

Title	非圧縮粘性流への精度保証付きソルバ
Author(s)	熊畑, 清
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1436">http://hdl.handle.net/10119/1436</a>
Rights	
Description	Supervisor:松澤 照男, 情報科学研究科, 修士

# 修士論文

## 非圧縮粘性流への精度保証付きソルバの開発

主査	松澤 照男	教授
副査	堀口 進	教授
副査	丹 康雄	助教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報システム学専攻

熊畑 清

学籍番号 810039

提出日 2001年2月

## 要 旨

偏微分方程式によりその振舞が記述される連続系の問題に対する計算機シミュレーションにより得られた近似解の精度を検証するためには、従来計算量論的に非常に大きな計算量を必要としていた。

しかし近年、計算結果の精度の検証が現実的な時間で可能であることが明らかとされ、計算結果の精度を定量的にとらえることが可能となりつつある。

本研究では中尾により提案された楕円境界値問題に対する精度保証付き数値計算を用いて、流体シミュレーションの精度保証を行うことを試みた。

その結果、二次元非圧縮粘性流れの有限要素法による近似解に対して、管内流れの圧力場に対する精度保証を行なうことに成功した。

# 目次

1	はじめに	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本稿の構成	2
2	精度保証付き数値計算とは	4
3	中尾の方法による微分方程式に対する精度保証	7
3.1	不動点定理と不動点形式化	7
3.2	検証条件	8
3.3	有限次元部分 (離散化部分) の計算	8
3.4	無限次元部分 (直交補空間) の計算	9
3.5	検証アルゴリズム	9
3.6	流体シミュレーションに対するアプローチ	10
4	予備実験, 一次元の系での検証	12
4.1	重み付き残差方程式の導出	12
4.2	形状関数に関する考察	13
4.3	補間関数	14
4.4	有限要素方程式の導出	15
4.5	全体方程式の導出	15
4.6	近似解に対する誤差評価	21
4.7	検証結果	23
5	有限要素法による非圧縮粘性流解析	29

5.1	基礎方程式	29
5.2	流速修正法	29
5.3	重み付き残差方程式	31
5.4	形状関数	32
5.5	補間関数	33
5.6	有限要素方程式の導出	35
5.7	全体方程式の導出	36
<b>6</b>	<b>圧力 Poisson 方程式に対する精度保証</b>	<b>38</b>
6.1	近似解の導出	38
6.2	検証アルゴリズムの計算	39
6.3	有限次元部分の検証条件	40
6.4	無限次元部分の検証条件	42
<b>7</b>	<b>検証例</b>	<b>44</b>
7.1	検証例 1, 二次元の管内流れ	44
7.2	検証例 2, 二次元のバックステップ流れ	67
<b>8</b>	<b>結言</b>	<b>75</b>

# 第 1 章

## はじめに

### 1.1 本研究の背景と目的

流体シミュレーションに限らず，電磁場解析や構造解析などに代表される連続系のシミュレーションにおいては，その系の振舞を記述する偏微分方程式の解を差分法や有限体積法，有限要素法などの方法により求めることにより行われる．これらの方法で共通する特徴は，本来連続であるべき対象とする空間を，不連続な有限個の領域の集合として離散化しているということである．

本来連続なるものを不連続なるもので近似して表現していることから，それらの方法により得られた解は必然的に誤差を含む近似解であり，空間の近似度を上げるにつれ得られる近似解の精度も高くなるため，これらのスキームでは，より高い精度の近似解を得るためにより高い精度のスキーム・より細かいメッシュの使用が推奨されている．

しかし，そのようにして得られた近似解の実際の精度に関しては，詳細に顧みられることは少なく，多くの場合解析結果の信頼性に対する考慮は行われず，結果のみを盲目的に信じ使用するか，検討を行ったとしても用いたスキームのオーダーレベルの誤差評価や解析者の持つノウハウによる検討がなされているだけという感がある．

これは従来，計算機による数値計算により得られた問題の近似解の精度の検証，すなわち数値計算の検算には，目的とする計算それ自体に要求される計算量と比して，計算量論的に非常に大きな計算量が必要とされると考えられていたという背景があるためと思われる．

しかし近年，現実的な計算量で数値計算の結果の精度検証を行うことを目的とする精度保証付き数値計算 (numerical methods with guaranteed accuracy)、あるいは数値的検証法

(numerical verification method) と呼ばれる分野の研究が発達し，先述したような勘やノウハウによる定性的な精度評価によらずに，計算結果の精度を定量的にとらえることが可能となりつつある．

このような精度保証付き数値計算の技法は連立一次方程式・補間・関数計算・積分・微分・常微分方程式などにおいて存在し [1][2]，近年、中尾らにより偏微分方程式を有限要素法による数値解に対しても検証を行う方法が開発された [3]．

本研究ではすでに様々な理学・工学の分野で欠くことの出来ない重要なツールとして活用されている流体シミュレーションの，より一層の信頼性向上を目指し、中尾らにより開発された偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法を，非圧縮粘性流の方程式に対して適用し精度を定量的に把握する試みを行った．

## 1.2 本稿の構成

本稿でははじめに精度保証付き数値計算，および本研究で用いる精度保証技法である中尾理論の背景について概略を述べ，次いで中尾理論 [10] の基本的な概要について数値計算的な側面から述べ，流体シミュレーションに対する中尾理論を用いた精度保証付きシミュレーションに対する本研究のアプローチを述べる．

第 4 章では微分方程式への中尾理論の適用例の予備実験として，本研究で用いる微分方程式の解法である Galerkin 式有限要素法の説明も兼ねて，一次元の二階常微分方程式の境界値問題の検証の実際の実装に近いレベルでの説明を行ない．実際に問題の解析解を含む推定誤差幅の検証に成功している．

第 5 章では非圧縮粘性の Navier-Stokes 方程式を有限要素法で解く方法の一つである原始関数法・流速修正法の定式化および離散化，数値計算までの流れを詳細に述べる．

第 6 章では第 5 章において求められた圧力 Poisson 方程式について，楕円型境界値問題に対する中尾理論を用いた精度保証を適用する．ここでは実際に圧力 Poisson 方程式の不動点形式化から始まり，中尾理論の本質である二種類の検証条件を導出および実際に計算するための，中尾理論に対する筆者の解釈に基づいた定式化について詳細に解説する．

第 7 章では第 6 章までに実装した非圧縮粘性流への精度保証付きソルバを用いた流体シミュレーションの例を，二次元管内流れおよびバックステップ流れの二種類の計算モデルを用いて検証し，求められた誤差の妥当性の検討を行なう．

最後に本稿のまとめとして，流体シミュレーションに対する精度保証付きシミュレーショ

ンの有効性についての検討を，前項までの結果を元に行ない．現時点までに明らかとなっている問題点および今後の展望について述べる．

## 第 2 章

# 精度保証付き数値計算とは

現在のコンピュータによる数値計算は関数・方程式などの無限・連続な空間上に置いて定義されるものを有限・離散なる空間の元に近似・離散化して取り扱うことによって、扱う情報量を減らし、高速に計算することが出来るようになっている。

これはつまり、本来無限な桁数により表される「実数」、例えば無理数  $\pi$  を

$$\pi = 0.314159 \times 10^1 \quad (2.1)$$

同じく無理数である自然対数の底  $e$  を

$$e = 0.271828 \times 10^1 \quad (2.2)$$

というように、有限の桁数からなる浮動小数点形式で表される数値として取り扱うことに他ならない。

この浮動小数点による数値計算は所詮は近似でしかない。近似であるということは数学的に厳密な議論の元においてはその値は正しいと言うことが保証されておらず、「概ね正しい」というだけに過ぎない。そしてあるいは、状況によってはその「概ね正しい」という明言すら成立していない可能性もある。

絶対的に計算機による数値計算に依存している現在社会にとって、計算が正しいかどうかの保証が与えられないという現在の数値計算はあまりにも脆弱な基盤であるとは言えるのではないだろうか。

それでは、あらためて数値計算の結果が果たして正しいのかどうかを検算してみれば良いと考えるのが普通であろう。しかし従来、数値計算結果の検算に要する計算量は目的とする計算それ自体に要する計算量よりも計算量論的に大きいと考えられていた [1]。

しかし近年，数値計算の検算法に関する研究が急速に発展し，検算に要する計算量が次第に小さくできるようになって来るにつれ，この検算を行うことにより数値計算の精度を検証する手法，あるいはそのための研究は精度保証付き数値計算 (numerical methods with guaranteed accuracy)，または数値的検証法 (numerical verification method) と呼ばれるようになった。

精度保証付き数値計算の技術は現在，図 2.1 に示すような様々な数値計算の局面において開発されてきている。

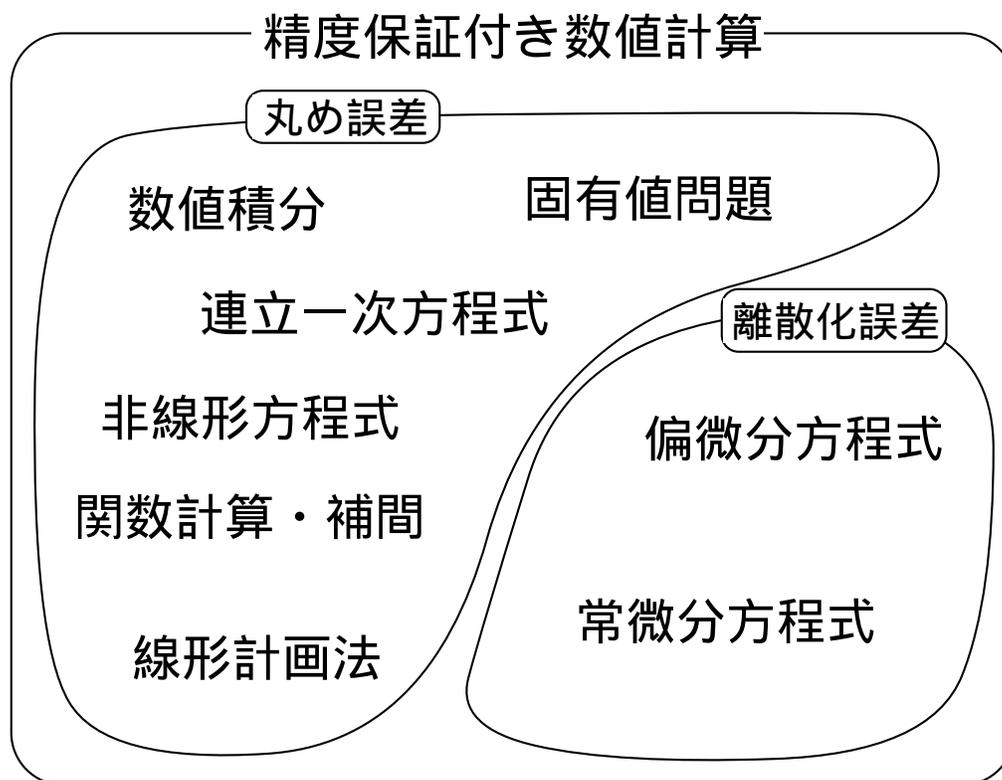


図 2.1: 精度保証付き数値計算が行われる分野

ここで，連立一次方程式，行列の固有値問題，線形計画法，関数計算，積分，非線形方程式などに対する精度保証の目的は丸め誤差の影響を定量化することである。

しかし常微分方程式や，偏微分方程式により挙動が記述される系に対する有限要素法や有限体積法，差分法などによるシミュレーションにおいては，その近似解に混入する誤差は丸め誤差よりも，本来連続な時間と空間を離散化することにより生じる離散化誤差の方が支配的である。

そこで，そのような離散化誤差をも取り扱える精度保証の技法として中尾 [3] により解空

間を集合論的に取り扱う方法が提案されている。

この中尾により提案されている方法によれば、微分方程式を解くことを写像であると考え、数値計算により近似解を求める操作を、本来連続な無限次元のベクトル空間に属する微分方程式の真の解を、不連続な有限次元のベクトル空間に属する近似解へ写す作用素によって離散化された写像であると考えることにより、離散化による変動量を近似解の存在する空間の大きさとして表現することによって、近似解の含む誤差範囲を保証する事が出来る。

この理論は従来からある方程式に関して現われる関数や定数、あるいは作用素のノルムを数値適に評価し、それらを含む関係式が一定の条件を満たしているかを検証する方法と、解くべき方程式をそれと等価な積分形式へと変換し、区間演算、つまりある無理数あるいはその計算機で扱える桁数を越える実数  $v$ 、例えば  $v = \sqrt{2}$  を、上限と下限とで挟み込み

$$v = \sqrt{2} = [1.1421356 \sim 1.1421357] \quad (2.3)$$

として表現し、数値計算中に現われる全ての四則演算を行うことにより、真の値を区間として表現するような演算を用いて、離散化誤差をも区間演算により処理する方法との混合とも考えることが出来、区間演算を本質的に活用するが、それと合わせて関数空間上における解析適評価によるノルム評価をも併用する。

本研究では中尾により提案されている方法を用いて偏微分方程式により記述される系のシミュレーション - 流体シミュレーション - に対する精度保証を試みた。

## 第 3 章

# 中尾の方法による微分方程式に対する精度保証

### 3.1 不動点定理と不動点形式化

中尾の方法による偏微分方程式の数値解に対する精度保証において本質的に重要な役割を果たすのは集合と，その集合上で定義された写像の関係を示す不動点定理である [4]

ここで言う不動点定理とは，ある集合  $U$  と，その集合上において定義された写像  $F$  とに対して，次に示すような条件

$$F(U) \subset U \quad (3.1)$$

あるいは上記の条件と同等であるような条件が満たされる場合，写像  $F$  の像の集合  $F(U)$  中に，不動点方程式  $u = F(u)$  の解が存在するというものである．ここで  $F(U)$  は

$$F(U) = \{v | v = F(u), u \in U\} \quad (3.2)$$

である．

ここで言う不動点方程式  $u = F(u)$  とはこの場合，次に示すような微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\nabla u = g(u) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

を解いて解  $u$  を得ることを考えた際，これを  $g$  の存在する空間から  $u$  の存在する空間への写像  $F$  による対応と考えることにより，上記の問題を不動点方程式  $u = F(u)$  で表した形式という意味である．

微分方程式への精度保証付き数値計算とは，このように問題を不動点形式に変換し，不動点定理が成立する集合  $U$  を求めることにより，予め求められている問題の近似解  $u_h$  から，問題の真の解を含む可能性のある候補者集合  $U$  を構成し，その大きさを求めることにより行うことができる．

## 3.2 検証条件

候補者集合  $U$  は，何らかの方法により求められている近似解  $u_h$  から構成されるが，近似解  $u_h$  は有限次元のベクトル空間  $U_h$  の元であり，一方，候補者集合中に存在するであろう真の解  $u$  は無限次元の関数空間  $U$  の元であることから，これらをつなぐ関係を導く必要がある．

ここで候補者集合  $U$  は，近似解  $u_h$  および，真の解  $u$  が近似解  $u_h$  へと移動する際の変動量，即ち  $u_h$  の直交補空間  $u^\perp$  の集合  $U^\perp$  との和集合として次のように

$$U = U_h + U^\perp \quad (3.4)$$

表すこととする．

候補者集合  $U$  を上記のように表すことにより，その中に真の解が存在するか否かについての検証条件  $F(U) \subset U$  は，真の解  $u$  の  $U \rightarrow U_h$  の移動，すなわち離散化を意味する演算子として  $P_h$  を導入することにより次の二式により表現される．

$$\begin{cases} P_h F(U) \subset U_h \\ (I - P_h) F(U) \subset U^\perp \end{cases} \quad (3.5)$$

この二つの式は  $u_h$  が定義されている有限次元のベクトル空間  $U_h$ ，およびその直交補空間  $U^\perp$  上における集合に関する議論の形をしている．

この形の議論では計算機で扱うことが困難であるため，第一式が示す有限次元部分  $U_h$  と，第二式が示す無限次元部分  $U^\perp$  に分けて考え計算機で計算可能な形へと変更する．

## 3.3 有限次元部分 (離散化部分) の計算

式 (3.5) の第一式は元の問題を離散化した問題についての有限次元空間  $U_h$  における議論であった．

ここで写像  $F(U)$  への入力  $U$  は無限次元の関数空間中での集合で、無限個の元を持つ無限集合であるために、その全ての元  $u \in U$  に対して式 (3.5) の第一式の検証を行うためには無限回の演算を必要としてしまう。しかしここで、集合  $U$  をその上界  $\sup$  と下界  $\inf$  で挟み込まれた区間であると考えれば式 (3.5) の第一式は

$$\left[ \inf_{u \in U} P_h F(u), \sup_{u \in U} P_h F(u) \right] \subset [\underline{U}, \overline{U}] \quad (3.6)$$

として表すことが出来る。

### 3.4 無限次元部分 (直交補空間) の計算

式 (3.5) の第二式は問題を離散化した際の変動量に関する  $U_h$  の直交補空間  $U^\perp$  を意味している。これを写像・集合による形式ではなく、関数・数値による実際に計算可能な形式とすることを考える。

変動される量の上限を  $\alpha$  とおくと式 (3.5) の第二式の条件は

$$\sup_{u \in U} \|(I - P_h)F(u)\| \leq \alpha \quad (3.7)$$

と表される。ここで離散化した問題  $P_h F(u)$  の解を得る方法として有限要素法を用いることとし、その構成的誤差評価に関する考察の結果を用いる。

ある問題の真の解  $u$  と、有限要素法により求められた近似解  $u_h$  との間には代表メッシュサイズを  $h$ 、メッシュ分割の状態により決まる定数  $C$  を用いて以下の関係

$$\|u - u_h\| \leq C \cdot h \|u''\| \quad (3.8)$$

が成立することが有限要素法に対する補間誤差に関する議論から導かれる。この結果を用いると無限次元部分に関する計算可能な条件は

$$\sup_{u \in U} C \cdot h \|g\| \leq \alpha \quad (3.9)$$

と表現され [3]。不動点定理についての計算機により計算可能な条件を導くことが出来た。

### 3.5 検証アルゴリズム

候補者集合  $U$  を確定し、その大きさを求めるためには次のような反復ループのアルゴリズムが用いられる [3]

- 1 近似解  $u_h$  は既に有限要素法により求まっている .
- 2 初期推定誤差  $w_i = [\underline{w}_i, \overline{w}_i], \alpha$  は共に 0 であると仮定
- 3 近似解  $u_h$  と推定誤差  $w_i, \alpha$  により解の候補者集合  $U = u_h + W + \alpha$  を構成する
- 4 構成された候補者集合より問題  $\Delta u = g$  の右辺関数の値を決定する
- 5 解の存在条件

$$[\inf_{u \in U} P_h F(u), \sup_{u \in U} P_h F(u)] \subset [\underline{U}, \overline{U}] \quad (3.10)$$

$$\sup_{u \in U} C \cdot h \|g\| \leq \alpha \quad (3.11)$$

を検証 . 成立なら 7. へ

- 6 推定誤差を次のように拡大し 3. へ

$$W_i = [\inf_{u \in U} P_h F(u), \sup_{u \in U} P_h F(u)] \quad (3.12)$$

$$\alpha = \sup_{u \in U} C \cdot h \|g\| \leq \alpha \quad (3.13)$$

- 7 候補者集合の大きさが , 近似解  $u_h$  が含む誤差を示す 終了

### 3.6 流体シミュレーションに対するアプローチ

本来 , 非圧縮性かつ粘性流れの解析においては , 求められるべき未知の関数は二次元あるいは三次元の流速 , および圧力の二種類であるが , ここで筆者は流体シミュレーションにおけるシミュレーション結果の精度保証という目的に対してのテストケースの問題として , 圧力の近似解に対して誤差範囲の検証を行うこととした .

