1^{-i} z_2^{-j} \tag{5.4}$$

H_{WM}は，これと同じ係数を持つ 2 次元線形フィルタのものと同じであることは明らかである. しかし、その周波数応答は、3 番目の方向に対して均一に広がる. 図 5.2は，フィルタリング処理におけるフィルタの周波数特性を示す.



$$H_{WM}(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=-L}^{L} \sum_{j=-N}^{N} W(i,j) z_1^{-i} z_2^{-j}$$

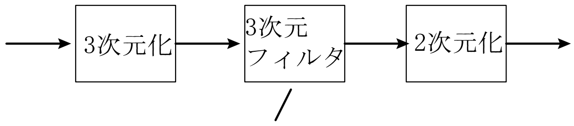
図 5.2: フィルタリング処理におけるフィルタの周波数特性

5.2 EDT フィルタとしての FIR フィルタ

前の章から分かるように、FIR フィルタは，式 (4.15) によって与えられた係数を持つ EDT フィルタリングとして実装できる. それゆえ、この 3 次元フィルタの伝達関数は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} H_{FIR}(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\Gamma}{M} \sum_i \sum_j \sum_{k=-M}^{M-1} q(i,j) z_3^{-k} z_1^{-i} z_2^{-j} \\ &= Q(z_1, z_2) \cdot \left(\frac{\Gamma}{M} \cdot \frac{z_3^M - z_3^{-M}}{1 - z_3^{-1}} \right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここでのフィルタの周波数特性を，図 5.3で示す.



$$
\begin{aligned}
&H_{FIR}(z_1, z_2, z_3) \\
&\qquad = Q(z_1, z_2) \cdot \left(\frac{\Gamma}{M} \cdot \frac{z_3^{M} - z_3^{-M}}{1 - z_3^{-1}} \right) \\
&\qquad = \frac{\Gamma}{M} \sum_i \sum_j \sum_{k=-M}^{M-1} q(i, j) z_3^{-k} z_1^{-i} z_2^{-j}
\end{aligned}
$$

図 5.3: フィルタリング処理におけるフィルタの周波数特性

ここで $Q(z_1, z_2)$ は 2 次元 FIR フィルタの伝達関数である. この伝達関数は，重み付けメディアンフィルタの時と同じものである．しかしながら，ここでの FIR フィルタリングの場合，第 3 軸方向での周波数応答は，極端に狭い low-pass 特性を持っている．

以上から，拡張された次元に於ける出力の 3 次元 z 変換は，次のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Y}^e(z_1, z_2, z_3) \\
&= \quad Q(z_1, z_2) \cdot \left(\frac{\Gamma}{M} \cdot \frac{1 - z_3^{-2M}}{(1 - z_3^{-1})^2} \right) \cdot \sum_i \sum_j z_3^{x(i,j)} z_1^{-i} z_2^{-j} \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

これは、次のような 2 次元 z 変換を持たなければならない.

$$
Y(z_1, z_2) = Q(z_1, z_2) \cdot X(z_1, z_2) \qquad (5.7)
$$

FIR フィルタと EDT フィルタとしての FIR フィルタの関係を，図 5.4で示す.

しかしながら、これら二つのスペクトルを橋渡しするための理論はまだ知られていない.

