Title	直示語を扱うための Indexical Hybrid Logic の拡張
Author(s)	関，帆志生
Citation	
Issue Date	2017-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/14177
Rights	
Description	Supervisor:東条　敏，情報科学研究科，修士

目次

図目次

第1章 はじめに

1.1 研究背景

指標詞含む表現では「今」「私」「彼」など，具体的な指示物が何かによって違った命題を構成することになる.「彼は彼女に怒っていた」のような表現があったとき，例えば文脈１では「A 君は B さんに怒っていた」という命題を表し，文脈２では「C 君は D さんに怒っていた」のように違った命題を表すこととがわかる. それに応じて同じ表現でも真偽が変わる.

このように一般的に文脈，前提となる知識に訴えて命題の真偽を決定するわけであるが，話者が意図している意味を汲み取ることは難しい．Bar-Hillel(1954)によると指標表現は日常会話文章の９割以上に出現するという. つまり指示語の処理は人工知能分野，自然言語の意味理解において必要不可欠である.

1.1.1 Montague 文法の指標理論とその問題点

伝統的な指標詞に対する意味論として Montague の理論がある．Montague の指標理論では指標，時点や位置，行為者，と相対的に真理値が変わると考える．文「彼が彼女に怒っていた」は指標(この場合は行為者)に応じて真偽が決まるわけだが，この文は彼や彼女が誰であるか，に依存し偽になる場合もあることから，常に真とはならない．そのため「彼は彼女に怒っていた」のような文は非妥当な文となる．そして Montague 文法においては，指標詞を含む表現の妥当性とは，任意の Kripke モデルの，任意の指標のもとで真になる，と定義される(白井 1991).

では，これらを前提に私は「今ここにいる」という文を考える．これは発話された以上偽であることがないと分かる．しかし，外延的表現，例えば「太郎は１０時に研究室にいる」この文を偽とするような指標(index)と可能世界は無数に存在する.

そこで，発話可能な指標において評価するという方法を取ることとする．すると「私は今ここにいる」という文は必然的に真になってしまう．しかし「私が今ここにいる」ことにはなんら必然性はなく，全くの偶然である(飯田 1995).

1.1.2 Kaplan の指標理論

Montague の指標理論，及び D.Scott に応答して，Kaplan は妥当性の種類が２つ必要と主張した.「私」という語が発話されたときは通常の論理的妥当性に加えて，指標語が持つ意味のみにより妥当となる，文脈的妥当性が必要と考えた(Kaplan 1977).「私」「今」等は発話される限り偽になることはありえない．この意味(Kaplan はこれを意味特性という)での妥当性を文脈的妥当と呼んだ. そして「私」や「今」という語が実際に指示しているもの，

つまり「健」や「2017 年 2 月 10 日」(Kaplan はこれを意味内容という)においては非妥当とするような論理を構築した．このように，指標詞を含む表現に対して 2 ステップの値踏みを行うことにより，「私は今ここにいる」という文が意味特性においては妥当でありながら，意味内容としては非妥当とした．そして，論理的妥当性 "Either it is raining or it is not." などと，文脈的妥当(意味特性による妥当)を区別した(Blackburn, 2012).

「今」や「私」は Kaplan の分類によると純粋指標詞(Pure Indexical)というが，これは Kaplan(1977)にもあるよう，Reichenbach のトークン反射語というものと対応する．タイプは Kaplan のいう意味特性に対応し，トークンとは意味内容(外延)に対応する．そして「私」「今」などはその発話した人物や時点がそのままトークンになるためトークン反射語と呼ばれる．

「私は今ここにいる」のような例を，ある意味では必然的に真であり，ある意味では偽となる場合があるような論理体系が Kaplan や Evans(1979)，Stalnaker(1978)などの理論を参考に提案されてきた．

そして，このような二段階の値踏みを必要とし真偽が決定するものを，時制論理において Hybrid Logic という様相論理の拡張を用いて構築された論理体系が存在する．この体系では時制をドメインとするため，"Now"の文脈的妥当性が表現されている．これを主軸とし拡張，本研究の論理を構築した．その論理を基本的な様相論理から順を追って説明する．

1.1.3 様相論理の基本

2.1.　様相概念とは

本研究は様相論理をベースとし，指標詞を含む文がどのように扱われるか，が重要となる．そのために，まず様相論理おおまかに説明する．以下，小野寛晰(1994)に準拠して説明する．

我々が普段推論を行う時，パラメータには，推論を行っている状況，時刻，文脈様々なものがある．そのような状況においての推論は，古典論理においては分析することが困難となる．なぜなら，古典論理は数学などの命題「はっきりと白黒がつく」ということを前提にしており，定理になるものはこれ以前も以降も永遠に，またどのような環境下においても定理とされる．ところが，我々の日常行う推論においては意味が曖昧で，場面，状況，時点，背景にあるもの，など様々な概念に依存して決まるものが多々あり，古典論理にて形式的にその真偽値を定めることは難しい．そのような古典論理にて扱うことが難しい推論を説明する目的で様相論理は誕生した．

例えば，「現在の大統領は民主党員である」のように，民主党員が大統領の時点では真となり，共和党員の大統領の時点では偽になる．このような言明は日常よく存在する．これに対して，数学の定理のように，「三角形の内角の和が180°である」のような文は，状

況や時点に依存して，偽になったり真になったりするとは考えない．つまり，このようにおおまかに見ても，真理とは，状況や時点によって保証されるものと，論理的(数学的)に保証されるものの二種類が存在することが分かる．

様相論理とは，古典論理につぎの２つの様相オペレータを付け加えてできる論理である．

読み方は，

□(必然性演算子 necessity operator)：$\Box p$(pということは必然である)

◇(可能性演算子 possibility operator)：$\Diamond p$(pである可能性がある)

$\Leftrightarrow \neg\Box\neg p$($p$でないことは必然であるわけではない)

適応先によって(義務論理，時間論理など)上記以外の読み方もあるが，概ねこの読みが基本になっている．

- 様相論理の構文論

様相論理の言語を再帰的に定義する．

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$
$$\mathrm{Prop} = \{p, q, r, \dots\}$$

pやqには命題がくる．例えば「雨が降っている」などである．

様相論理の意味論は Kripke フレームというものによって与えられた．

空集合でない集合W(世界・状況の集合)とW上の二項関係$R(R \subseteq W \times W)$の組$(W, R)$を Kripke フレームという．$W$をこの Kripke フレームの可能世界(possible world)といい，二項関係Rを可能世界間の到達可能関係という．以下の表に代表的なR(到達可能関係)とその到達関係で公理となる論理式を示す．

表 1.　様相論理のスタンダードな公理とフレームの性質との対応

論理式	フレームの性質
K　$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	条件なし
T　$\Box\varphi \to \varphi$	反射性(reflexive)
B　$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	対称性(symmetric)
4　$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	推移性(transitive)
5　$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	ユークリッド性
D　$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	継起性(serial)

またフレームの性質とは，以下の二項関係の条件に対応するものである．

表 2．フレームの性質に対応する二項関係

フレームの性質	
反射性(reflexive)	$\forall w(wRw)$
対称性(symmetric)	$\forall w, v(wRv \to vRw)$
推移性(transitive)	$\forall w, v, u(wRv \land vRu \to wRu)$
ユークリッド性	$\forall w, v, u(wRv \land wRu \to vRu)$
継起性(serial)	$\forall w \exists v(wRv)$

また，この二項関係様相論理においては世界$w \in W$の到達可能関係と呼ぶ．

Kripke モデル

フレーム(W, R)に，各命題変数pに対し$V(p) \subseteq W$となるようなV(付値)を加えたものを Kripke モデルと呼び，三重対(W, R, V)で与えられる．与えられた Kripke モデルに対し，Wの要素と論理式φの間の充足関係を以下に定義する．

$M, w \Vdash p$	iff	$w \in \mathrm{V}(p)$ (ただし pは原子式)
$M, w \Vdash \neg\varphi$	iff	$M, w \nVdash \varphi$
$M, w \Vdash \varphi \land \psi$	iff	$M, w \Vdash \varphi$ かつ $M, w \Vdash \psi$
$M, w \Vdash \Box\varphi$	iff	全てのw'で，wRw' ならば $M, w' \Vdash \varphi$
$M, w \Vdash \Diamond\varphi$	iff	あるw'が存在して, wRw' かつ $M, w' \Vdash \varphi$

妥当性(validity)について

- φが論理的妥当ということは，全てのM, wで$M, w \Vdash \varphi$

論理的妥当になるφはフレームの性質に依存する．例えば K では論理式$\Box\varphi \to \varphi$は妥当ではないが，T においては$\Box\varphi \to \varphi$は妥当な式となる．直感的には T はフレームの性質，反射性を満たすため，$\Box\varphi$のとき充足関係より，全てのw'で，wRw' ならば $M, w' \Vdash \varphi$なので，自分自身の世界wへ到達可能である T では自分自身の世界$M, w \Vdash \varphi$もいえる．またこれがいえない場合は，$\Box\varphi \to \varphi$の前件が偽となり，全体としては真，従って妥当になる．このようにフレームの性質により，妥当になる論理式が決まる．

1.1.4 時制論理

時制論理とは様相論理の応用であり，時間に依存した命題について自然な意味論を与えるものである．では時制論理の構文論を定める．
時制論理の言語を再帰的に定義する．

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid P\varphi \mid F\varphi$$

また$H\varphi := \neg P \neg\varphi$，$G\varphi := \neg F \neg\varphi$と定義する．$P\varphi$はある過去が存在し$\varphi$と読む．また$F\varphi$はある未来が存在して$\varphi$と読む．$\mathrm{Prop} = \{p, q, r, \dots\}$で命題の可算集合である．

このとき，Kripke モデルは(T, R, V)で，Tは時点の集合，$R \subseteq T \times T$，$V\colon \mathrm{Prop} \to \mathcal{P}(A)$で$V(p) \subseteq T$である．

このとき充足関係は以下のように定める．

$M, t \Vdash p$	iff	$t \in \mathrm{V}(p)$　(ただし aは原子式)
$M, t \Vdash \neg\varphi$	iff	$M, t \nVdash \varphi$
$M, t \Vdash \varphi \wedge \psi$	iff	$M, t \Vdash \varphi$ かつ $M, t \Vdash \psi$
$M, t \Vdash P\varphi$	iff	あるt'が存在して, $t'Rt$ かつ $M, t' \Vdash \varphi$
$M, t \Vdash F\varphi$	iff	あるt'が存在して, tRt' かつ $M, t' \Vdash \varphi$

時制論理のフレームの性質は **4**，つまり推移性がある．「ある未来pが存在して，その未来から更にある未来qが存在する」とき，現在から見たら「ある未来qが存在する」は正しいと考えるのが自然である．

- 時制論理のタブロー法
  タブロー法とは証明論であり，妥当となる論理式を機械的な手続きで定理か判定することが出来る．以下に時制論理のタブロー法の展開ルールを定める
  - 時制論理の論理式に自然数iをラベルとして導入
  - 自然数j, kに対してjからkにリンクがあることを$j\ r\ k$と書く

$$\frac{j\colon \varphi \wedge \psi}{j\colon \varphi, j\colon \psi}(\wedge T) \quad \frac{j\colon \neg(\varphi \wedge \psi)}{j\colon \neg\varphi \mid (i, j)\colon \neg\psi}(\wedge F) \quad \frac{j\colon \neg\neg\varphi}{j\colon \varphi}(\neg F) \quad \frac{j\colon \varphi, j\colon \neg\varphi}{\times}(\times)$$

$$\frac{j\colon P\varphi}{k\colon \varphi,\ k\ r\ j}(PT)^{\ddagger} \quad \frac{k\colon \neg P\varphi,\ j\ r\ k}{j\colon \neg\varphi}(PF)^{\dagger} \quad \frac{j\colon F\varphi}{k\colon \varphi,\ j\ r\ k}(FT)^{\ddagger} \quad \frac{j\colon \neg F\varphi,\ j\ r\ k}{k\colon \neg\varphi}(FF)^{\dagger}$$

$$\frac{j\ r\ k, k\ r\ l}{j\ r\ l}(tran)$$

✧　タブロールールの適用条件

- 適用条件‡:その枝のjに現れていない自然数kないしjを導入し$k{:}\,\varphi,\ k\ r\ j$ないし$k{:}\,\varphi,\ j\ r\ k$を加える．これで元の式$j{:}\,P\varphi$は規則適用済みとなる．
- 適用条件†:既に枝の中にある$j\ r\ k$につき$k{:}\,\neg\varphi$を加える，ないし$j\ r\ k$につき$j{:}\,\neg\varphi$を加える．このようなすべての$j\ r\ k$にこの規則が適用されない限り$(\neg P\varphi)$と$(\neg F\varphi)$の分析は終わらない．

