

Title	左線形項書換え系の合流条件について
Author(s)	松本, 利雅
Citation	
Issue Date	2000-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1355
Rights	
Description	Supervisor:外山 芳人, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

左線形項書換え系の合流条件について

指導教官 外山芳人 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

松本 利雅

平成 12 年 2 月 15 日

目次

1 序論	1
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 構成	2
2 準備	3
2.1 項	3
2.2 項書換え系 (TRS)	5
3 合流性	7
3.1 合流性の証明	7
3.2 危険対	9
3.3 並列書換え, 展開書換え	11
3.4 従来知られている合流条件	13
4 提案した合流条件	21
4.1 ルート重なりの状況を考えた合流条件	21
4.2 独立極大合流条件	22
5 合流条件の比較	27
5.1 合流条件の比較	27
5.2 独立極大合流条件の書換えポジションに対する制約	29
6 結論	31
6.1 研究成果	31
6.2 今後の課題	33
謝辞	34

第 1 章

序論

1.1 研究の背景と目的

項書換え系 (Term Rewriting System: TRS) は、等式論理にもとづいて構成され、等式を方向付けすることによって得られる書換え規則の集合として定義される。等式論理との違いは、TRS では書換え規則の左辺を右辺に置き換えることはできるが、その逆の置き換えはできないことである。このことは、等式による計算という面を強調している。例えば、等式論理では $1 + 2 = 3$ であり、逆に $3 = 1 + 2$ と書くこともできる。しかし、計算するということを考えると、 $1 + 2 \rightarrow 3$ のように $1 + 2$ が 3 になると見た方が自然である。 $1 + 2 \rightarrow 3$ は、まさに $1 + 2$ を 3 に置き換える書換え規則である。つまり、等式を方向付けすることによって、自然な計算モデルを得ることができるわけである。そのため、TRS はプログラム変換、定理自動証明、関数型言語の計算モデルとして広く応用されている [1, 3, 6, 7]。

TRS の重要な性質の 1 つに合流性がある。合流性は書換えの過程によらず解の一意性を保証する性質である。合流性は、非決定的な計算の解の一意性を保証し、等式の成立の有無を決定可能にするため、関数型言語や定理自動証明などにおいて重要な役割を果たしている。しかし、合流性は一般に決定不可能であり、合流条件を保証するためのさまざまな十分条件が知られている。これらの十分条件においては、TRS が合流性をもつかどうかの判定に書換え規則の重なりから作られる危険対が一般にもちいられる。TRS が停止性をもつ場合、合流性を保証する必要十分条件は危険対が合流することである [8]。TRS が停止性をもたない場合、左線形であり、書換え規則の重なりがなければ、合流性が保証される [15, 5]。しかし、書換え規則の重なりがある場合、たとえ危険対が合流しても TRS が合流性をもたない場合がある。そのため、さまざまな合流条件が提案されてい

る [5, 16, 17, 4, 13, 14, 12]。

代表的な合流条件は、危険対が並列書換えで合流することで左線形 TRS の合流性を保証する条件である [5]。後に、この合流条件は、危険対のルート重なりの場合を詳細に解析することで拡張された [17]。さらに、これらの合流条件は、並列書換えを含む展開書換えによって拡張された [13]。また書換えポジションに対する制約をもつ合流条件も提案されている [14]。一方で、並列書換えや展開書換えによって危険対を拡張した並列危険対や多重危険対が提案され、それにもとづく合流条件も提案されている [16, 4, 12]。拡張した危険対にもとづく合流条件では、通常の危険対よりもゆるい合流方法をもちいる。このため、通常の危険対では判定が困難な TRS の合流性を判定できる場合があり、一般には合流性の判定能力が高くなっている。しかし、拡張した危険対では、書換え規則の複数の重なりの組み合わせをすべて調べる必要があるため、合流条件が複雑になってしまう欠点がある。

本研究では、停止性を仮定しない左線形 TRS について、書換え規則の重なりの状況を解析し、危険対の書換えポジションを制約することで、危険対を拡張しない合流条件を提案する。今回提案した合流条件は、危険対の合流に関しては、拡張した危険対と同様な合流方法をもちいる。これにより、通常の危険対にもとづいた合流条件の判定の容易さと、拡張した危険対にもとづいた合流条件の判定能力の高さが期待できる。

1.2 構成

本論文は次のように構成されている。次章では TRS の基礎的な説明をする。3 章では、合流性についての基礎や合流性の判定基準となる危険対について説明する。さらに、並列書換えや展開書換えについて述べ、従来知られている合流条件を紹介する。4 章では、ルート重なりの状況を考えた合流条件を提案する。さらに、TRS に対して独立極大という概念を定義し、独立極大合流条件を示す。5 章では、4 章で提案した合流条件と拡張した危険対にもとづいた合流条件の判定能力を TRS の例を挙げて比較する。最後に 6 章で本研究の成果をまとめ、今後の課題を述べる。

第 2 章

準備

この章では、本論文で使用する TRS についての基本的な記法を定義する。詳しくは、文献 [1] を参照されたい。

2.1 項

関数記号 $f, g, \dots$ の集合を Σ 、変数 $x, y, \dots$ の集合を V 、 $\Sigma \cap V = \phi$ とする。

定義 2.1.1 Σ と V から得られる項の集合 $T(\Sigma, V)$ を次のように帰納的に定義する。

- $V \subseteq T(\Sigma, V)$ 。 (すべての変数は項である。)
- すべての $n \geq 0$ 、すべての n 引数関数記号 f 、すべての $t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma, V)$ に対して、 $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma, V)$ 。(項へ関数記号を適用したものは項である。)

$s \equiv t$ と書いたときは、項 s, t はシンタックス的に同じ項であるとする。特に 0 引数の関数記号を定数と呼ぶ。項 t に 2 回以上現れる変数がないとき、 t を線形項という。項の構造は木として自然に表現でき、関数記号は木の節、定数と変数は木の葉に対応する。項を木構造で表したとき、木の節や葉のポジションを以下で定義する。

定義 2.1.2 項 t のポジションの集合 $Pos(t)$ は、正整数の集合 $\mathbb{N}_+$ 上の有限列の集合 $\mathbb{N}_+^*$ をもちいて、次のように帰納的に定義される。ただし、 ε は空列を表す。

- t が変数のとき、 $Pos(t) = \{\varepsilon\}$ 。
- $t = f(t_1, \dots, t_n)$ のとき、 $Pos(t) = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{ip \mid p \in Pos(t_i)\}$ ($n \geq 0$)。

ポジション ε を項 t のルートポジションと呼ぶ。さらに、 p, q をポジションとすると、ポジションの上の半順序関係を

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists p'. pp' = q$$

と定義し、 p' を q/p と表す。 $p \leq q$ ならば p は q の上にある、 $p < q$ ならば p は q より真に上にあるという。項 t のポジション p に出現する部分項を $t|_p$ 、 t の p 以下の部分項を項 t' で置き換えた項を $t[t']_p$ と表す。 $t|_p \in V$ のとき、 p を t の変数ポジションといい、変数ポジションの集合を $PosV(t)$ とし、 $PosF(t) = Pos(t) - PosV(t)$ とする。項 t の中に現れる変数の集合は、

$$Var(t) = \{x \in V \mid \exists p \in PosV(t). t|_p \equiv x\}$$

と定義できる。 $Var(t) = \phi$ ならば、 t を基底項と呼ぶ。項 s が項 t の部分項であるとき、 $s \subseteq t$ と表す。 $s \neq t$ ならば、 $s \subset t$ と表す。文脈 C とは、特別な定数 $\square$ を $n(\geq 0)$ 個もつ項である。文脈 C のすべての $\square$ を左から右に $t_1, \dots, t_n$ で置き換えた項を $C[t_1, \dots, t_n]$ と表す。代入 θ は、変数から項への写像である。ただし、有限個の変数 x について、 $\theta(x) \neq x$ である。代入は項から項への写像へ拡張できる。代入 θ によって得られる項 $\theta(t)$ を $t\theta$ と表す。 C を変数をもたない文脈とし、 $s \equiv C[x_1, \dots, x_n]$ とする。 $s\theta \equiv C[x_1\theta, \dots, x_n\theta]$ のポジション p が $x_i\theta$ のポジションとは、 $(s\theta)|_p$ が $x_i\theta$ の部分項として出現することであり、このときポジション p は代入 θ に現れるという。

例 2.1.3 項 t 、文脈 C 、代入 θ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned} t &\equiv f(g(x), y) \\ C &\equiv h(\square, z) \\ \theta &= \{x \mapsto a, y \mapsto g(a)\} \end{aligned}$$

このとき、 $Pos(t), PosV(t), t|_1, t[a]_1, C[t], t\theta$ は、以下ようになる (図 2.1)。 t は線形項、 $t\theta$ は基底項である。

$$\begin{aligned} Pos(t) &= \{\varepsilon, 1, 11, 2\}, PosV(t) = \{11, 2\} \\ t|_1 &\equiv g(x) \\ t[a]_1 &\equiv f(a, y) \\ C[t] &\equiv h(f(g(x), y), z) \\ t\theta &\equiv f(g(a), g(a)) \end{aligned}$$

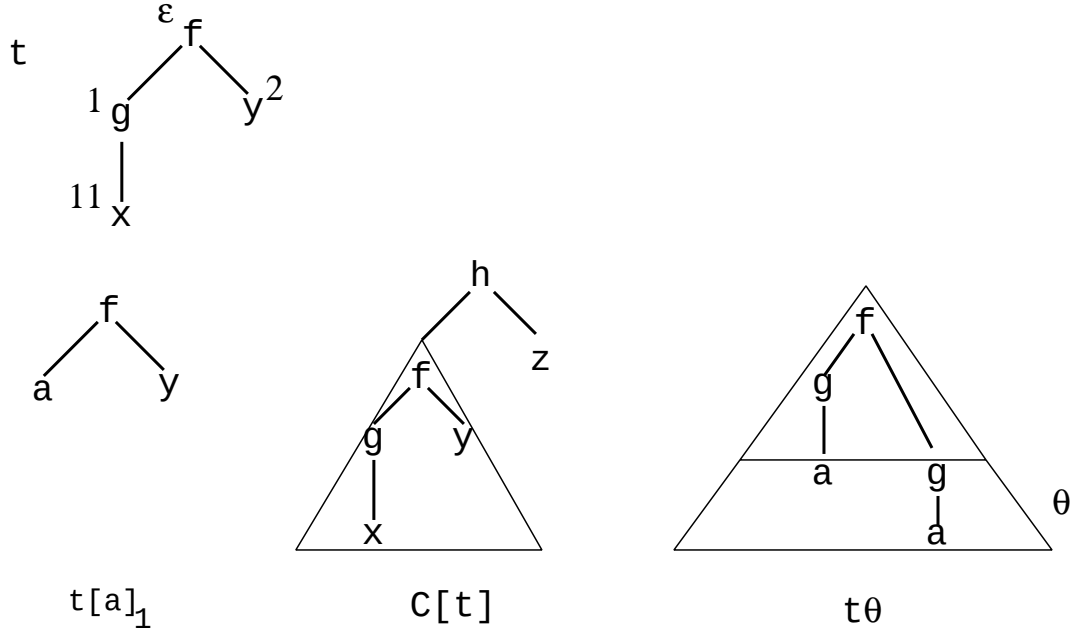


図 2.1: 項のポジション、部分項の置換、文脈、代入

2.2 項書換え系 (TRS)