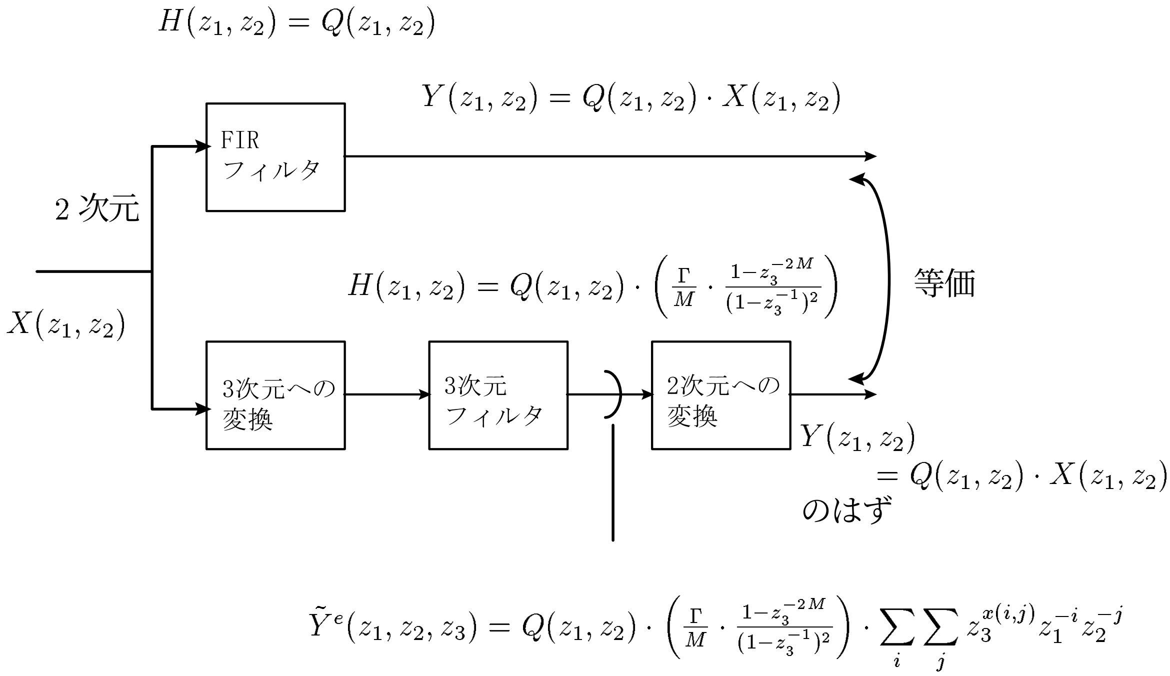


図 5.4: 周波数領域における 2 つのフィルタの関連

第 6 章

EDT フィルタの画像信号への適用結果

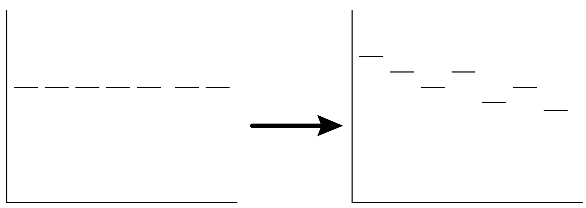
拡張された次元のフィルタリングの周波数応答と EDT 出力の関連を調べるため、線形 FIR フィルタと重み付けメディアンフィルタを含む EDT フィルタの幾つかが、ノイズを加えた画像に対して適用される.

雑音には代表的なものに (1) ガウス分布雑音,(2) インパルス性雑音が挙げられる．今回はこの 2 つの雑音を用いた.

1. ガウス分布雑音

   雑音の発生確率がガウス分布に沿っており，一般的に雑音の分布長が短い雑音.

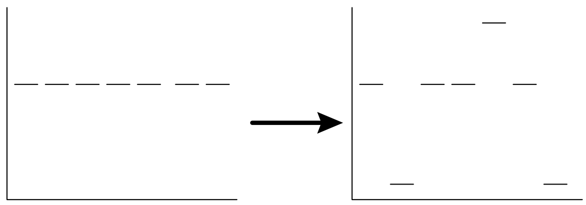
   この雑音は画像全体が少々ざらついた感じになる．図で表すと次のようになる.



2. インパルス性雑音

   この雑音は画像のどこに重畳されるか不規則であり，また雑音の大きさも不規則であ

る．一般的には黒・白の胡麻のような雑音になるため画像信号に対してインパルス的な感じとなる．図で表すと次のようになる．



6.1 通過域の設定

EDT フィルタリングで使われた 3 次元フィルタは、異なる帯域幅と同じ DC-gain を持つ、Q_D, Q_W, Q_M, Q_N から生成される 4 つの 2 次元 5×5FIR フィルタ、そして拡張された次元のフィルタ範囲 $5 \times 5 \times 1$ を持つ EDT フィルタ、そしてフィルタ係数が 3 番目の方向における重み付けによって Q_D, Q_W, Q_M, Q_N から生成されるような、$5 \times 5 \times 3, 5 \times 5 \times 5$ のフィルタ範囲を持つ EDT フィルタが適用される.$5 \times 5 \times 3$ と $5 \times 5 \times 5$EDT フィルタ係数の生成法を，図 (6.2) で示す．なお，通過域は振幅が 0.5 以上のものとする．