1.1.5 Hybrid Logic とは

Hybrid Logic とは様相論理の拡張であり，時制論理で有名な A.N.Prior が考案し，近年 Blackburn らにより整備されたものである．時間論理で説明するなら一階述語論理で表された次の表現$\mathrm{Seki\ drinks}(23{:}00)$，これは「23 時に関は酒を飲む」であるが，この$23{:}00$という時間を指す表現も$\mathrm{Seki\ drinks}$という命題と同じカテゴリーとして考える．つまり，一引数の述語論理における単項も Hybrid Logic では命題とする．この$23{:}00$に対応するものはこんにちではノミナル(Nominal)と呼ばれている．従って$\mathrm{Seki\ drinks}(23{:}00)$は@という充足演算子を用いて$@_{23:00}(\mathrm{Seki\ drinks})$と表現される(佐野, 2008)．

1.1.6 時制 Hybrid Logic の基本

以下 Blackburn et al.(2012)の説明に用いられた体系に準拠する．

- 時制 Hybrid Logic の構文論

  時制 Hybrid Logic の言語を再帰的に定義する．

$$\varphi ::= i \mid p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\psi \mid P\varphi \mid F\varphi \mid @_i\varphi$$

$$\mathrm{Prop} := \{p, q, r, \dots\}$$

$$\mathrm{Nominal} := \{i, j, k, \dots\}$$

pやqには「酒を飲む」や「雨が降る」が来る．これは通常の命題なので，複数の時点において真となることを許す．Nominal であるiなどには，前節で述べたように「2 月 9 日午前 1 時 47 分」などが来る．これは一点，つまりその時点でしか真にならない．pを「酒を飲む」としiを「2 月 9 日午前 1 時 47 分」とした場合，$@_i p$は「2 月 9 日午前 1 時 47 分に酒を飲む」と読む．$P\varphi$は「ある過去が存在してφ」と読み，$F\varphi$は「ある未来が存在してφ」と読む．また$H\varphi := \neg P\neg\varphi$，$G\varphi := \neg F\neg\varphi$と定義する．

- 時制 Hybrid Logic の意味論

  上節で与えた時制 Hybrid Logic の言語に対する Kripke 意味論は次のように定める．Kripke モデルMは(T, R, V)の三重対で，Tは空でない時点の集合，Rは時点間の前後関係の可算集合$R \subseteq T \times T$，Vは$p \in \mathrm{Prop}$のとき$V(p) \subseteq T$，$i \in \mathrm{Nom}$のとき，$V(i) = \{i^v\}$ ($V(i)$はシングルトン，その要素をi^vと書く)と定める．

このとき充足関係は以下のように定める．

$M, t \Vdash a$	iff	$t \in \mathrm{V}(a)$　(ただし aは原子式)
$M, t \Vdash \neg\varphi$	iff	$M, t \nVdash \varphi$
$M, t \Vdash \varphi \wedge \psi$	iff	$M, t \Vdash \varphi$ かつ $M, t \Vdash \psi$
$M, t \Vdash P\varphi$	iff	あるt'が存在して, $t'Rt$ かつ $M, t' \Vdash \varphi$
$M, t \Vdash F\varphi$	iff	あるt'が存在して, tRt' かつ $M, t' \Vdash \varphi$
$M, t \Vdash @_i\varphi$	iff	$M, i^v \Vdash \varphi$

- φが論理的妥当ということは，全てのM, tで$M, t \Vdash \varphi$とする

  この体系はタブロー法や，Hilbert 流，自然演繹などの証明論において完全性が示されている．

1.1.7 now を加えた Hybrid Logic

以下 Blackburn et al.(2012)の説明に用いられた体系に準拠する．

- now を扱える Indexical Hybrid Logic の構文論

  now を扱える Indexical Hybrid Logic の言語を再帰的に定義する．

$$\varphi ::= now \mid i \mid p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid P\varphi \mid F\varphi \mid @_{now}\varphi \mid @_i\varphi$$

$$\mathrm{Prop} := \{p, q, r, \ldots\}$$

$$\mathrm{Nominal} := \{i, j, k, \ldots\}$$

nowを特別な Nominal として加えた．

- 指標詞 now を扱える Indexical Hybrid Logic の意味論

  上節で与えた時制Hybrid Logicの言語に対するKripke意味論は次のように定める．Kripke モデルMは(T, C, R, η, V)の五重対で，Tは空でない時点の集合，Cは空でない文脈の集合，Rは時点間の関係の可算集合$R \subseteq T \times$，Vは$p \in \mathrm{Prop}$のとき$V(p) \subseteq T$，$i \in \mathrm{Nom}$のとき$V(i) = \{i^v\}\big(V(i)$はシングルトン，その要素をi^vと書く$\big)$と定める．そして，このモデルMには文脈集合Cに加えηという関数が新たに加わっている．関数$\eta: C \to T$であり，$\eta(c) \mapsto t\ (c \in C, t \in T)$である．つまり，文脈を引数とし，"now"と発話された時点を返す関数である．これはちょうど Kaplan のいう純粋指標詞"now"の意味特性と対応する関数とわかる．従ってVの場合分けも一つ増え，$V = \{\eta(c)\}$ が加わる．

  このとき充足関係は以下のように定める．

$M, c, t \Vdash a$	iff	$t \in \mathrm{V}(a)$　(ただし aは原子式)
$M, c, t \Vdash \neg\varphi$	iff	$M, c, t \nVdash \varphi$
$M, c, t \Vdash \varphi \wedge \psi$	iff	$M, c, t \Vdash \varphi$ かつ $M, t \Vdash \psi$
$M, c, t \Vdash P\varphi$	iff	あるt'が存在して, $t'Rt$ かつ $M, c, t' \Vdash \varphi$
$M, c, t \Vdash F\varphi$	iff	あるt'が存在して, tRt' かつ $M, c, t' \Vdash \varphi$
$M, c, t \Vdash @_i\varphi$	iff	$M, c, i^v \Vdash \varphi$
$M, c, t \Vdash @_{now}\varphi$	iff	$M, c, \eta(c) \Vdash \varphi$

$@_{now}$という演算子は任意の文脈において"now"と発話された時点，つまり$\eta(c) \in T$にジャンプできる．そのため"now"は発話された限り真となり，文脈的妥当ということが表現できる．そこで妥当性は以下のように二つに区別され,

- φが論理的妥当ということは，全てのM, c, tで$M, c, t \Vdash \varphi$とする
- φが文脈的妥当ということは，全てのM, cで$M, c, \eta(c) \Vdash \varphi$とする

となる．全てのM, cで$M, c, \eta(c) \Vdash I$はいえるため，文脈的妥当となる．Hybrid Logic を用いることにより，"now"という発話が，$@_{now}$という充足演算子を用いることで構文論の中に落とし込める．

この文脈依存のある時制の Hybrid Logic に対して，本研究ではドメインをエージェントとし，直示語への拡張をおこなう．

1.2 本論文の構成

2 章にて本研究の達成すべき目標としたものを明確にする．

3 章では本研究が先行研究，特に Blackburn(2012)に対してであるが，に上積みした部分を述べる．

4 章では本研究で構築した論理，また目的に対してどういったアプローチをしたのかを明らかにする．そして達成されたことを述べ，証明体系(タブロー法)について説明する．また関数ηやgに対して，照応解析との関係についても考察し，Centering 理論アルゴリズムを用いた実装について紹介する(Grosz, 1994)．

5 章では構築した直示語を扱えるよう拡張した論理を正当化するため，健全性・完全性の証明をおこなう．

6 章ではまとめと展望を説明する．まとめとして本研究の背景に対して寄与したことについて述べる．展望として，今後本研究の論理を基本として，拡張しうる事柄を，既に提起されている問題を参考文献とともに紹介する．

第2章 研究目的

2.1 拡張 Indexical Hybrid Logic

本研究の目的は次の４つを柱とした.

1. 純粋指標詞 I の文脈的妥当性を表現できること
2. 直示語，He や She についても扱えるよう論理を拡張
3. Hybrid Logic を用いることによりその文脈，視点にとってのエージェント同士の関係(like や love)も記述
4. 構築した論理体系の証明論(タブロー法)をつくり健全性・完全性を証明

純粋指標詞 I の文脈的妥当性については，先行研究である Indexical Hybrid Logic のモデルの要素である，時間をエージェントと読み替え"Now"の文脈的妥当性を参考に進める(Blackburn et al.2012).

加え直示語 He や She を扱えるよう，拡張する．そして，視点の違いにより He や She の指示先が変わることを表現できる意味論を構築する.

Hybrid Logic はエージェント間の関係を表すことが可能なので，それらを用い視点 I にとっての他者や自分と他者の関係を表す.

上記の条件を満たす意味論に対する証明論としてタブロー法を新規に作成し，その健全性・完全性について示す.

第3章 本研究の新規性

(Blackburn et al. 2012)らの時制論理のドメイン時間を，エージェントとし記述論理読みし純粋指標詞"Now"の文脈的妥当に対応して"I"を文脈的妥当とした点がまず一つ.

さらに直示語の指示物を表す関数gを導入し，その引数として話者(視点)と直示語(He や She)とし，視点によって変わる指示先を表現できる点が二つ目.

そして, Blackburn らの体系とは独立に新規に Restall(2012)や Gilbert(2016)らの二次元意味論のタブロー法を参考とし拡張 Indexical Hybrid Logic のタブロー法を作成．二引数のラベル付き論理式を用いることにより直感的に判りやすい証明論を構築し，その健全性・完全性を示した点の三点が大きな新規性である.

第4章 研究の方法

本設ではここまで目的や新規性で述べてきた要件を満たすよう構築した 拡張 Indexical Hybrid Logic の構文論，意味論，証明論(タブロー法)を導入する．

4.1 拡張 Indexical Hybrid Logic の構文論

はじめに拡張 Indexical Hybrid Logic(以降$\mathcal{L}_{IHL}$と呼ぶこととする)の言語を再帰的に定義する．

$$\mathcal{L}_{IHL} \ni \varphi ::= I \mid x \mid e \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid @_I \varphi \mid @_x \varphi \mid @_e \varphi$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var} := \{x, \mathrm{he}_1, \mathrm{he}_2, \dots, \mathrm{she}_1, \dots\} \\
&\mathrm{Name} := \{e, f, \mathrm{Jane}, \mathrm{Mary}, \dots\} \\
&\mathrm{Prop} := \{p, q, \mathrm{Male},\ \mathrm{Female}, \dots\} \\
&\mathrm{Rel} := \{r, r_1, r_2, \mathrm{like}, \mathrm{love}, \dots\}
\end{aligned}$$

純粋指標詞 I を特別なノミナルとし，本研究で新規に追加したxを(変数)とし直示語を表すノミナルとする．またeを個体名，つまり Jane などとする．Propは記述論理でのコンセプト(一引数の述語)に相当し，男性や女性，学生のようなものである．以降原子式をtと総称する($t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Name} \cup \mathrm{Prop}$)．$r$は記述論理での役割語(like や love)であり二引数の述語，それをリレーションとし導入．例として自然言語での"She likes Mary"は本研究の言語では$@_{\mathrm{she}_1}\langle\mathrm{like}\rangle\mathrm{Mary}$となる．

4.2 拡張 Indexical Hybrid Logic の意味論

上節で与えた$\mathcal{L}_{IHL}$の言語に対する Kripke 意味論は次のように定める．Kripke モデルMは

$$M = \left(A, C, (R_r)_{r \in Rel}, \eta, g, V\right)$$

の六重対である．

- A: エージェントの集合（non-empty set of agents）
- C: 文脈集合(non-empty set of contexts)
- Relation $R_r \subseteq A \times A$ ($r \in \mathrm{Rel}$) はエージェント間の関係,
- ηは以下のように文脈cを引数としその文脈における視点を返す関数,

$$\begin{array}{cccc}
\eta: & C & \rightarrow & A \\
 & \Psi & & \Psi \\
 & c & \longmapsto & \eta(c)
\end{array}$$

- gは以下のように，視点となるエージェントと直示語(He や She)を表すxを引数に視点エージェントにとっての指示するエージェントを返す関数とし新規に導入，

$$\begin{array}{ccc} g: A \times \mathrm{Var} & \to & A \\ \Cup & & \Cup \\ (\eta(c), x) & \mapsto & g(\eta(c), x) \end{array}$$

- Vは$\begin{cases} C \times \mathrm{Prop} \to \mathcal{P}(A) \\ C \times \mathrm{Nom} \to A \\ C \times \{I\} \to A \\ C \times \mathrm{Var} \to A \end{cases}$ で，tに応じてどのエージェントで真か指定する付置関数，