これは非圧縮粘性流に対する計算法として現在広く用いられている流速修正法による定式化の元においては , 流速の導出は形状関数の微分項である質量行列を集中化する定式化によって圧力から陽に求まる形となるため , シミュレーション全体の精度は圧力場の精度が支配的であると考えられるためである .

流体シミュレーションに対する , 精度保証付き数値計算の応用例は目下のところ定常 Navier-Stokes 方程式を対象とするものなど極めて少なく ([11][13] など) . 時間発展項を持

つ非定常の系に対する例など実用的な流体シミュレーションに対する適応例は事実上皆無であると言っても行っても良い。

また中尾らによる例では、全ての境界で  $u = 0$  となる境界値問題のみを扱っていたが、流体シミュレーションにおいては、全境界で圧力=0 なる境界条件は用いず、流出あるいは流入境界でのみ Dirichlet 境界条件を規定し、他の境界においては圧力は拘束しないという境界条件の元に本稿における例では境界毎に制約の異なる境界条件による検証を行った。

## 第 4 章

### 予備実験，一次元の系での検証

前述の中尾の方法による微分方程式への精度保証について，先ず次に示す一次元の常微分方程式の二点境界値問題

$$\begin{cases} -u'' - u = x \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

を Galerkin 式有限要素法により解いた近似解に対する精度検証を行った．本章では Galerkin 式有限要素法の概略の説明も兼ねて，その詳細を事項で述べることとする．

#### 4.1 重み付き残差方程式の導出

式 (4.1) の各項に領域  $\Omega$  の両端において 0 であるような重み関数  $w$  をかけ，領域  $\Omega$  で積分する

$$-\int_{\Omega} wu''d\Omega - \int_{\Omega} wud\Omega = \int_{\Omega} wxd\Omega \quad (4.2)$$

次いで上式中の二階微分が含まれる項を部分積分する

$$[wu']_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w'u'd\Omega - \int_{\Omega} wud\Omega = \int_{\Omega} wxd\Omega \quad (4.3)$$

ここで重み関数  $w$  は領域  $\Omega$  両端において 0 となるような関数であると予め定義されているため，上式より次の弱形式（あるいは重み付き残差方程式）を得る．

$$-\int_{\Omega} w'u'd\Omega - \int_{\Omega} wud\Omega = \int_{\Omega} wxd\Omega \quad (4.4)$$

## 4.2 形状関数に関する考察

次に形状関数について考える．ここでは形状関数として一次のものを用いる事とすると，形状関数  $\phi$  を一次元の領域  $\Omega$  を有限個の領域に分割した際のある節点  $x_2$  上において 1，他の節点上では 0 であるような一次関数であると定義すると，節点  $x_2$  を中心と考えた形状関数  $\phi$  は図 4.1 に示されるような形をしている．

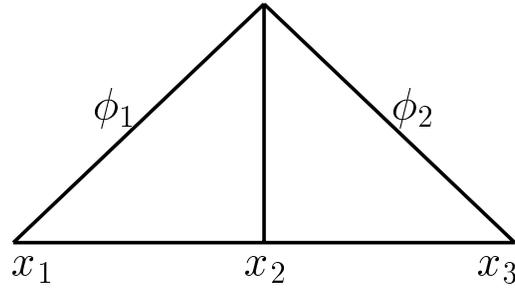


図 4.1: 節点を中心に見た形状関数

ここで  $\phi_1, \phi_2$  それぞれの直線は

$$\phi_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \phi_2 = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \quad (4.5)$$

となっている．

ここで，形状関数に関する見方を図 4.1 の節点中心の視点から要素を中心とする視点に変更して考えると要素  $e$  上に張られる形状関数は図 4.2 のように示される．

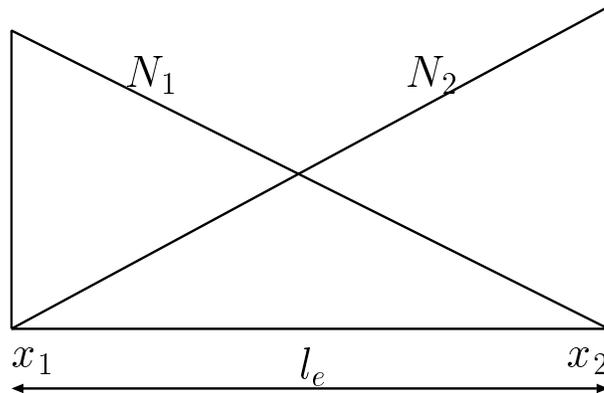


図 4.2: 要素を中心に見た形状関数

ここで， $N_1, N_2$  おのこの直線は要素  $e$  の長さを  $l_e$ ，要素の両端の座標を  $x_1, x_2$  とすると

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{l_e}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{l_e} \quad (4.6)$$

により表される .

### 4.3 補間関数

以上により , ある要素  $e$  上での形状関数は , 要素  $e$  内におけるローカル座標を  $\hat{x} : 0 \sim l_e$  とすることにより

$$N_e = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x}{l_e} \\ \frac{x - x_1}{l_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\hat{x}}{l_e} \\ \frac{\hat{x}}{l_e} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

というようなベクトルとして表せる . ここで , この形状関数を用いた物理量  $u$  の要素  $e$  中における補間を考える .

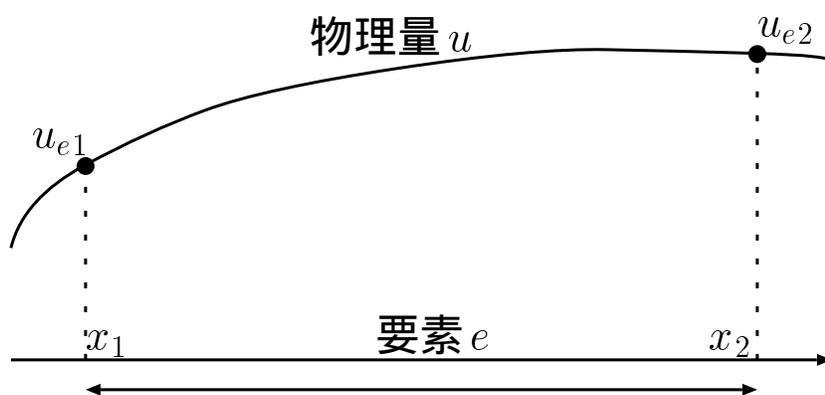


図 4.3: 要素  $e$  中における物理量

要素  $e$  内における物理量  $u_e$  の分布は図 4.3 に示すように要素  $e$  の端点  $x_1$  上での値を  $u_{e1}$  , 端点  $x_2$  上での値を  $u_{e2}$  として表して

$$u_e = N_1 u_{e1} + N_2 u_{e2} = \sum_{j=1}^2 N_j u_{ej} \quad (4.8)$$

として補間される . このこと考慮すると領域  $\Omega$  全体での物理量  $u$  の分布は領域  $\Omega$  を分割する要素の数を  $M$  とすると

$$u(x) = \sum_{e=1}^M \left\{ \sum_{j=1}^2 N_j u_{ej} \right\} \quad (4.9)$$

として表せる .

## 4.4 有限要素方程式の導出

上述の準備を踏まえて式 (4.1) から各要素上で成立する有限要素式を求める。

Galerkin 式有限要素法を用いるため，重み付き残差方程式中の重み関数  $w$  と形状関数は同一である．よって重み付き残差方程式

$$-\int_{\Omega} w' u' d\Omega - \int_{\Omega} w u d\Omega = \int_{\Omega} w x d\Omega \quad (4.10)$$

中の各項は全て形状関数  $N_i$  の関数の領域  $\Omega$  での積分  $\int_{\Omega} \cdot d\Omega$  として表せるため，要素  $e$  の第一節点を  $x_{e1}$ ，第二節点を  $x_{e2}$ ，第一節点での物理量を  $u_{e1}$ ，第二節点での物理量を  $u_{e2}$  とすれば (図 4.3 参照)，この積分は次に示す計算可能な形

$$\int_0^{l_e} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \begin{pmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{pmatrix} - \int_0^{l_e} N_i N_j dx \begin{pmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{pmatrix} = \int_0^{l_e} N_i \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e1} \end{pmatrix} dx \quad (4.11)$$

で表現される．実際にこの積分を計算することにより，要素  $e$  上で成立する有限要素方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{l_e} - \frac{l_e}{3} & -\frac{1}{l_e} - \frac{l_e}{6} \\ -\frac{1}{l_e} - \frac{l_e}{6} & \frac{1}{l_e} - \frac{l_e}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{pmatrix} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

を得ることができる．

## 4.5 全体方程式の導出

有限要素方程式 (4.12) は，領域  $\Omega$  を有限個に分割する全ての有限要素上で成立するので，全要素に関する有限要素方程式を次のように重ね合わせるにより全体方程式を構築する．

領域  $\Omega$  を図 4.4 に示すように分割したとする．

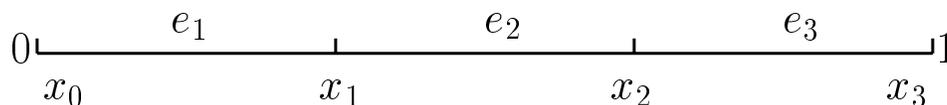


図 4.4: 次元要素分割の例

ここで表記の見通しのために要素  $e : 1 \sim 3$  に関する有限要素方程式を

$$\begin{pmatrix} a_{11}^e & a_{12}^e \\ a_{21}^e & a_{22}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

として表記することとする．

まず要素  $e_1$  の節点 1 は  $x_0$  , 節点 2 は  $x_1$  であることから , 要素  $e_1$  の有限要素法手式を全体方程式の対応する領域へと加え込む

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

ついで要素  $e_2$  の節点 1 は  $x_1$  , 節点 2 は  $x_2$  であることから

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & & \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 + a_{11}^2 & a_{12}^2 & \\ & a_{21}^2 & a_{22}^2 & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

最後に要素  $e_3$  の節点 1 は  $x_2$  , 節点 2 は  $x_3$  であることから

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & & & \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 + a_{11}^2 & a_{12}^2 & & \\ & a_{21}^2 & a_{22}^2 + a_{11}^3 & a_{12}^3 & \\ & & a_{21}^3 & a_{22}^3 & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^2 + b_1^3 \\ b_2^3 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

という全体方程式が得られる．次に境界条件  $u(0) = u(1) = 0$  より  $x = 0$  と  $x = 1$  に相当する節点を担当する係数行列と右辺ベクトルの成分を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & a_{22}^1 + a_{11}^2 & a_{12}^2 & & \\ & a_{21}^2 & a_{22}^2 + a_{11}^3 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^2 + b_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

となるように変更することによって , この問題 (4.1) の離散化形式たる連立一次方程式えることが出来 , この連立一次方程式を解くことにより未知数  $u_{1\sim 4}$  を求めることが出来る .

本研究では連立一次方程式のソルバとして共役勾配法の一つであり , 係数行列への前処理として不完全コレスキー分解を用いる ICCG 法を用いており [6][8][9] , 収束の判定は前ステップとの相対残差で  $1.0 \times 10^{-5}$  としている .

図 4.5 ~ 図 4.8 にこの問題 (4.1) の解析解

$$u = -x + \operatorname{cosec}(1) \sin(x), \quad \text{三角関数は } rad \text{ 単位} \quad (4.18)$$

および, 領域  $\Omega : 0 \sim 1$  を 10, 20, 30, 40 分割にして求めた近似解を示す.