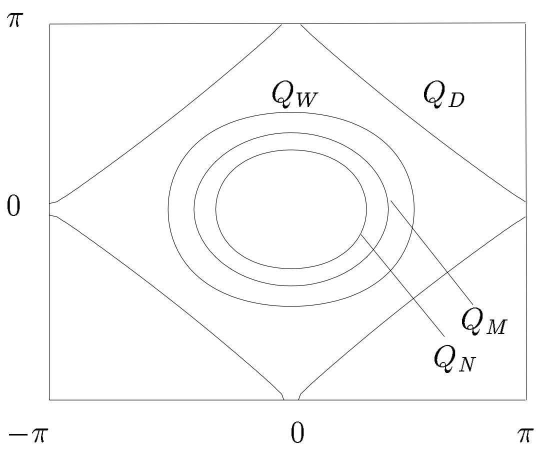
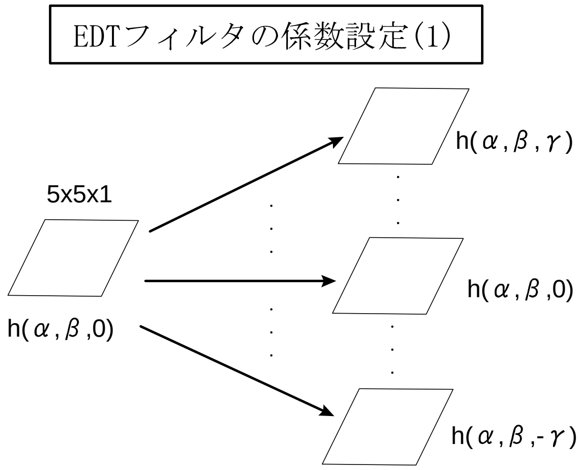
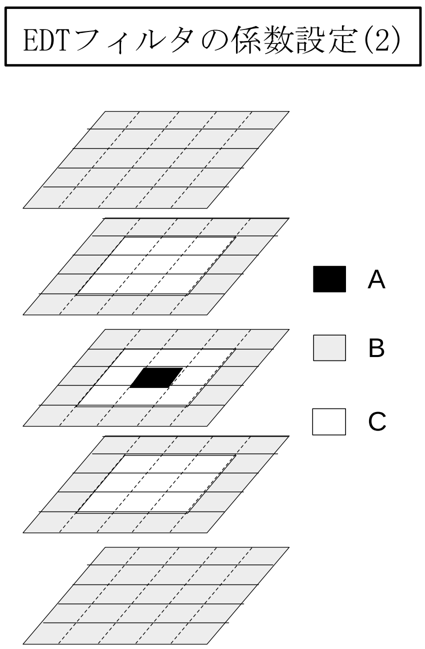