以下場合分け

1. $\mathrm{V}(c, p) \subseteq A$ （$p \in Prop$のとき）
2. $\mathrm{V}(c, e) = \{e^v\}$ ※ $\mathrm{V}(c, e)$はシングルトン．その要素をe^vと書く．
3. $\mathrm{V}(c, I) = \{\eta(c)\}$
4. $\mathrm{V}(c, x) = \{g(\eta(c), x)\}$ ($x \in Var$)

と定められる．Blackburn らの論理を拡張し新規に加えた関数gは，話者・視点(つまり文脈)が変わらなくても，He や She の指示先が変わることがあるため，一度その全てを区別しhe_1やhe_2のように仮に名付けたものを第二引数とした．例として She も her も指示語であるが"She likes her."は She と her が同一の指示対象であることはない．

このとき，充足関係は以下のように定める．

$M, c, a \Vdash t$	iff	$a \in \mathrm{V}(c, t)$ （ただし $t \in \mathrm{Atom}$）
$M, c, a \Vdash \neg\varphi$	iff	$M, c, a \nVdash \varphi$
$M, c, a \Vdash \varphi \wedge \psi$	iff	$M, c, a \Vdash \varphi$ かつ $M, c, a \Vdash \psi$
$M, c, a \Vdash \langle r \rangle\varphi$	iff	あるa'が存在して, $aR_r a'$ かつ $M, c, a \Vdash \varphi$
$M, c, a \Vdash @_e\varphi$	iff	$M, c, e^v \Vdash \varphi$ （ただし $\mathrm{V}(c, e) = \{e^v\}$）
$M, c, a \Vdash @_I\varphi$	iff	$M, c, \eta(c) \Vdash \varphi$
$M, c, a \Vdash @_x\varphi$	iff	$M, c, g(\eta(c), x) \Vdash \varphi$ （ただし $x \in \mathrm{Var}$）

$@_I\varphi$はIが真なエージェントでφが真と読むので，つまり$\eta(c)$が返すエージェントでφが真と同値である．また$@_x\varphi$もxが真なエージェントでφが真となるので，$g(\eta(c), x)$が返すエージェントでφが真と同値である．妥当性の定義は，次のように

- φが論理的妥当ということは，全てのM, c, aで$M, c, a \Vdash \varphi$とする．
- φが文脈的妥当ということは，全てのM, cで$M, c, \eta(c) \Vdash \varphi$とする．

と論理的妥当性と文脈的妥当性を区別する．$M, c, \eta(c) \Vdash I$は全ての$c \in C$で$\eta(c)$は話者を返すので，Iは文脈的妥当となる．$\eta(c)$はある文脈におけるユニークなエージェントを返すので，

同時に全てのエージェントでIが真になることはないのでIはもちろん論理的妥当ではない．よって Kaplan の意味論が捉えられていることがわかる．

このことを直感的に表した図 4.1 を以下に示す．

	a_0	a_1	a_2
$\eta(c_0) = a_0$	I		
$\eta(c_1) = a_1$		I	
$\eta(c_2) = a_2$			I

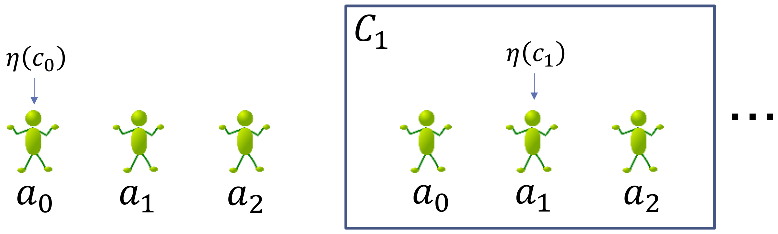


図 4.1　二次元意味論的イメージ

図に示したよう$\eta(c)$が返したエージェントと，真偽の評価がされるエージェントが一致する場合に限り純粋指標詞 I は必ず真となる．

4.3 拡張 Indexical Hybrid Logic の証明論

4.3.1 タブロー法の設計アイディア

Blackburn(2012)らはラベル付き論理式を用いない．例えば $y{:}\varphi$の形ではなく$@_y\varphi$とする．これは意図的なものだが，上節の図 4.2 に示したような直感的な理解が，タブロー計算をする際ラベルを用いる方法より難しい．従って本研究では従来のラベル付き表現を Hybrid Logic のタブローにミックスさせるオリジナルな方法を用いた．本研究では$(i,j){:}\varphi$と$i\,r\,j$　$(i,j \in \mathbb{N})(r \in \mathrm{Rel})$の形でラベル付き論理式，リレーションを扱う．ラベルの第一引数iは気持ちとして$\eta(c)$を表しており，第二引数j(気持ちとして可能性としてのエージェント)と突き合わされて真偽が評価される過程が見える．第一引数と第二引数が一致するときIを真とし，つまり図 4.2 のような理解がしやすいように構築した(Gilbert, 2016)．

4.3.2 $\mathcal{L}_{IHL}$のタブロールール

- $\mathcal{L}_{IHL}$の論理式に自然数のペア(i,j)をラベルとして導入
- 自然数j,kに対してjからkにリンクがあることを$j\ r\ k$と書く

（$r \in \mathrm{Rel}$，$n \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Name}$，　$l,m \in \{I\} \cup \mathrm{Var} \cup \mathrm{Name}$）

$$\frac{(i,j){:}\ \varphi \wedge \psi}{(i,j){:}\ \varphi, (i,j)\psi}(\wedge T) \quad \frac{(i,j){:}\ \neg(\varphi \wedge \psi)}{(i,j){:}\ \neg\varphi | (i,j){:}\ \neg\psi}(\wedge F) \quad \frac{(i,j){:}\ \neg\neg\varphi}{(i,j){:}\ \varphi}(\neg F) \quad \frac{(i,j){:}\ \varphi, (i,j){:}\ \neg\varphi}{\times}(\times)$$

$$\frac{(i,j){:}\ \langle r \rangle \varphi}{(i,k){:}\ \varphi,\ j\ r\ k}(\langle r \rangle T)^{\ddagger} \quad \frac{(i,j){:}\ \neg\langle r \rangle \varphi,\ j\ r\ k}{(i,k){:}\ \neg\varphi}(\langle r \rangle F)^{\dagger} \quad \frac{(i,j){:}\ I}{(i,i){:}\ I}(IT) \quad \frac{(i,j){:}\ @_I\varphi}{(i,i){:}\ \varphi}(@_I T) \quad \frac{(i,j){:}\ @_I\varphi}{(i,i){:}\ \neg\varphi}(@_I F)$$

$$\frac{(i,j){:}\ @_n\varphi}{(i,k){:}\ n,\ (i,k){:}\ \varphi}(@T)^{\star} \quad \frac{(i,j){:}\ \neg @_n\varphi}{(i,k){:}\ n, (i,k){:}\ \neg\varphi}(@T)^{\star} \quad \frac{(i,j){:}\ \neg l}{(i,k){:}\ l}(\neg T)^{*} \quad \frac{(i,j){:}\ \varphi, (i,j){:}\ n, (i,k){:}\ n}{(i,k){:}\ \varphi}(\nu Id)^{!}$$

$$\frac{(i,j){:}\ \varphi, (i,j){:}\ I}{(i,i){:}\ \varphi}(\nu Id) \quad \frac{(i,j){:}\ l, (i,j){:}\ m, (i,k){:}\ m}{(i,k){:}\ l}(Nom)$$

✧　タブロールールの適用条件

- 適用条件‡:その枝のjに現れていない自然数kを導入し$(i,k){:}\ \varphi,\ j\ r\ k$を加える．
  これで元の式$(i,j){:}\ \langle r \rangle \varphi$は規則適用済みとなる．
- 適用条件†:既に枝の中にある$j\ r\ k$につき$(i,k){:}\ \neg\varphi$を加える．このようなすべての$j\ r\ k$にこの規則が適用されない限り$(\neg\langle r \rangle \varphi)$の分析は終わらない．
- 適用条件⋆:その枝のjに現れていない自然数kを導入し$(i,k){:}\ n$, $(i,k){:}\ \varphi$（ないし$(i,k){:}\ \neg\varphi$)を加える．これでもとの式$(i,j){:}\ @_n\varphi$(ないし$(i,j){:}\ @_n\neg\varphi$)は規則適用済みとなる．
- 適用条件∗:その枝のjに現れていない自然数kを導入し$(i,k){:}\ n$を加える．
- 適用条件! :(i,k)のkはnを成立させる一番最初に導入されたラベル．

定理の判定は，

- 与えられた$\mathcal{L}_{IHL}$の論理式φが**論理的定理**になるのは，自然数のペア$(0,1){:}\ \neg\varphi$から分析をスタートして全ての枝に×が付いた場合
- 与えられた$\mathcal{L}_{IHL}$の論理式φが**文脈的定理**になるのは自然数のペア$(0,0){:}\ \neg\varphi$から分析をスタートして全ての枝に×が付いた場合

のように行う．
このように，論理的定理か文脈的定理かを判定できる．

4.3.3 タブローの計算例

特記すべきタブローの計算例を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(0,0):\neg I}{(0,1):I}(\neg T)^{*}}{(0,0):I}(IT)}{\times}(\times) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{(0,1):\neg I}{(0,2):I}(\neg T)^{*}}{(0,0):I}(IT)$$

図 4.2　タブローの計算木

図 4.2 のように"I"は，(0,0)のラベルからスタートしたタブロー計算を行うことで文脈的定理であるとわかり，(0,1)のラベルからスタートしたタブロー計算を行うことで論理的定理でないことがわかる．従って，Kaplan の主張通り"I"が常に文脈的に真になり，論理的には真でないことを捉えている．

次に，ある人物が"She likes her."と発言した場合，それは$\mathcal{L}_{IHL}$において，$@_{\mathrm{She}_1}\langle \mathrm{like}\rangle \mathrm{Mary}$と翻訳される．これが真になる状況をタブローで計算することによってもとめる．以下図 4.3 に計算木，状況のイメージを示す．

$$\dfrac{\dfrac{(0,1):@_{\mathrm{she}_1}\langle \mathrm{like}\rangle \mathrm{Mary}}{(0,2):\mathrm{she}_1,(0,2):\langle \mathrm{like}\rangle \mathrm{Mary}}(@T)}{(0,3):\mathrm{Mary}, 2\ \mathrm{like}\ 3}(\langle \mathrm{like}\rangle T)$$

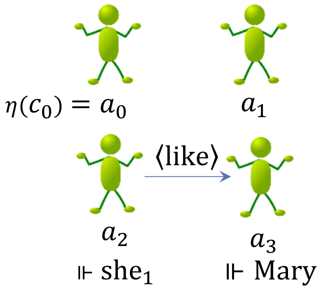


図 4.3　"She likes her."を真とする状況を求める計算とその状況

スタートの論理式に否定をつけずにスタートした計算はタブロー法の特性により，その論理式を真とする場合がわかる．この計算木に現れている自然数は 4 つあるので，4 名のエージェンを考えることによって真とするモデルが考えられる．$\eta(c_0)$は"She likes her."と発話したエージェントである．従って"She likes her."の自然言語的意味もタブローにより正しく捉えられる．

4.3.4 $\mathcal{L}_{IHL}$と照応解析の関係

Blackburn による先行研究においては，指標詞"now"が指し示す具体物を抽象的な関数で定義してあるが，本研究では自然言語における指標語の内容特定については照応解析が対応すると考えた．照応解析により代名詞の指示内容を特定することは，前節の$\mathcal{L}_{IHL}$の意味論に登場した関数ηやgを具体的に構成することに相当する．

そこで，ここからはある固定の文脈における指示内容の特定として照応解析をおこなった．

本研究では Centering 理論による照応解析をおこなった．Centering 理論による照応解析は以下の図のようなルーチンで構成される．

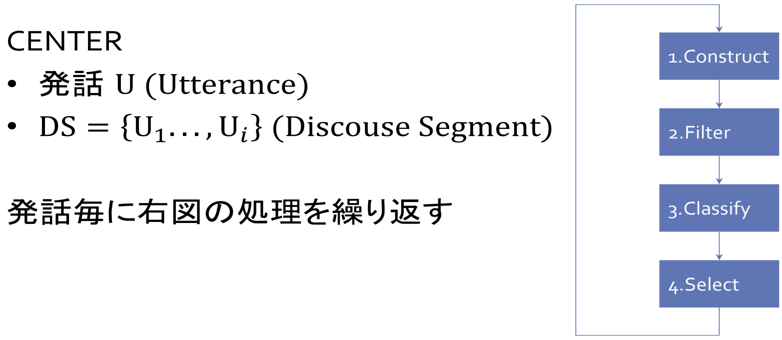


図 4.4 Centering のアルゴリズム

DS = {U_1 ..., U_i}(Discouse Segment)と呼ばれるものの要素の発話Uごとに上記の図式した処理を施す．ここからは本研究で照応解析した入力文を具体的に説明することによってアルゴリズムを説明する．本研究の照応解析の実装としては以下の文を入力とした．

U_1 = Jane likes Mary.