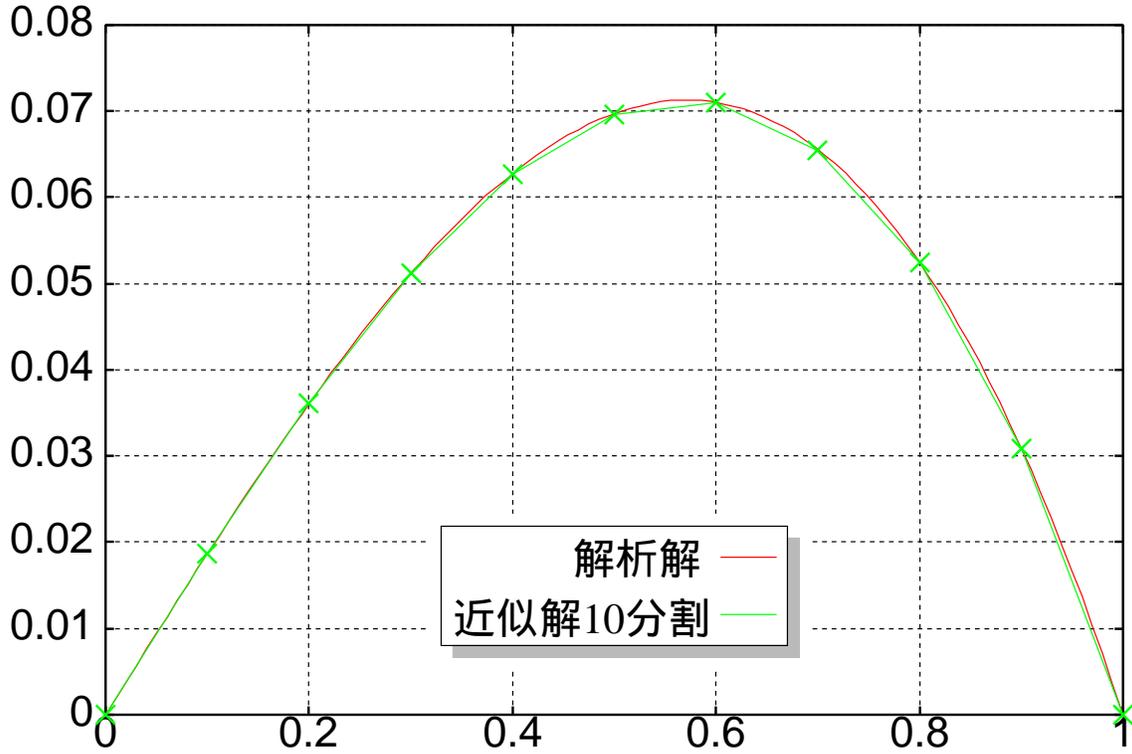


図 4.5: 解析解と 10 分割での近似解

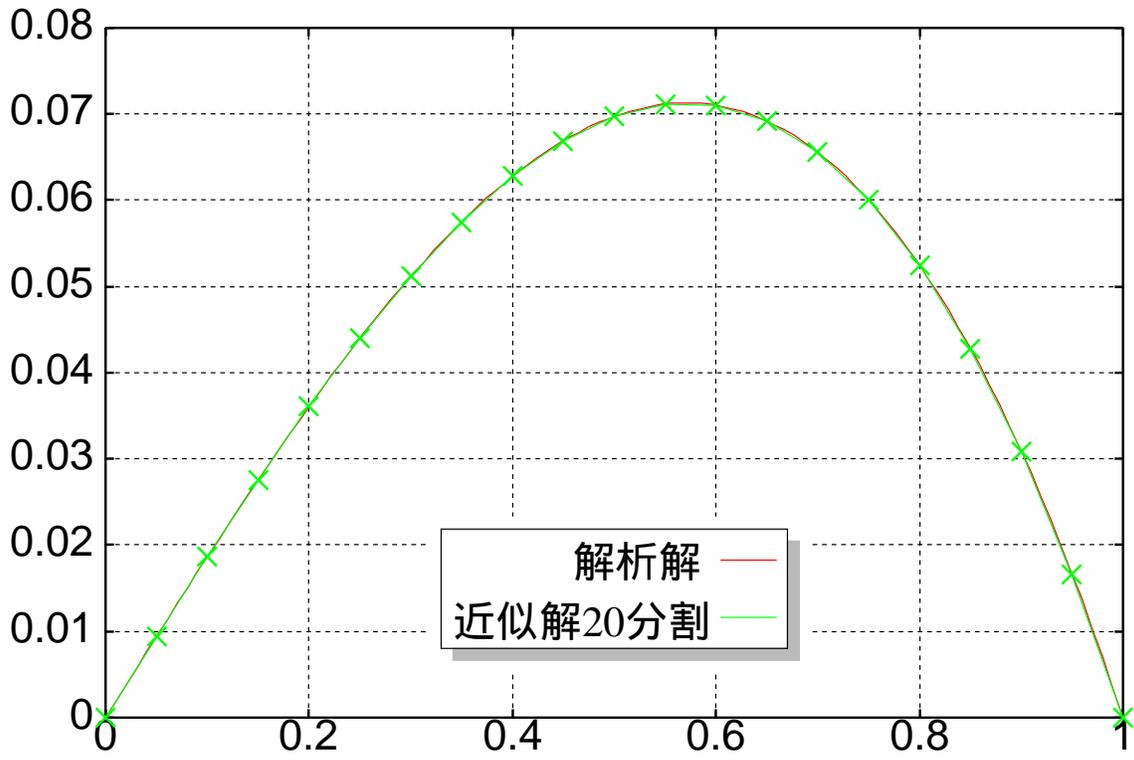


図 4.6: 解析解と 20 分割での近似解

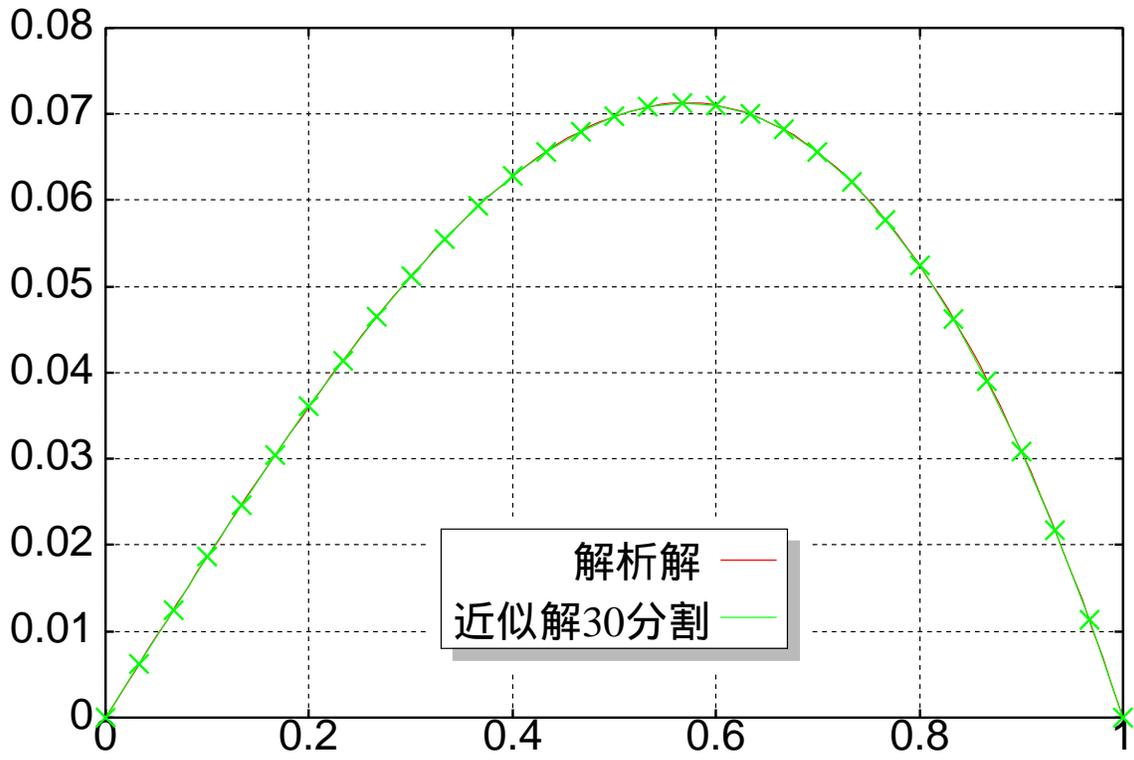


図 4.7: 解析解と 30 分割での近似解

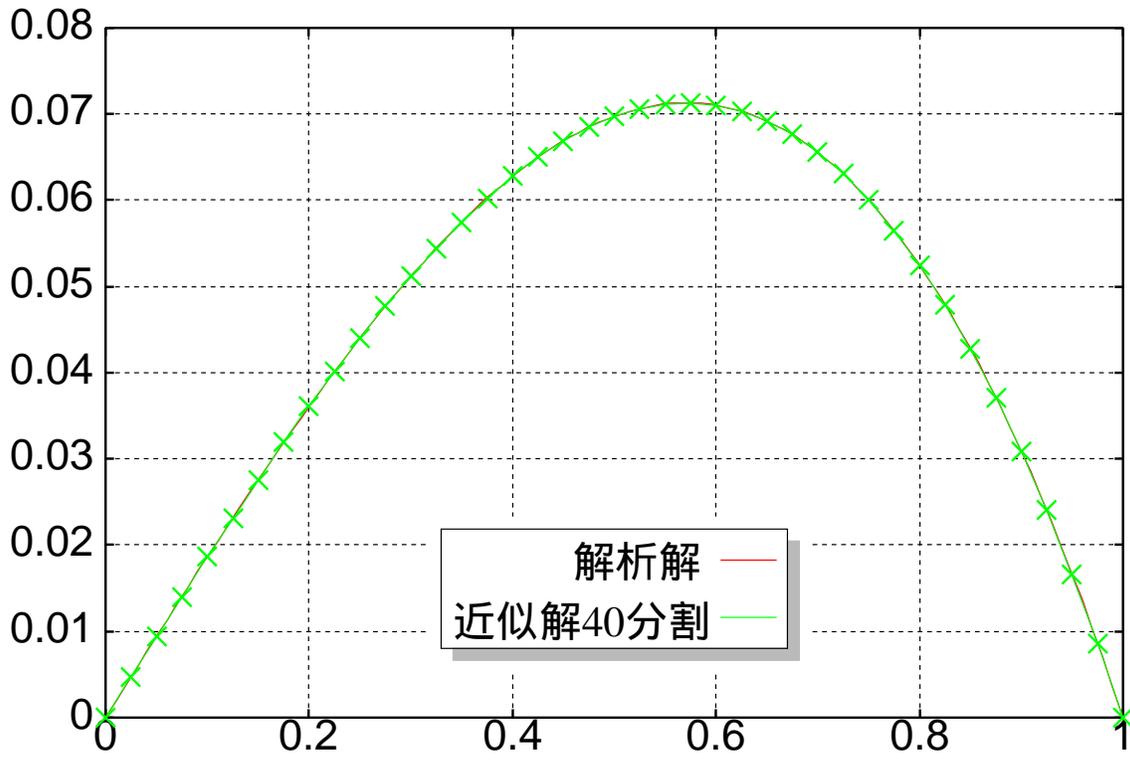


図 4.8: 解析解と 40 分割での近似解

## 4.6 近似解に対する誤差評価

ついで，上記の方法で得られた近似解に対して，中尾の方法によるの誤差評価を行う．  
まずは有限次元誤差についての式 (3.6) の判定条件，再掲すると

$$[\inf_{u \in U} P_h F(u), \sup_{u \in U} P_h F(u)] \subset [\underline{U}, \overline{U}] \quad (4.19)$$

のための計算を行う．前述したように  $P_h F(U)$  とは元の問題  $-u'' - u = x$  に対応するテスト問題

$$\begin{cases} -u'' = f(u) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

を解くという行為  $F(U)$  の離散化演算子  $P_h$  による離散化に相当する．ここでは近似解を求めるために有限要素法を用いているために， $P_h F(U)$  とはつまり有限要素法によって  $-u'' = u + x$  を解くことに他ならない．

そこで前述の Galerkin 式有限要素法の定式化の流れに従い， $-u'' = u + x$  を解くのであるが，右辺側の  $u$  については 4.5 節によって求めた近似解  $u_h$  と，初期値を 0 とした誤差幅  $W_i$  および離散化変動量  $\alpha$  から作成した候補者集合  $U$

$$U = u_h + W_i + \alpha \quad (4.21)$$

を用いる．ここで候補者集合は

$$U = [\underline{U}, \overline{U}] \quad (4.22)$$

なる区間であるため，

$$\underline{U} = u_h - W_i - \alpha \quad (4.23)$$

$$\overline{U} = u_h + W_i + \alpha \quad (4.24)$$

として作成し， $\underline{U}$  から  $P_h F(\underline{U})$  を求め， $\overline{U}$  から  $P_h F(\overline{U})$  を求め，各節点  $i$  について  $P_h F(\underline{U})_i$  と  $P_h F(\overline{U})_i$  のの大小の比較を行って

$$[\inf_{u \in U} P_h F(u), \sup_{u \in U} P_h F(u)] \quad (4.25)$$

を求めている．これにより不動点定理の成立条件  $P_h F(U) \subset U$  として

$$\begin{cases} \sup_{u \in U} P_h F(U) \leq \overline{U} \\ \inf_{u \in U} P_h F(U) \geq \underline{U} \end{cases} \quad (4.26)$$

の成立を確認する．具体的には  $\bar{U}$  を表現する配列  $p_{\max}$  ,  $\underline{U}$  を表現する配列  $p_{\min}$  および ,  $\sup_{u \in U} P_h F(U)$  を表現する配列  $f_{\max}$  および  $\inf_{u \in U} P_h F(U)$  を表現する配列  $f_{\min}$  とを用いて , 配列の全成分 ( $i : 0 \sim M$ ) について

$$f_{\max} \leq p_{\max} \quad (4.27)$$

$$f_{\min} \geq p_{\min} \quad (4.28)$$

であるかの判定を行っている .

条件 (4.26) が成立していなければ , 誤差幅  $W_i$  を近似解  $u_h$  と写像  $P_h F(U)$  との差の分だけ増大させる .

$$W_i = \max([u_h]_i - \inf_{u \in U} P_h F(U)_i, \sup_{u \in U} P_h F(U) - [u_h]_i) \quad (4.29)$$

次いで無限次元の検証条件

$$\sup_{u \in U} C \cdot h \|f\|_{L^2} \leq \alpha \quad (4.30)$$

のための計算を行う . ここで  $L^2$  ノルム  $\|f\|$  は

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} f^2 d\Omega \quad (4.31)$$

と定義される . ここで領域  $\Omega$  の有限要素による分割は一様分割であり , メッシュ分割に関する定数  $C, h$  は全要素において一定であるため式 (4.30) は

$$\sup_{u \in U} C \cdot h \|f\|_{L^2} \leq \alpha \quad (4.32)$$

$$C \cdot h \sup_{u \in U} \|f\|_{L^2} \leq \alpha \quad (4.33)$$

と変形される . これにより式 (4.30) は , 各要素  $e$  上における積分

$$C \cdot h \max \left[ \sum_{i=1}^E \int_{x_{e1}}^{x_{e2}} f dx \right] \leq \alpha \quad (4.34)$$

として計算される . 離散化変動量  $\alpha$  の初期値は 0 であるため , 検証アルゴリズムの第一回目ではこの条件は満たされない . 満たされない場合は新たな  $\alpha$  として

$$\alpha = C \cdot h \max \left[ \sum_{i=1}^E \int_{x_{e1}}^{x_{e2}} f dx \right] \quad (4.35)$$

を定義し新たに候補者集合を作成する .

ここでメッシュ分割に関わる定数  $C$  および  $h$  についてであるが，図 4.4 に示されているように一次元の一様均等分割であるため

$$C = \frac{1}{\pi}, \quad h = \frac{1}{\text{分割数}} \quad (4.36)$$

を用いている [3]

## 4.7 検証結果

分割数 10,20,30,40 のそれぞれの近似解に対しての誤差の検証として表 4.1 に示すような結果が得られた

分割数	ループ回数	最大誤差幅	離散化変動量	最大相対誤差
10	14	$6.936 \times 10^{-4}$	$6.101 \times 10^{-4}$	1.639%
20	13	$1.101 \times 10^{-5}$	$7.925 \times 10^{-5}$	0.1269%
30	12	$3.309 \times 10^{-6}$	$2.376 \times 10^{-5}$	0.04302%
40	12	$1.405 \times 10^{-6}$	$1.008 \times 10^{-5}$	0.01614%

表 4.1: 各分割数における検証反復回数と見積り誤差

図 4.9(P.24) は 3.5 節で述べた検証アルゴリズムにおける検証反復回数に対する，各分割数における最大の誤差幅の推移を示したものである。

おのこの分割数では，検証アルゴリズムのループを進展させるにつれ推定誤差幅が増大し，やがて一定値となることが示された。また領域の分割数を増大させるに従い，推定誤差幅の見積もりが減少することが示されている。

図 4.10(P.25) ~ 図 4.13 は上記の検証により推定された各分割数における近似解が持つ推定誤差幅と解析解との関係を示したものであり，各節点において推定された誤差範囲中が解析解を正しく含んでいることが示された。

次章からは Galerkin 式有限要素法を用いた流速修正法による非圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の解法を述べ，次いで圧力 Poisson 方程式に対する誤差評価の適応について述べる。