項 l から項 r への書換え規則 $l \rightarrow r$ は以下を満たす等式である。

- l は変数ではない。
- $Var(r) \subseteq Var(l)$ 。

項書換えシステム (以下 TRS と略す) は書換え規則の集合である。 R はいつも TRS を表すこととする。 R における書換え関係 $\rightarrow_R$ を以下のように定義する (図 2.2)。

定義 2.2.1 $s \rightarrow_R t \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists l \rightarrow r \in R, \exists p \in Pos(s), \exists \theta[s|_p \equiv l\theta \wedge t \equiv s[r\theta]_p]$

書換え規則をもちいて項を書換えることをリダクション、書換え規則を適用できる部分項 $l\theta$ をリデックスという。それ以上リダクションできない項を正規形という。 R が明らかなきは、書換え関係 $\rightarrow_R$ を $\rightarrow$ と書く。書換え関係 $\rightarrow$ の反射閉包を $\rightarrow^*$ 、反射推移閉包を $\rightarrow^+$ と記述する。項 s のポジション p を書換えて項 t になるとき、 $s \xrightarrow{p} t$ と書く。書換え規則の左辺が線形項ならば、その書換え規則を左線形という。 R のすべての書換え規則が左線形であるとき、 R を左線形 TRS という。本論文で扱う TRS はすべて左線形とする。

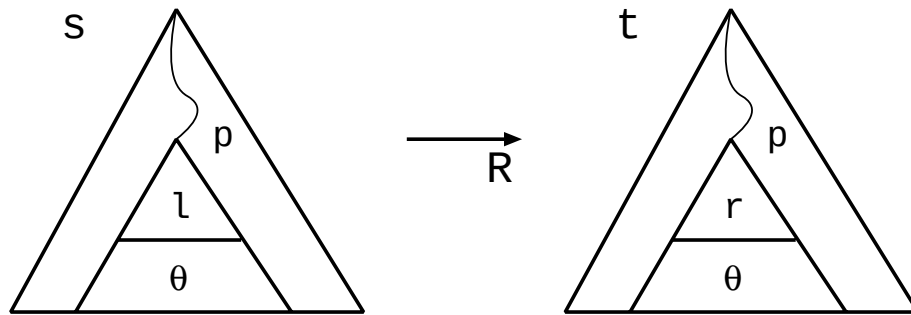


図 2.2: 書換え関係

例 2.2.2 自然数の加算を意味する $TRSR$ を考える。 $0, 1, 2, \dots$ をそれぞれ $0, S(0), S(S(0)), \dots$ と表すことにする。

$$R = \begin{cases} x + 0 \rightarrow x & \cdots (1) \\ x + S(y) \rightarrow S(x + y) & \cdots (2) \end{cases}$$

R は左線形である。 R によって、項 $S(0) + S(S(0))$ は以下のように書換えられる。ただし、下線部はリデックスを表す。

$$\begin{aligned} \underline{S(0) + S(S(0))} &\longrightarrow S(\underline{S(0) + S(0)}) & (2) \\ &\longrightarrow S(S(\underline{S(0) + 0})) & (2) \\ &\longrightarrow S(S(S(0))) & (1) \end{aligned}$$

$S(S(S(0)))$ はこれ以上リダクションできないので正規形である。この書換えは $1 + 2 = 3$ という計算を意味している。

第 3 章

合流性

この章では、合流性についての基礎的な性質を説明し、危険対、並列書換え、展開書換えを定義する。その後、従来知られている合流条件を紹介する。

3.1 合流性の証明

定義 3.1.1 $\forall s, t, r [t \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} r \Rightarrow \exists w. t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} r]$ であるとき、 $\rightarrow_R$ または R は合流性をもつという。

つまり、任意の項 s をリダクションして項 t, r が得られたならば、 t, r からリダクションして合流する項 w が必ず存在するということである。停止性を満たさない TRS の合流性を保証する方法としては、書換え関係に制限をつけたダイヤモンド性や強合流性にもとづく方法が広くもちいられる。

定義 3.1.2 $\forall s, t, r [t \leftarrow s \rightarrow r \Rightarrow \exists w. t \rightarrow w \leftarrow r]$ であるとき、 $\rightarrow$ はダイヤモンド性をもつと呼ぶ。

定義 3.1.3 $\forall s, t, r [t \leftarrow s \rightarrow r \Rightarrow \exists w. t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} r]$ であるとき、 $\rightarrow$ は強合流性をもつと呼ぶ。

強合流性の定義は対称なので、 $t \leftarrow s \rightarrow r$ ならば、適当な w_1, w_2 に対して、 $t \xrightarrow{*} w_1 \xleftarrow{*} r$ と $t \xrightarrow{*} w_2 \xleftarrow{*} r$ の両方が成り立たなければならない（図 3.1）。

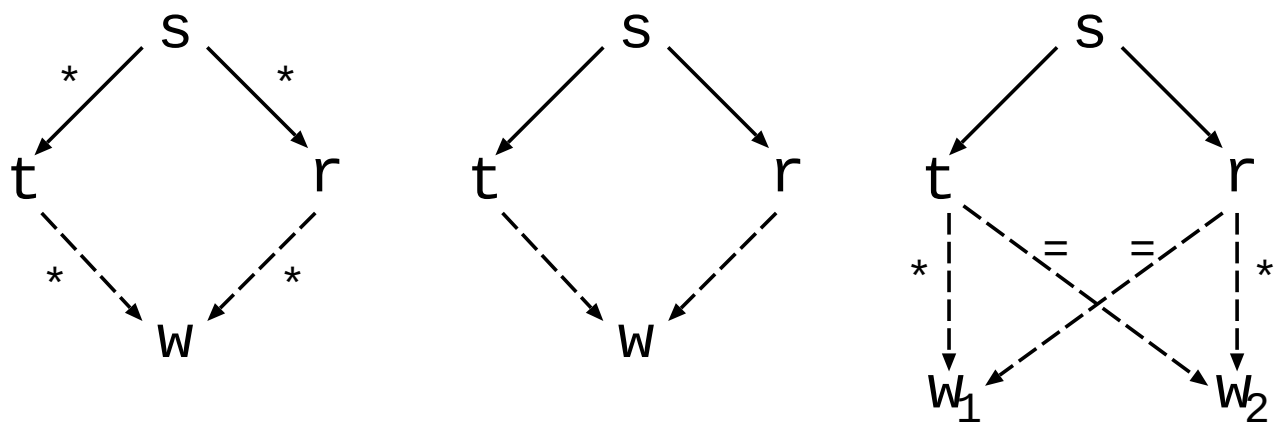


図 3.1: 合流性, ダイヤモンド性, 強合流性

補題 3.1.4 [5] $\rightarrow$ が強合流性をもつならば、 $\rightarrow$ は合流性をもつ。

証明) (1) から (2),(3) を順に導く。

$$\forall s, t, r [t \leftarrow s \rightarrow r \Rightarrow \exists w. t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} r] \cdots (1)$$

$$\forall s, t, r [t \leftarrow s \xrightarrow{*} r \Rightarrow \exists w. t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} r] \cdots (2)$$

$$\forall s, t, r [t \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} r \Rightarrow \exists w. t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} r] \cdots (3)$$

(1) を繰り返し使うと (2) が得られる。さらに (2) を繰り返し使うと (3) が得られる (図 3.2)。□

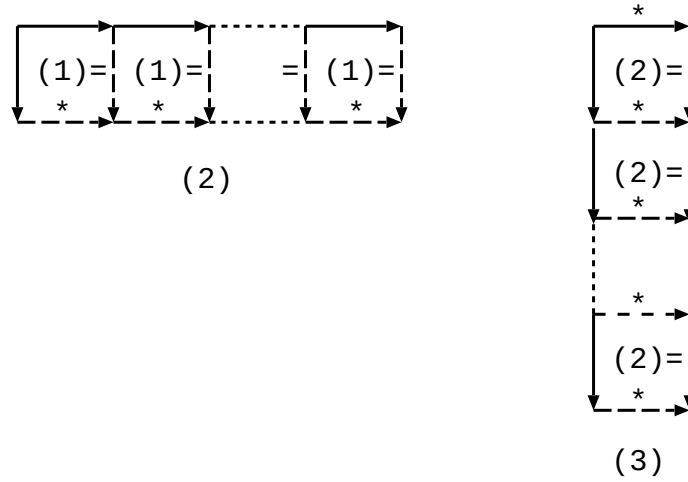


図 3.2: 証明のスケッチ

$\rightarrow_1$ と $\rightarrow_2$ をそれぞれ書換え関係とする。

事実 3.1.5 $\xrightarrow{*}_1 = \xrightarrow{*}_2$ ならば、 $\rightarrow_1$ が合流性をもつことと $\rightarrow_2$ が合流性をもつことは同値である。

補題 3.1.6 $\rightarrow_1 \subseteq \rightarrow_2 \subseteq \xrightarrow{*}_1$ ならば、 $\xrightarrow{*}_1 = \xrightarrow{*}_2$ である。

補題 3.1.4 と事実 3.1.5、補題 3.1.6 を合わせると次の命題が得られる。

命題 3.1.7 [11] $\rightarrow_1 \subseteq \rightarrow_2 \subseteq \xrightarrow{*}_1$ 、かつ $\rightarrow_2$ は強合流性をもつならば、 $\rightarrow_1$ は合流性をもつ。

書換え関係はダイヤモンド性をもつならば、強合流性をもつ。したがって、命題 3.1.7 は $\rightarrow_2$ がダイヤモンド性をもつ場合にも成り立つ。 $\rightarrow_1$ の合流性を直接示すことができない場合、 $\rightarrow_1 \subseteq \rightarrow_2 \subseteq \xrightarrow{*}_1$ という関係にある $\rightarrow_2$ の強合流性、またはダイヤモンド性を示すことで $\rightarrow_1$ の合流性を得ることができる。合流性を証明する際、この方法が多くもちいられる。

3.2 危険対

あるリデックスをリダクションすることによって、他のリデックスが消えるときリデックスが重なる、または書換え規則が重なるという。二つの書換え規則が重なるとき、一方の書換え規則から得られる項ともう一方の書換え規則から得られる項によって作られる対を危険対という。合流性の判定基準として危険対が多くの場合もちいられる。