U_2 =<u>She</u>(＝She1) often brings <u>her</u>(=she2) flowers.

U_3 =<u>She</u>(＝She3) chats with <u>the young woman</u>(＝she4) for ages.

U_1, U_2までの具体例で照応解析のアルゴリズムを説明する．まず最初の発話"Jane likes mary."に現れた具体的な名詞を Cf と呼ばれるリストに追加する．追加する順序としては The subject > Direct object > Indirect object > Adjuncts とする．そしてU_2において she と her の代名詞が現れたら，U_1で具体的に与えられている名詞の全てを代名詞に対応付ける．これが Constract である．そのあと Filter にて Constract にて列挙された可能性から Filter による制約条件により，代名詞の照応先としてありえない組み合わせが取り除かれる．続いて Classify において，Centering 理論による分類法により Transition type に分類される．そして Select により，もっとも可能性の高い分類に属するものに当てはまる照応先が選択される．ではそれらの照応解析アルゴリズムを実装したものを示す．

4.3.5 実装環境

実装環境を以下に示す．

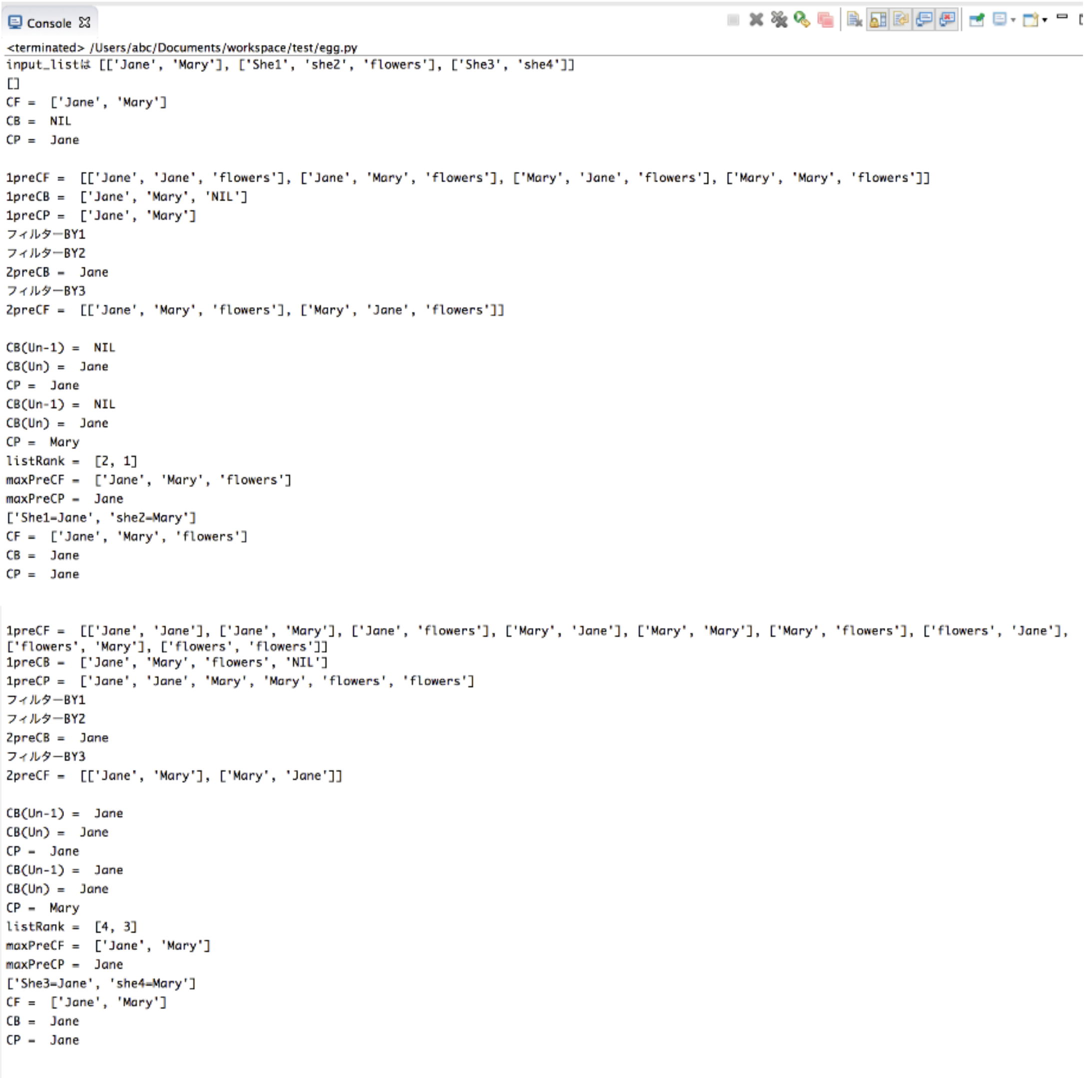
・OS：Mac OS 10.9.5 64bit

・開発環境：Eclipse Version:Mars.1 Release(4.5.1)

・使用言語：Python 2.8

4.3.1 実装したシステム

実装したシステムについて説明する．システムのスクリーンショットを用い説明する．


```
<terminated> /Users/abc/Documents/workspace/test/egg.py
input_listは [['Jane', 'Mary'], ['She1', 'she2', 'flowers'], ['She3', 'she4']]
[]
CF =  ['Jane', 'Mary']
CB =  NIL
CP =  Jane

1preCF =  [['Jane', 'Jane', 'flowers'], ['Jane', 'Mary', 'flowers'], ['Mary', 'Jane', 'flowers'], ['Mary', 'Mary', 'flowers']]
1preCB =  ['Jane', 'Mary', 'NIL']
1preCP =  ['Jane', 'Mary']
フィルターBY1
フィルターBY2
2preCB =  Jane
フィルターBY3
2preCF =  [['Jane', 'Mary', 'flowers'], ['Mary', 'Jane', 'flowers']]

CB(Un-1) =  NIL
CB(Un) =  Jane
CP =  Jane
CB(Un-1) =  NIL
CB(Un) =  Jane
CP =  Mary
listRank =  [2, 1]
maxPreCF =  ['Jane', 'Mary', 'flowers']
maxPreCP =  Jane
['She1=Jane', 'she2=Mary']
CF =  ['Jane', 'Mary', 'flowers']
CB =  Jane
CP =  Jane


1preCF =  [['Jane', 'Jane'], ['Jane', 'Mary'], ['Jane', 'flowers'], ['Mary', 'Jane'], ['Mary', 'Mary'], ['Mary', 'flowers'], ['flowers', 'Jane'],
['flowers', 'Mary'], ['flowers', 'flowers']]
1preCB =  ['Jane', 'Mary', 'flowers', 'NIL']
1preCP =  ['Jane', 'Jane', 'Mary', 'Mary', 'flowers', 'flowers']
フィルターBY1
フィルターBY2
2preCB =  Jane
フィルターBY3
2preCF =  [['Jane', 'Mary'], ['Mary', 'Jane']]

CB(Un-1) =  Jane
CB(Un) =  Jane
CP =  Jane
CB(Un-1) =  Jane
CB(Un) =  Jane
CP =  Mary
listRank =  [4, 3]
maxPreCF =  ['Jane', 'Mary']
maxPreCP =  Jane
['She3=Jane', 'she4=Mary']
CF =  ['Jane', 'Mary']
CB =  Jane
CP =  Jane
```

図 4.5　実装したシステムの出力

Input_list に名詞が入る．そして，文章中から固有名を代名詞に代入し，可能性が全て列挙される．そして，図 4.4 に示したようにフィルターを通過し，最終的に $\mathrm{She}_3 = \mathrm{Jane}, \mathrm{She}_3 = \mathrm{Jane}$ と特定されたことがわかる．

これらの照応解析結果と，前項で構築したロジックとは以下の図のような関係がある．

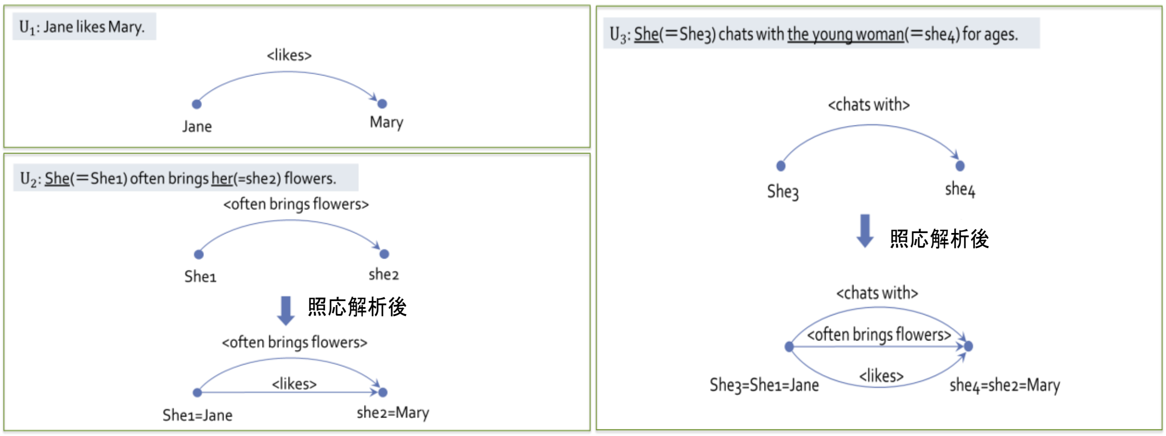


図 4.6　照応解析結果と$\mathcal{L}_{IHL}$との対応

はじめは匿名のShe_1のように扱っていた代名詞が，Centering のフィルターを通過するたびに，例えば Jane とShe_1が同一だとわかると指示先のエージェントの可能性が減っていることがわかる．これを繰り返して，上図と同じように可能性が減少し，最終的にそれぞれ代名詞がどのエージェントを指していたことがわかる．そして個体名としてエージェント同士の関係が求まる．

第5章 研究の正当性

5.1 $\mathcal{L}_{IHL}$のタブロー法の健全性

5.1.1 健全性の証明

タブローの健全性とは「タブロー法によって証明可能な論理式ならば，その論理式は妥当である」ということである．これは「証明したい論理式の否定$(0,1)$: $\neg\varphi$からスタートしたタブロー計算木の全ての枝に×がついたならば，その論理式φは妥当である」と言い換えられる．

準備として語句の導入，証明に必要な定義を行う．
タブロー計算にて用いる$(0, j)$: φ と $j\ r\ k$の形をラベル付き表現と呼ぶ.

<u>定義 ラベル付き表現の充足性</u>
関数f_1を以下のようなものとする.

$$f_1 : \mathbb{N} \to A$$

関数f_1をラベル$(0, j)$に対し，エージェント$a \in A$を割り当てる関数とする.
さらに$c_0 \in C$と仮定する．また，つねに$f_1(0) = \eta(c_0)$とする.
このとき，

$$M, f_1 \Vdash (0, j) : \varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi$$
$$M, f_1 \Vdash j\ r\ k \Leftrightarrow f_1(j)\ R_r\ f_1(k)$$

とする.

<u>定義 ラベル付き表現の充足可能性</u>
ラベル付き表現の集合Bが充足可能であるのは，あるMとあるf_1が存在し，Bの中の全てのラベル付き表現αに対して，

$$M, f_1 \Vdash \alpha$$

が成り立つ場合である.

(証明)

φが定理と仮定する.

背理法を用いるために，さらにφが妥当でないと仮定する.

φが妥当でないということはあるM, f_1が存在して，$M, f_1 \nVdash (0, j){:}\,\varphi$

これはラベル付き表現の充足性と充足関係より $M, f_1 \Vdash (0, j){:}\,\neg\varphi$

続いて$\mathcal{L}_{IHL}$のタブロー規則が充足性を保つことを補題 1 とする.

補題 1

● タブロー計算のルール適用により枝分かれしない場合

ラベル付き表現の有限集合Bが充足可能ならば，タブロー計算(×がつくルールを除く)のルールを適用した後に集合Bに新たなラベル付き表現αが加わった集合B'も充足可能である.

● タブロー計算のルール適用により枝分かれする場合

ラベル付き表現の有限集合Bが充足可能ならば，タブロー計算(×がつくルールを除く)のルールを適用した後に集合Bに新たなラベル付き表現αが加わった集合B'または，新たなラベル付き表現α'が加わった集合B''が充足可能である.

補題 1 証明

$(\wedge T)$

$(0, j){:}\,\varphi \wedge \psi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0, j){:}\,\varphi, (0, j){:}\,\psi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する.