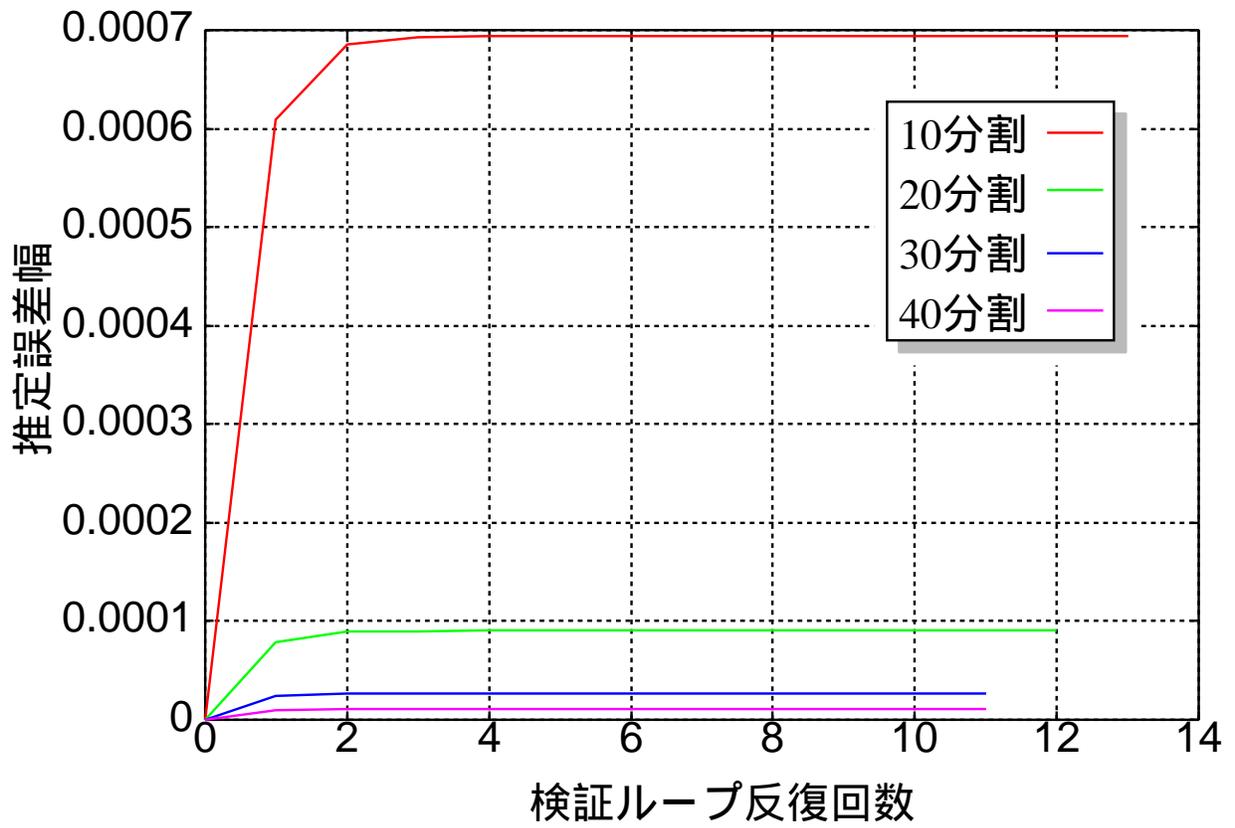


図 4.9: 推定誤差幅の推移

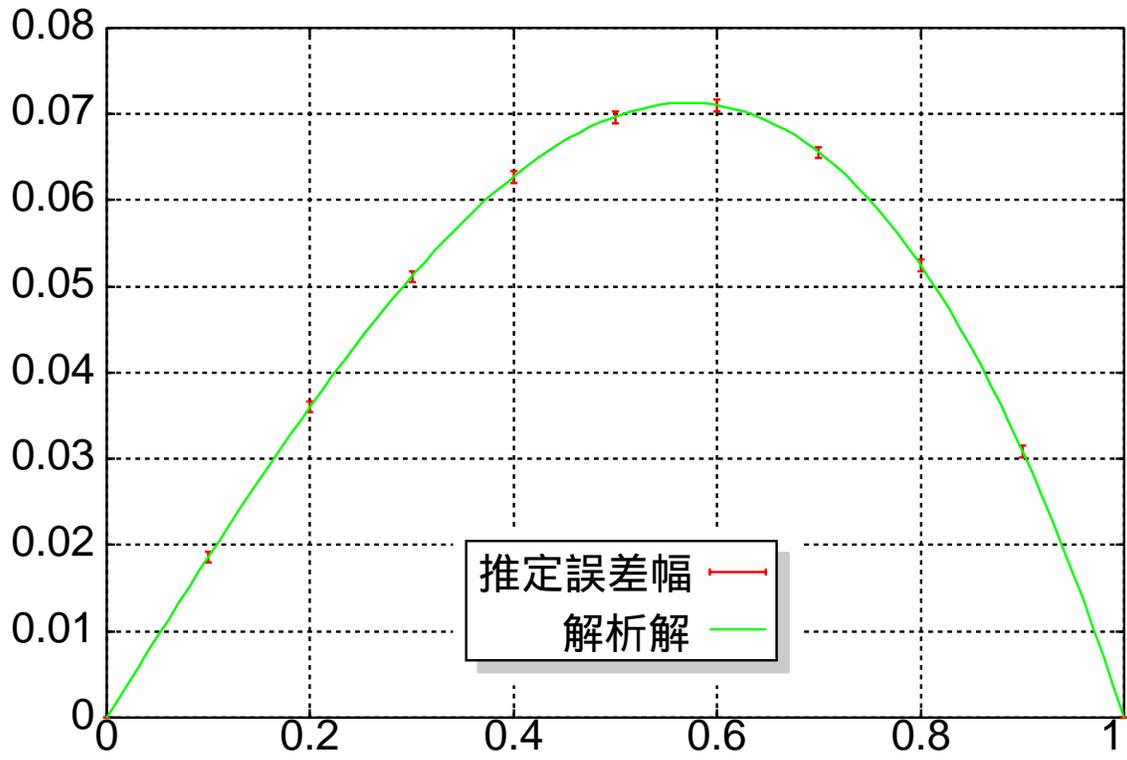


図 4.10: 10 分割での推定誤差範囲と解析解

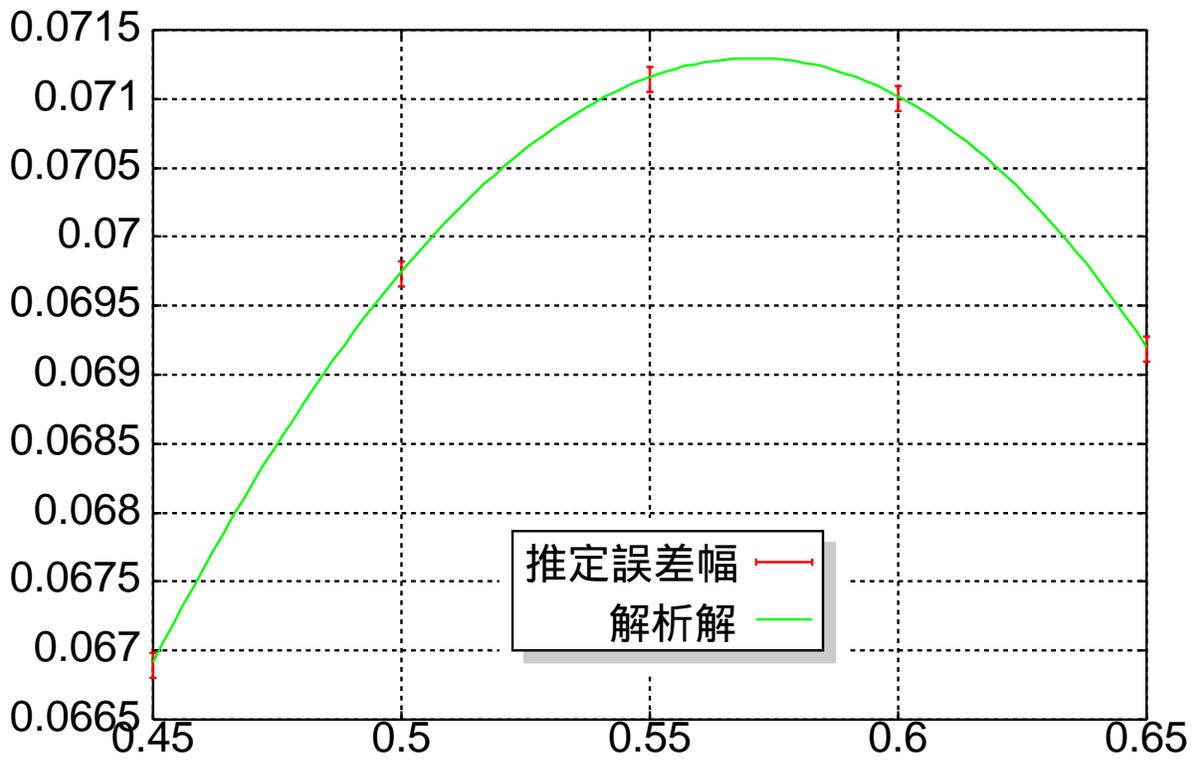


図 4.11: 20 分割での推定誤差範囲と解析解

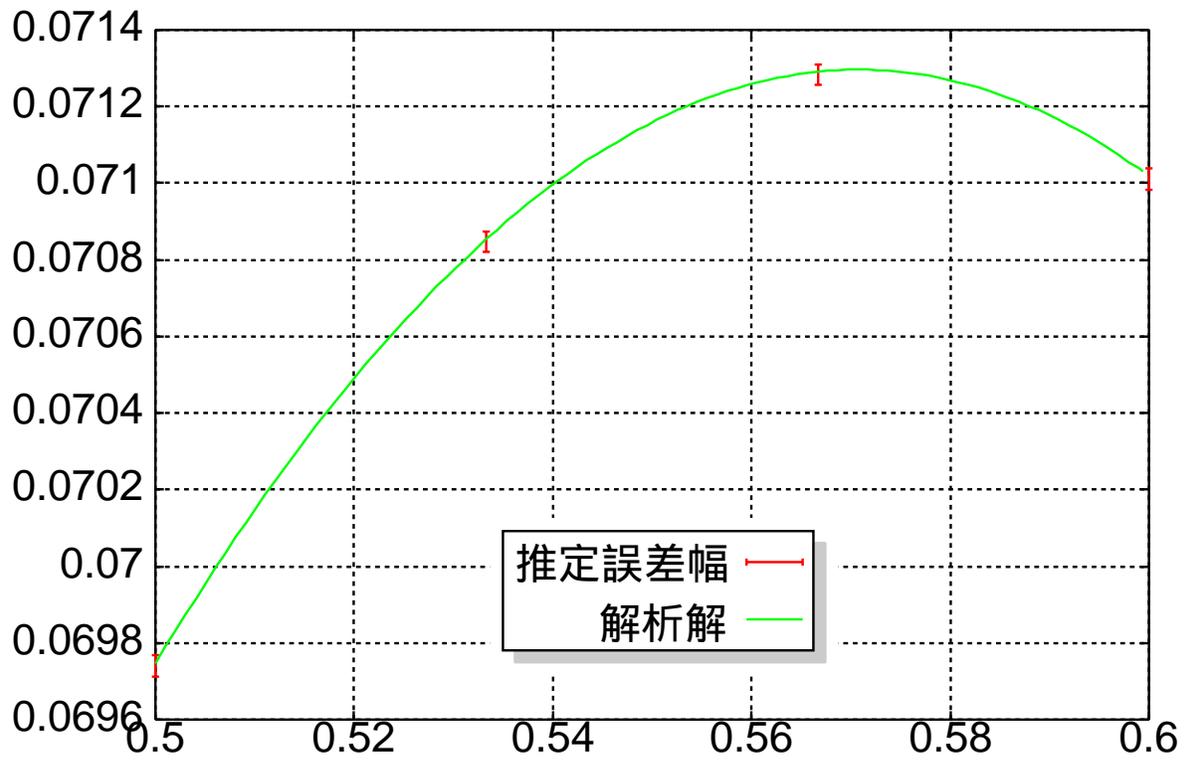


図 4.12: 30 分割での推定誤差範囲と解析解

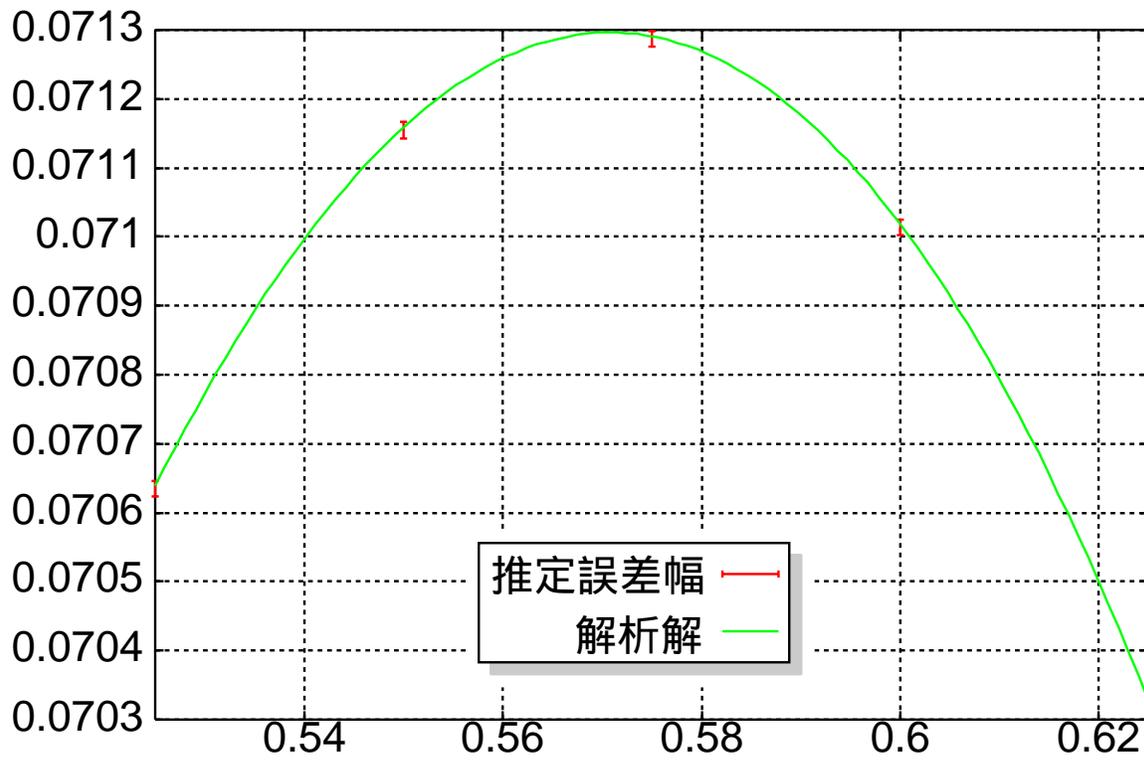


図 4.13: 40 分割での推定誤差範囲と解析解

## 第 5 章

# 有限要素法による非圧縮粘性流解析

### 5.1 基礎方程式

二次元の非圧縮粘性流れを考えると，流れの様相は流体の密度を  $\rho$ ，粘性係数を  $\mu$ ，流れの代表長さを  $L$ ，代表速度を  $U$  とした際に

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu} \quad (5.1)$$

で定義される Reynolds 数を用いて次に示すような Navier-Stokes 方程式 (5.2) と非圧縮の連続の式 (5.3) により表される

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.3)$$

### 5.2 流速修正法

本研究では，未知数として直接流速と圧力を扱う原始関数法を用い，さらに圧力と流速を別々に求める流速修正法により流れ場の計算を行う。

Navier-Stokes 方程式と連続の式に対して次のように圧力項を陰的に扱いつつ時間方向の離散化を行う。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (5.5)$$

次に式 (5.4) の両辺の発散を求め，式 (5.5) の非圧縮の連続の式の条件を考慮すると次に示すような圧力に関する Poisson 方程式が導出される．

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (5.6)$$

ただし  $\tilde{u}$  は

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (5.7)$$

と定義される中間流速である．

更に，式 (5.4) から式 (5.7) を引くことにより，次の時刻  $n + 1$  における流速

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (5.8)$$

が導出される．

ここから判るように，時刻  $n + 1$  における流速は式 (5.7) から求められる中間流速  $\tilde{u}$  と，式 (5.6) から求められる圧力  $p^{n+1}$  から求められる．

流速修正法における計算の流れを図 5.1 に示す

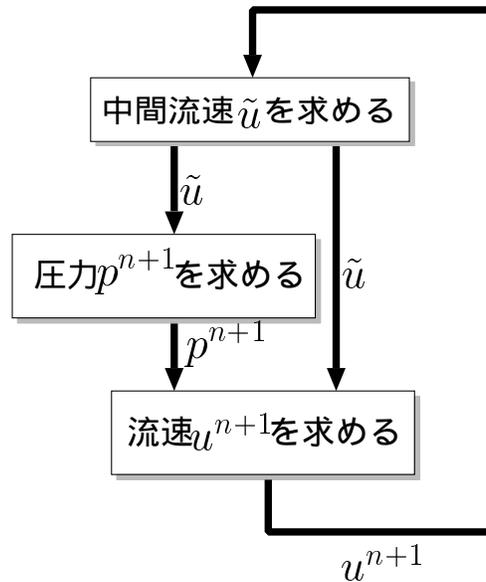


図 5.1: 流速修正法における計算の流れ

### 5.3 重み付き残差方程式

中間流速の式・圧力 Poisson 方程式・流速の式，再掲すると

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (5.10)$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (5.11)$$

に対して， $u^*, p^*$  で表される重み関数をかけ，領域  $\Omega$  上で積分を行う．

$$\int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* u_i^n d\Omega - \Delta t \left[ \int_{\Omega} u_i^* u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} u_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \quad (5.12)$$

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega} u_i^* u_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} u_i^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.14)$$

ここで，式 3.12 および 3.13 中の二階微分の項に対し Gauss の発散定理を適用して次の式を得る

$$\int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* u_i^n d\Omega - \Delta t \left[ \int_{\Omega} u_i^* u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} u_i^* \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \cdot n_j d\Gamma + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \quad (5.15)$$

$$\int_{\Gamma} p^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \cdot n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.16)$$

ここで

$$\int_{\Gamma} u_i^* \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \cdot n_j d\Gamma \quad (5.17)$$

$$\int_{\Gamma} p^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \cdot n_i d\Gamma \quad (5.18)$$

で表される積分は，解析領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  上において，自然境界条件を積分することを意味しており，この項はゼロとなることから非圧縮粘性流の基礎方程式についての以下の弱形式を得る．

$$\int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* u_i^n d\Omega - \Delta t \left[ \int_{\Omega} u_i^* u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \quad (5.19)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.20)$$

$$\int_{\Omega} u_i^* u_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} u_i^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.21)$$

## 5.4 形状関数

次に形状関数について考える。ここでは4.2節と同様に形状関数として一次のものを用いることとすると，ある三角形領域中での形状関数  $N_1, N_2, N_3$  は図5.2に示すように，ある節点上で1，他の節点において0となる一次関数となる。

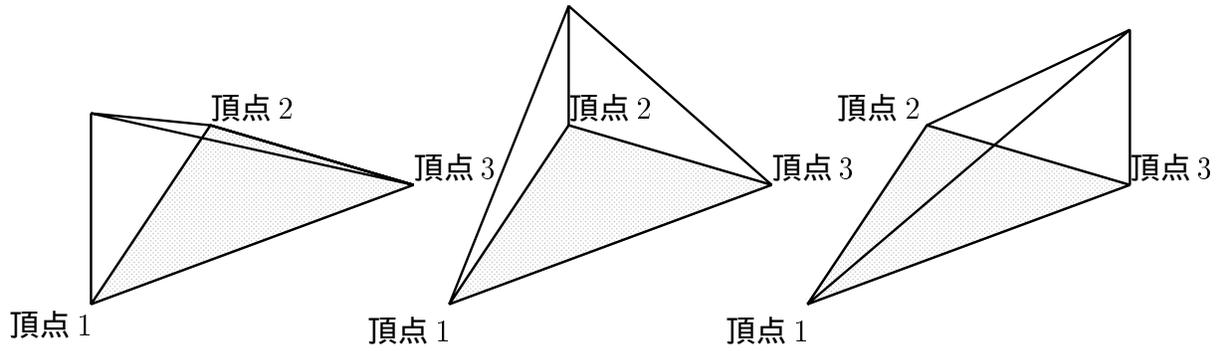


図 5.2: 形状関数

$$\begin{cases} N_1 = a_1 + b_1 x + c_1 y \\ N_2 = a_2 + b_2 x + c_2 y \\ N_3 = a_3 + b_3 x + c_3 y \end{cases} \quad (5.22)$$

但し

$$a_i = \frac{1}{2\Delta} (x_j y_k - x_k y_j) \quad (5.23)$$

$$b_i = \frac{1}{2\Delta} (y_i - y_k) \quad (5.24)$$

$$c_i = \frac{1}{2\Delta} (x_k - x_j) \quad (5.25)$$

## 5.5 補間関数

有限要素法では，図 5.3 で示すように解析すべき領域  $\Omega$  を有限要素と呼ぶ部分小領域  $\Omega_e$  で分割し，各要素内の物理量の分布を補間関数を用いて近似することにより，全領域での物理量の分布を求める．

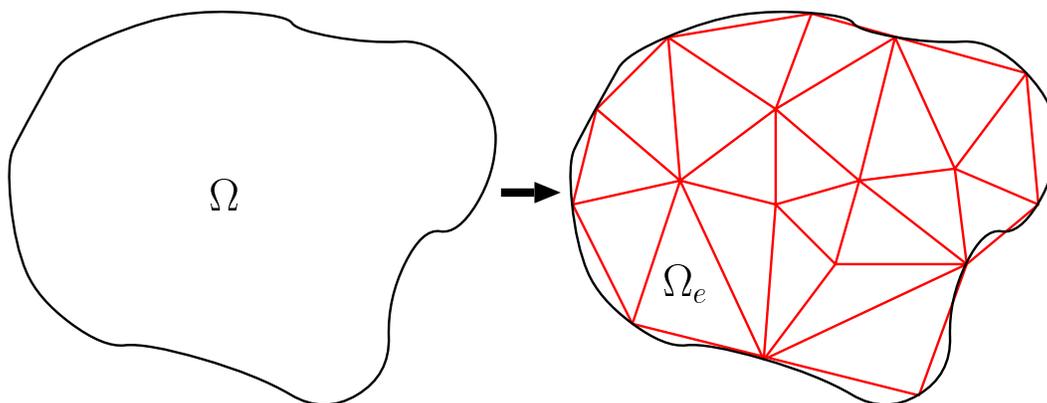


図 5.3: 領域の分割

補間関数には様々な取り扱いがあるが，本研究では三角形一次要素を用いて物理量の補間を行うこととした．4章の一次元問題での予備実験と同様に，有限要素方程式を導くために図 5.4 に図 5.3 中の一つの要素を取り出して考える．

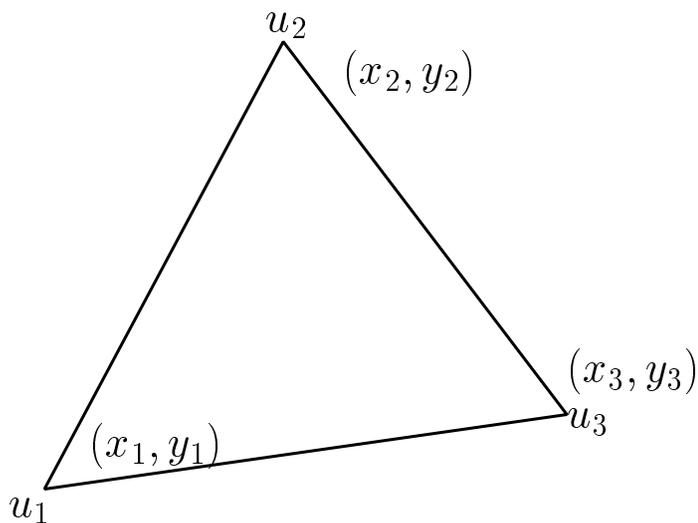


図 5.4: 三角形要素

この三角形領域中の物理量の分布を三角形の三頂点上での値  $u_1, u_2, u_3$  を用いて一次の補間することを考える．一次の補間であるので領域中の物理量  $u$  の分布は  $x, y$  に関する一次関数

$$u = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 y \quad (5.26)$$

で表される．この関数は三角形領域全域で成立するので三角形の三頂点上では

$$\begin{cases} u_1 = \eta_1 + \eta_2 x_1 + \eta_3 y_1 \\ u_2 = \eta_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 y_2 \\ u_3 = \eta_1 + \eta_2 x_3 + \eta_3 y_3 \end{cases} \quad (5.27)$$