定義 3.2.1 $l_i \rightarrow r_i (i = 1, 2)$ は互いに変数名の重なりがない書換え規則とする。 $p \in \text{Pos}F(l_1)$ とし、 θ を $l_1|_p$ と l_2 の最汎単一化子 (*mgu*) とする。このとき、 $\langle r_1\theta, (l_1\theta)[r_2\theta]_p \rangle$ を危険対といい、 l_1 は p で危険対 $\langle r_1\theta, (l_1\theta)[r_2\theta]_p \rangle$ をもつという。ただし、2つの書換え規則が同じ場合には $p = \varepsilon$ のときを除く。ここで、 p を重なりをもつポジションと呼ぶ。特に、 $p = \varepsilon$ のときをルート重なり (*overlay*) という。

例 3.2.2

$$R = \begin{cases} f(g(x), y) \rightarrow h(x) & \cdots (1) \\ f(x, y) \rightarrow g(x) & \cdots (2) \\ g(x) \rightarrow x & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) の ε に (2) が、(2) の ε に (1) が重なり (図 3.3(i))、(1) の 1 に (3) が重なる (図 3.3(ii)) ので、 R の危険対は以下の通りになる。

- 1) $\langle h(x), g(g(x)) \rangle : (1), (2) \quad \varepsilon$
- 2) $\langle g(g(x)), h(x) \rangle : (2), (1) \quad \varepsilon$
- 3) $\langle h(x), f(x, y) \rangle : (1), (3) \quad 1$

1, 2 の危険対はルート重なりである。

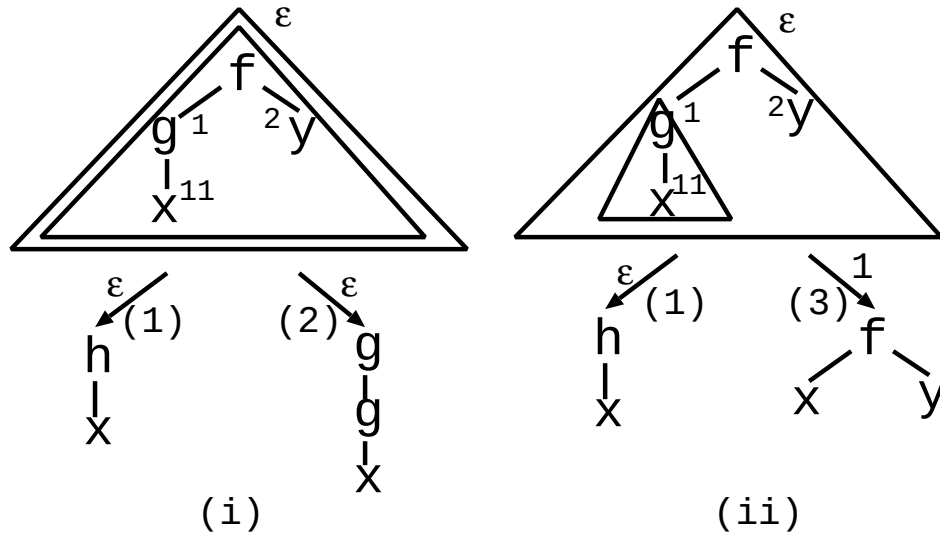


図 3.3: 危険対の例

3.3 並列書換え, 展開書換え

1 ステップの書換え関係 $\rightarrow_R$ にもとづいて並列書換えを定義する。 $p, q \in \text{Pos}(t)$ とし、 $p \not\leq q \wedge q \not\leq p$ のとき $p \perp q$ と表し、 p, q は独立であると呼ぶ。 P が独立なポジションの集合であるとは、 $\forall p, q \in P. p \perp q$ ということである。 $P \perp Q$ とは、 $\forall p \in P, \forall q \in Q. p \perp q$ のこととする。 $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \text{Pos}(t)$ を独立なポジションの集合とし、各 $p \in P$ に対して項 t_p が与えられているとき、 $s[t_{p_1}]_{p_1} \cdots [t_{p_n}]_{p_n}$ を $s[t_p]_{p \in P}$ と書く。

定義 3.3.1 (並列書換え) P を独立なポジションの集合とする。各 $p \in P$ に対して、 $l_p \rightarrow r_p \in R$ が与えられ、 $s|_p = l_p \theta_p$ である θ_p が存在するとき、 $s \xrightarrow{P} s[r_p \theta_p]_{p \in P}$ を並列書換えという (図 3.4)。

$\xrightarrow{P}$ の定義から $\rightarrow \subseteq \xrightarrow{P} \subseteq \xrightarrow{*}$ 。さらに、補題 3.1.6 より $\xrightarrow{P} = \xrightarrow{*}$ である。

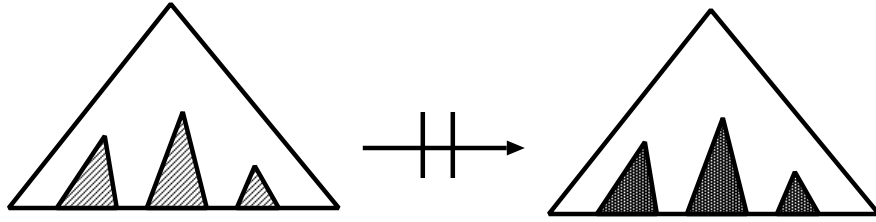


図 3.4: 並列書換え

例 3.3.2 例 3.2.2 の TRS をもちいると、 $f(f(x, y), g(x)) \xrightarrow{\{1,2\}} f(g(x), x)$ となる。

特に、 $f(f(x, y), g(x)) \xrightarrow{\phi} f(f(x, y), g(x))$ である。

補題 3.3.3 $[17] l \rightarrow r \in R$ を左線形な書換え規則とする。 P は $l \theta \xrightarrow{P} t$ を満たす独立なポジションの集合であり、 P のすべてのポジションは代入 θ に現れるとする。このとき、 $r \theta \xrightarrow{P} r \theta' \leftarrow t$ となる代入 θ' が存在する。

証明) P の各ポジションは θ に現れるので、 l のすべての変数 x に対して、 $x \theta \xrightarrow{P} x \sigma$ となるような代入 σ が存在する。したがって、 $t \equiv l \sigma$ と書ける。 $r \theta \xrightarrow{P} r \sigma \leftarrow l \sigma$ であるから、 $\theta' \equiv \sigma$ とおけばよい。□

展開書換えを文献 [12] にもとづいて定義する。

定義 3.3.4 あるポジション p とある書換え規則 $l \rightarrow r$ からなる対 $\langle p, l \rightarrow r \rangle$ をリデックスパタンと呼ぶ。任意の項 s に対して、 s のリデックスパタンの集合を以下のように定義する。

$$Red(s) = \{\langle p, l \rightarrow r \rangle \mid \exists \theta. l\theta \equiv s|_p\}$$

$\bar{p}, \bar{q}, \dots$ はリデックスパタンを表すこととする。ポジション p 、または書換え規則の右辺 r が明らか、または関係ないときは省略する。明らかに、任意の代入 θ に対して $Red(s) \subseteq Red(s\theta)$ である。 $U \subseteq Red(s)$ とあるポジション $q \in PosF(s)$ に対して、

$$U|_q = \{\langle p/q, l \rightarrow r \rangle \mid \langle p, l \rightarrow r \rangle \in U \wedge q \leq p\}$$

と定義する。2つのリデックスパタン $\langle p_1, l_1 \rightarrow r_1 \rangle$ と $\langle p_2, l_2 \rightarrow r_2 \rangle$ は結合しているとは、 $p_1 \leq p_2$ かつ $p_2/p_1 \in PosF(l_1)$ 、または $p_2 \leq p_1$ かつ $p_1/p_2 \in PosF(l_2)$ ということである。

定義 3.3.5 リデックスパタンの集合が調和しているとは、その各リデックスパタンが結合しないことである。

明らかに、 U が調和しているならば $U|_q$ も調和する。すべての $\bar{p} \in U, \bar{q} \in V$ が結合しないとき、 U, V は共存するといい、 $U \uparrow V$ と書く。

定義 3.3.6 $\bar{p} = \langle p, l \rightarrow r \rangle$ を項 s のリデックスパタン、 $A: s \xrightarrow{\langle q, l' \rightarrow r' \rangle} t$ を書換えステップとする。 A による $\bar{p}$ の残余リデックスの集合 $\bar{p}/A$ を以下のように定義する。

$$\bar{p}/A = \begin{cases} \{\bar{p}\} & p \not\leq q \text{ のとき} \\ \phi & p \geq q, \text{ かつ } p/q \in PosV(l') \text{ のとき} \\ \{\langle qm'(p/(qm)), l \rightarrow r \rangle \mid m' \in PosV(r')\} & \exists m \in PosV(l'). p \geq qm \text{ のとき} \end{cases}$$

さらに、 $U/A = \bigcup_{\bar{p} \in U} \bar{p}/A$ とする。ある書換え列 $A = A_1; \dots; A_n$ に対して、 $U/A_1/\dots/A_i \uparrow \bar{p}_{i+1} (i = 1, \dots, n-1)$ であるとき、 $U/A = U/A_1/\dots/A_n$ と定義する。ただし、 $\bar{p}_i$ は、書換えステップ A_i によってリダクションされるリデックスパタンである。

定義 3.3.7 $U \subseteq Red(s)$ をリデックスパタンの調和集合とする。書換え列 $A: s \xrightarrow{*} t$ が次の条件を満たすならば、 s の U に関する展開書換えという。ただし、 $|A|$ は A の要素数を表す。

1. $|A| = 0$ そうでなければ、
2. $A = A_1; A_2$ ($|A_1| = 1$) であり、 $\bar{p} \in U$ は A_1 によってリダクションされ、 A_2 は U/A_1 に関する展開書換えである。

$U/A = \phi$ ならば $s \xrightarrow{U} t$ と書き、 U に関する全展開書換えという。

簡単に言えば、展開書換えは独立なポジションに加えて、変数ポジション以下の書換えも同時にできる書換え関係である (図 3.5)。

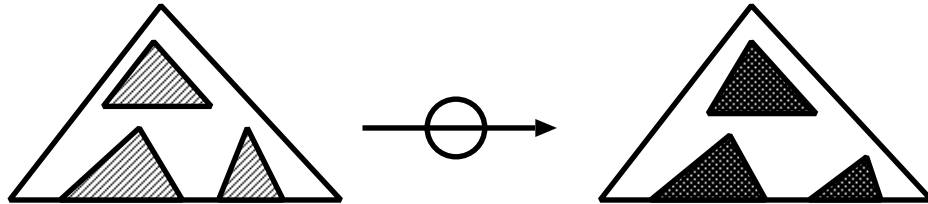


図 3.5: 展開書換え

展開書換えについて、次の重要な定理がある。

定理 3.3.8 [2] 任意の項 s と任意の調和集合 $U \subseteq \text{Red}(s)$ に対して、次の 1, 2 が成り立つ。

1. s の U に関するすべての展開書換えは有限であり、全展開書換えに拡張できる。
2. s の U に関するすべての全展開書換えは、同じ項を導く。

この定理から $\rightarrow \subseteq \dashv\dashv \subseteq \twoheadrightarrow \subseteq \xrightarrow{*}$ が導かれる。