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0, j){:}\,\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi \wedge \psi$$

これは，充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi \text{ かつ } M, c_0, f_1(j) \Vdash \psi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能. ■

$(\wedge F)$

$(0,j)\colon \neg(\varphi \wedge \psi) \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,j)\colon \neg\varphi\} \cup B$ または $\{(0,j)\colon \neg\psi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j)\colon \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \quad \Leftrightarrow \quad M, c_0, f_1(j) \nVdash \varphi \wedge \psi$$
$$\Leftrightarrow \big(M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi \text{ かつ } M, c_0, f_1(j) \Vdash \psi\big)\text{でない}$$
$$\Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \nVdash \varphi \text{ または } M, c_0, f_1(j) \nVdash \psi$$
$$\Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\varphi \text{ または } M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\psi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

$(\neg F)$

$(0,j)\colon \neg\neg\varphi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,j)\colon \varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j)\colon \neg\neg\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\neg\varphi$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \nVdash \neg\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

$(\langle r\rangle T)$

$(0,j){:}\langle r\rangle\varphi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}\varphi, j\ r\ k\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\langle r\rangle\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \langle r\rangle\varphi$$

これは充足関係より，

$$\text{ある}a'\text{が存在して}, f_1(j)\ R_r\ a'\ \text{かつ}\ M, c_0, a' \Vdash \varphi$$

ここで関数f_2を以下のように定める．

$$f_2(x) = \begin{cases} a' & \text{if } x = k \\ f_1(x) & \text{if } x \neq k \end{cases}\ (k\text{は}B\text{中に現れていない自然数})$$

関数f_2により，

$$f_2(j)\ R_r\ f_2(k)\ \text{かつ}\ M, c_0, f_2(k) \Vdash \varphi$$

(引数がkでなければ関数f_2はf_1と同じ値を割り当てるため，元のB中の全ての要素の充足性も保たれる)

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

$(\langle r\rangle F)$

$\{(0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi, j\ r\ k\} \subseteq B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}\neg\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi\ \text{かつ}\ M, f_1 \Vdash j\ r\ k \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\langle r\rangle\varphi\ \text{かつ}\ f_1(j)\ R_r\ f_1(k)$$

$M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg\langle r\rangle\varphi$は充足関係より，

$$\text{任意の}a'\text{で}, f_1(j)\ R_r\ a'\ \text{ならば}\ M, c_0, a' \Vdash \neg\varphi$$

a'は任意なので，

$$f_1(j)\ R_r\ f_1(k)\ \text{ならば}\ M, c_0, f_1(k) \Vdash \neg\varphi$$

仮定より$f_1(j)\ R_r\ f_1(k)$なので，$M, c_0, f_1(k) \Vdash \neg\varphi$

また仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

(IT)

$(0,j){:}I \in B$かつ，集合Bが充足可能と仮定し，$\{(0,0){:}\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性の定義より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}I \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash I$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \Vdash I \Leftrightarrow M, c_0, \eta(c_0) \Vdash I$$

関数f_1により， $M, c_0, f_1(0) \Vdash I$

また仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

$(\langle r \rangle T)$

$(0,j){:}@_n\varphi \in B$かつ，集合Bが充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}n, (0,k){:}\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}@_n\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash @_n\varphi$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, n^v \Vdash \varphi \text{ かつ } M, c_0, n^v \Vdash n \ (\because \mathrm{V}(c_0, n) = \{n^v\})$$

ここで関数f_2を以下のように定める．

$$f_2(x) = \begin{cases} n^v & \text{if } x = k \\ f_1(x) & \text{if } x \neq k \end{cases} (k\text{は}B\text{中に現れていない自然数})$$

関数f_2により， $M, c_0, n^v \Vdash \varphi$ かつ $M, c_0, n^v \Vdash n$

$$\Leftrightarrow M, c_0, f_2(k) \Vdash \varphi \text{ かつ } M, c_0, f_2(k) \Vdash n$$

(引数がkでなければ関数f_2はf_1と同じ値を割り当てるため，元のB中の全ての要素の充足性も保たれている)

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

$(@F)$

$(0,j){:}\neg @_n\varphi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}\,n, (0,k){:}\neg\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\neg @_n\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg @_n\varphi$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \nVdash @_n\varphi \Leftrightarrow (M, c_0, f_1(j) \Vdash @_n\varphi)\text{でない}$$

$$\Leftrightarrow (M, c_0, n^v \Vdash \varphi)\text{でない，かつ}\ M, c_0, n^v \Vdash n^v\ (\because\ \mathrm{V}(c_0, n) = \{n^v\})$$

ここで関数f_2を以下のように定める．

$$f_2(x) = \begin{cases} n^v & \text{if } x = k \\ f_1(x) & \text{if } x \neq k \end{cases} \ (k\text{は}B\text{中に現れていない自然数})$$

関数f_2により， $M, c_0, f_2(k) \Vdash \neg\varphi$ かつ $M, c_0, f_2(k) \Vdash n$

(引数がkでなければ関数f_3はf_1と同じ値を割り当てるため，元のB中の全ての要素の充足性も保たれる)

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

$(@_I T)$

$(0,j){:}\,@_I\varphi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,0){:}\,\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\,@_I\varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash @_I\varphi$$

これは充足関係より，

$$M, c_0, f_1(j) \Vdash @_I\varphi \Leftrightarrow M, c_0, \eta(c_0) \Vdash \varphi$$

関数f_1により， $M, c_0, f_1(0) \Vdash \varphi$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能．■

$(@_I F)$

$(0,j){:}\neg @_I \varphi \in B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,0){:}\neg\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\neg @_I \varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg @_I \varphi$$

これは充足関係より，

$$(M, c_0, f_1(j) \Vdash @_I \varphi)\text{でない} \Leftrightarrow (M, c_0, \eta(c_0) \Vdash \varphi)\text{でない}$$

仮定より$f_1(0) = \eta(c_0)$なので，

$$(M, c_0, f_1(0) \Vdash \varphi)\text{でない} \Leftrightarrow M, c_0, f_1(0) \nVdash \varphi \Leftrightarrow M, c_0, f_1(0) \Vdash \neg\varphi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

$(\neg T)$

$(0,j){:}\neg l \in B$かつ，集合Bが充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}l\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\neg l \Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \neg l$$

一方ノミナルlは，

$$\mathrm{V}(c_0, l) = \{l^v\}$$

ここで関数f_2を以下のように定める．

$$f_2(x) = \begin{cases} l^v & \text{if } x = k \\ f_1(x) & \text{if } x \neq k \end{cases} \quad (k\text{は}B\text{中に現れていない自然数})$$

関数f_2より， $M, c_0, l^v \Vdash l \Leftrightarrow M, c_0, f_2(k) \Vdash l$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

$(vId^!)$

$\{(0,j){:}\varphi, (0,j){:}n, (0,k){:}n\} \subseteq B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M, f_1 \Vdash (0,j){:}\varphi \text{ かつ } M, f_1 \Vdash (0,j){:}n \text{ かつ } M, f_1 \Vdash (0,k){:}n$$

$$\Leftrightarrow M, c_0, f_1(j) \Vdash \varphi \text{ かつ } M, c_0, f_1(j) \Vdash n \text{ かつ } M, c_0, f_1(k) \Vdash n$$

一方関数f_1より，

$$f_1(j) = f_1(k) = n^v \quad (\because\ \mathrm{V}(c_0, n) = \{n^v\})$$

したがって，

$$M, f_1(k) \Vdash \varphi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

(νId)

$\{(0,j){:}\varphi,(0,j){:}I\} \subseteq B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,0){:}\varphi\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M,f_1 \Vdash (0,j){:}\varphi \text{ かつ } M,f_1 \Vdash (0,j){:}I$$

$$\Leftrightarrow M,c_0,f_1(j) \Vdash \varphi \text{ かつ } M,c_0,f_1(j) \Vdash I$$

また，$M,c_0,f_1(j) \Vdash I$ より，$f_1(j) = \eta(c_0)$なので，

$$M,c_0,\eta(c_0) \Vdash \varphi \text{ かつ } M,c_0,\eta(c_0) \Vdash I$$

$$\eta(c_0) = f_1(0)$$

したがって，

$$M,c_0,f_1(0) \Vdash \varphi$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

(Nom)

$\{(0,j){:}l,(0,j){:}m,(0,k){:}m\} \subseteq B$かつ，集合$B$が充足可能と仮定し，$\{(0,k){:}l\} \cup B$ の全ての要素が充足可能であることを証明する．

(証明) 仮定とラベル付き表現の充足性より，

$$M,f_1 \Vdash (0,j){:}l \text{ かつ } M,f_1 \Vdash (0,j){:}m \text{ かつ } M,f_1 \Vdash (0,k){:}m$$

$$\Leftrightarrow M,c_0,f_1(j) \Vdash l \text{ かつ } M,c_0,f_1(j) \Vdash m \text{ かつ } M,c_0,f_1(k) \Vdash m$$

また，

$$f_1(j) = f_1(k) \quad (\because\ \mathrm{V}(c_0,m) = \{m^v\})$$

従って，

$$M,c_0,f_1(k) \Vdash l$$

また，仮定より集合Bの他のラベル付き表現も充足可能． ■

従って補題 1 は成り立つことがわかった．

タブロー規則が充足性を保つということは，φは妥当でないという仮定により$(0,j){:}\neg\varphi$からスタートしたタブロー計算木の少なくとも一つの枝に現れているラベル付き表現を充足するM,f_1が存在する．

しかし，仮定よりφは定理なのでその枝の中にも$(0,j){:}\psi$と$(0,j){:}\neg\psi$の形が現れている．

よって$M,f_1 \Vdash (0,j){:}\psi$ かつ $M,f_1 \Vdash (0,j){:}\neg\psi$

これは矛盾．よってφは妥当．

従って，φが定理ならば，φは妥当． ■

以上より$\mathcal{L}_{IHL}$のタブロー法の規則に対して健全性が成り立つ．

5.2 $\mathcal{L}_{IHL}$のタブロー法の完全性

完全性

完全性とは一般に「妥当な論理式ならば，その論理式は定理」であることを指す．このことをタブロー法でいうなら「妥当な論理式ならば，その論理式の否定からスタートした計算木が存在して，その全ての枝に×がつく」ということになる．この対偶「論理式の否定からスタートした全てのタブロー計算木で，×がつかない枝が存在するならば，その論理式は非妥当となる」を示す．

×が付かない枝に対応するのは，飽和の概念である．飽和とは全てのタブロールールを適用し尽くし，タブロー計算木に現れている×がつかない枝に出現しているラベル付き論理式の集合が満たす条件のことである．そして，×がつかないタブロー計算木の枝に含まれるラベル付き論理式集合が無矛盾ならば，それは飽和条件を満たすことを示す．そして，飽和条件を満たすラベル付き論理式ならば，偽にするモデルが構成出来ることを補題 1 で示す．これが本研究で用いた完全性証明の流れである．

5.2.1 完全性の証明

まず，$\mathcal{L}_{IHL}$のラベル付き論理式の矛盾について，タブロー規則を用いて定義する．

矛盾の定義

ラベル付き論理式の有限集合Θが矛盾しているとは，Θからスタートしたタブロー計算木が存在して，そのすべての枝に×がつく場合である．また，ラベル付き論理式の無限集合が矛盾しているとは，ある有限部分集合が存在してその有限部分集合が矛盾している場合である．

ラベル付き論理式の集合Θの全ての要素が以下のすべての条件を満たすときかつ，そのときに限り集合Θは飽和，という．

$(\wedge T)$　$(0,j){:}\,\varphi \wedge \psi \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,j){:}\,\varphi \in \Theta$ かつ $(0,j){:}\,\psi \in \Theta$

$(\wedge F)$　$(0,j){:}\,\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,j){:}\,\neg\varphi \in \Theta$ または $(0,j){:}\,\neg\psi \in \Theta$

$(\neg F)$　$(0,j){:}\,\neg\neg\varphi \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,j){:}\,\varphi \in \Theta$

$(\langle r\rangle T)^{\ddagger}$　$(0,j){:}\,\langle r\rangle\varphi \in \Theta \;\Rightarrow$ ある自然数kが存在し，$(0,k){:}\,\varphi \in \Theta$ かつ $j\,r\,k \in \Theta$

$(\langle r\rangle F)^{\dagger}$　$(0,j){:}\,\neg\langle r\rangle\varphi \in \Theta \;\Rightarrow$ 全ての自然数kで，$j\,r\,k \in \Theta$ ならば $(0,k){:}\,\neg\varphi \in \Theta$

(IT)　$(0,j){:}\,I \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,0){:}\,I \in \Theta$

$(@T)^{\star}$　$(0,j){:}\,@_n\varphi \in \Theta \;\Rightarrow$ ある自然数kが存在し，$(0,k){:}\,n \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,\varphi \in \Theta$