が成立する．これを  $\eta_{1\sim 3}$  について解くと三角形の面積  $\Delta$  を

$$\Delta = \frac{1}{2} \{ x_i(x_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) \} \quad (5.28)$$

としたとき，

$$a_i = \frac{1}{2\Delta} (x_j y_k - x_k y_i) \quad (5.29)$$

$$b_i = \frac{1}{2\Delta} (y_i - y_k) \quad (5.30)$$

$$c_i = \frac{1}{2\Delta} (x_k - x_j) \quad (5.31)$$

として

$$\begin{cases} \eta_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\ \eta_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \\ \eta_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \end{cases} \quad (5.32)$$

が得られる．ここで先に定義した形状関数  $N_1, N_2, N_3$  を用いることにより，式 (5.26) の関数で示される三角形要素内の物理量  $u$  の分布は三頂点での物理量  $u_1, u_2, u_3$  と形状関数  $N_1, N_2, N_3$  との積和

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (5.33)$$

と表せる。

先の重み付き残差方程式 (5.19) ~ (5.21) においては，未知数は流速  $\tilde{u}_i, u_i$  および圧力  $p$  があるので，それぞれは上の補間関数を用いて

$$\begin{cases} \tilde{u}_i = N_\alpha \tilde{u}_{\alpha i} \\ u_i = N_\alpha u_{\alpha i} \quad i = 1 \sim 2, \alpha = 1 \sim 3 \\ p = N_\alpha p_\alpha \end{cases} \quad (5.34)$$

ここで， $\tilde{u}_i, u_i, p$  は三角形要素内に分布する未知関数であり， $\tilde{u}_{\alpha i}, u_{\alpha i}, p_{\alpha}$  は三頂点における未知数それぞれの値である．また，添字  $i$  は 2 次元ベクトルの添字であり， $\alpha$  は三角形要素の各頂点番号である．

それぞれの未知数に対する重み関数  $u_i^*, p^*$  については，4.4 と同様に Galerkin 法を用いることとして，次ぎのように補間する

$$\begin{cases} u_i^* = N_{\alpha} u_{\alpha i} \\ p^* = N_{\alpha} p_{\alpha} \end{cases} \quad (5.35)$$

## 5.6 有限要素方程式の導出

前節で，未知関数と重み関数が形状関数によって表されたため，各変数の偏微分の計算を行うことが出来る．例えば速度の空間微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} u_{\alpha} = \frac{\partial(a_{\alpha} + b_{\alpha}x + c_{\alpha}y)}{\partial x} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} v_{\alpha} = \frac{\partial(a_{\alpha} + b_{\alpha}x + c_{\alpha}y)}{\partial y} = (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

のようになる．すなわち未知関数の微分は形状関数の微分と三角形各頂点での値との積で表される．以上を用いると有限要素方程式として

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega_e \tilde{u}_{\beta i} &= \int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega_e u_{\beta i}^n - \Delta t \left[ \int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial x_j} d\Omega_e u_{\beta i}^n u_{\gamma i}^n + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{Re} \left\{ \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_j} d\Omega_e u_{\beta i}^n + \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega_e u_{\beta j}^n \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega_e p_{\beta}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega_e \tilde{u}_{\beta i} \quad (5.39)$$

$$\int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega_e u_{\beta i}^{n+1} = \int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega_e \tilde{u}_{\beta i} - \Delta t \int_{\Omega_e} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega_e p_{\beta}^{n+1} \quad (5.40)$$

を得ることが出来た．

## 5.7 全体方程式の導出

有限要素方程式からの，全体方程式の組み立て方は 4.5 節と同様である．

用いている要素は三角形要素なので，ある要素  $e$  につき 3 つの頂点  $p_1, p_2, p_3$  を持つ．ここで要素  $e$  の頂点 1 が全体では節点番号 10，頂点 2 が全体では節点番号 17，頂点 3 が全体では節点番号 44 であるとしよう．

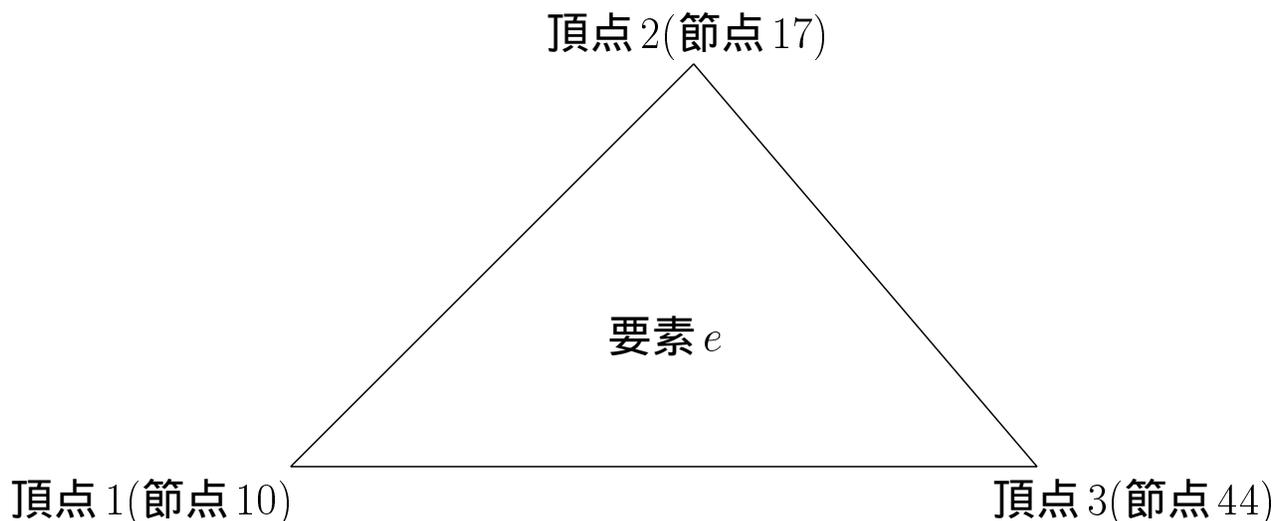


図 5.5: ある要素の全体での節点番号

よって，三元連立方程式である要素  $e$  に対する有限要素方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

を全体方程式に組み入れるには次のようにする．まず係数行列の成分  $a_{11}$  の組み入れであるが，頂点 1 は全体では節点番号 10 であるため，この成分は全体剛性マトリックスでは 10 行 10 列に成分に加えられ，頂点 2 は全体では節点番号 17 であるため， $a_{12}$  は全体剛性マトリックスの 10 行 17 列の成分に加えられる．

一般化すると要素剛性マトリックスの  $a_{ij}$  の成分は，要素  $e$  の頂点  $i$  の全体での節点番号が  $p$ ，頂点  $j$  の全体での節点番号が  $q$  とすると，全体剛性マトリックスの  $p$  行  $q$  列の成分に加え込まれる．

以降同様にして各成分の全体剛性マトリックスへの組み込み先は

$$\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow 10 \text{ 行 } 10 \text{ 列} & a_{12} \rightarrow 10 \text{ 行 } 17 \text{ 列} & a_{13} \rightarrow 10 \text{ 行 } 44 \text{ 列} \\ a_{21} \rightarrow 17 \text{ 行 } 10 \text{ 列} & a_{22} \rightarrow 17 \text{ 行 } 17 \text{ 列} & a_{23} \rightarrow 17 \text{ 行 } 44 \text{ 列} \\ a_{31} \rightarrow 44 \text{ 行 } 10 \text{ 列} & a_{32} \rightarrow 44 \text{ 行 } 17 \text{ 列} & a_{33} \rightarrow 44 \text{ 行 } 44 \text{ 列} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

となる．同様に右辺ベクトルの成分の組み込み先は

$$\begin{pmatrix} u_1 \rightarrow 10 \text{ 行} \\ u_2 \rightarrow 17 \text{ 行} \\ u_3 \rightarrow 44 \text{ 行} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

となる．この作業を全要素数だけ繰り返し行うことにより全体方程式を組み立てることが出来，このようにして作成した連立一次方程式を解くことにより圧力  $p$  を求め，5.2節の図 5.1 に示した反復を行うことにより，各時間ステップにおける流速・圧力を求めることができる．4.5節でも述べたように本研究ではこの連立一次方程式のソルバとして ICCG 法を用いている．[6][8][9]

# 第 6 章

## 圧力 Poisson 方程式に対する精度保証

筆者は上述した中尾の方法を有限要素法による流速修正法における圧力に関する Poisson 方程式の近似解に対して適用し，精度保証を行うことを試みた．

流体力学においては圧力を  $p$ ，流速を  $u$  で表すこととなっており，記号の表記が前節で述べた中尾の理論と衝突する．ここでは混乱を避けるために，以降より解を  $p$ ，近似解を  $p_h$ ，候補者集合を  $P$  として表記し，圧力 Poisson 方程式の右辺関数を  $g$ ，問題を離散化する演算子を  $T_h$  とし， $\exists p$  に対する  $T_h F(p)$  を  $f$  と表記することとする．

### 6.1 近似解の導出

先ず，候補者集合  $P$  を作る元となる近似解を得るための計算について述べる．非圧縮粘性流れの基礎方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.2)$$

は流速修正法による定式化の元で，それぞれ中間流速，圧力，流速を記述する次の 3 つの方程式により記述される [5]．

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (6.4)$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (6.5)$$

上式はさらに重み関数  $u^*, p^*$  を導入し重み付き残差方程式を導き，計算領域を分割する各要素上における形状関数による未知数の内挿を行うことにより連立方程式による表記現を導ける．この連立方程式を各時間ステップ毎に順に解くことによって毎ステップごとの流れ場の近似解を得る．

## 6.2 検証アルゴリズムの計算

ここで候補者集合  $P$  より問題の右辺側項を求める検証アルゴリズムのステップ 4(3.5 節のアルゴリズムの手順 4) についてであるが，圧力に関する Poisson 方程式は

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) \quad (6.6)$$

となっており，右辺項は圧力  $p$  の関数にはなっておらず， $F(P) \subset P$  の検証ループの適用が出来ない．しかし中間流速  $\tilde{u}$  は圧力  $p$  に依存する流速  $u$  の関数であるため，右辺項を  $g(p)$  であると見なし，近似解を求める計算と同様に，流速修正法における時間積分のループを用いることにより計算を行うことにより検証ループ全体は Fig.2 に示したような流れとなる．しかし，ここで問題となるのは，圧力の候補者集合  $P$  から流速  $u$  を求める計算 (Fig.3 の 2) における中間流速  $\tilde{u}$  の扱いである．通常の流速修正法ではそれぞれの計算を

$$\dots \rightarrow \text{中間流速} \rightarrow \text{流速} \rightarrow \text{圧力} \rightarrow \text{中間流速} \dots \quad (6.7)$$

のように再帰的に求めることにより  $\Delta t$  づつの時間を進めているが，検証ループ内での計算においてこの再帰を用いると，ある時刻にでの近似圧力場の精度評価を行いたいにも関わらず，候補者集合  $P$  とその写像  $T_h F(P)$  が異なる時刻に属することになってしまう．

そこで，検証ループ内での流速の計算には，検証ループの先頭で与えられた誤差評価の対象となる近似解と同時刻に属する流速を用いることとしている．

また，元となる候補者集合 (圧力) が幅を持つ区間値  $[P_i, \overline{P}_i]$  であるために，これから求められる中間流速・流速・右辺項ベクトルも全て上界  $\sup$  と下界  $\inf$  で挟まれる区間値であることに留意した計算を行う必要がある．

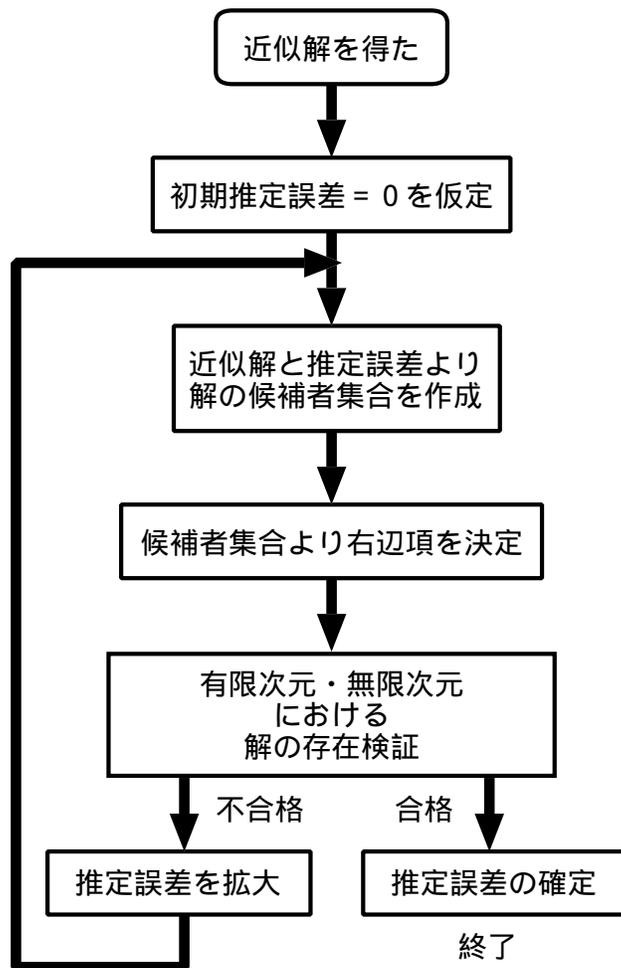


図 6.1: 検証ループの流れ

### 6.3 有限次元部分の検証条件

中尾による方法での検証条件  $F(P) \subset P$  を有限次元部分 (離散化部分) と無限次元部分 (直交補空間) に分離した検証条件のうち, 有限次元部分 (離散化部分) の検証条件, 再掲すると

$$[\inf_{p \in P} T_h F(p), \sup_{p \in P} T_h F(p)] \subset [\underline{P}, \overline{P}] \quad (6.8)$$

であるが, これを求めるためには  $T_h F(p)$  を求める必要がある.

ここで演算子  $T_h$  はある関数  $\psi$  をそれが属する連続な空間から, 区分的多項式の集合の空間へと写す演算子であると定義されている. つまり  $T_h F(p)$  は元の問題  $F(p)$  すなわち圧

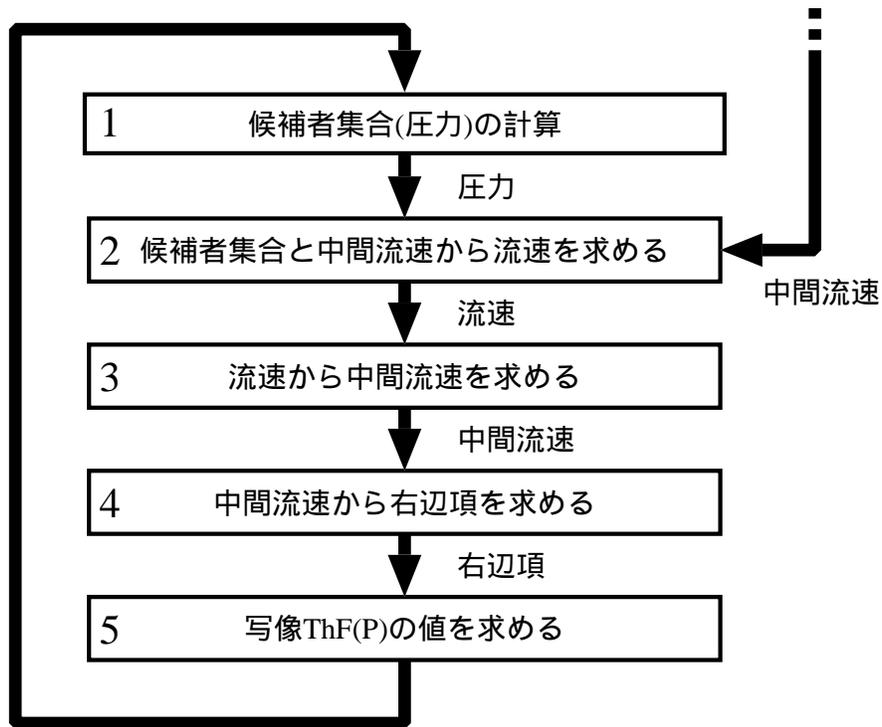


図 6.2: 検証ループ内での  $T_h F(P)$  の計算

力 Poisson 方程式

$$\Delta p = g \quad (6.9)$$

を有限個の点上において定義される問題に写すと考えられる。つまり  $T_h$  は問題の離散化を意味していると考えられる。よって、問題 (6.9) を有限要素法により離散化するために、元の方程式の重み付き残差方程式を導く

$$(p', \phi') = (g, \phi) \quad (6.10)$$

を考える。但しここでは

$$(a, b) = \int_{\Omega} ab \, d\Omega \quad (6.11)$$

であり  $\phi$  は重み関数とする。この重み付き残差方程式 (6.10) を離散化すると

$$(p'_h, \phi'_h) = (g, \phi_h) \quad (6.12)$$

となるが、ここで  $p_h = T_h F(p)$  であることと、演算子  $T_h$  により離散化されるということは関数  $T_h F(p)$  は  $M$  個の節点上での値と重み関数との線形結合で表されるということなので

$$T_h F(p) = \sum_{i=1}^M f_i \phi_i \quad (6.13)$$

とも書けるということを考慮すると，上の離散化された重み付き残差方程式 (6.12) は

$$\left(\sum_{i=1}^M f_i \phi'_i, \phi'_h\right) = (g, \phi_h) \quad (6.14)$$

となる，これは圧力 Poisson 方程式の重み付き残差方程式と同じ形であり，連立方程式

$$\mathbf{A} \vec{f} = \vec{b} \quad (6.15)$$

を解くことにより  $T_h F(p)$  を求めることが出来る．ここで係数行列  $\mathbf{A}$  と右辺ベクトル  $\vec{b}$  は

$$\mathbf{A} = (\phi'_i, \phi'_j) \text{ の行列形} \quad (6.16)$$

$$\vec{b} = (g, \phi_i) \text{ の行列形} \quad (6.17)$$

という形になるが，これらは近似解を得るための連立方程式での係数行列の右辺ベクトルと全く同様に決定されることは明らかである．

ここでそもそも区間値である  $p \in P$  より決定される  $\vec{b}$  もまた区間であるために， $\vec{f}$  もまた区間  $f_i = [\underline{f}_i, \overline{f}_i]$  で表される．よって  $f_i$  の上界  $\sup$ ・下界  $\inf$  により集合の形で表現されていた検証条件は

$$\left[ \underline{f}_i \geq \underline{P}_i \text{ かつ } \overline{f}_i \leq \overline{P}_i \right] \quad (6.18)$$