例 3.3.9 例 3.2.2 の TRS をもちいると、 $f(g(g(x)), g(x)) \xrightarrow{\{1,2\}} f(x, x)$ となる。
特に、 $f(g(g(x)), g(x)) \xrightarrow{\phi} f(g(g(x)), g(x))$ である。

3.4 従来知られている合流条件

通常の危険対にもとづいた合流条件と並列書換え、または展開書換えによって拡張した危険対にもとづいた合流条件を紹介する。

命題 3.4.1 [5] 左線形 TRS R のすべての危険対 $\langle u, v \rangle$ について、 $v \dashv\dashv u$ ならば、 R は合流性をもつ。

証明) $\dashv\vdash$ がダイヤモンド性をもつことを示す。 $t_2 \xleftarrow{\{p_1, \dots, p_m\}} t_1 \xrightarrow{\{p'_1, \dots, p'_n\}} t_3$ とする。すべての t_1, t_2, t_3 について、 $t_2 \dashv\vdash t_4 \xleftarrow{\{p_1, \dots, p_m\}} t_3$ を満たす t_4 が存在することを示す。ここで、

$$\begin{aligned}\alpha_i &\equiv t_1|_{p_i} (1 \leq i \leq m), \beta_j \equiv t_1|_{p'_j} (1 \leq j \leq n) \\ \Gamma &= \{\alpha_i | \exists \beta_j. \alpha_i \subseteq \beta_j\} \cup \{\beta_j | \exists \alpha_i. \beta_j \subseteq \alpha_i\} \\ \Delta &= \{\alpha_i | \forall \beta_j. \alpha_i \not\subseteq \beta_j\} \cup \{\beta_j | \forall \alpha_i. \beta_j \not\subseteq \alpha_i\} \\ |t| &= |\text{Pos}(t)|, |\Gamma| = \sum_{t \in \Gamma} |t|\end{aligned}$$

とする。 $|\Gamma|$ に関する帰納法で t_4 が存在することを示す。

Base case $|\Gamma| = 0$ のとき、すべての α_i と β_j は重ならないので、明らかに t_4 は存在する。

Induction step $|\Gamma| < k (k > 0)$ のとき、 t_4 は存在すると仮定する。 $|\Gamma| = k$ のときを考える。

$\Delta = \{s_1, \dots, s_q\}$ とすると、 $t_1 \equiv C[s_1, \dots, s_q]$, $t_2 \equiv C[s_{12}, \dots, s_{q2}]$, $t_3 \equiv C[s_{13}, \dots, s_{q3}]$ と書ける。ただし、 $s_{i2} \xleftarrow{Q} s_i \xrightarrow{Q'} s_{i3}$, $Q = \{q_1, \dots, q_{m'}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}$, $Q' = \{q'_1, \dots, q'_{n'}\} \subseteq \{p'_1, \dots, p'_n\}$ 。すべての s_i, s_{i2}, s_{i3} に対して、 $s_{i2} \dashv\vdash w_i \xleftarrow{\{p_1, \dots, p_m\}} s_{i3}$ を満たす w_i が存在することを示す。

$Q = \{\varepsilon\}$ として、 $s_{i2} \xleftarrow{\varepsilon} s_i \xrightarrow{Q'} s_{i3}$ のときを考えれば十分である。 $q'_{j'} \in Q'$ かつ $\beta_{j'} \equiv s_i|_{q'_{j'}} \subseteq s_i (1 \leq j' \leq n')$ とする。 $l \rightarrow r \in R, s_i \equiv l\theta, s_{i3} \equiv r\theta$ とする。すべての $\beta_{j'}$ 、つまり $q'_{j'}$ が θ に現れるならば、補題 3.3.3 より w_i は存在する。

ある $\beta_{j'}$ は θ に現れないとする。一般性を失うことなく、 β_1 が θ に現れないとしてもよい。このとき、 $\beta_1 \equiv l'\theta'$ となる $l' \rightarrow r' \in R$ が存在する。 $l' \rightarrow r'$ は $l \rightarrow r$ に重なり、 $\beta_1 \subseteq s_i$ なので、危険対 $\langle u, v \rangle$ が存在する。 $s_i \xrightarrow{q'_1} \tilde{s}_i$ とすると、ある θ'' に対して $s_{i2} \equiv u\theta'', \tilde{s}_i \equiv v\theta''$ となる。仮定より $\tilde{s}_i \xleftarrow{\{q'_1, \dots, q'_{n'}\}} s_{i2}$ となる。ここで、 $\gamma_{k'} \equiv \tilde{s}_i|_{q'_{k'}} (1 \leq k' \leq n')$ とすると、

$$\begin{aligned}\Gamma' &= \{\gamma_{k'} | \exists \beta_{j'}. \gamma_{k'} \subseteq \beta_{j'}\} \cup \{\beta_{j'} | \exists \gamma_{k'}. \beta_{j'} \subseteq \gamma_{k'}\} \\ |\Gamma| &= |\beta_1| + \dots + |\beta_{n'}|\end{aligned}$$

$\forall \gamma \in \Gamma', \exists \beta_{j'} (2 \leq j' \leq n'). \gamma \subseteq \beta_{j'}$ であるから、 $|\Gamma'| \leq \sum_{j'=2}^{n'} |\beta_{j'}| < \sum_{j'=1}^{n'} |\beta_{j'}| = |\Gamma|$ 。帰納法の仮定より、 $s_{i2} \dashv\vdash w_i \xleftarrow{\{p_1, \dots, p_m\}} s_{i3}$ となる w_i は存在する (図 3.6)。したがって、 $t_4 \equiv C[w_1, \dots, w_q]$ とすればよい。以上より $\dashv\vdash$ はダイヤモンド性をもつ。命題 3.1.7 より R は合流性をもつ。□

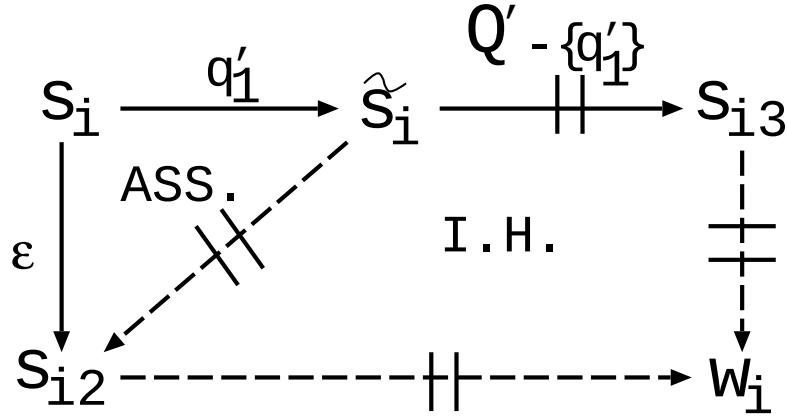


図 3.6: 証明のスケッチ

ルート重なりの場合を解析すると、命題 3.4.1 は以下のように拡張することができる。

命題 3.4.2 [17] 左線形 TRS R のすべての危険対 $\langle u, v \rangle$ が次の条件を満たすならば、 R は合流性をもつ。

1. ルート重なりのとき $u \dashv\vdash w \stackrel{*}{\leftarrow} v$ を満たす w が存在する。
2. または、 $v \dashv\vdash u$ 。

命題 3.4.3 [13] 左線形 TRS R のすべての危険対 $\langle u, v \rangle$ について、 $v \twoheadrightarrow u$ ならば、 R は合流性をもつ。

$\dashv\vdash \subseteq \twoheadrightarrow$ だから、命題 3.4.3 は命題 3.4.1 の拡張となっている。さらに命題 3.4.2 も展開書換えによって以下のように拡張される。

命題 3.4.4 [13] 左線形 TRS R のすべての危険対 $\langle u, v \rangle$ が次の条件を満たすならば、 R は合流性をもつ。

1. ルート重なりのとき $u \twoheadrightarrow w \stackrel{*}{\leftarrow} v$ を満たす w が存在する。
2. または、 $v \twoheadrightarrow u$ 。

ここまでは、通常の危険対にもとづいた合流条件を挙げた。以下では、拡張した危険対にもとづいた合流条件を挙げる。

定義 3.4.5 (並列危険対) [16] 書換え規則 $l \rightarrow r$ に対して、 $P \subseteq \text{Pos}F(l)$ を独立なポジションの集合とする。すべての $p \in P$ に対して、変数名に重なりがない $l_p \rightarrow r_p$ が存在し、 θ をすべての p に対する $l|_p$ と l_p の最汎単一化 (mgu) とする。このとき、 $\langle r\theta, (l\theta)[r_p\theta]_{p \in P} \rangle$ を並列危険対という。ただし、2つの規則が同じ場合には $P = \{\varepsilon\}$ のときを除く。

例 3.4.6

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} f(g(x), h(y)) & \rightarrow & f(x, y) \quad \cdots (1) \\ g(x) & \rightarrow & x \quad \cdots (2) \\ h(y) & \rightarrow & y \quad \cdots (3) \end{array} \right.$$

すべての独立な重なりを考えると、並列危険対は以下のようなになる。

- 1) $\langle f(x, y), f(x, h(y)) \rangle : (1), (2) \quad 1$
- 2) $\langle f(x, y), f(g(x), y) \rangle : (1), (3) \quad 2$
- 3) $\langle f(x, y), f(x, y) \rangle : (1), (2), (3) \quad 1, 2$

1, 2 は通常の危険対でもあり、3 は真に並列危険対である。

並列危険対にもとづいた合流条件を挙げる前に、 Var_p を文献 [16] にもとづいて定義する。

$$\text{Var}_p(t) = \begin{cases} \text{Var}(t|_p) & p \in \text{Pos}(t) \text{ のとき} \\ \text{Var}(t|_q) & p \notin \text{Pos}(t) \text{ で } q \in \text{Pos}V(t) \\ & \text{が存在し、} q \leq p \text{ のとき} \\ \phi & \text{上記以外} \end{cases}$$

さらに、 $\text{Var}_P(t) = \bigcup_{p \in P} \text{Var}_p(t)$ とする。直感的な意味は、 P のポジション以下に現れる変数、または P のポジションより上に現れる代入される変数の集合である。例えば、 $t \equiv f(x, y)$ とすると、 $\text{Var}_{\{1, 2, 3\}}(t) = \{x, y\}$ である。

命題 3.4.7 [16] $t_1 = l\theta$ とする。 $P \subseteq \text{Pos}F(l)$ を独立なポジションの集合とし、 $p \in P$ とする。このとき左線形 TRS R は次の条件 1, 2 を満たすならば合流性をもつ。