図 6.1: 2 次元周波数領域における通過域の設定

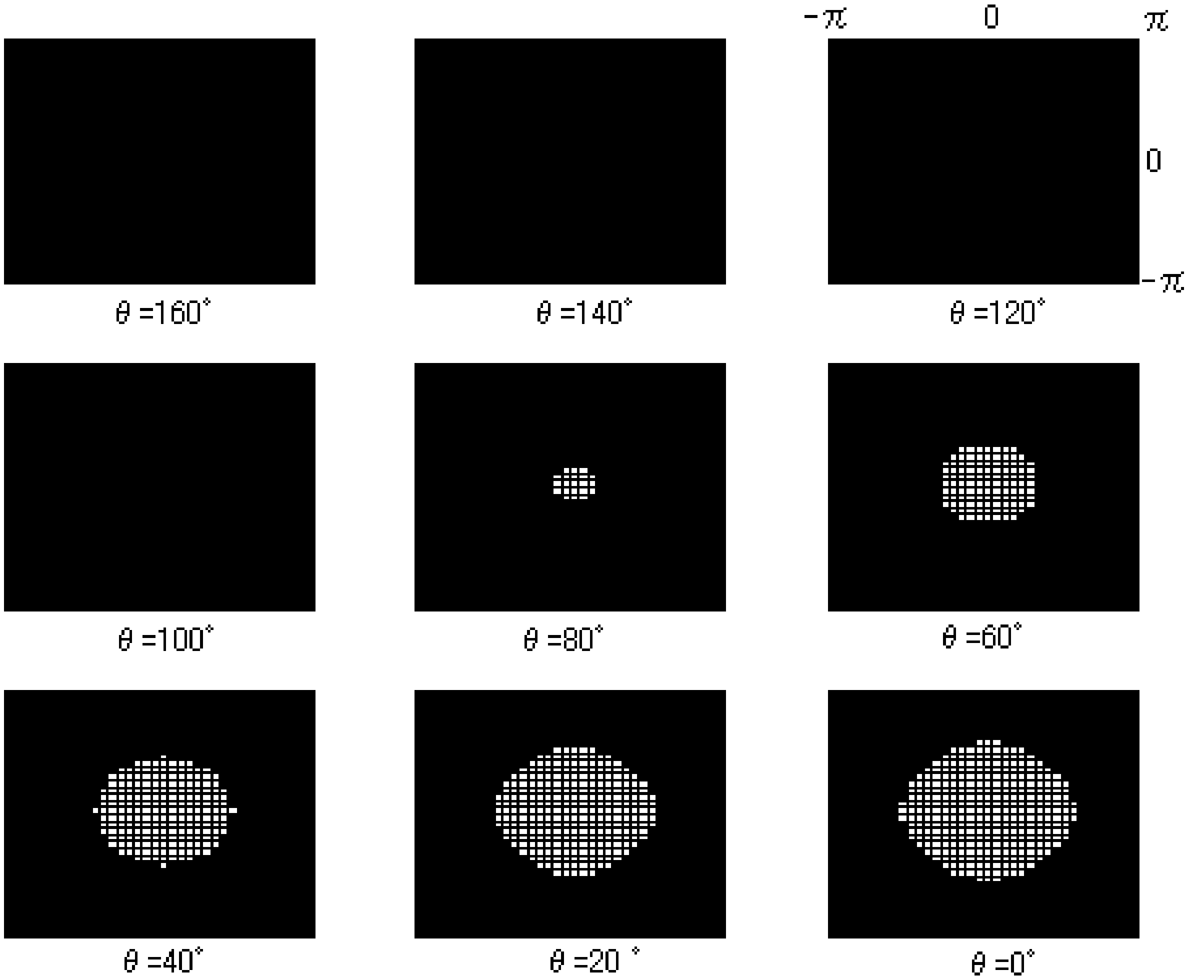


5×5×1 EDT フィルタの係数を，第 3 軸方向に分配させることにより，5×5×3 や 5×5×5 の EDT フィルタ係数を生成する．



