直角二等辺三角形への 8, 9, 10 個の最密円パッキング

原山 友弘

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2000 年 5 月 15 日

キーワード: 最密円パッキング, 直角二等辺三角形, 計算機支援証明.

1 最密円パッキング

最密円パッキング問題は, 他のパッキングのバリエーションとともに組み合わせ幾何学において 1960 年代からの興味深い未解決問題であるが, そこでは与えられた領域内に n 個の合同な円をその半径が最大となるよう互いに重ねずに配置する.

この円パッキングは, 通常, 領域の内部に n 個の円を一様に配置して, その点対間の最短距離を最大化する *maximum point separation* 問題と同値である. 仮に点対間最短距離 d_n を

$$d_n = \max_{S \subset P,\ |S|=n} \ \min_{p,q \in S,\ p \neq q} \ d(p,q) \tag{1}$$

($d(\,,\,)$ は Euclidean) とすると, 円パッキング問題は, この maximum point separation 問題とみなせることが次のようにしてわかる. たとえば, P を三角形としてその内接円の半径を r_{in} とすると, P 内側への平行体 $(1-\frac{r_n}{r_{in}})P$ の内部にそのパッキングの中心点はすべて含まれるので, 簡単な計算によりその平行体における点対間最短距離は, $r = \frac{d_n}{2}$ である.

一方, P における n 点の maximum point separation 問題は, 点対間最短距離を d_n とすると, P の外側への平行体 $(1+\frac{d_n}{2r_{in}})P$ への半径 $r = \frac{d_n}{2}$ のパッキングと同値と見なせる. 以上から

$$d_n = \frac{2r_{in}r_n}{r_{in}-r_n}, \quad r_n = \frac{r_{in}d_n}{2r_{in}+d_n} \tag{2}$$

を得る. 最密な円パッキングに対応する n 点の配置を optimal point configuration という.

有限個の最密円パッキング問題の一つの特徴には, 最適解の予想が先に行われその後

でそれらの予想の最適性の証明が行われる，ということがある．現在正方形の場合では，$n \leq 9$ [2, 13], $n = 14, 16, 25, 36$ [7, 22, 23, 24] が知られており，C. de Groot らにより計算機を効率よく用いて求められた，$10 \leq n \leq 20$ の場合や，さらに K. J. Nurmela らによる $21 \leq n \leq 27$ の場合の最適解などがある [13, 15].

一方ベストな解としては，[14] での $n \leq 50$ の場合や，そのうちの一部の改良も含む $n \leq 50, 51, 52, 54, 56, 60, 61$ [14] の場合などが知られている．

本研究での直角二等辺三角形の場合では，以前に $n \leq 7$ の範囲で最適解が知られており [25]，ベストな解は $n \leq 16$ の範囲でわかっている．

2 方法

最適な円パッキングを構成する上でよく使われる手法として，点を置くことができる領域を制限していく，Polygon Reducing がある．先にのべたように最適解を得るにはまず予想が必要であり，その予想を maximum point separation 問題における下界値として用いて，点が存在可能な領域を減らしていく．計算機支援証明でもその Polygon Reducing を巧みにシミュレートして，予想された最適解が実際に存在すること，さらにそれらが最適であることを証明することができる．この計算機支援証明での一般的な流れは次の通りである．

1. t 個へのタイリングのなかから n 個のタイルの部分集合を，そのタイリングの対称性を用して重複なくすべて数え上げる (初期組み合わせ)．
2. Polygon Reducing を各タイルのペアに適用して，初期組合わせの数を減らす (Polygon Reducing).
3. 残りの領域に関して妥当な点対間の接続関係を推測する．
4. 近似誤差正方形を描く．
   その近似誤差正方形を 1 未満の定数倍分だけ削ることができるかどうかを，有限回の Polygon Reducing によって確認する (最適性の証明).