- 1. $t_2 \xleftarrow{\varepsilon} t_1 \xrightarrow{P} t_3$ であるすべての並列危険対 $\langle t_2, t_3 \rangle$ に対して $t_2 \xrightarrow{Q} t_4 \xleftarrow{*} t_3$ を満たす t_4 と Q が存在し、かつ $\text{Var}_Q(t_4) \subseteq \text{Var}_P(t_1)$ 。
- 2. $t_2 \xleftarrow{\varepsilon} t_1 \xrightarrow{P} t_3$ であるすべての危険対 $\langle t_2, t_3 \rangle$ に対して $t_2 \xrightarrow{*} t_4 \xleftarrow{Q'} t_3$ を満たす t_4 と Q' が存在する。

命題 3.4.7 の特徴は、条件 1 で危険対を拡張した並列危険対を考えることと、変数条件 $Var_Q(t_4) \subseteq Var_P(t_1)$ をもつことである。この変数条件は、証明の中で本質的な役割を果たす。命題 3.4.7 の詳しい証明は文献 [17] を参照されたい。最後に、展開書換え $\rightarrow$ によって危険対を拡張した多重危険対にもとづいた合流条件を挙げる。その前に、多重危険対を文献 [12] にもとづいて定義する。

定義 3.4.8 t_1, t_2 を項とする。あるポジション $p \in PosF(t_2)$ とある代入 θ に対して、 $t_1\theta \equiv (t_2|_p)\theta$ であるとき、 t_1 は p で t_2 に重なるという。2 つのリデックスパターン $\langle p_1, l_1 \rangle$ と $\langle p_2, l_2 \rangle$ は重なるとは、 l_1 は p_1/p_2 で l_2 に重なる、または l_2 は p_2/p_1 で l_1 に重なることである。

定義 3.4.9 R を左線形 TRS、 $l \rightarrow r \in R$ 、 p をポジション、 U をリデックスパタンの調和集合とする。ただし、 $\bar{p} = \langle p, l \rightarrow r \rangle$ と任意の $\langle q, l_q \rangle \in U$ は重なるとする。一般性を失うことなく、 $U \cup \{\bar{p}\}$ に 2 回出現する変数はないと仮定しよい。 U と $\bar{p}$ の調和重なりを以下のように、 $|U|$ に関して帰納的に定義する。ただし、 U と $\bar{p}$ の調和重なりを $\langle U; \bar{p} \rangle$ と表す。

- $U = \phi$ のとき、 $\langle U; \bar{p} \rangle = \bar{p}$ 。
- $U \neq \phi$ のとき、 $\langle q, l_q \rangle$ を U の極小の要素¹、 $U' = U - \langle q, l_q \rangle$ とする。 $\langle p', l' \rangle$ を以下のように定義する。
 - $p \leq q$ のとき $\langle p', l' \rangle = \langle p, l\theta \rangle$ 。
 - $q < p$ のとき $\langle p', l' \rangle = \langle q, l_q\theta \rangle$ 。
ただし、 θ は $(l|_{q/p})\theta \equiv l_q\theta$ 、または $(l_q|_{p/q})\theta \equiv l\theta$ となる最汎単一化子 (*mgu*) である。

$\langle p', l' \rangle$ と任意の $\langle q', l'_q \rangle \in U'$ は重なり、2 回出現する変数はない。したがって、 $\langle U; \langle p, l \rangle \rangle = \langle U'; \langle p', l' \rangle \rangle$ と定義できる。

定義 3.4.10 (多重危険対) R を左線形 TRS とする。 $\bar{p} = \langle p, l \rightarrow r \rangle$ をリデックスパターン、 $U = \{\langle q_1, l_1 \rightarrow r_1 \rangle, \dots, \langle q_n, l_n \rightarrow r_n \rangle\} (n \geq 1)$ をリデックスパタンの調和集合とする。ただし、すべての $1 \leq i \leq n$ に対して、 $\langle p, l \rightarrow r \rangle$ と $\langle q_i, l_i \rightarrow r_i \rangle (1 \leq i \leq n)$ は重なり、 $q_1, \dots, q_n, p$ の少なくとも 1 つは ε であるとする。 $l, l_{q_1}, \dots, l_{q_n}$ は変数名に重なりがなく、 $\bar{p} \notin U$ と仮定する。調和重なり $\langle U; \bar{p} \rangle$ を $\langle q, s \rangle$ とおく。このとき、 $s_1 \xleftarrow{\{\bar{p}\}|_q} s \xrightarrow{U|_q} s_2$ を満たす s_1, s_2 から作られる対 $\langle s_1, s_2 \rangle$ を多重危険対という。

例 3.4.11

$$R = \begin{cases} f(g(g(x)), g(y)) \rightarrow a & \cdots (1) \\ g(z) \rightarrow h(z) & \cdots (2) \end{cases}$$

¹ $\langle p_1, l_1 \rightarrow r_1 \rangle \leq \langle p_2, l_1 \rightarrow r_1 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} p_1 \leq p_2$

すべての調和重なりを考えると、多重危険対は以下ようになる。

- 1) $\langle a, f(h(g(x)), g(y)) \rangle : (1), (2) \quad 1$
- 2) $\langle a, f(g(h(x)), g(y)) \rangle : (1), (2) \quad 11$
- 3) $\langle a, f(g(g(x)), h(y)) \rangle : (1), (2) \quad 2$
- 4) $\langle a, f(h(g(x)), h(y)) \rangle : (1), (2), (2) \quad 1, 2$
- 5) $\langle a, f(g(h(x)), h(y)) \rangle : (1), (2), (2) \quad 11, 2$
- 6) $\langle a, f(h(h(x)), g(y)) \rangle : (1), (2), (2) \quad 1, 11$
- 7) $\langle a, f(h(h(x)), h(y)) \rangle : (1), (2), (2) \quad 1, 11, 2$

1, 2, 3 は通常の危険対でもあり、4, 5 は並列危険対でもある。6, 7 は真に多重危険対である。

命題 3.4.12 [12] 左線形 TRS R のすべての多重危険対 $\langle u, v \rangle$ に対して、 $u \rightarrow^* w \leftarrow^* v$ を満たす w が存在するならば、 R は合流性をもつ。

以上の合流条件の比較を、停止性をもたない左線形 TRS $R_1 \sim R_8$ を例²に挙げて図 3.7 に示す。

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow a \\ f(x) \rightarrow b \\ a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \end{array} \right. & R_2 &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow a \\ f(x) \rightarrow b \\ a \rightarrow c \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow f(c) \end{array} \right. \\
 R_3 &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow g(g(x)) \\ f(x) \rightarrow h(h(x)) \\ g(x) \rightarrow h(x) \\ h(x) \rightarrow g(x) \end{array} \right. & R_4 &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow g(g(x)) \\ f(x) \rightarrow h(h(x)) \\ g(x) \rightarrow f(x) \\ h(x) \rightarrow f(x) \end{array} \right. \\
 R_5 &= \left\{ \begin{array}{l} f(g(g(x))) \rightarrow a \\ f(g(h(x))) \rightarrow b \\ f(h(g(x))) \rightarrow b \\ f(h(h(x))) \rightarrow c \\ g(x) \rightarrow h(x) \\ a \rightarrow b \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow c \end{array} \right. & R_6 &= \left\{ \begin{array}{l} f(g(x), a) \rightarrow b \\ g(x) \rightarrow c \\ f(c, a) \rightarrow d \\ b \rightarrow d \\ d \rightarrow f(c, a) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

² R_5 は文献 [12] より引用。

$$R_7 = \left\{ \begin{array}{lcl} f(g(x)) & \rightarrow & s(x) \\ g(x) & \rightarrow & h(h(x)) \\ h(x) & \rightarrow & g(x) \\ s(x) & \rightarrow & f(g(g(x))) \end{array} \right. \quad R_8 = \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & \rightarrow & a \\ f(x) & \rightarrow & c \\ a & \rightarrow & b \\ b & \rightarrow & e \\ c & \rightarrow & d \\ d & \rightarrow & e \\ e & \rightarrow & a \end{array} \right.$$

$R_1 \sim R_8$ を図に示すと次のようになる。

TRS

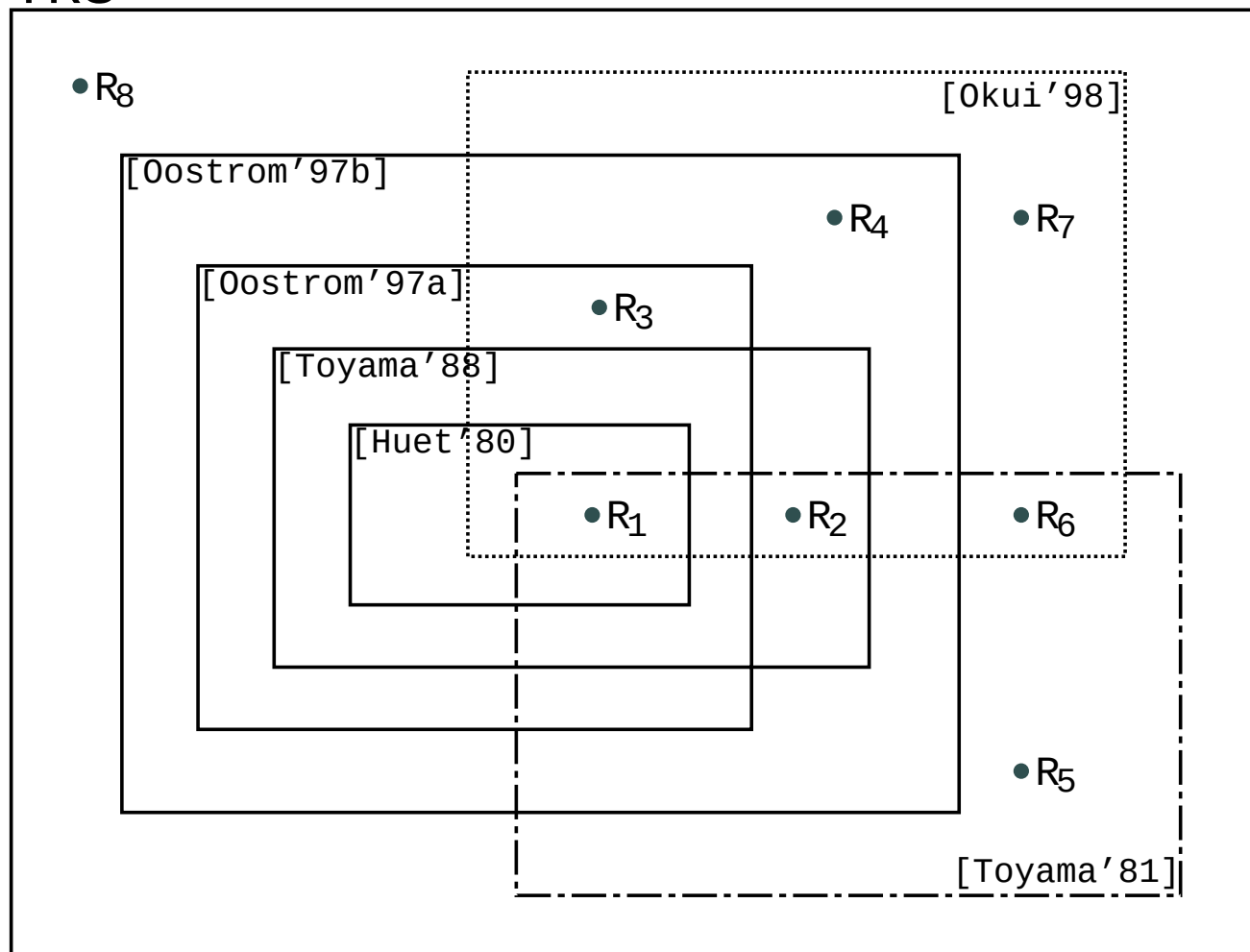


図 3.7: 合流条件を満たす左線形 TRS

[Huet '80]	...	命題 3.4.1を満たす TRS
[Toyama '88]	...	命題 3.4.2を満たす TRS
[Oostrom '97a]	...	命題 3.4.3を満たす TRS
[Oostrom '97b]	...	命題 3.4.4を満たす TRS
[Toyama '81]	...	命題 3.4.7を満たす TRS
[Okui '98]	...	命題 3.4.12を満たす TRS