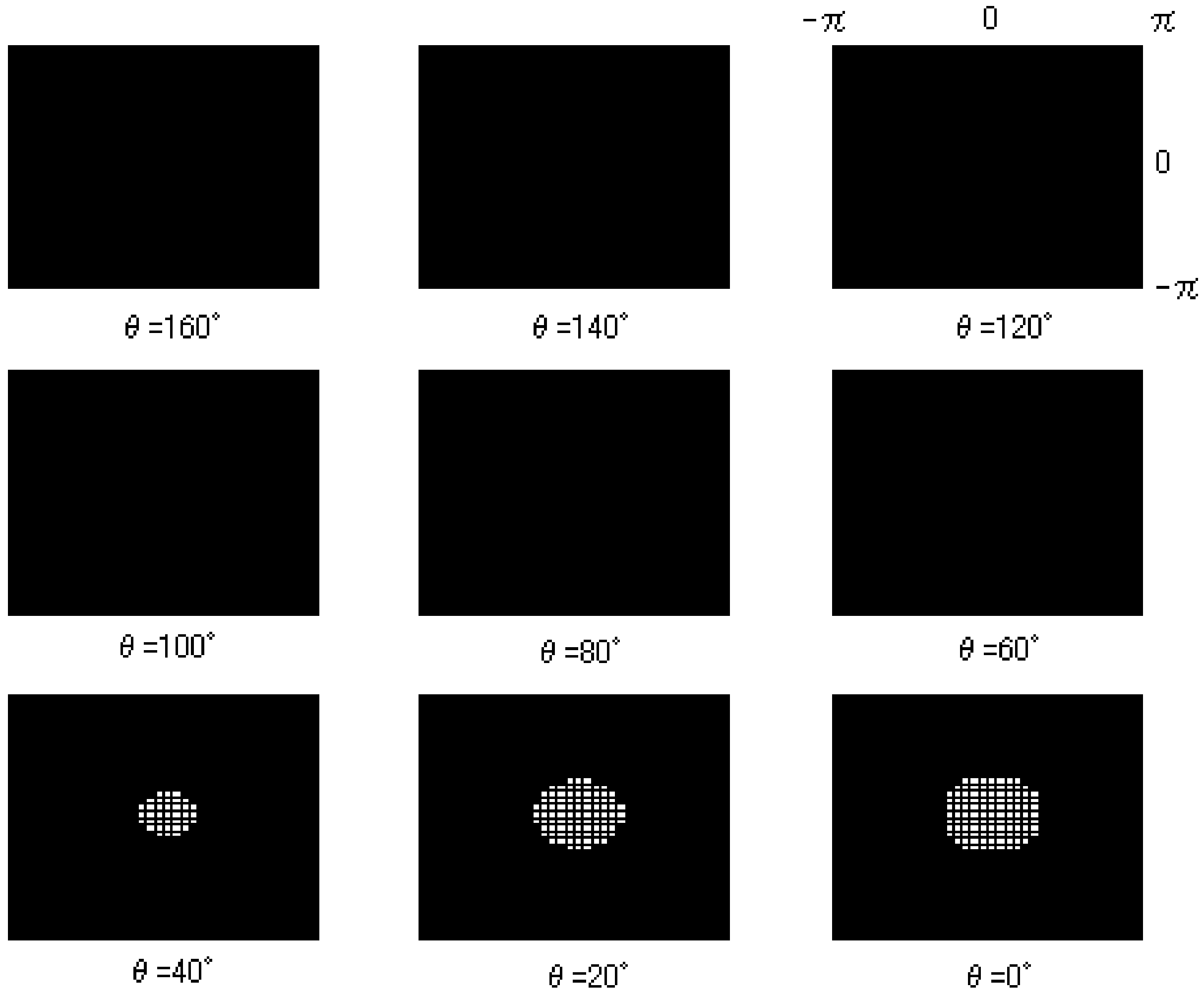
フィルタを A,B,C の 3 つの領域に分け，それぞれの領域に対して係数を決める．このため，同一領域における各々の係数は全て等しい