$(@F)^{\star}$　$(0,j){:}\,\neg @_n\varphi \in \Theta \;\Rightarrow$ ある自然数kが存在し，$(0,k){:}\,n \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,\neg\varphi \in \Theta$

$(@_I T)$　$(0,j){:}\,@_I\varphi \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,0){:}\,\varphi \in \Theta$

$(@_I F)$　$(0,j){:}\,\neg @_I\varphi \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,0){:}\,\neg\varphi \in \Theta$

$(\neg T)^{*}$　$(0,j){:}\,\neg l \in \Theta \;\Rightarrow$ ある自然数kが存在し，$(0,k){:}\,l \in \Theta$

$(\nu ID)^{!}$　$(0,j){:}\,\varphi, (0,j){:}\,n, (0,k){:}\,n \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,k){:}\,\varphi \in \Theta$

(νId)　$(0,j){:}\,\varphi \in \Theta, (0,j){:}\,I \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,0){:}\,I \in \Theta$

(Nom)　$(0,j){:}\,l \in \Theta, (0,j){:}\,m \in \Theta, (0,k){:}\,m \in \Theta \;\Rightarrow\; (0,k){:}\,l \in \Theta$

証明したい論理式$\varphi \in \mathcal{L}_{IHL}$を否定した，ラベル付き論理式 $(0,j){:}\,\neg\varphi$ からスタートしたタブローに開放経路(×が付かない枝)が存在したとき，その開放経路の一つに現れている式を集めて作られた集合をΘとする．

ここでは，開放経路により機械的に反例モデルを作る手続きを与えることが目標である．

まず，Θから構成されるプレドメインAを以下のように定義する．

$$A = \{\, j \mid j \text{が } \Theta \text{ に出現} \}$$

そして，プレドメインA上の同値関係$\backsim_{\Theta}$を以下のように矛盾なく定義(Well-defindness)する．

$$j \backsim_{\Theta} k \quad \text{iff} \quad \big(\text{あるノミナル}l\text{が存在し，}(0,j){:}\,l \in \Theta \text{ かつ } (0,k){:}\,l \in \Theta\big)$$
$$\text{または} \quad j = k$$

命題１ $\backsim_\Theta$は同値関係である.

従って$\backsim_\Theta$が，反射性，対称性，推移性を満たすかを確認する.

(証明)

・あるノミナルlが存在し，$(0,j){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,l \in \Theta$　の場合を①とする.

・$j = k$　の場合を②とする.

反射性(全てのjに対して$j \backsim_\Theta j$)

Case1 ①を仮定し，結論　あるノミナルlが存在し，$(0,j){:}\,l$ かつ $(0,j){:}\,l$ を導く.

これは，かつ，の性質により結論は明らか.

Case2 ②を仮定し，結論　全てのjに対して，$j = j$ を導く.

$=$ の性質により，結論は明らか.

対称性(全てのj,kに対して，$j \backsim_\Theta k$　ならば　$k \backsim_\Theta j$)

Case1 ①を仮定し，結論　あるノミナルlが存在し，$(0,k){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,j){:}\,l \in \Theta$ を導く.

これは，かつ，の交換則により$(0,k){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,j){:}\,l \in \Theta$　従って結論を得る.

Case2 ②を仮定し，結論　$k = j$を導く.

これは $=$ の性質により結論は明らか. ■

推移性(全てのi,j,kに対して，$i \backsim_\Theta j$ かつ $j \backsim_\Theta k$　ならば　$i \backsim_\Theta k$)

以下 4 つに場合分け.

Case1

① かつ ①を仮定し，結論 あるノミナルlが存在し，$(0,i){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,l \in \Theta$を導く.

$(0,i){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,j){:}\,l \in \Theta$ かつ，$(0,j){:}\,l' \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,l' \in \Theta$ となるl, l'をとる.

また，Θが飽和とすると(Nom)より，$(0,k){:}\,l \in \Theta$

よって，$(0,i){:}\,l \in \Theta$ かつ $(0,k){:}\,l \in \Theta$

従って結論が得られる.

Case2
① かつ ②を仮定し，結論　あるノミナルlが存在し，$(0,i):l\in\Theta$ かつ
$(0,k):l\in\Theta$を導く．
$(0,i):l\in\Theta$ かつ $(0,j):l\in\Theta$　となるlをとる．
また，$j=k$より　$(0,k):l\in\Theta$
従って結論が得られる．
Case3 仮定が① かつ ②の場合も同様．
Case4 ② かつ ②を仮定し，結論　$i=k$を導く．
$i=j$ かつ $j=k$
従って結論が得られる．

よって命題は成立する．■

プレドメインA上の$\backsim_\Theta$に関する同値類を改めて要素としてみなした集合(商集合)によって，開放経路により構成されたモデルを反例モデルMとし以下のように定義する．

$$M=(A/\backsim_\Theta, C, (R_r)_{r\in\mathrm{Rel}}, \eta, g, V)$$

$A/\backsim_\Theta=\{\,[j]\mid j\in A\}$
ただし，$[j]=\{\,k\mid j\sim_\Theta k\}$
$C=\{c_0\}$
$R_r=\{([j],[k])\mid j\ r\ k\in\Theta\}(r\in\mathrm{Rel})$
$\eta(c_0)=[0]$

$$V(c_0,p)=\begin{cases}\{\,[j]\mid(0,j):p\in\Theta\}\ \text{if } p\text{が }\Theta\text{ に出現している}\\ \{\,[0]\,\}\ \text{if } p\text{が }\Theta\text{ に出現していない}\end{cases}$$

$$V(c_0,l)=\begin{cases}\{\,[j]\mid(0,j):l\in\Theta\}\ \text{if } l\text{が }\Theta\text{ に出現している}\\ \{\,[0]\,\}\ \text{if } l\text{が }\Theta\text{ に出現していない}\end{cases}$$

命題 2 先に定義した同値関係$\backsim_\Theta$によりプレドメインA上に構成された同値類によって，ノミナルに対する付値$V(c_0,l)$がシングルトンである．

これはノミナル $l\in\{I\}\cup\mathrm{Nom}\cup\mathrm{Var}$ がΘに出現していると仮定した場合，以下の 2 つの条件を満たすことが証明できれば十分である．

1)あるjが存在し，$j\in A((0,j):l\in\Theta)$
2)全てのj,kで，$j,k\in A((0,j):l\in\Theta$ かつ $(0,k):l\in\Theta$　ならば　$[j]=[k])$

1)は$V(c_0, l)$となる$j \in A$が少なくとも 1 つ存在する，つまりノミナルを真にするエージェント集合が空でないということを述べている．2)は異なった自然数のラベルにlが出現した場合，$V(c_0, l)$が$\backsim_\Theta$により定義された同値類の要素が一致しているか，を確かめることに相当する．1)はノミナルはを真にするエージェントは空でないという前提より明らかなため，証明は省略する．

2)
$((0, j){:}\, l \in \Theta \text{ and } (0, k){:}\, l \in \Theta)$とし，結論 $[j] = [k]$を導く．
$(0, j){:}\, l \in \Theta \text{ and } (0, k){:}\, l \in \Theta$のとき，仮定と$\backsim_\Theta$の定義より，$j \sim_\Theta k$である．
(証明)
$([j] \subseteq [k])$
$b \in [j]$とする．よって $b \sim_\Theta j \ \& \ j \sim_\Theta k$となる．
従って，$\sim_\Theta$の推移性より$b \sim_\Theta k$
よって，$b \in [k]$.

$([j] \subseteq [k])$
同様.

よって，結論を得る．
従って命題 2 は成立する．■

ノミナルlがxのときも，シングルトンになることが証明されたので，$V(c_0, x)$を用い直示語が指すエージェント$g([0], x)$を定める．

$$g([0], x) = \begin{cases} x^v \ \text{ if } x\text{が } \Theta \text{ に出現する} & ※\, V(c_0, x) = \{x^v\} \text{ と書く} \\ & [0] \ \text{ if } x\text{が } \Theta \text{ に出現しない} \end{cases}$$

よって，飽和条件を満たす枝が存在したとき，その枝に含まれる論理式$(0, j){:}\, \varphi \in \Theta$を一度に充足するようなモデル$M$が存在することを証明すればよい(補題 1).

<u>補題 1</u>

Θは飽和かつ無矛盾のとき，全てのラベル付き論理式$\varphi \in \mathcal{L}_{IHL}$，全ての自然数$j$に関して以下のことが満たされる．

$$\begin{cases} ① \ (0, j){:}\, \varphi \in \Theta \ \Rightarrow \ M, c_0, [j] \Vdash \varphi \\ ② \ (0, j){:}\, \neg\varphi \in \Theta \ \Rightarrow \ M, c_0, [j] \nVdash \varphi \end{cases}$$

補題 1 を式の長さに関する帰納法で証明する.

($n \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Name}$,　$l, m \in \{I\} \cup \mathrm{Var} \cup \mathrm{Name}$)

(証明)

[Basis]

Case1 Prop

① $(0, j): p \in \Theta$ ならば，$p \in \mathrm{Prop}$の付値の与え方により $[j] \in V(c_0, p)$

よって，$M, c_0, [j] \Vdash p$

② $(0, j): \neg p \in \Theta$ と仮定する.

さらに $M, c_0, [j] \Vdash p$と仮定する.

従って $[j] \in V(c_0, p)$

よって $(0, j): p \in \Theta$

これはΘは無矛盾ということに反するため，$M, c_0, [j] \nVdash p$

Case2 Nom

① $(0, j): l \in \Theta$ ならば，$l \in \mathrm{Nom}$の付置の与え方より $[j] \in V(c_0, l)$

よって，$M, c_0, [j] \Vdash l$

② $(0, j): \neg l \in \Theta$ と仮定する.

さらに $M, c_0, [j] \Vdash l$と仮定する.

従って $[j] \in V(c_0, l)$

よって $(0, j): l \in \Theta$

これはΘは無矛盾ということに反するため，$M, c_0, [j] \nVdash l$

[Induction Step]

<u>帰納法の仮定</u>

結合子の数・充足演算子が n 個以下の全ての閉論理式$\varphi \in \mathcal{L}_{IHL}$,

全ての自然数jについて

$$\begin{cases} (0,j){:}\,\varphi \in \Theta \ \Rightarrow\ M, c_0, [j] \Vdash \varphi \\ (0,j){:}\,\neg\varphi \in \Theta \ \Rightarrow\ M, c_0, [j] \nVdash \varphi \end{cases}$$

とする.

このとき,

Subcase1

① $(0,j){:}\,\varphi \wedge \psi \in \Theta$ このとき飽和条件より, $(0,j){:}\,\varphi \in \Theta$ かつ $(0,j){:}\,\psi \in \Theta$

従って, 帰納法の仮定より$M, c_0, [j] \Vdash \varphi$ かつ $M, c_0, [j] \Vdash \varphi$

よって, $M, c_0, [j] \Vdash \varphi \wedge \psi$

② $(0,j){:}\,\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Theta$ このとき飽和条件より, $(0,j){:}\,\neg\varphi \in \Theta$ または $(0,j){:}\,\neg\psi \in \Theta$

従って, 帰納法の仮定より$M, c_0, [j] \nVdash \varphi$ または $M, c_0, [j] \nVdash \varphi$

よって, $M, c_0, [j] \nVdash \varphi \wedge \psi$

Subcase2

① $(0,j){:}\,\neg\varphi \in \Theta$ と仮定する.

従って帰納法の仮定より $M, c_0, [j] \nVdash \varphi$

② $(0,j){:}\,\neg\neg\varphi \in \Theta$ このとき飽和条件より, $(0,j){:}\,\varphi \in \Theta$

従って, 帰納法の仮定より, $M, c_0, [j] \Vdash \varphi$

Subcase3

① $(0,j){:}\,\langle r\rangle\varphi \in \Theta$ このとき飽和条件より, ある自然数kが存在し, $(0,k){:}\,\varphi \in \Theta$ かつ $j\ r\ k \in \Theta$

従って, 帰納法の仮定より$M, c_0, [k] \Vdash \varphi$ かつ $([j],[k]) \in Rr$

よって充足条件の定義より, $M, c_0, [j] \Vdash \langle r\rangle\varphi$ も成り立つ.