第 4 章

提案した合流条件

前章では、合流条件は多くの場合、危険対をもちいることを紹介した。本章では、通常の危険対にもとづく 2 つの合流条件を示す。1 つは書換え規則の重なりの状況を考えた合流条件であり、もう 1 つは独立極大合流条件である。

4.1 ルート 重なりの状況を考えた合流条件

命題 3.4.2 の合流条件は、ルート 重なりの場合とそうでない場合に分けられ、ルート 重なりの場合はそうでない場合よりも危険対の合流方法がゆるい形になっている。このことから、重なりの状況がルート 重なりでない場合も、適当な条件を満たせば、ルート 重なりの場合と同様な方法で合流性が保証されると考えられる。ルート 重なりの状況を解析すると、次のことが観察できる。

- 独立な重なりは 1 つである。
- 重なりをもつポジションの外側には変数が出現しない。

どのポジションもルートポジションと独立ではないので、最初の条件は自明である。さらに、すべての変数はルートポジション以下に現れることから、2 つ目の条件が成立する。したがって、逆に $u \xleftarrow{s} s \xrightarrow{p} v$ である危険対 $\langle u, v \rangle$ において、ポジション p で重なりをもつ項 s がこの 2 つの条件を満たせば、命題 3.4.2 のルート 重なりの場合と同様に合流性が保証されることが予想される。

上の 2 つの条件をまとめると、危険対からの書換えは重なりをもつポジション p 以下で起こらなければならない。以上のことから次の定理が導かれる。

定理 4.1.1 [9] 左線形 TRS R のすべての危険対 $\langle u, v \rangle$ が次の条件を満たすならば、 R は合流性をもつ。

1. $u \dashv\vdash w_1 \stackrel{*}{\leftarrow} v$ かつ、 $u \stackrel{*}{\rightarrow} w_2 \dashv\vdash v$ を満たす w_1, w_2 が存在する。
2. $s[]_p$ は基底正規形である。ただし、項 s とポジション p は $u \stackrel{\varepsilon}{\leftarrow} s \stackrel{p}{\rightarrow} v$ を満たすものとする。

証明) $u \dashv\vdash^Q w_1 \stackrel{*}{\leftarrow} v$ を満たす Q をとると、 $\text{Var}_Q(w_1) \subseteq \text{Var}(w_1) \subseteq \text{Var}(u) \subseteq \text{Var}(s)$ 。
 $s[]_p$ は基底正規形だから $\text{Var}(s) = \text{Var}_p(s)$ 。したがって、 $\text{Var}_Q(w_1) \subseteq \text{Var}_p(s)$ 。よって、
 命題 3.4.7 より合流性をもつ。□

証明にあるようにこの定理は命題 3.4.7 の結果に含まれる。 $s[]_p$ が基底正規形ということから、通常の危険対と並列危険対が完全に一致し、命題 3.4.7 のもつ変数条件も満たす。

4.2 独立極大合流条件

この節では、書換えポジションに対する制約をもつ合流条件を示す。この合流条件においては、重なり独立という概念が重要な役割を担う。

定義 4.2.1 P を独立なポジションの集合とし、 $q \perp P$ とは $\forall p \in P. q \perp p$ のこととする。

- $s \dashv\vdash^Q t$ において、 $\forall q \in Q. q \perp P$ ならば $s \dashv\vdash^{\perp P} t$ と記す。
- $s \xrightarrow{q_1} \dots \xrightarrow{q_n} t$ において、 $\forall q_i. q_i \perp P$ ならば $s \xrightarrow{*}^{\perp P} t$ と記す。

補題 4.2.2 $t_2 \stackrel{\perp P}{\leftarrow}^* t_1 \dashv\vdash^P t_3$ ならば、 $t_2 \dashv\vdash^P t_4 \stackrel{\perp P}{\leftarrow}^* t_3$ となる t_4 が存在する。

証明) $\stackrel{\perp P}{\leftarrow}^*$ の定義より明らか。□

補題 4.2.3 P を独立なポジションの集合とする。このとき $s \dashv\vdash^{\perp P} t' \dashv\vdash^P t$ ならば $s \dashv\vdash t$ 。

証明) $s \dashv\vdash^Q t' \dashv\vdash^P t$ とする。 $P = \{p_1, \dots, p_m\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ とおくと、 $P \perp Q$ だから
 $l_{p_i} \rightarrow r_{p_i}, l_{q_j} \rightarrow r_{q_j} \in R$ とすると、

$$\begin{aligned} s &\equiv s[l_{p_i}\theta_{p_i}]_{p_i \in P} [l_{q_j}\theta_{q_j}]_{q_j \in Q} \\ t' &\equiv s[l_{p_i}\theta_{p_i}]_{p_i \in P} [r_{q_j}\theta_{q_j}]_{q_j \in Q} \\ t &\equiv s[r_{p_i}\theta_{p_i}]_{p_i \in P} [r_{q_j}\theta_{q_j}]_{q_j \in Q} \end{aligned}$$

と書ける。したがって、 $s \dashv\vdash^{Q \cup P} t$ 。□

定義 4.2.4 書換え規則 $l \rightarrow r \in R$ の左辺 l の独立なポジションの集合 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ ($n \geq 1$) が**重なり独立**であるとは、ある m ($1 \leq m \leq n$) が存在して以下を満たすことである。

1. $p_1, \dots, p_m \in \text{Pos}F(l)$ で l は危険対をもつ。

2. $p_{m+1}, \dots, p_n \in \text{Pos}V(l)$ 。

以下では $D(l)$ で l の重なり独立である P の集合を表す。 $P \in D(l)$ が**極大**とは、 $\forall Q \in D(l). P \not\subset Q$ のこととする。 $D(l)$ の極大な元の集合を $D^*(l)$ で表す。

例 4.2.5

$$R = \begin{cases} f(g(x), h(y), z) \rightarrow a \\ g(x) \rightarrow b \\ h(y) \rightarrow c \end{cases}$$

$D(f(g(x), h(y), z)) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}\}$, $D(g(x)) = D(h(x)) = \phi$ である。さらに、 $D^*(f(g(x), h(y), z)) = \{\{1, 2, 3\}\}$, $D^*(g(x)) = D^*(h(x)) = \phi$ である。

定義 4.2.6 書換え規則 $l \rightarrow r$ が**独立極大**とは、 l がポジション p で危険対 $\langle u, v \rangle$ をもつならば、 $p \in P \in D^*(l)$ なる任意の P に対して、以下が成立することである。

1. $u \xrightarrow{\perp \bar{P}} w_1 \xleftarrow{*} v$ を満たす w_1 が存在する。ただし $\bar{P} = P - \{p\}$ 。

2. $u \xrightarrow{*} w_2 \xleftarrow{\perp \bar{P}} v$ を満たす w_2 が存在する。

定義 4.2.7 左線形 TRS R が独立極大であるとは、すべての $l \rightarrow r \in R$ が独立極大なことである。

定理 4.2.8 (独立極大合流条件) [10]

左線形 TRS R が独立極大ならば、 $\dashv\vdash$ は強合流性をもつ。

証明) $\dashv\vdash$ が強合流性をもつことを示す。 $t_2 \xleftarrow{\{p_1, \dots, p_m\}} t_1 \xrightarrow{\{p'_1, \dots, p'_n\}} t_3$ とする。すべての t_1, t_2, t_3 について、次の (4.1), (4.2) を満たす t_4, t_5 が存在することを示せばよい。

$$t_2 \xleftarrow{\perp \bar{P}} t_1 \dashv\vdash t_3 \Rightarrow t_2 \dashv\vdash t_4 \xleftarrow{*} t_3 \quad (4.1)$$

$$t_2 \xleftarrow{\perp \bar{P}} t_1 \dashv\vdash t_3 \Rightarrow t_2 \xrightarrow{*} t_5 \xleftarrow{\perp \bar{P}} t_3 \quad (4.2)$$

(4.1) を示す。ここで命題 3.4.1 の証明と同様に、

$$\begin{aligned}\alpha_i &\equiv t_1|_{p_i} (1 \leq i \leq m), \quad \beta_j \equiv t_1|_{p'_j} (1 \leq j \leq n) \\ \Gamma &= \{\alpha_i | \exists \beta_j. \alpha_i \subseteq \beta_j\} \cup \{\beta_j | \exists \alpha_i. \beta_j \subseteq \alpha_i\} \\ \Delta &= \{\alpha_i | \forall \beta_j. \alpha_i \not\subseteq \beta_j\} \cup \{\beta_j | \forall \alpha_i. \beta_j \not\subseteq \alpha_i\} \\ |t| &= |Pos(t)|, \quad |\Gamma| = \sum_{t \in \Gamma} |t|\end{aligned}$$

を定義する。 $|\Gamma|$ に関する帰納法で (4.1) の t_4 が存在することを示す。

Base case $|\Gamma| = 0$ のとき、すべての α_i と β_j は重ならないので、明らかに t_4 は存在する。

Induction step $|\Gamma| < k (k > 0)$ のとき、 t_4 は存在すると仮定する。 $|\Gamma| = k$ のときを考える。

$\Delta = \{s_1, \dots, s_q\}$ とすると、 $t_1 \equiv C[s_1, \dots, s_q]$, $t_2 \equiv C[s_{12}, \dots, s_{q2}]$, $t_3 \equiv C[s_{13}, \dots, s_{q3}]$ と書ける。ただし、 $s_{i2} \xleftarrow{Q} s_i \xrightarrow{Q'} s_{i3}$, $Q = \{q_1, \dots, q_{m'}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}$, $Q' = \{q'_1, \dots, q'_{n'}\} \subseteq \{p'_1, \dots, p'_n\}$ 。すべての s_i, s_{i2}, s_{i3} に対して、次の (4.3) の w_i が存在することを示す。

$$s_{i2} \xleftarrow{Q} s_i \xrightarrow{Q'} s_{i3} \Rightarrow s_{i2} \dashv\vdash w_i \xleftarrow{*} s_{i3} \quad (4.3)$$