図 6.2: EDT フィルタの係数設定



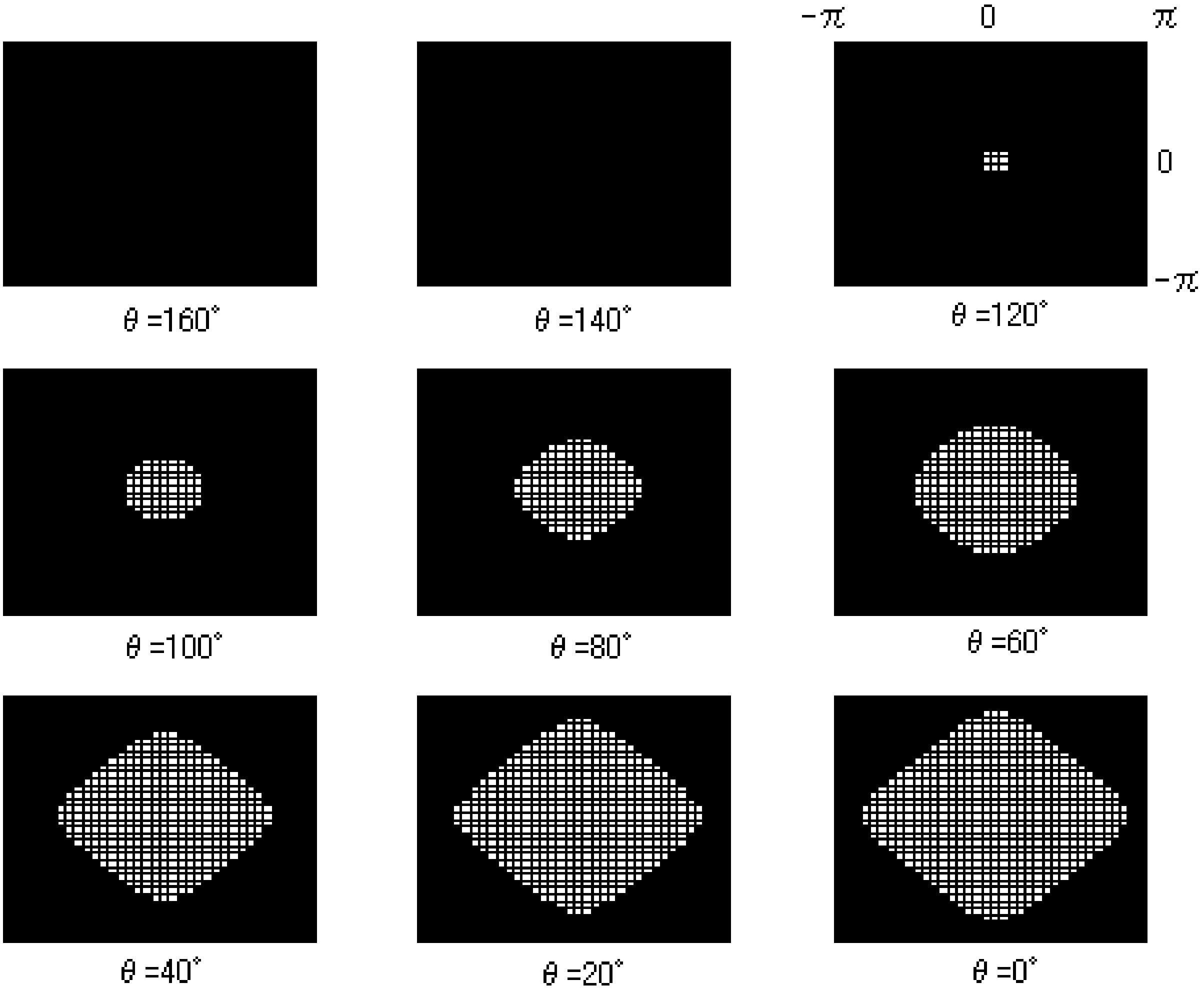
θ：第 3 軸方向における角周波数

図 6.3: 3 次元周波数領域における通過域の設定 (通過域：大きめの球状)