3 結果

実装では誤差解析を適用して，小数点以下 7 桁の切り捨て値を最適な点対間最短距離の下界とした．表１, 2 は，直角二等辺三角形における計算機実験により得られた，$n = 10$ までの最適解と，それぞれの初期組合わせ，Polygon Reducing 後の組み合わせ，最適組み合わせである．

n	Tiling	d_{low}	N_n	Rest and optimal combinations
5	(3,3)	0.5358983	4	{0,1,2,4,5}
6	(3,3)	0.5	1	{0,1,2,3,4,5}
7	(4,4)	0.4195420	64	{0,1,3,4,6,8,9 }
8	(4,4)	0.3789373	25	{0,2,3,5,6,7,8,9} for 8a
				{0,1,3,4,5,6,8,9} for 8b
9	(5,5)	0.3535533	2535	{0,2,4,6,8,9,11,13,14}
10	(5,5)	0.3333333	1527	{0,1,3,4,5,6,8,12,13,14}

表 1: Experimental data.

n	d_n	
2	$\sqrt{2}$	$\approx 1.414213562373095\ldots$
3	1	$= 1.0$
4	$\sqrt{2}/2$	$\approx 0.707106781186547\ldots$
5	$4-2\sqrt{3}$	$\approx 0.535898384862246\ldots$
6	$1/2$	$= 0.5$
7	$(\sqrt{44\sqrt{2}+50}-2-4\sqrt{2})/7$	$\approx 0.419542091095306\ldots$
8	$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$	$\approx 0.378937381963012\ldots$
9	$\sqrt{2}/4$	$\approx 0.353553390593274\ldots$
10	$1/3$	$\approx 0.333333333333333\ldots$

表 2: Maximum separation distance.

参考文献

[1] H. T. Croft, K. J. Falconer, and R. K. Guy, Unsolved Problem in Geometry, *Springer-Verlag*, New York, 1991.

[2] M. Goldberg, The packing of equal circles in a square, *Math. Mag.* 43(1970), 24-30.

[3] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky, Dense Packings of equal disks in an equilateral triangle: from 22 to 34 and beyond, *Electron. J. Combin.* 2(1995), Al, 39.

[4] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky, Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square, *Electron. J. Combin.* 3(1996), R16, 17.

[5] R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. R. J. Östegård, Dense packings of congruent circles in a circle, *Discrete Math.* 181(1998), 152-157.

[6] C. de Groot, M. Monagan, R. Peikert, and D. Würtx, Packing circles in a square: a review and new results, *System Modeling and Optimization* (Proc. 15th IFIP Conf., Zürich, 1991), 45-54.

[7] K. Kirchner and G. Wengerodt, Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge Algbra Geom.* 25(1978), 147-159.

[8] D. L. Krener and D. R. Stinson, Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search, *CRC press*, 1999.

[9] C. D. Maranas, C. A. Floudas, and P. M. Pardalos, New result in the packing equal circles in a square, *Discrete Math.* 142(1995), 287-293.

[10] H. Melissen, Packing and covering with circles, Ph.D. thesis, University of Utrecht, 1997.

[11] M. Mollard and C. Payan, Some progress in the packing of equal circles in a square, *Discrete Math.* 84(1990), 303-307.

[12] L. Moser, Problem 24 (corrected), *Canad. Math. Bull.* 3(1960), 78.

[13] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, Optimal packing of equal circles in a square, *Proceeding of the Eigth International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications*, 1996.

[14] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, Packing up to 50 Circles in a Square, *Discrete Comput. Geom.* 18(1997), 111-120.

[15] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, More optimal packing of equal circles in a square, *Discrete Comput. Geom.* 22(1999), 439-457.

[16] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, Asymptonic bahavior of optimal circle packings in a square, *Canad. Math. Bull.* 42(1999), 380-385.

[17] K. J. Nurmela, private communication.

[18] J. Pack and P. K. Agarwal, Combinatorical Geometry, *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization*, 1995.

[19] J. Schaer, The Densest packing of nine circles in a square, *Canad. Math. Bull.* 8(1965), 273-277.

[20] K. Schlüter, Kreispukung in Quadraten, *Elem. Math* 34(1979), 21-14.

[21] G. Valette, A better packing of ten circles in a square, *Discrete Math.* 76(1989), 57-59.

[22] G. Wengerodt, Die dischteste Pakung von 14 Kreisen in einem, *Beitråge Algebra Geom.* 25(1987), 25-46.

[23] G. Wengerodt, Die dischteste Pakung von 16 Kreisen in einem, *Beitråge Algebra Geom.* 16(1983), 173-190.

[24] G. Wengerodt, Die dischteste Pakung von 36 Kreisen in einem, *Beitråge Algebra Geom.* 25(1983), 147-159.

[25] Y. Xu, On the minimum distance determined by n($\leq$7) points in an isosceles right triangle, Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.), 12(1996), 169-175.