② $(0,j){:}\,\neg\langle r\rangle\varphi \in \Theta$ このとき飽和条件より, 全ての自然数kで, $j\ r\ k \in \Theta$ ならば

$(0,k){:}\,\neg\varphi \in \Theta$

任意にkをとる. よって $j\ r\ k \in \Theta$ ならば $(0,k){:}\,\neg\varphi \in \Theta$

帰納法の仮定より, $([j],[k]) \in Rr$ ならば $M, c_0, [k] \nVdash \varphi$

kは任意なので　全ての自然数kで, $([j],[k]) \in Rr$ ならば $M, c_0, [k] \nVdash \varphi$

従って充足性の定義より, $M, c_0, [j] \nVdash \langle r\rangle\varphi$

Subcase4

① $(0,j):@_n\varphi \in \Theta$　このとき飽和条件より，ある自然数kが存在し，$(0,k):n \in \Theta$ かつ $(0,k):\varphi \in \Theta$

従って，帰納法の仮定より $M,c_0,[k] \Vdash n$ かつ $M,c_0,[k] \Vdash \varphi$

よって，$M,c_0,[j] \Vdash @_n\varphi$ も成り立つ.

② $(0,j):\neg@_n\varphi \in \Theta$　このとき飽和条件より，ある自然数kが存在し，$(0,k):n \in \Theta$ かつ $(0,k):\neg\varphi \in \Theta$

従って，帰納法の仮定より $M,c_0,[k] \Vdash n$ かつ $M,c_0,[k] \nVdash \varphi$

よって，$M,c_0,[j] \nVdash @_n\varphi$ も成り立つ.

よって補題 1 は成り立つ. ■

補題 2

Θ をラベル付き論理式の有限集合かつ無矛盾とする．そのとき，あるΘ^+が存在し

$$(\Theta \subseteq \Theta^+ \quad \text{かつ} \quad \Theta^+\text{は無矛盾} \quad \text{かつ} \quad \Theta^+\text{は飽和})$$

(補題 2 の証明)

すべてのラベル付き論理式の全てが，それぞれ無限回出現する列をひとつ作り，それを$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$とする．(ラベル付き論理式のラベルは自然数のため，このように枚挙可能である)

Θにタブロー計算をし，A_nを用いて無矛盾のラベル付き論理式の集合$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots$を作る手順を次のように定義する．

[Basis]

$$\Theta_0 := \Theta$$

とする．Θ は有限無矛盾集合という仮定より Θ_0も有限無矛盾集合である．

[Inductive Step]

帰納法の仮定

無矛盾な$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$が構成されたとする．

このとき，Θ_{n+1}を次のような Step に分けて定める．

(Step1)

Θ_nの中の，可能なラベル付き論理式に対して Tab ルールの$(\nu ID)^!$，(νID)，(Nom)を適用しつくす．その結果出来た集合をΘ_n'とする．Θ_n'は$\Theta_n{}^1$，$\Theta_n{}^2$を用いて以下のように定義する．

$(\nu ID)^!$

$(0, j_i): \varphi_i, (0, j_i): n_i, (0, k_i): n_i$ の三組の形がΘ_nにN_1個現れているとする．そのとき$(\nu ID)^!$をN_1回適用することにより，$\Theta_n{}^1$を次のように定める．

$$\Theta_n{}^1 := \Theta_n \cup \{(0, k_i) \mid 1 \leq i \leq N_1\}$$

$\Theta_n{}^1$が無矛盾と証明する．

背理法により$\Theta_n{}^1$が矛盾と仮定する．

$\Leftrightarrow$ Θ_nに$(\nu ID)^!$をN_1回適用した $\Theta_n{}^1$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつく．

これは，Θ_nからスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつくということである．

よってΘ_nは矛盾．

これはΘ_nが無矛盾という仮定に反する．従って，$\Theta_n{}^1$は無矛盾．

(νID)

$(0,j_i){:}\,\varphi_i, (0,j_i){:}\,I$ が${\Theta_n}^1$にN_2個現れているとき(νID)をN_2回適用することにより，${\Theta_n}^2$を次のように定める．

$${\Theta_n}^2 := {\Theta_n}^1 \cup \{(0,0){:}\,\varphi_i \mid 1 \le i \le N_2\}$$

${\Theta_n}^2$が無矛盾と証明する．
背理法により${\Theta_n}^2$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow$ ${\Theta_n}^1$に(νID)をN_2回適用した${\Theta_n}^2$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつく．これは${\Theta_n}^1$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつくということである．よって${\Theta_n}^1$は矛盾．
これは${\Theta_n}^1$が無矛盾ということに反する．
従って，${\Theta_n}^2$は無矛盾．

(Nom)

$(0,j_i){:}\,l_i, (0,j_i){:}\,m_i, (0,k_i){:}\,m_i$の三組の形が${\Theta_n}^2$に$N_3$個現れているとする．そのとき$(Nom)$を$N_3$回適用することにより，

$${\Theta_n}' := {\Theta_n}^2 \cup \{(0,k_i){:}\,l_i \mid 1 \le i \le N_3\}$$

${\Theta_n}'$が無矛盾と証明する．
背理法により${\Theta_n}'$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow$ ${\Theta_n}'$に(Nom)をN_3回適用した${\Theta_n}'$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつく．これは${\Theta_n}^2$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつくということである．よって${\Theta_n}^2$は矛盾．
これは${\Theta_n}^2$が無矛盾ということに反する．
従って，${\Theta_n}'$は無矛盾．

（Step2）
枚挙されている論理式の$\mathrm{A_n}$番目は$(0,j):\varphi$の形をしている．このときφの形ごとに$\Theta_\mathrm{n}{}'$から$\Theta_\mathrm{n+1}$を以下のように定義する．

$(\wedge T)$
$(0,j):\varphi\wedge\psi\in\Theta_\mathrm{n}{}'$のとき$(\wedge T)$ を適用することより，$\Theta_\mathrm{n+1}$を次のように定める．

$$\Theta_\mathrm{n+1} \coloneqq \Theta_\mathrm{n}{}' \cup \{(0,j):\varphi,(0,j):\psi\}$$

$\Theta_\mathrm{n+1}$が無矛盾と証明する．
背理法により$\Theta_\mathrm{n+1}$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow$ $\Theta_\mathrm{n+1}$からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．
これは, $\Theta_\mathrm{n}{}'$ からスタートした計算木が存在してその全ての枝にも×がつくということである．よって$\Theta_\mathrm{n}{}'$は矛盾．
これは$\Theta_\mathrm{n}{}'$が無矛盾という仮定に反する．従って，$\Theta_\mathrm{n+1}$は無矛盾．

$(\wedge F)$
$(0,j):\neg(\varphi\wedge\psi)\in\Theta_\mathrm{n}{}'$のとき$(\wedge F)$ 適用することより，

$\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\varphi\}$ または $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\psi\}$　は無矛盾となる－①

①を証明する．
背理法により①は矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow$ $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\varphi\}$ と $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\psi\}$ のどちらからスタートしても計算木が存在して全ての枝にも×がつく．これは$\Theta_\mathrm{n}{}'$からスタートした計算木が存在してその全ての枝に×がつくということである．
よって$\Theta_\mathrm{n}{}'$は矛盾．
これは$\Theta_\mathrm{n}{}'$が無矛盾という仮定に反する．従って, $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\varphi\}$ または $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\psi\}$ は無矛盾．
従って $\Theta_\mathrm{n+1}$ を $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\varphi\}$ または $\Theta_\mathrm{n}{}'\cup\{(0,j):\neg\psi\}$ のいずれかと定義する．

$(\neg F)$

$(0, j){:}\,\neg\neg\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$のとき$(\neg F)$ を適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0, j){:}\,\varphi\}$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．
背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n+1}}$からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.
これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$が無矛盾という仮定に反する.
従って，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$は無矛盾.

$(\langle r\rangle T)^{\ddagger}$

$(0, j){:}\,\langle r\rangle\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$のとき$(\langle r\rangle T)$ を適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0, k){:}\,\varphi, j\ r\ k\}(\text{ただし}k\text{は}\Theta_{\mathrm{n}}{}'\text{に出現していない自然数})$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．
背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n+1}}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.
これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$が無矛盾という仮定に反する.
従って，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$は無矛盾.

(IT)

$(0, j){:}\,I \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$のとき$(IT)$ を適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0,0){:}\,I\}$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．
背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n+1}}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.
これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$が無矛盾という仮定に反する.
従って，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$は無矛盾.

$(@T)^{\star}$
$(0,j): @_n\varphi \in \Theta_n{}'$のとき$(@T)$ を適用することにより，Θ_{n+1}を次のように定める．

$$\Theta_{n+1} \coloneqq \Theta_n{}' \cup \{(0,k): n, (0,k): \varphi\}(ただし k は \Theta_n{}' に出現していない自然数)$$

Θ_{n+1}が無矛盾と証明する．
背理法によりΘ_{n+1}が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{n+1}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_n{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_n{}'$は矛盾.
これは$\Theta_n{}'$が無矛盾という仮定に反する．
従って，Θ_{n+1}は無矛盾．

$(@F)^{\star}$
$(0,j): @_n\neg\varphi \in \Theta_n{}'$のとき$(@F)$ を適用することにより，Θ_{n+1}を次のように定める．

$$\Theta_{n+1} \coloneqq \Theta_n{}' \cup \{(0,k): n, (0,k): \neg\varphi\}(ただし k は \Theta_n' に出現していない自然数)$$

Θ_{n+1}が無矛盾と証明する．
背理法によりΘ_{n+1}が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{n+1}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_n{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_n{}'$は矛盾.
これは$\Theta_n{}'$が無矛盾という仮定に反する．
従って，Θ_{n+1}は無矛盾．

$(@_I T)$
$(0,j): @_I\varphi \in \Theta_n{}'$のとき$(@_I T)$ を適用することにより，Θ_{n+1}を次のように定める．

$$\Theta_{n+1} \coloneqq \Theta_n{}' \cup \{(0,0): \varphi\}$$

Θ_{n+1}が無矛盾と証明する．
背理法によりΘ_{n+1}が矛盾と仮定する．
$\Leftrightarrow \Theta_{n+1}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_n{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_n{}'$は矛盾.
これは$\Theta_n{}'$が無矛盾という仮定に反する．
従って，Θ_{n+1}は無矛盾．

$(@_I F)$

$(0,j)\colon @_I\neg\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$のとき$(@_I F)$ を適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0,0)\colon \neg\varphi\}$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．

背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．

$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n+1}}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.

これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$が無矛盾という仮定に反する.

従って，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$は無矛盾.

$(\neg T)^*$

$(0,j)\colon \neg l \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$のとき$(\neg T)$ を適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0,k)\colon l\}(\text{ただし}k\text{は}\Theta_{\mathrm{n}}'\text{に出現していない自然数})$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．

背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．

$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n+1}}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$ からスタートした計算木が存在し, その全ての枝にも×がつくということである. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.

これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$が無矛盾という仮定に反する.

従って，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$は無矛盾.

$(\langle r\rangle F)$

$(0,j)\colon \neg\langle r\rangle\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$ のときに$j\ r\ k_i$ という形のラベル付き表現が$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$に N 個出現しているとき$(\langle r\rangle F)$ をN回適用することにより，$\Theta_{\mathrm{n+1}}$を次のように定める．

$$\Theta_{\mathrm{n+1}} \coloneqq \Theta_{\mathrm{n}}{}' \cup \{(0,k_i)\colon \neg\varphi \mid 1 \le i \le \mathrm{N}\}$$

$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が無矛盾と証明する．

背理法により$\Theta_{\mathrm{n+1}}$が矛盾と仮定する．

$\Leftrightarrow \Theta_{\mathrm{n}}{}'$に$(\langle r\rangle F)$を N 回適用した$\Theta_{\mathrm{n+1}}$ からスタートした計算木が存在し，その全ての枝に×がつく．これは$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$からスタートした計算木が存在し，その全ての枝にも×がつくということである．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}'$は矛盾.

これは$\Theta_n{}'$が無矛盾という仮定に反する．
従って，Θ_{n+1}は無矛盾．

- $(0,j){:}\,\varphi \in \Theta_n{}'$でないとき(つまり $A_n \in \Theta_n{}'$でないとき)，または$(0,j){:}\,\varphi \in \Theta_n{}'$であっても上述の場合分けに当てはまらないとき，

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n{}'$$

とする．

[Inductive Step 終]
最終的に

$$\Theta^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Theta_i$$

とする．

補題 2
1. $\Theta \subseteq \Theta^+$
2. Θ^+は無矛盾
3. Θ^+は飽和

を証明する．(Θ は有限無矛盾集合，Θ^+は無限集合の場合もある)

1. $\Theta \subseteq \Theta^+$

これは $\Theta_0 = \Theta$ より明らか.