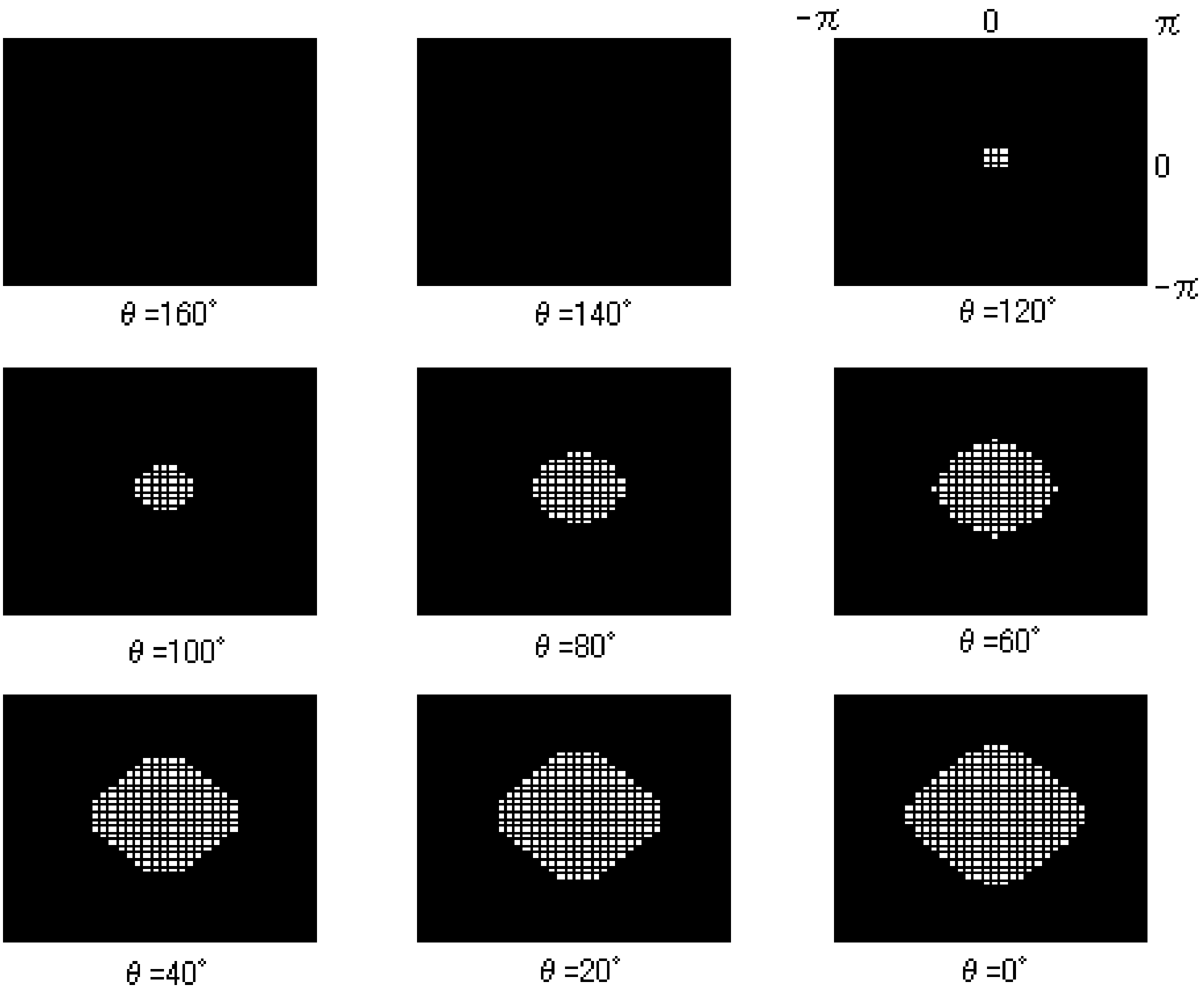
θ：第 3 軸方向における角周波数

図 6.4: 3 次元周波数領域における通過域の設定 (通過域：小さめの球状)



θ：第 3 軸方向における角周波数

図 6.5: 3 次元周波数領域における通過域の設定 (通過域：大きめの八面体)



θ : 第 3 軸方向における角周波数

図 6.6: 3 次元周波数領域における通過域の設定 (通過域：小さめの八面体)

6.2 結果と考察

1. 原画像成分に関する考察
   - 第 3 軸方向における中，高周波成分は殆んど関係無いと考えられる．
   - 2 次元平面における中程度の周波数成分 (Q_W) 程度までの範囲内にほぼ収まっていると見なすことができる．
2. インパルス性雑音に関する考察
   - 最も広い通過域を持つ $5\times5\times1$ と $5\times5\times5$ EDT フィルタの出力画像結果を比べると，$5\times5\times1$ では殆んど除去されていないのに対し，$5\times5\times5$ ではかなり除去されている．更に他の $5\times5\times5$ フィルタの結果と比較すると，インパルス性雑音成分は，2 次元平面では比較的高い周波数領域に存在すると思われる．
   - 第 3 軸方向に関しては，比較的低い周波数領域に存在していると考えられる
3. ガウス雑音成分に関する考察
   - どのような通過域設定でも十分に除去できなかったため，第 3 軸方向に関しては，低周波領域に存在すると思われる．
   - 2 次元平面に関しても，低周波領域に存在するものと思われる．
4. 平均絶対誤差に関する考察
   - 最も広い通過域を持つ $5\times5\times1$ と $5\times5\times5$ EDT フィルタの出力画像結果を比べると，$5\times5\times1$ では殆んど除去されていないのに対し，$5\times5\times5$ ではかなり除去されている．しかしながら，誤差の面では大きな違いは見られない．この理由については未だ不明である．
   - 狭い通過域を持つフィルタを，両方の雑音を付加した画像に適用した結果，比較的低い誤差の値が出るが，これは雑音除去によるものではなく，画像のぼけによるものであると考えられる．
   - インパルス性雑音を付加した例における誤差の値は，通過域が広いほど減少している．これは，通過域が広いため，原画像の崩れが少なくて済んだためと考えられる．また，出力画像上では雑音が十分除去されているにも関わらず，誤差が生じる理由として，フィルタリングによる原画像の崩れが原因として考えられる．

原画像

雑音を加えた画像 (13.212)

通過域が菱形 (9.600)

通過域が広い (7.521)

過域は中程度 (7.175)

通過域が狭い (7.327)

括弧内の値は平均絶対誤差を示す

図 6.7: $5 \times 5 \times 1$ EDT フィルタの結果 (Mixed noise)

原画像

雑音を加えた画像 (13.212)

FIR フィルタ (8.838)

$5 \times 5 \times 1$ EDT フィルタ (7.521)

$5 \times 5 \times 3$ EDT フィルタ (7.319)

括弧内の値は平均絶対誤差を示す

図 6.8: フィルタ (通過域:Q_W) のタイプごとの出力結果 (Mixed noise)

原画像

雑音を加えた画像 (3.577)