となる．

## 6.4 無限次元部分の検証条件

さて，次に中尾による方法での検証条件  $F(P) \subset P$  を有限次元部分 (離散化部分) と無限次元部分 (直交補空間) に分離した検証条件のうち，無限次元部分 (直交補空間) に関する検証条件

$$\sup_{p \in P} C \cdot h \|g\| \leq \alpha \quad (6.19)$$

を検証するために  $\|g\|_{L^2}$  を求める．ここで  $L^2$  ノルムは

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} g^2 d\Omega \quad (6.20)$$

であるが，この全領域  $\Omega$  での積分の代わりに，全領域  $\Omega$  を  $M$  個に分割する各三角形要素上での積分の総和を用い

$$\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^M \int_e g_i^2 de \quad (6.21)$$

として扱うことができる．

さて，ノルムを求めたい関数  $g$  は元の方程式である圧力 Poisson 方程式 (6.6) の右辺項であるので

$$g^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (6.22)$$

である．三角分割・一次要素を用いた有限要素法により解いているので，ここである要素内において中間流速  $\tilde{u}_x, \tilde{u}_y$  は，三角要素の3つの頂点それぞれでの中間流速値  $\tilde{u}_x^{1\sim 3}, \tilde{u}_y^{1\sim 3}$  と，それぞれの頂点では1，他では0となる1次の形状関数  $N_{1\sim 3}$  により次のように補間されている．

$$\tilde{u}_x = N_1 \tilde{u}_x^1 + N_2 \tilde{u}_x^2 + N_3 \tilde{u}_x^3 \quad (6.23)$$

$$\tilde{u}_y = N_1 \tilde{u}_y^1 + N_2 \tilde{u}_y^2 + N_3 \tilde{u}_y^3 \quad (6.24)$$

よって中間流速  $\tilde{u}$  の微分は

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial x} \tilde{u}_x^1 + \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial x} \tilde{u}_x^2 + \frac{\partial \tilde{N}_3}{\partial x} \tilde{u}_x^3 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial y} \tilde{u}_y^1 + \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial y} \tilde{u}_y^2 + \frac{\partial \tilde{N}_3}{\partial y} \tilde{u}_y^3 \quad (6.26)$$

と表される．検証ループ内において中間流速  $\tilde{u}$  は既知であるし，形状関数の  $x, y$  による偏導関数は近似解を得るための計算で用いたものを使えるため，各要素上における  $g$  の値を陽に決定でき， $\|g\|_{L^2}$  の計算が可能となった．

よって計算された  $\|g\|_{L^2}$  を用いて式 (6.19)，再掲すると

$$\sup_{p \in P} C \cdot h \|g\| \leq \alpha \quad (6.27)$$

を計算できる．ここで  $h$  は代表メッシュサイズということで，全三角形要素の辺のうち，最長のものの長さとし，メッシュ分割の様相に関わるパラメータ  $C$  としてはメッシュ自体が一様分割，つまり全要素の形状・大きさが等しいため，最適な値ではないものの  $C = 0.81$  を用いた [4]．

# 第 7 章

## 検証例

### 7.1 検証例 1，二次元の管内流れ

さて，本稿では二次元流れに対する精度保証の計算モデルとしてまず，Fig7.1 に示した三角形要素分割による直径 1，長さ 10，分割数  $8 \times 10 \times 2$  要素の 2 次元の管のモデルに対する  $\Delta t=1/100$ ，Reynolds 数=100 および 300 の計算を行なった．流れ場は初期状態で式 (5.8)，(5.7)，(5.6) の流速，中間流速，圧力は全て 0 を規定した．

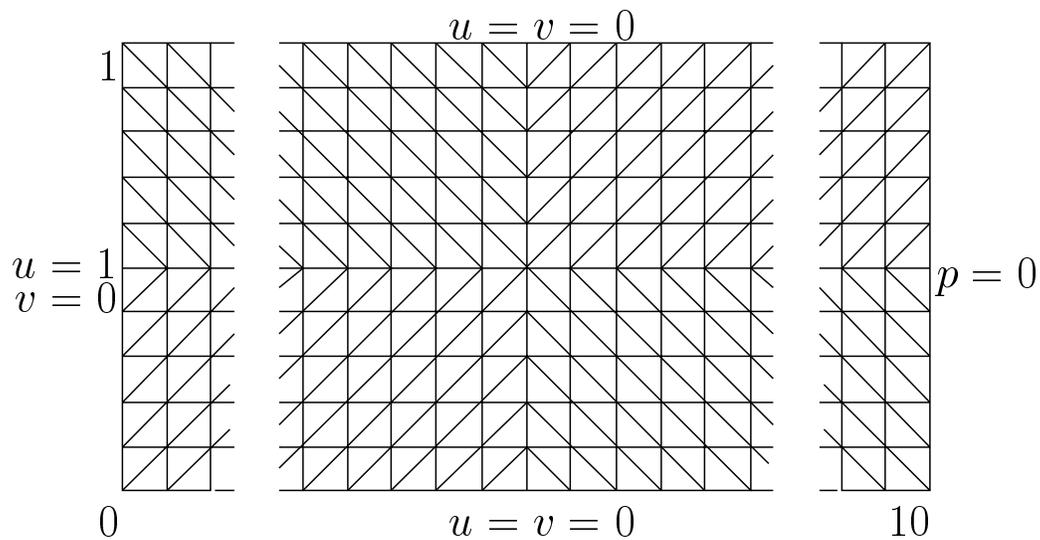


図 7.1: 計算モデルと境界条件

はじめに誤差評価を適用する近似解を得るために，図 7.1 に示したモデルと表 7.1 に示した条件を用いたシミュレーションを 2000 サイクル実行した．

$\Delta t$	1/100
Reynolds 数	100,300

表 7.1: 二次元の管の計算条件

図 7.2 および図 7.3 にその結果の速度分布と圧力分布を示す．

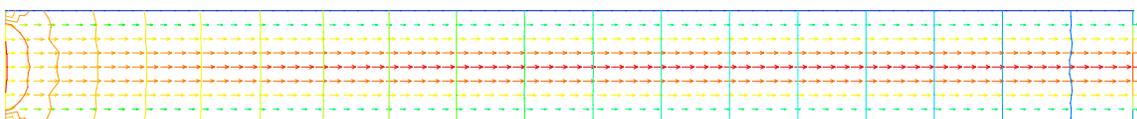


図 7.2: Re=100, Cycle=2000 での流れ場の状態

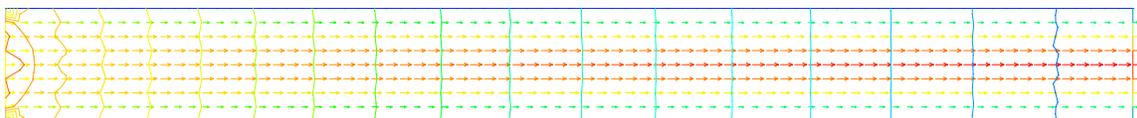


図 7.3: Re=300, Cycle=2000 での流れ場の状態

このような管内流れでは，流入側で流速  $u$  ( $x$  方向成分) の境界条件として  $u = 1.0$  の一様流速を与えたとしても管内を流れるに従い中心軸と管壁側で流速  $u$  に違いが現われ，最終的に図 7.4(P.46) および式 (7.1) に示すような Poiseuille 流と呼ばれる分布となる [14]．

$$u = u_0 \left\{ 1.0 - \left( \frac{y}{d} \right)^2 \right\} \quad (7.1)$$

ここで  $d$  は管の半径である．

そこで本ソルバの計算結果の妥当性を見当するために計算結果と，式 (7.1) との比較を行った．

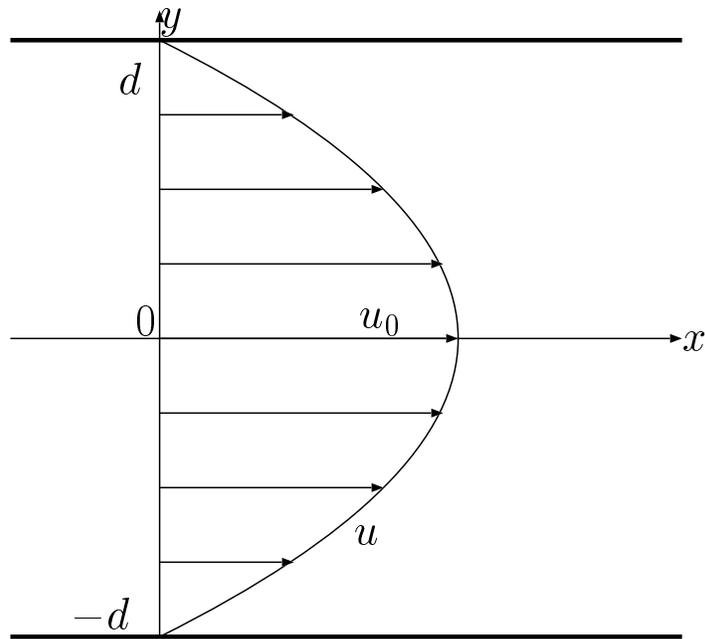


図 7.4: Poiseuille 流れの速度分布

図 7.5 ~ 図 7.8(P.47) は  $Re=100$  の計算における 2000 ステップの時点の管内の流速  $u$  の分布を、それぞれ管の長さの  $1/4, 1/2, 3/4, 1/1$  の位置で取り出し、Poiseuille 流れの厳密解である式 (7.1) と比較をしたものである。流入口近くの  $x = 2.5$  での分布が僅かに厳密解から外れる事以外は、Poiseuille 流の速度分布と一致する結果を得た。

また図 7.9(P.51) は、同じく  $Re=100$  の計算における 2000 ステップの時点の管内流速  $v$  ( $y$  方向成分) の分布を、それぞれ中心軸および中心から  $1/2$  の位置で取り出したものである。本来 Poiseuille 流れでは流速  $v$  成分は 0 となるはずである。

しかし中心軸では確かに  $v = 0$  であるが、中心から  $1/2$  の位置では、流入口近くで  $v$  がマイナス、すなわち中心向きの流速が発生しており、次第に  $v = 0$  へと近付き、ほぼ  $x = 5.0$  を過ぎる付近から  $v = 0$  となっている。しかし流出口近くでは乱れが生じている。

これら  $v$  の乱れの原因であるが、まず流入口近くの  $v$  の乱れおよび管軸中心向きの値は、流入口である  $x = 0.0$  の位置の節点の境界条件が  $u = 1.0, v = 0.0$  を規定しているが、そのすぐ隣の節点である  $x = 0.125$  では、壁面の節点では  $v = 0.0$  が規定されているため、流速  $v$  に乱れが生じているものと理解できる。

次いで、流出口近くの  $v$  の乱れであるが、これは流速修正法では流入・流出を伴う流れ場の扱いにおいて、流出側である開境界の境界条件に  $p = 0$ 、あるいは  $\partial p / \partial n = 0$  を物理

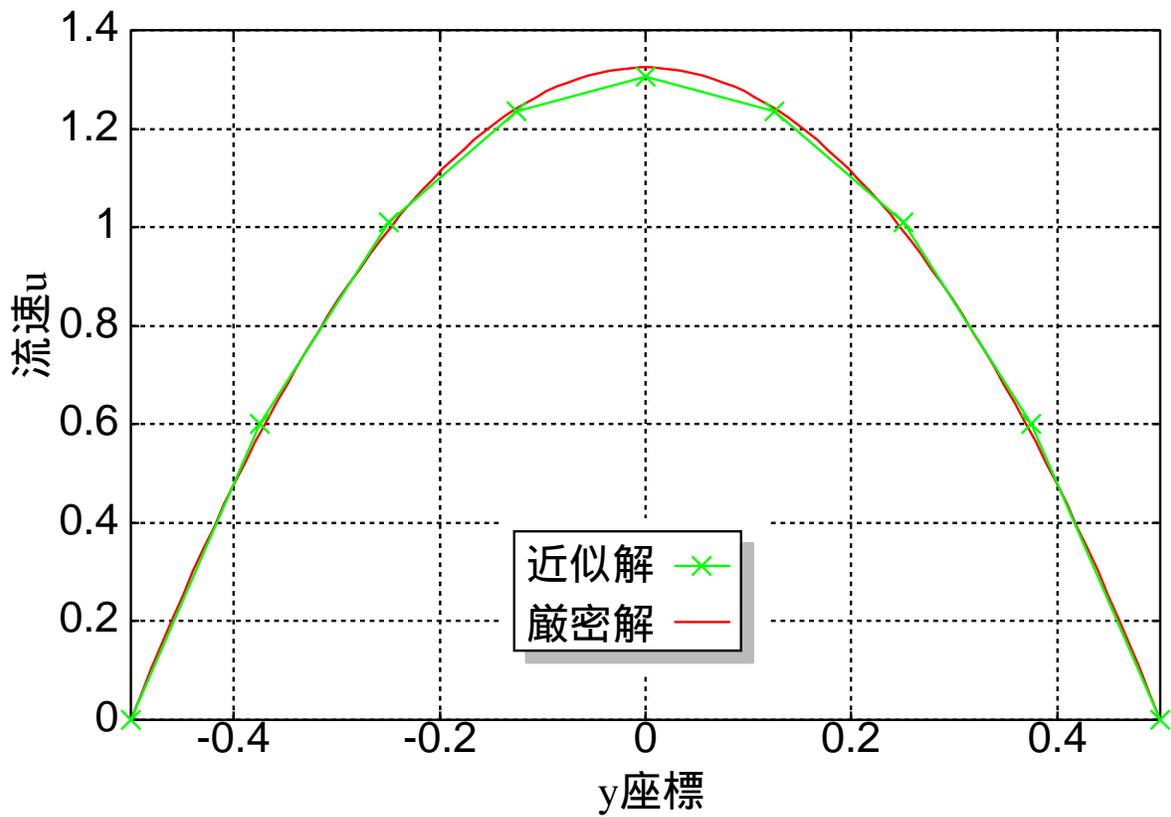


図 7.5:  $Re=100$  での  $x = 2.5$ (管の  $1/4$ ) の速度  $u$  分布

現象に即していないにも関わらず計算の都合上一様に規定せざるを得ないため生じる乱れであると説明される [12]