2. Θ^+は無矛盾

Θ_nの作り方によって，$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n, \ldots$が無矛盾であることが上記の[Inductive Step]によりわかった．
背理法によりΘ^+が矛盾していると仮定する．
従って無限集合の矛盾の定義により，Θ^+の中の何らかの有限部分集合Θ''が矛盾している．
Θ''は有限集合なので，Θ''に現れるラベル付き論理式は，そのラベル付き論理式を全て含むΘ_{n+1}が必ず存在する．従ってΘ''を部分集合にもつΘ_{n+1}も矛盾している．
これは，Θ_{n+1}が無矛盾ということに反する．
よってΘ^+は無矛盾．

3. Θ^+は飽和

$(\nu ID)^!$
$(0,j):\varphi,(0,j):n,(0,k):n\in\Theta^+$と仮定する．
このとき，あるnに対して三組を含むΘ_nが存在する．そのとき構成法から$(0,k):\varphi\in{\Theta_n}^1$も必ず存在する．よって${\Theta_n}'\subseteq{\Theta_n}^1\subseteq\Theta^+$より，$\Theta^+$は飽和条件$(\nu ID)^!$を満たす．

(νID)
$(0,j):\varphi\in\Theta,(0,j):I\in\Theta^+$と仮定する．
このとき，あるnに対して二つ組を含む${\Theta_n}^1$が存在する．
そのとき構成法から$(0,0):\varphi\in{\Theta_n}^2$も必ず存在する．よって${\Theta_n}^1\subseteq{\Theta_n}^2\subseteq\Theta^+$より，$\Theta^+$は飽和条件$(\nu ID)$を満たす．

(Nom)
$(0,j):l\in\Theta,(0,j):m\in\Theta,(0,k):m\in\Theta^+$と仮定する．
このとき，あるnに対して三組を含む${\Theta_n}^2$が存在する．そのとき構成法から
$(0,k):l\in{\Theta_n}'$も必ず存在する．よって${\Theta_n}^2\subseteq{\Theta_n}'\subseteq\Theta^+$より，$\Theta^+$は飽和条件$(Nom)^!$を満たす．

$(\wedge T)$
$(0,j):\varphi\wedge\psi\in\Theta^+$と仮定する．
このとき，$(0,j):\varphi\wedge\psi$の形はA_nに現れている．なぜなら，$A_0,A_1,A_2,\dots,A_n\dots$はラベル付き論理式自体が無限回出現するように作った列だからである．従って $(0,j):\varphi\wedge\psi$とA_nが一致して，かつ$(0,j):\varphi\wedge\psi\in{\Theta_n}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より$(0,j):\varphi\in\Theta_{n+1}$ かつ $(0,j):\psi\in\Theta_{n+1}$も必ず存在する．よって${\Theta_n}'\subseteq\Theta_{n+1}\subseteq\Theta^+$より，$\Theta^+$は飽和条件$(\wedge T)$を満たす．

$(\wedge F)$
$(0,j):\neg(\varphi\wedge\psi)\in\Theta^+$と仮定する．
このとき，$(0,j):\neg(\varphi\wedge\psi)$の形は$A_n$に現れている．従って $(0,j):\neg(\varphi\wedge\psi)$と$A_n$が一致して，かつ$(0,j):\neg(\varphi\wedge\psi)\in{\Theta_n}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より
$(0,j):\varphi\in\Theta_{n+1}$ または $(0,j):\psi\in\Theta_{n+1}$ のいずれかが必ず存在する．よって${\Theta_n}'\subseteq\Theta_{n+1}\subseteq\Theta^+$より，$\Theta^+$は飽和条件$(\wedge F)$を満たす．

$(\neg F)$

$(0,j){:}\neg\neg\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する．

このとき，$(0,j){:}\neg\neg\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\neg\neg\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\neg\neg\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より$(0,j){:}\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(\neg F)$を満たす．

$(\langle r\rangle T)^{\ddagger}$

$(0,j){:}\langle r\rangle\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する．

このとき，$(0,j){:}\langle r\rangle\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\langle r\rangle\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\langle r\rangle\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，

ある自然数kが存在し，$(0,j){:}\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$ かつ $(0,j){:}j\ r\ k \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって

$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件

$(\langle r\rangle T)^{\ddagger}$を満たす．

$(\langle r\rangle F)^{\dagger}$

$(0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する．さらに，$(0,j){:}j\ r\ k \in \Theta^{+}$と仮定する．

このとき，$(0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\neg\langle r\rangle\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき$j\ r\ k \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$ならば構成法により必ず$(0,k){:}\neg\ \varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が存在する．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(\langle r\rangle F)^{\dagger}$を満たす．

(IT)

$(0,j){:}I \in \Theta^{+}$と仮定する．

このとき，$(0,j){:}I$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}I$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}I \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より$(0,0){:}I \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって

$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(IT)$を満たす．

$(@T)^{\star}$

$(0,j){:}@_{n}\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する．

このとき，$(0,j){:}@_{n}\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}@_{n}\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}@_{n}\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，

ある自然数kが存在し，$(0,k){:}n \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$ かつ $(0,k){:}\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．

よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(@T)^{\star}$を満たす．

$(@F)^{\star}$

$(0,j){:}\neg @_n\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する.

このとき，$(0,j){:}\neg @_n\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\neg @_n\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\neg @_n\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，ある自然数kが存在し，$(0,k){:}n \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$ かつ $(0,k){:}\neg\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(@F)^{\star}$を満たす.

$(@_I T)$

$(0,j){:}@_I\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する.

このとき，$(0,j){:}@_I\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}@_I\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}@_I\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，$(0,0){:}\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(@_I T)$を満たす.

$(@_I F)$

$(0,j){:}\neg @_I\varphi \in \Theta^{+}$と仮定する.

このとき，$(0,j){:}\neg @_I\varphi$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\neg @_I\varphi$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\neg @_I\varphi \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，$(0,0){:}\neg\varphi \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する．よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より，$\Theta^{+}$は飽和条件$(@_I F)$を満たす.

$(\neg T)^{*}$

$(0,j){:}\neg l \in \Theta^{+}$と仮定する.

このとき，$(0,j){:}\neg l$の形は$\mathrm{A_n}$に現れている．従って $(0,j){:}\neg l$と$\mathrm{A_n}$が一致して，かつ$(0,j){:}\neg l \in \Theta_{\mathrm{n}}{}'$となるnが必ず存在する．そのとき構成法より，ある自然数kが存在し，$(0,k){:}l \in \Theta_{\mathrm{n+1}}$が必ず存在する. よって$\Theta_{\mathrm{n}}{}' \subseteq \Theta_{\mathrm{n+1}} \subseteq \Theta^{+}$より, Θ^{+}は飽和条件$(\neg T)^{*}$を満たす.

従って補題 2 は成り立つ. ■

完全性は，「φが妥当ならば，φが定理」であった．
本研究では，その対偶を示すと冒頭述べた．
つまり，「φが定理でないならば，φが妥当でない」を示す．
(証明)
φが定理でないと仮定する．
$\Leftrightarrow (0, j)\colon \neg\varphi$が無矛盾．
補題 2 より$\mathcal{L}_{IHL}$のタブロー規則は枝分かれするルールでも，別れた枝のどちらかは無矛盾性を保ち，枝分かれしないものはその枝に現れているラベル付き論理式の無矛盾性を保つ．また，このように構成された枝は飽和条件を満たす．
そして，補題 1 より $(0, j)\colon \neg\varphi \in \Theta$ ならば，$M, c_0, [j] \nVdash \varphi$ である．
従ってφは妥当でない．■

第6章 まとめ

6.1 まとめと研究の寄与

本研究では，Montague(1960)の指標詞に関する理論に対する応答として Kaplan(1989)が指標詞の評価において特別な扱いをする必要がある，ということを主軸にそれらを近年Blackburn(2012)などで Hybrid Logic という新たな手法を用い形式化された. Hybrid Logicにより，次元数を減らせ，また Kripke モデルに指標詞が指し示す先を割り当てる関数を加える事により，豊かな表現力を実現している．それらをベースとし本研究では，エージェントに対して適用できるよう読み替えを行った．そして新規に，指示先を特定するのに指差しが必要な(直示語)ものにたいしても関数を用い，自然な意味論を構築出来た.

またそれらの意味論に対応する証明論(タブロー法)をつくり，それらの健全性・完全性を示せた．つまり我々の純粋指標詞*I*や直示語に対する自然な意味論は，規則だけに落とし込めたということである．これは，指標詞と直示語に対する自然な意味論，ある意味では真(文脈的妥当)，ある意味では偽(論理的妥当)ということを実装可能としたわけである．またこのことにより，重要となるのはむしろ非妥当となる場合が増えたことである．これまでの一次元的な論理を用いた場合「私は彼である」のような文は「a は a である」という無意味な文，情報量を持たない文と扱われてしまう．しかし，本研究で構築した論理では「彼は私である」は妥当とならず，指示物の可能性を減らす作用を持っているように扱うことができる.

6.2 今後の展望

本研究では，モデルMに文脈集合Cを加えることによって文脈的妥当性ということを表現したが，充足関係には$c \in C$を動かすようなものは入っていない．もし文脈なり，視点なりを動かすような言葉があるならそれはモンスターである，と Kaplan は言っている(Kaplan et al. 1989)．しかし Schlenker(2002)によるとモンスターのような働きをする言葉があるという．そこでそれについて理解し，文脈cも変化する充足演算子を時制論理における[Then]オペレータなどを参考に加えることが考えられる(Vlach 1973)．

本研究で構築したタブロー計算の停止性については証明出来ておらず，完全性の証明において，タブロー計算が終わらない(無限に続く)場合も想定したものとなった．しかし，一階述語論理に比べ Hybrid Logic の利点として，停止性は良くあげられるため，本研究で構築した論理に対しても今後停止性が証明できることが期待される．

二人称"You"は会話している人物が二人の場合に限り，指差し行為は必要なく指示先は一意に決まる．従ってIに対して一意に決まる相手を割り当てるYou関数($You: C \to A$)のようなものを加え，拡張を行うことが可能である．

また Sphere モデルを用い(Lewis 1973)，時制のように整列していない，個体同士の関係についても，ある程度形式的に記述出来る．

- 謝辞

研究系長という大変お忙しい役職についているにも関わらず，熱心なご指導をしてくださった東条敏先生に感謝し尊敬いたします．佐野勝彦先生には科学哲学会第 49 回年次大会までのご指導，その後もタブロールールの設計・完全性の証明について多くの手引，助言をしていただきました．ものわかりの悪い私に諦めることなく優しく丁寧に，笑いを交えながら，ときに深夜や明け方などに突如メールにて質問をする無謀な私にご指導してくださいましたこと深く感謝いたします．また同期である Sean Arn さんには Abstract の英語を修正して頂きましたこと御礼申し上げます．そして，研究室の先輩方・同期の方には大変お世話になり感謝していることは言うまでもありません．

参考文献

[1] P. R. Blackburn and K. F. Jrgensen. Indexical hybrid tense logic. pp. 144–160, 2012.

[2] Brian Carr. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 27, No. 4, pp. 403–405, 1976.

[3] G. Evans. Reference and contingency. *The Monist*, Vol. 62, No. 2, pp. 161–189, 1979.

[4] D. Gilbert. Two-dimensional tableaux. *Australasian Journal of Logic*, Vol. 13, No. 7, 2016.

[5] B. J. Grosz, S. Weinstein, and A. K. Joshi. Centering: A framework for modeling the local coherence of discourse. *Comput. Linguist.*, Vol. 21, No. 2, pp. 203–225, June 1995.

[6] H. Kamp and U. Reyle. *From Discourse to Logic: Introduction to Model-theoretic Semantics of Natural Language, Formal Logic and Discourse Representation Theory*, Vol. 42 of *Studies in Linguistics and Philosophy*. Springer, Dordrecht, 1993.

[7] David Kaplan. Demonstratives. In J. Almog, J. Perry, and H. Wettstein, editors, *Themes From Kaplan*, pp. 481–563. Oxford University Press, 1989.

[8] R. Montague. Logical necessity, physical necessity, ethics, and quantifiers. *Inquiry*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 259–269, 1960.

[9] G. Restall. A cut-free sequent system for two-dimensional modal logic, and why it matters. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 163, No. 11, pp. 1611 – 1623, 2012.

[10] P. Schlenker. A plea for monsters. *Linguistics and Philosophy*, Vol. 26, No. 1, pp. 29–120, 2003.

[11] R. Stalnaker. Assertion. *Syntax and Semantics (New York Academic Press)*, Vol. 9, pp. 315–332, 1978.

[12] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 2001.

[13] 佐野勝彦. 特集：モデル 条件法論理に基づく情報更新の論理. 科学哲学科学史研究, Vol. 2, pp. 1–15, jan 2008.

[14] 小野寛晰. 情報科学における論理. 日本評論社, 1994.

[15] 丹治信春. タブローの方法による論理学入門. 朝倉書店, 1999.

[16] 白井賢一郎. 自然言語の意味論, pp. pp.17–24. 産業図書, 1991.

[17] 飯田隆. 言語哲学大全 意味と様相 (下). 勁草書房, 1995.

[18] 野本和幸. 現代の論理的意味論 フレーゲからクリプキまで. 岩波書店, 1988.