通過域が大きめの八面体 (1.642)

通過域が小さめの八面体 (2.248)

通過域が大きめの球状 (1.640)

通過域が小さめの球状 (5.378)

括弧内の値は平均絶対誤差を示す

図 6.9: $5 \times 5 \times 5$EDT フィルタの出力結果 (Impulsive noise)

原画像

雑音を加えた画像 (13.212)

通過域が大きめの八面体 (9.648)

通過域が小さめの八面体 (7.676)

通過域が大きめの球状 (10.028)

通過域が小さめの球状 (7.735)

括弧内の値は平均絶対誤差を示す

図 6.10: $5 \times 5 \times 5$EDT フィルタの出力結果 (Mixed noise)

第 7 章

結論

この論文では、EDT フィルタリングの基本コンセプトを提案した.

このEDT フィルタは部分集合として、メディアンフィルタや重み付けメディアンフィルタ等の様々なメディアンタイプの非線形フィルタだけでなく、線形 FIR フィルタをも含むことを証明した。

2 次元画像信号を閾値分割することによって得られた 3 次元信号に対して，それぞれ通過域幅の異なる幾つかのフィルタを適用し，出力画像結果と平均絶対誤差を求めた.

この実験から，以下のことが観察された.

(1) 出力画像に，エッジが保持されている部分と，ぼけた部分が混在していて，通過帯域を狭くしていくと，ぼけが大きくなる傾向がある. (2)$5 \times 5 \times 1$ コア・フィルタに対する $5 \times 5 \times 5$ コア・フィルタの優位性は見られなかった. (3) インパルス性雑音とガウス雑音を付加した画像に対する処理では，通過域の幅を広くするにつれて平均絶対誤差は小さくなっていくが，ある点を境に，誤差は逆に大きくなる．これは，通過域の拡大が原画像保持能力の向上と雑音除去能力の低下をもたらし，通過域幅が比較的狭い領域では，前者が支配的であり，通過域幅が広くなるにつれて，相対的に後者が支配的になっていくためと考えられる.

将来の課題として以下の点が挙げられる.

- EDT フィルタリングの出力特性とそのフィルタ間の関係の更なる調査
- 負の係数を含む EDT フィルタの実装手法と最適な設計
- 3 次元フィルタの最適な設計

謝辞

本研究を行なうにあたって，常に御指導，御助言を頂きました金子 峰雄助教授，並びに田湯 智助手に深く感謝の意を表します.

また，主指導教官 VLACH MILAN 教授，副テーマ指導教官 赤木 正人 助教授に御指導頂きました．ここに御礼申し上げます.

参考文献

[1] I.Pitas and A.N. Venetsanopoulos, "Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications", Boston, MA: Kluwer Academic, 1990.

[2] W.K. Pratt, "Digital Image Processing", New York: Wiley, 1991.

[3] L. Yin, R. Yang, M. Gabbouj, Y.Neuvo, "Weighted Median Filters: A Tutorial", IEEE Trans. Circuits and Systems-2, Vol. 43, No. 3, pp157-192, March 1996.

[4] B. Jeong and Y.H. Lee, "Design of Weighted Order Statistic Filters Using the Perception Algorithm", IEEE Trans. Signal Processing, Vol.42, No.11, pp3264-3269, November 1994.

[5] P.D. Wendt, E.J. Coyle, and N.C.Gallagher.Jr, "Stack Filter", IEEE Trans. Acoust.,Speech, Signal Process., Vol.ASSP-32, pp898-911, August 1986.

[6] J.P.Fitch, E.J. Coyle, "Median Filtering by Threshold decomposition", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., Vol.ASSP-32, pp1183-1188, December 1984.

[7] J.Song, and Y.H. Lee, "Linear Combination of Weighted Order Statistic Filters: Canonical Structure and Optimal Design", IEEE Trans. Circuits and Systems-2, Vol.43, No.5, pp.349-362, May 1996.

[8] J.P. Fitch, E.J. Coyle and N.C. Gallagher.Jr., "Threshold Decomposition of Multidimensional Ranked Order Operations", IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol.CAS-32, No.5, pp.445-450, May 1985.

[9] 高久 進, 田口 亮, 村田 裕, "ファジースタックフィルタ (3):簡単なファジー荷重メディアンフィルタの実現", 電子情報通信学会総合大会, A-131, p-133, 1996.