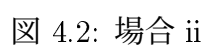
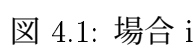
i) $s_i \xrightarrow{\varepsilon} s_{i3}$ のとき。命題 3.4.1 の証明と同様に $|\Gamma|$ に関する帰納法によって図 4.1 を満たす w_i が得られる。

ii) $s_i \xrightarrow{\varepsilon} s_{i2}$ のとき。このとき、 $s_{i2} \xleftarrow{\varepsilon} s_i \xrightarrow{Q'} s_{i3}$ とする。ただし、 $q'_{j'} \in Q'$ かつ $\beta_{j'} \equiv s_i|_{q'_{j'}} \subseteq s_i$ 。 $l \rightarrow r \in R$, $s_i \equiv l\theta$, $s_{i2} \equiv r\theta$ とする。すべての $\beta_{j'}$ 、つまり $q'_{j'}$ が θ に現れるならば、補題 3.3.3 より w_i は存在する。

ある $\beta_{j'}$ は θ に現れないとする。一般性を失うことなく、 β_1 が θ に現れないとしてもよい。このとき、 $\beta_1 \equiv l'\theta'$ となる $l' \rightarrow r' \in R$ が存在する。 $l' \rightarrow r'$ は $l \rightarrow r$ に重なり、 $\beta_1 \subseteq s_i$ なので、危険対 $\langle u, v \rangle$ が存在する。 $s_i \xrightarrow{q'_1} \tilde{s}_i$ とすると、ある θ'' に対して、 $s_{i2} \equiv u\theta''$, $\tilde{s}_i \equiv v\theta''$

となる。 R は独立極大だから $s_{i2} \dashv\vdash \tilde{w}_i \xleftarrow{*} \tilde{s}_i$ となる $\tilde{w}_i \equiv w\theta''$ が存在する。
 $\tilde{w}_i \xleftarrow{*} \tilde{s}_i \dashv\vdash s_{i3}$ であるから、補題 4.2.2 より $\tilde{w}_i \dashv\vdash w_i \xleftarrow{*} s_{i3}$ となる w_i が存在する。さらに補題 4.2.3 より $s_{i2} \dashv\vdash w_i$ となる (図 4.2)。

i) と ii) より (4.3) が得られる。したがって、 $t_4 \equiv C[w_1, \dots, w_q]$ とすれば、(4.1) が得られる。(4.2) についても (4.1) と同様に示せる。ゆえに、 $\dashv\vdash$ は強合流性をもつ。□



$\overset{*}{\dashv\vdash} = \overset{*}{\rightarrow}$ であるから系 3.1.7 をもちいて次の系が得られる。

系 4.2.9 左線形 TRS は独立極大ならば、合流性をもつ。

例 4.2.10

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} f(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c') & \cdots & (1) \\ a \rightarrow a' & \cdots & (2) \\ b \rightarrow b' & \cdots & (3) \\ a' \rightarrow a & \cdots & (4) \\ b' \rightarrow b & \cdots & (5) \\ c' \rightarrow c & \cdots & (6) \end{array} \right.$$

R の危険対は次のようになる。

- 1) $\langle f(a, b, c'), f(a', b, c) \rangle : (1), (2) \quad 1$
- 2) $\langle f(a, b, c'), f(a, b', c) \rangle : (1), (3) \quad 2$

$D^*(f(a, b, c)) = \{\{1, 2\}\}$, $D^*(a) = D^*(b) = D^*(a') = D^*(b') = D^*(c') = \phi$ であるから、極大の重なり独立であるポジションの集合は、 $P = \{1, 2\}$ である。

1. $f(a, b, c') \overset{\{3\}}{\dashv\vdash} f(a, b, c) \overset{1}{\leftarrow} f(a', b, c)$ かつ、 $f(a, b, c') \overset{3}{\rightarrow} f(a, b, c) \overset{\{1\}}{\dashv\vdash} f(a', b, c)$ である。1 の危険対に対して $\bar{P} = \{2\}$ であるから、 $\{1\}, \{3\} \perp \bar{P}$ である。
2. $f(a, b, c') \overset{\{3\}}{\dashv\vdash} f(a, b, c) \overset{2}{\leftarrow} f(a, b', c)$ かつ、 $f(a, b, c') \overset{3}{\rightarrow} f(a, b, c) \overset{\{2\}}{\dashv\vdash} f(a, b', c)$ である。2 の危険対に対して $\bar{P} = \{1\}$ であるから、 $\{2\}, \{3\} \perp \bar{P}$ である。

R_3 は独立極大なので系 4.2.9 より合流性をもつ。

第 5 章

合流条件の比較

提案した合流条件は、通常の危険対にもとづいた合流条件である。一方、命題 3.4.7 は並列危険対にもとづいた合流条件、命題 3.4.12 は多重危険対にもとづいた合流条件である。本章では例を挙げて、これらの合流条件を比較する。以下では、並列危険対にもとづいた合流条件を [Toyama '81]、多重危険対にもとづいた合流条件を [Okui '98]、今回提案した独立極大合流条件を [Matsumoto-Toyama '99] ということにする。

5.1 合流条件の比較

この節では、停止性をもたない左線形 TRS の例を挙げて危険対を調べながら、上に挙げた合流条件の判定能力を比較する。

例 5.1.1 [12]

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{lll} f(g(g(x))) \rightarrow a & \cdots & (1) \\ f(g(h(x))) \rightarrow b & \cdots & (2) \\ f(h(g(x))) \rightarrow b & \cdots & (3) \\ f(h(h(x))) \rightarrow c & \cdots & (4) \\ g(x) \rightarrow h(x) & \cdots & (5) \\ a \rightarrow b & \cdots & (6) \\ b \rightarrow c & \cdots & (7) \\ c \rightarrow c & \cdots & (8) \end{array} \right.$$

R_1 の危険対は以下のようになる。

- 1) $\langle a, f(h(g(x))) \rangle : (1), (5) \quad 1$
- 2) $\langle a, f(g(h(x))) \rangle : (1), (5) \quad 11$
- 3) $\langle b, f(h(h(x))) \rangle : (2), (5) \quad 1$
- 4) $\langle b, f(h(h(x))) \rangle : (3), (5) \quad 11$
- 5) $\langle a, f(h(h(x))) \rangle : (1), (5), (5) \quad 1, 11$

1 ～ 4 は危険対であり、また並列危険対かつ多重危険対でもある。5 は真に多重危険対である。1 ～ 4 の危険対は、すべて [Toyama '81] と [Matsumoto-Toyama '99] 満たす。5 の多重危険対に注目すると、 $a \xrightarrow{\{e\}} b \not\equiv c \xleftarrow{e} f(h(h(x)))$ となり、多重危険対は展開書換えでは合流しないので、[Okui '98] を満たさない。しかし、[Toyama '81] と [Matsumoto-Toyama '99] は多重危険対を調べる必要はないので、 R_1 は合流性をもつ。

例 5.1.2

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{lll} f(a, b) \rightarrow f(b, c) & \cdots & (1) \\ a \rightarrow b & \cdots & (2) \\ b \rightarrow d & \cdots & (3) \\ c \rightarrow d & \cdots & (4) \\ d \rightarrow f(a, b) & \cdots & (5) \end{array} \right.$$

R_2 の危険対は以下のようになる。

- 1) $\langle f(b, c), f(b, b) \rangle : (1), (2) \quad 1$
- 2) $\langle f(b, c), f(a, d) \rangle : (1), (3) \quad 2$
- 3) $\langle f(b, c), f(b, d) \rangle : (1), (2), (3) \quad 1, 2$

1, 2 は危険対であり、また並列危険対かつ多重危険対でもある。3 は並列危険対かつ多重危険対である。1 の危険対に注目すると、 $f(b, c) \xrightarrow{2} f(b, d) \xleftarrow{2} f(b, b)$ である。 R_2 の極大の重なり独立なポジションの集合は、 $P = \{1, 2\}$ である。1 の危険対に対して $\bar{P} = \{2\}$ だから、 $\{2\} \not\perp \bar{P}$ である。したがって、 R_2 は [Matsumoto-Toyama '99] を満たさない。一方、 R_2 は [Toyama '81] または [Okui '98] を満たすので、合流性をもつ。

例 5.1.3 [12]

$$R_3 = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) \rightarrow x & \cdots & (1) \\ f(x) \rightarrow f(f(x)) & \cdots & (2) \end{array} \right.$$

R_3 の危険対は以下のようになる。

- 1) $\langle x, f(f(x)) \rangle : (1), (2) \quad \varepsilon$
- 2) $\langle f(f(x)), x \rangle : (2), (1) \quad \varepsilon$

1,2 は危険対であり、また並列危険対かつ多重危険対でもある。 $f(f(x)) \not\rightarrow x$ であるので R_3 は [Toyama '81] と [Matsumoto-Toyama '99] を満たさない。一方、 $f(f(x)) \rightarrow x$ であるので、 R_3 は [Okui '98] を満たし合流性をもつ。

以上の合流条件の比較を次の表にまとめる。

	[Toyama '81]	[Okui '98]	[Matsumoto-Toyama '99]
R_1	○	×	○
R_2	○	○	×
R_3	×	○	×

○ … 合流条件を満たす

× … 合流条件を満たさない

5.2 独立極大合流条件の書換えポジションに対する制約

独立極大合流条件においては、極大の重なり独立ポジションの集合は、危険対をもつポジションの外側に出現するすべての変数ポジションをすべて含まなければならない。しかし、この制約を満たす TRS のクラスは非常に制限されてしまう。そこで、変数ポジションを含まない新しい独立極大合流条件が考えられる。しかしながら、変数ポジションを含まない場合には、合流条件として不十分であることが以下の反例から示される。

反例 5.2.1

$$R = \begin{cases} f(a, x) \rightarrow g(x) & \dots (1) \\ a \rightarrow b & \dots (2) \\ f(b, x) \rightarrow h(x) & \dots (3) \\ g(x) \rightarrow h(x) & \dots (4) \end{cases}$$

R の危険対は以下のようになる。

- 1) $\langle g(x), f(b, x) \rangle : (1), (2) \quad 1$

この危険対は $g(x) \xrightarrow{\varepsilon} h(x) \xleftarrow{\varepsilon} f(b, x)$ のように合流する。危険対をもつポジションの外側に出現する変数ポジションを含まない場合、極大の重なり独立ポジションの集合は、 $P = \{1\}$