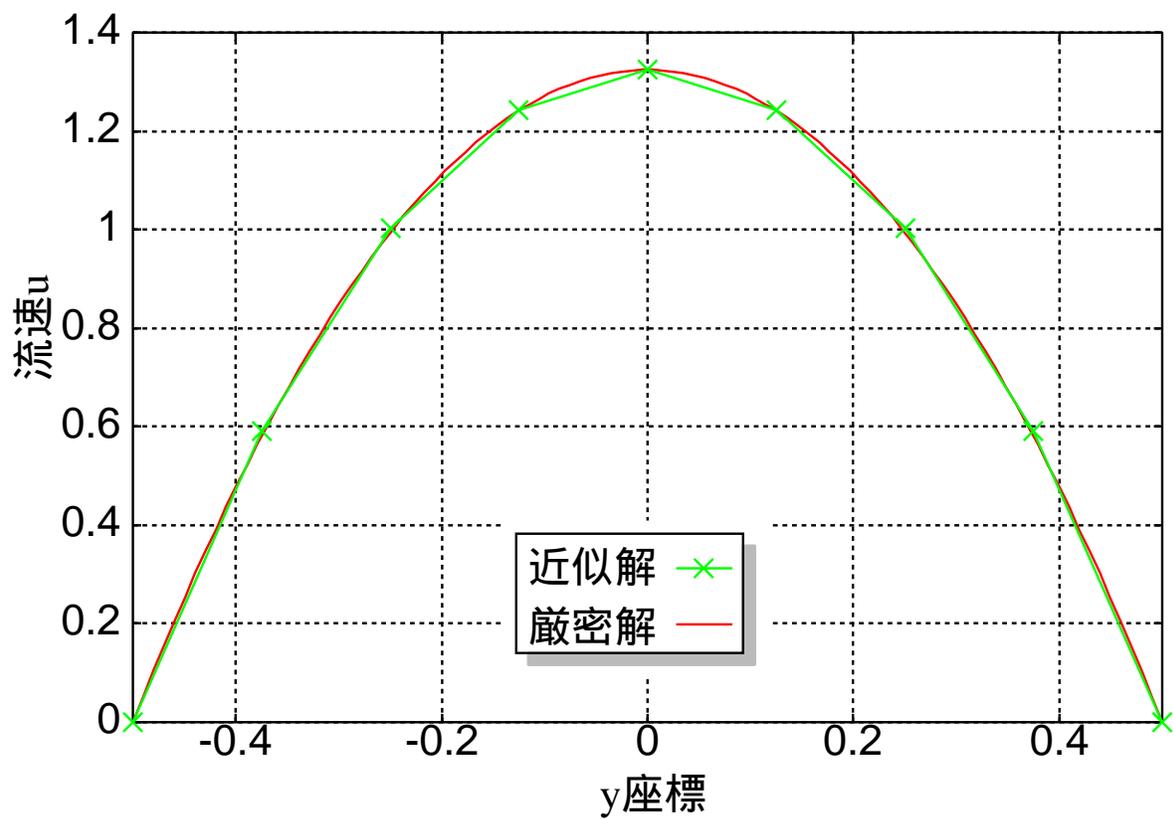


図 7.6:  $Re=100$  での  $x = 5.0$ (管の  $1/2$ ) の速度  $u$  分布

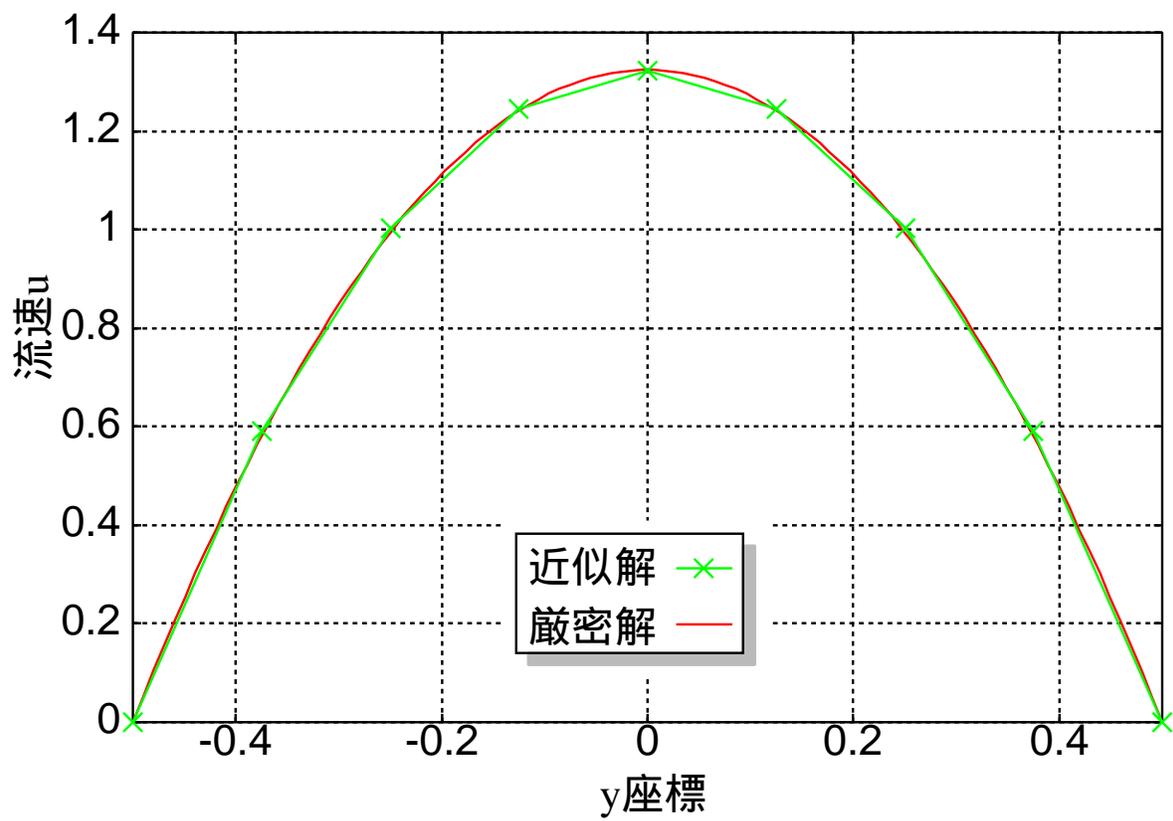


図 7.7:  $Re=100$  での  $x = 7.5$ (管の  $3/4$ ) の速度  $u$  分布

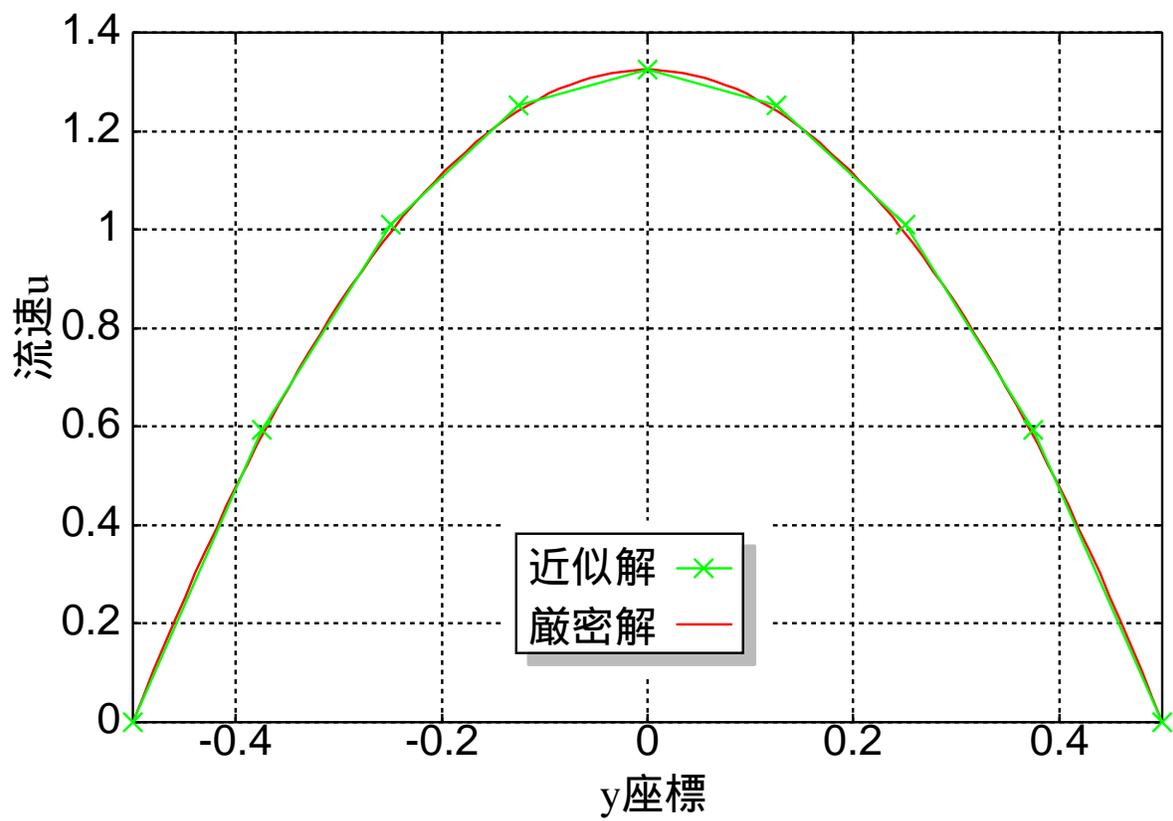


図 7.8:  $Re=100$  での  $x = 10.0$ (管終端) の速度  $u$  分布

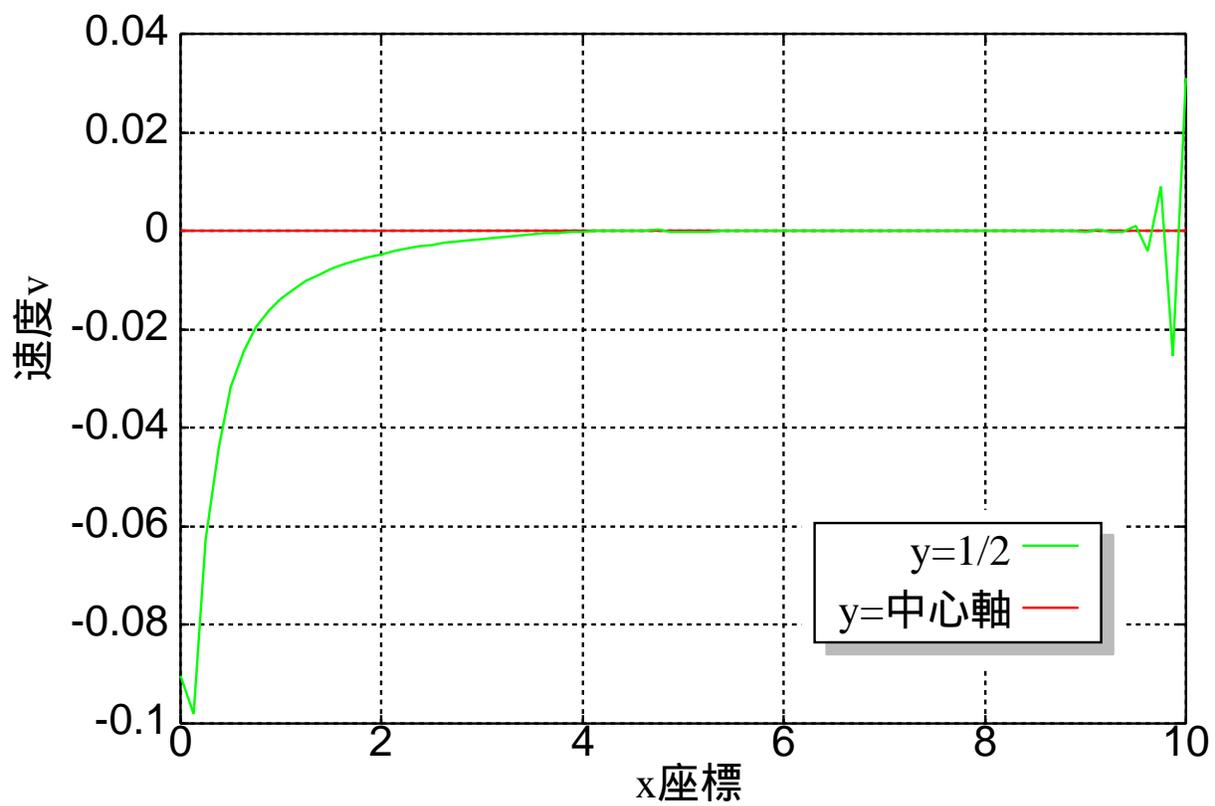


図 7.9:  $Re=100$  での速度  $v$  成分

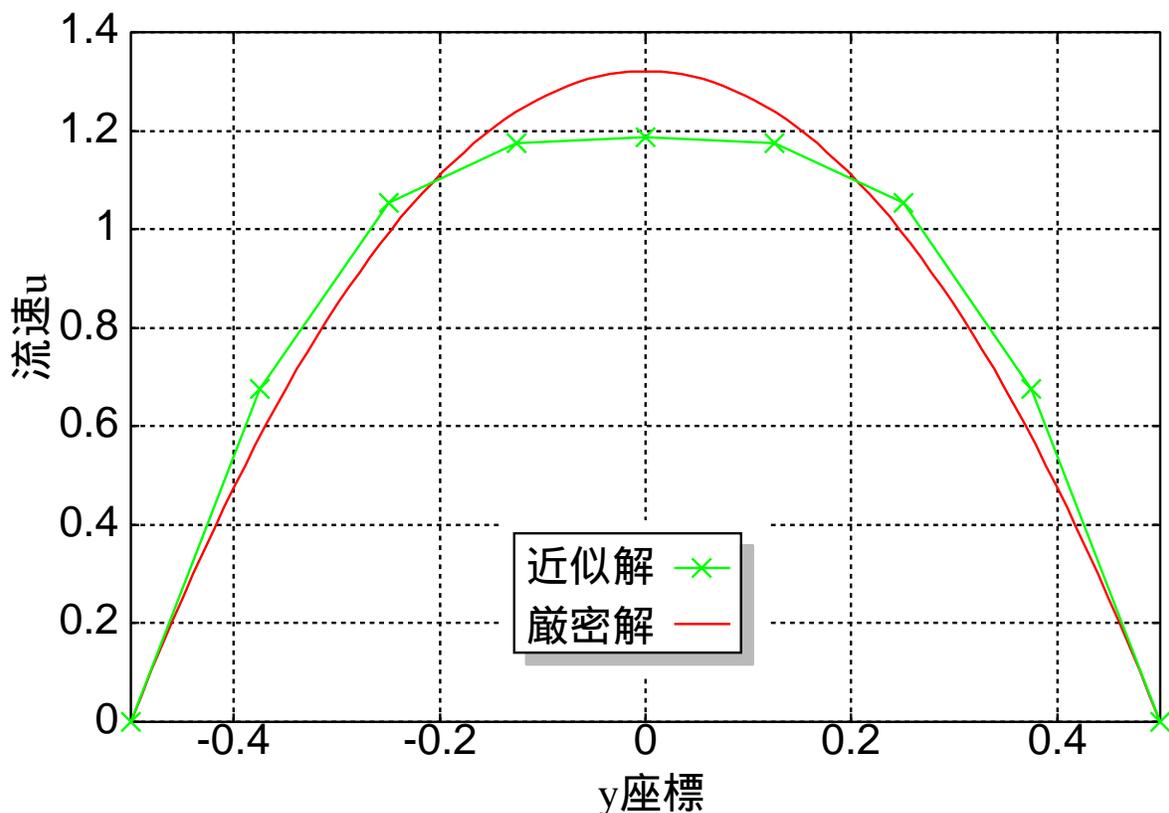


図 7.10:  $Re=300$  での  $x = 2.5$ (管の  $1/4$ ) の速度  $u$  分布

図 7.10 ~ 図 7.13 は前述の  $Re=100$  と同様に  $Re=300$  の計算における 2000 ステップの時点の管内の流速  $u$  の分布を，それぞれ管の長さの  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $1/1$  の位置で取り出し，Poiseuille 流れの厳密解である式 (7.1) と比較をしたものである．流入口近くの  $x = 2.5$  および中心の  $x = 5.0$  での分布は厳密解と一致しているとは言いがたいが，流出口に近づくにつれ厳密解と一致してゆく傾向は示されている．

図 7.14(P.56) も図 7.9 と同様に， $Re=300$  の計算における 2000 ステップの時点の管内流速  $v$  の分布を，それぞれ中心軸および中心から  $1/2$  の位置で取り出したものである．0 であるべき速度  $v$  成分は， $Re=100$  の結果と同様に中心軸では確かに  $v = 0$  であるが，中心から  $1/2$  の位置では，流入口近くで  $v$  がマイナス，すなわち中心向きの流速が生じている．漸近的に  $v = 0$  へと近付いて行くが，結局  $v = 0$  となることはなく，流出側の乱れが始まっている宇．

これら  $v$  の乱れの原因は， $Re=100$  で生じた乱れと同じ原因で生じたものであるが流れの様相が  $Re=300$  の方が激しいためより乱れが顕著に現われたものと思われる．

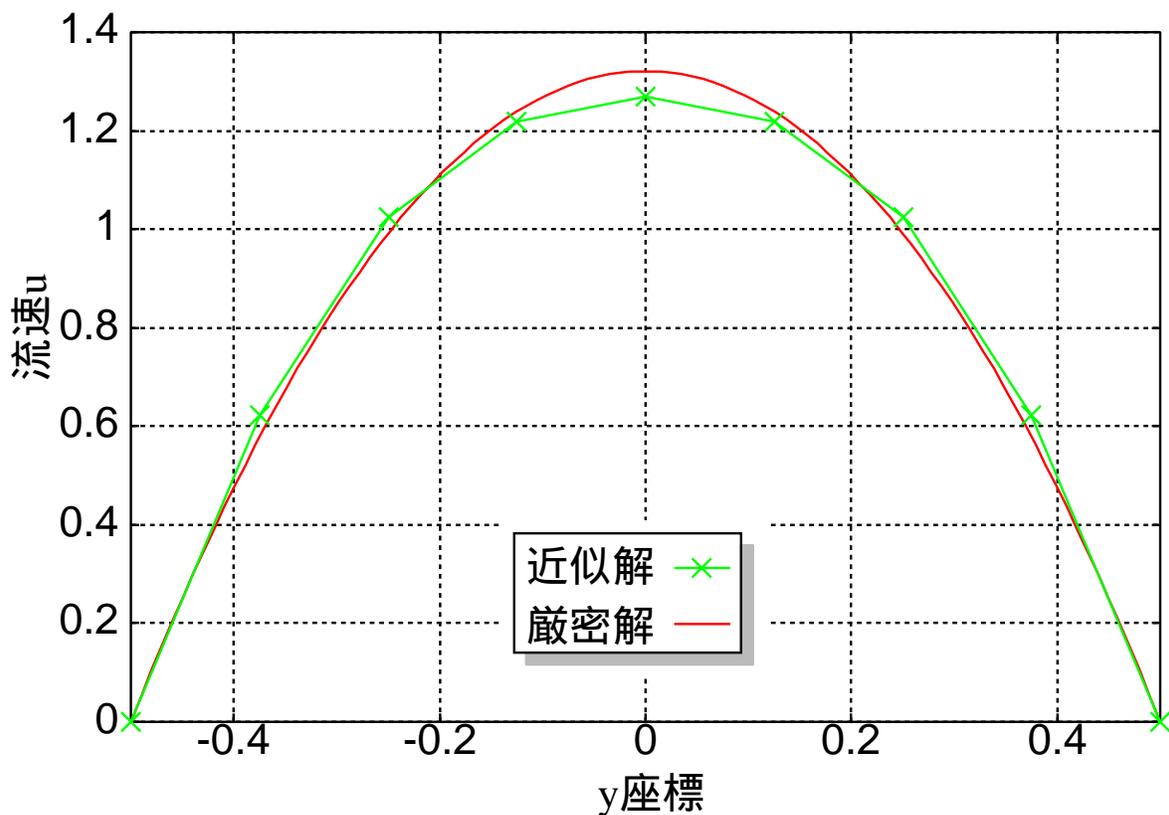


図 7.11:  $Re=300$  での  $x = 5.0$ (管の  $1/2$ ) の速度  $u$  分布

また、 $v$  が漸近的に  $v = 0$  に近付いて行くことから判るように、流路たる管がさらに長ければ  $v = 0$  が達成されることは期待して良いし、 $u$  の分布も Poiseuille 流れの厳密解と一致すると期待できる。