である。 $\bar{P} = \phi$ だから、危険対の任意のポジションを書換えてもよい。したがって、 R は合流条件を満たしてしまう。

しかし、一般の項を考えたとき、変数ポジション以下で書換えが起こる場合、 $\dashv\vdash$ は強合流性をもたないので矛盾が起きる。例えば $f(a, \underline{a})$ を考える。ただし、下線部は代入部分を表すとする。 $f(a, \underline{a})$ は図 5.1 のように書換えられる。図 5.1 の下段の書換えは、 $g(\underline{a}) \xrightarrow{\varepsilon} h(\underline{a}) \xrightarrow{1} h(\underline{b})$ である。しかし、ポジション ε とポジション 1 は独立ではないので $g(\underline{a}) \dashv\vdash h(\underline{b})$ となり、 $\dashv\vdash$ は強合流性をもたない。

合流性を示すとき、すべての書換えの可能性を考えなければならないので、一般の項を書換えるとき、危険対をもつポジション以外に、代入部分が書換えられることも考えなければならない。したがって、極大の重なり独立ポジションの集合は、危険対をもつポジションに加えて、その外側に出現するすべての変数ポジションも含まなければならない。

さらに、ポジション p で危険対をもつとき、書換えポジションの制約によって、危険対からのすべての書換えは必ず p より上のポジションで行われる。このことも、独立極大合流条件の書換えポジションに対する制約が強い理由の 1 つである。

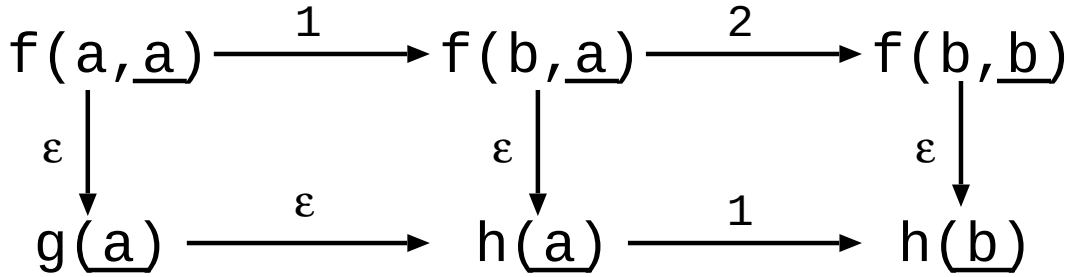


図 5.1: 変数ポジションを考えない場合

また、極大の重なり独立なポジションの集合が、 $P = \{p\}$ であるとき、 $\bar{P} = \phi$ となり、書換えポジションに対する制約が外れる。このことから、4.1節で提案したルート重なりの状況を考えた合流条件は、独立極大合流条件にも含まれる。

第 6 章

結論

6.1 研究成果

本研究では、通常の危険対にもとづいた合流条件を提案した。提案した独立極大合流条件は、危険対の合流方法に関して、並列危険対と同様の方法をもちいる。したがって、従来知られている通常の危険対にもとづいた合流条件のなかで、危険対の合流方法に関しては最もゆるい条件となっている。さらに、通常の危険対をもちいるので、拡張した危険対よりも少ない危険対を調べるだけで合流条件の判定が可能である。しかし、独立極大合流条件は書換えポジションに対する制約をもつ。この制約が合流性を示す証明の中で本質的な役割を果たしていることを、具体的な反例を通して明らかにした。

いくつかの例を考察すると、拡張した危険対にもとづいた合流条件では適用できない場合でも、本結果をもちいると合流性を示せる場合がある。その理由は、拡張した危険対は通常の危険対よりも一般に多く存在するので、すべての危険対に対して合流条件を保証することが困難になるからである。

本研究では、通常の危険対にもとづいた合流条件の判定の容易さと、拡張した危険対にもとづいた合流条件の判定能力を完全に合わせもつ合流条件を示すという目標に完全に到達することはできなかった。しかし、さまざまな例を比較検討することで、通常の危険対にもとづいた合流条件も適用領域を選べば十分有効であることがわかった。ここで得られた知見は今後の解析に有効な基礎を与えられとされる。以下、前章での合流条件の比較を図 6.1 に示す。

TRS

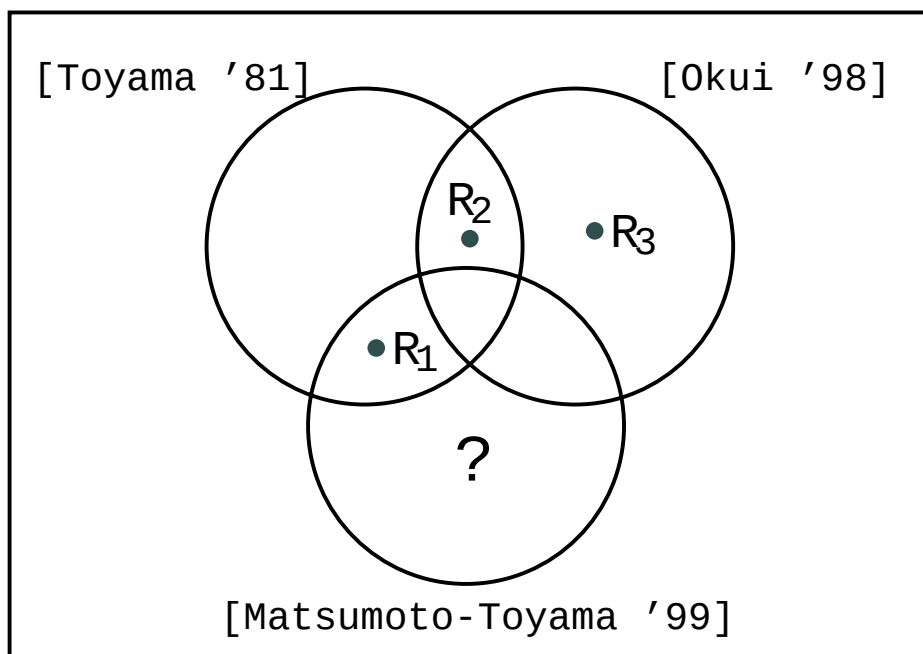


図 6.1: 合流条件を満たす左線形 TRS

- [Toyama '81] ... 並列危険対にもとづいた合流条件を満たす TRS
- [Okui '98] ... 多重危険対にもとづいた合流条件を満たす TRS
- [Matsumoto-Toyama '99] ... 本結果を満たす TRS

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} f(g(g(x))) \rightarrow a \\ f(g(h(x))) \rightarrow b \\ f(h(g(x))) \rightarrow b \\ f(h(h(x))) \rightarrow c \\ g(x) \rightarrow h(x) \\ a \rightarrow b \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow c \end{array} \right. \quad R_2 = \left\{ \begin{array}{l} f(a, b) \rightarrow f(b, c) \\ a \rightarrow b \\ b \rightarrow d \\ c \rightarrow d \\ d \rightarrow f(a, b) \end{array} \right. \quad R_3 = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow x \\ f(x) \rightarrow f(f(x)) \end{array} \right.$$

6.2 今後の課題

独立極大合流条件のもつ書換えポジションに対する制約によって、並列危険対にもとづく合流条件のもつ変数条件が、多くの場合満たされる。また、それらの合流条件において、危険対は同様に合流する。このことから、独立極大合流条件を満たす TRS のクラスは、並列危険対にもとづく判定法で多くの場合、合流性が保証される。その理由の 1 つは、極大の重なり独立ポジションの集合が、危険対をもつポジションの外側に出現する変数ポジションをすべて含むからである。

今後の課題は、その制約を弱め、通常の危険対にもとづいた合流条件の判定の容易さと、拡張した危険対にもとづいた合流条件の判定能力を合わせもつ合流条件を示すことである。それによって、合流性を保証することができる TRS のクラスが拡張されると期待する。

謝辞

本論文の作成および研究に関して、外山芳人 教授、鈴木大朗 助手、外山研究室の人々に感謝する。また、貴重な助言をしていただいた三重大学 奥居哲 講師に感謝する。

参考文献

- [1] Franz Baader and Tobias Nipkow, Term Rewriting and All That, Cambridge University Press, 1998.
- [2] G.Boudol, Computational Semantics of Term Rewriting Systems, In M. Nivat and J.C. Reynolds, eds., *Algebraic Method in Semantics*, pp.169-236, Cambridge University Press, 1985.
- [3] Nachum.Dershowitz and Jean-Pierre Jouannaud, Rewrite Systems, in *Handbook of Theoretical Computer Science*, vol.B, ed. J. van Leeuwen, North-Holland, pp.243-320. 1990.
- [4] Bernhard Gramlich, Confluence without Termination via Parallel Critical Pairs, in *Proceedings of 21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, Lecture Notes in Computer Science 1059 (CAAP-96)*, pp.211-225, 1996.
- [5] Gérard Huet, Confluent Reductions: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 27, No 4, pp.797-821, 1980.
- [6] Gérard Huet, J.-J.Levy, Computations in Orthogonal Rewriting Systems, I and II, in *Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson*, eds, J,-L.Lassez and G.Plotkin, MIT Press, pp.396-443. 1991.
- [7] Jan Willem Klop, Term Rewriting systems, *Handbook of Logic in Computer Science* II, pp.1-112, Oxford University Press, 1992.
- [8] Donald E. Knuth and P.B. Bendix, Simple word problems in universal algebra, In J.Leech, editor, *Computational Problems in Abstract Algebra*, pp.263-297, Pergamon Press, 1970.

- [9] 松本 利雅, 左線形項書換え系の合流条件の解析, 99 年夏の LA シンポジウム予稿, pp.3.1-3.3, 1999.
- [10] 松本 利雅, 外山芳人, 左線形項書換えシステムの合流条件について, 信学技報, Vol.99, No.492, 電子情報信学会技術研究報告 COMP99-62, pp.49-55, 1999.
- [11] Hendrik Pieter Barendregt, The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics, *North-Holland*, 2nd edition, 1984.
- [12] Satoshi Okui, Simultaneous Critical Pairs and Church-Rosser Property, in *Proceedings of 9th International Conference on Rewriting Techniques and Applications, Lecture Notes in Computer Science* 1379 (RTA-98), pp.2-16, 1998.
- [13] Vincent van Oostrom, Developing Developments, *Theoretical Computer Science* 175, pp.159-181, 1997.
- [14] Michio Oyamaguchi and Yoshikatsu Ohta, A New Parallel Closed Condition for Church-Rosser of Left-Linear Term Rewriting Systems, in *Proceedings of 8th International Conference on Rewriting Techniques and Applications, Lecture Notes in Computer Science* 1232 (RTA-97), pp.187-201, 1997.
- [15] Barry K. Rosen, Tree-Manipulating Systems and Church-Rosser Theorems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.20, No. 1, pp.160-187, 1973.
- [16] Yoshihito Toyama, On the Church-Rosser Property of Term Rewriting Systems, NTT ECL Technical Report No.17672, NTT, December 1981.
- [17] Yoshihito Toyama, Commutativity of Term Rewriting Systems, *Programming of Future Generation Computers*, volume II, pp.393-407, Elsevier Science, 1988.