以上の評価より、現時点で作成した流速修正法による非圧縮粘性流ソルバは正しく実装されたと言えよう。

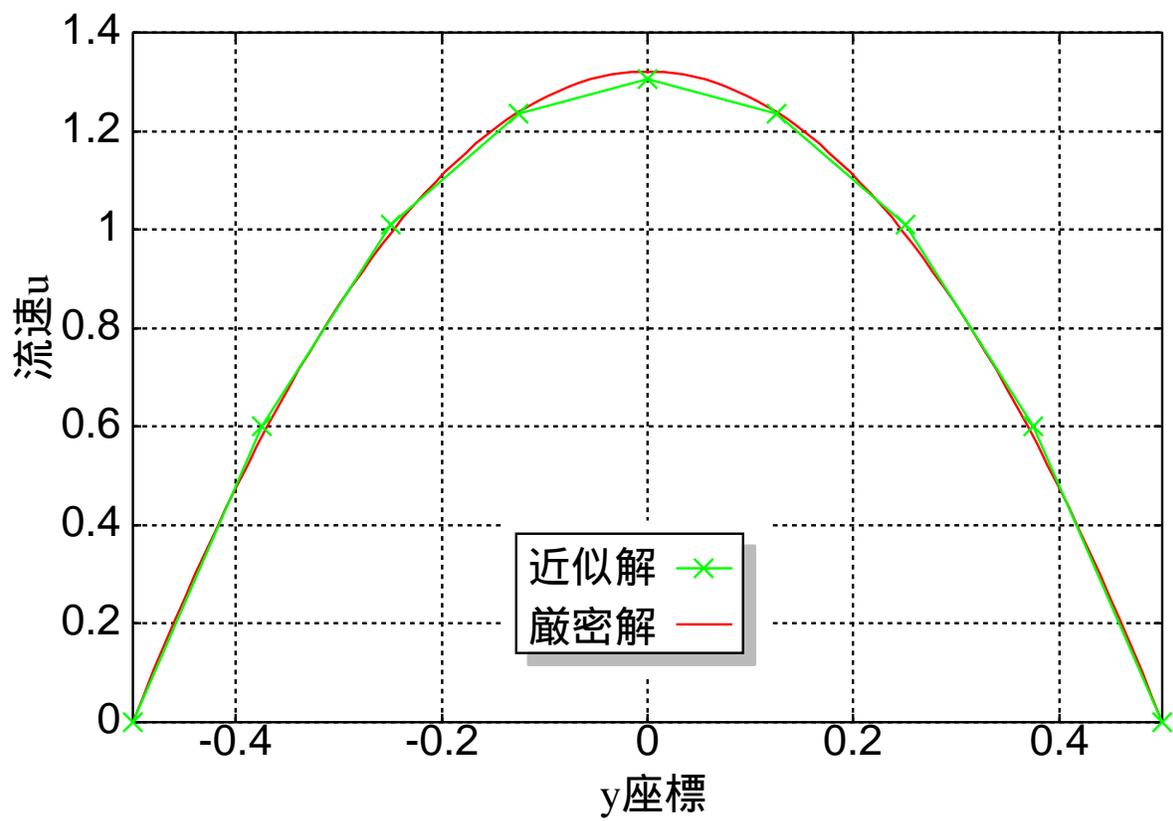


図 7.12:  $Re=300$  での  $x = 7.5$ (管の  $3/4$ ) の速度  $u$  分布

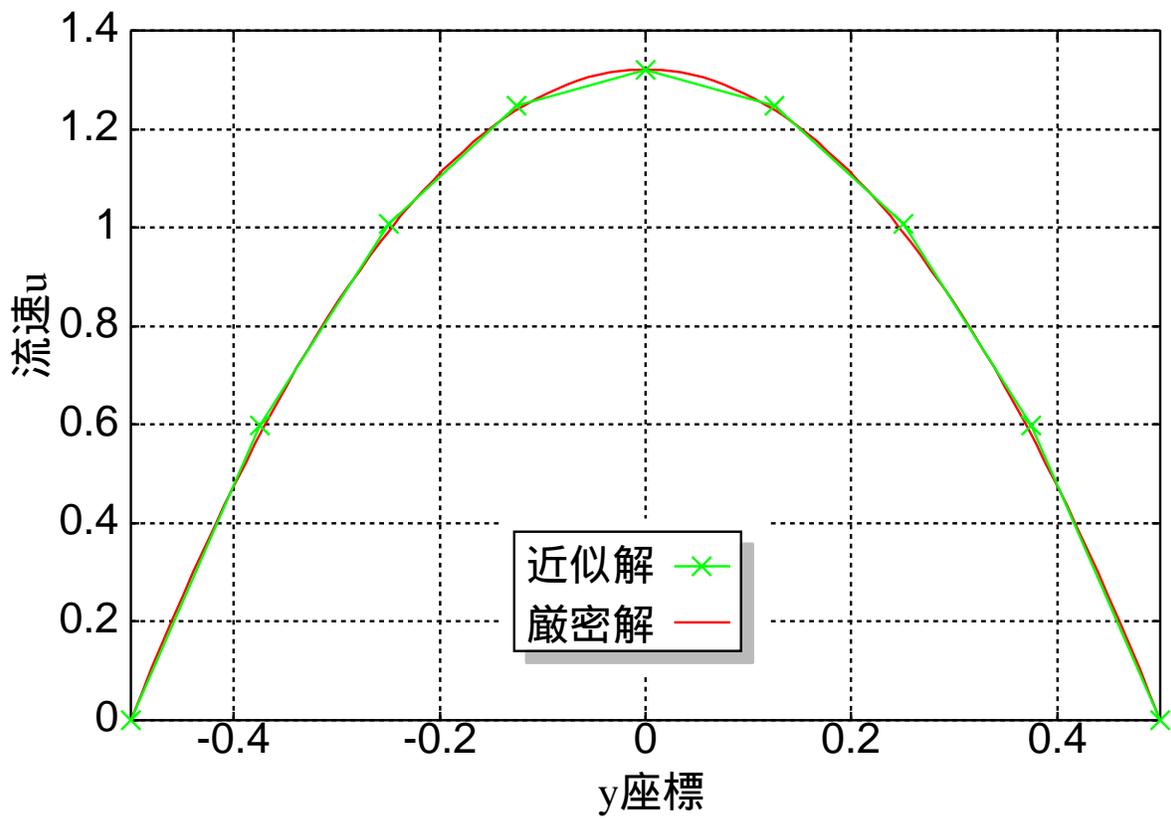


図 7.13:  $Re=300$  での  $x = 10.0$ (管終端) の速度  $u$  分布

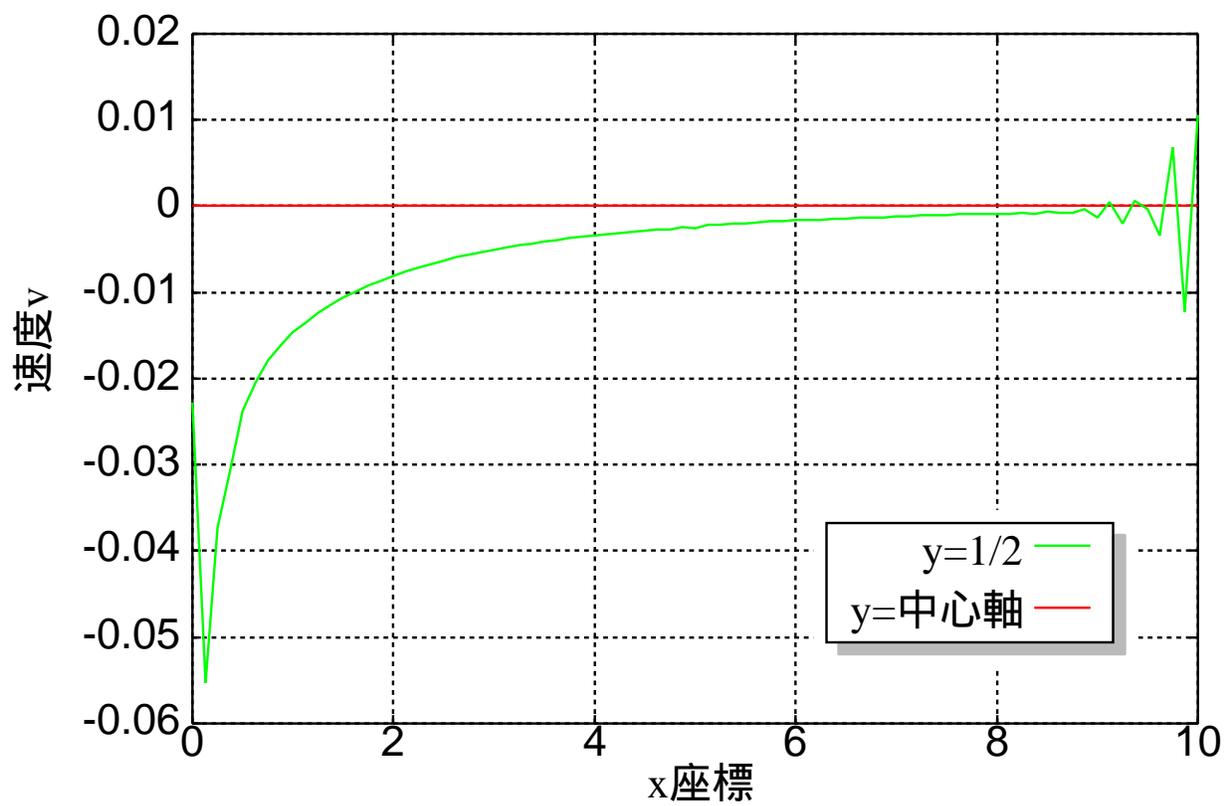


図 7.14:  $Re=300$  での速度  $v$  成分

次に，5章の議論に基づき作成した前述のソルバにより求められた管内流れの圧力場の近似解に対して，6章において議論した精度保証アルゴリズムを用いて，有限次元の検証条件式(6.18)および，無限次元の検証条件(6.19)の計算のために図7.2(P.45)および図7.3(P.45)のように得られた圧力分布に対して，6.2節および3.5節で述べた誤差評価アルゴリズムを適用した．

図7.15(P.58)および図7.16(P.59)は，3.5節および6.2節で述べた検証アルゴリズムの反復ループ中における，式(3.4)により定義される候補者集合 $P^1$ と，式(6.13)により示される連立一次方程式を解くことにより求められる写像 $T_h F(P)$ の，それぞれの集合の大きさの相対差，つまりここではそれぞれ配列 $p_{\max}$ ,  $p_{\min}$ で表される候補者集合 $P$ の $\sup, \inf$ および配列 $f_{\max}, f_{\min}$ で表される写像 $T_h F(P)$ の $\sup, \inf$ の値のうち，対応するものでもっとも差の大きな元の相対誤差を表示した．

当初，写像 $T_h F$ による集合 $T_h F(P)$ は候補者集合よりも大きく，3.1節で述べた中尾理論にとって最も重要な不動点定理の条件

$$T_h F(P) \subset P \tag{7.2}$$

は満たされないが，検証ループの反復を進めるに従い，相対差は振動する期間を経て，安定的に減少してゆき，究極的には $T_h F(P) \subset P$ が成立するであろうことが示されている．

---

<sup>1</sup>表記法が異なっていることに注意，6章の文頭参照

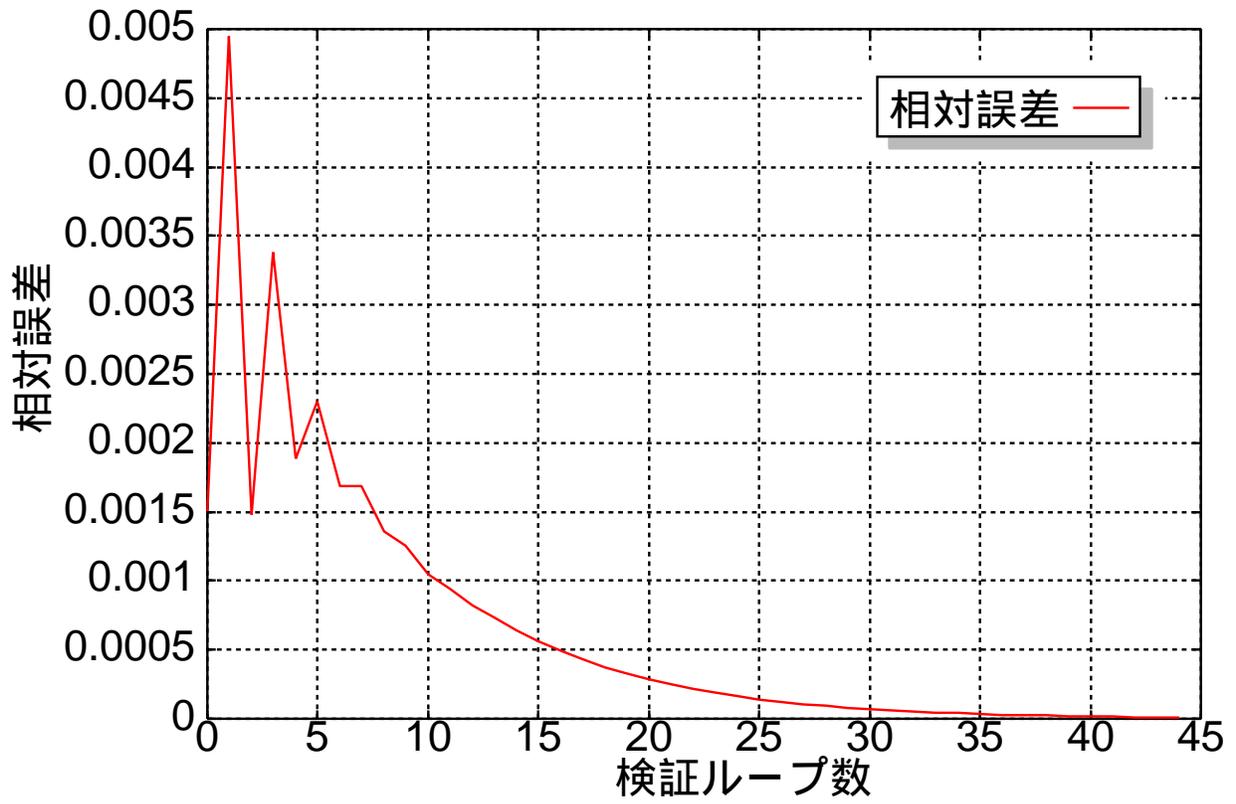


図 7.15:  $Re=100$  での写像  $T_h F(P)$  と候補者集合  $P$  との相対誤差

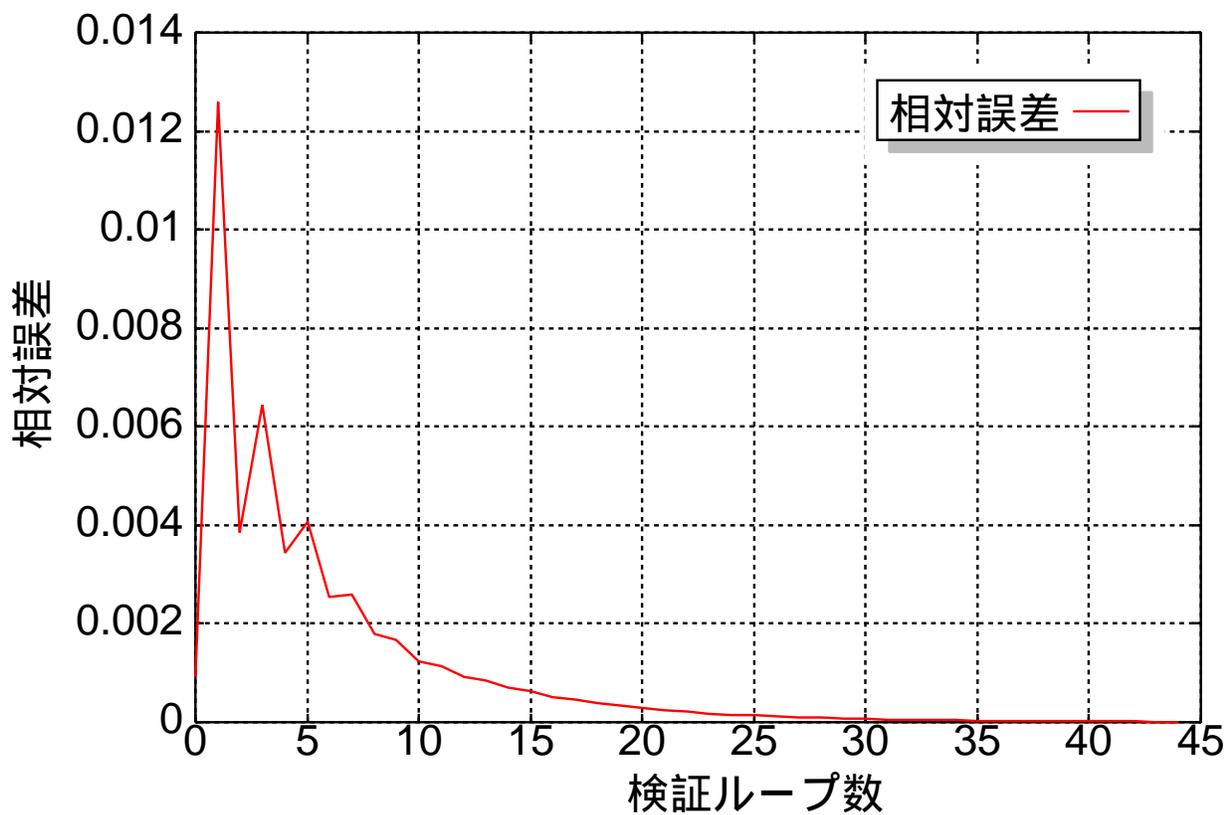


図 7.16:  $Re=300$  での写像  $T_h F(P)$  と候補者集合  $P$  との相対誤差

本来ならば不動点定理の条件に従い

$$T_h F(P) \subset P \quad (7.3)$$

即ち相対差  $\leq 0$  となるまで検証ループの反復を行なうことが望ましい。

しかし本ケースでは、かなり多くの反復を繰り返しても  $T_h F(P) \subset P$  が厳密には達成されなかったため、ここでは候補者集合  $P$  の大きさと写像  $T_h F(P)$  の大きさの相対誤差が、 $1.0 \times 10^{-5}$  以下になったら  $F(P) \subset P$  であると見なし、検証ループを抜けることとした。

その結果表次に示すような結果で検証アルゴリズムの反復ループを完了した。

Re	離散化変動量 $\alpha$	最大誤差幅	最大相対誤差	検証ループ数	ICCG 反復回数
100	$8.99781 \times 10^{-3}$	$6.93331 \times 10^{-6}$	$7.29182 \times 10^{-3}$	24 回	54 回
300	$7.72796 \times 10^{-3}$	$2.90975 \times 10^{-2}$	$5.09824 \times 10^{-2}$	44 回	55 回

表 7.2: 検証結果

図 7.17 および図 7.18 はそれぞれ Reynolds 数 100 および 300 での計算において，検証アルゴリズムの反復ループ中において推定誤差幅がどのように成長するかを示したものである．

検証アルゴリズムの反復を進めるに従い，推定誤差幅の成長量が減少してゆき，やがては一定値に一様収束するであろうことが示された．

微分方程式への精度保証付き数値計算では，この推定誤差幅の増大量をいかに低く押えるかが最も重要な論点である．

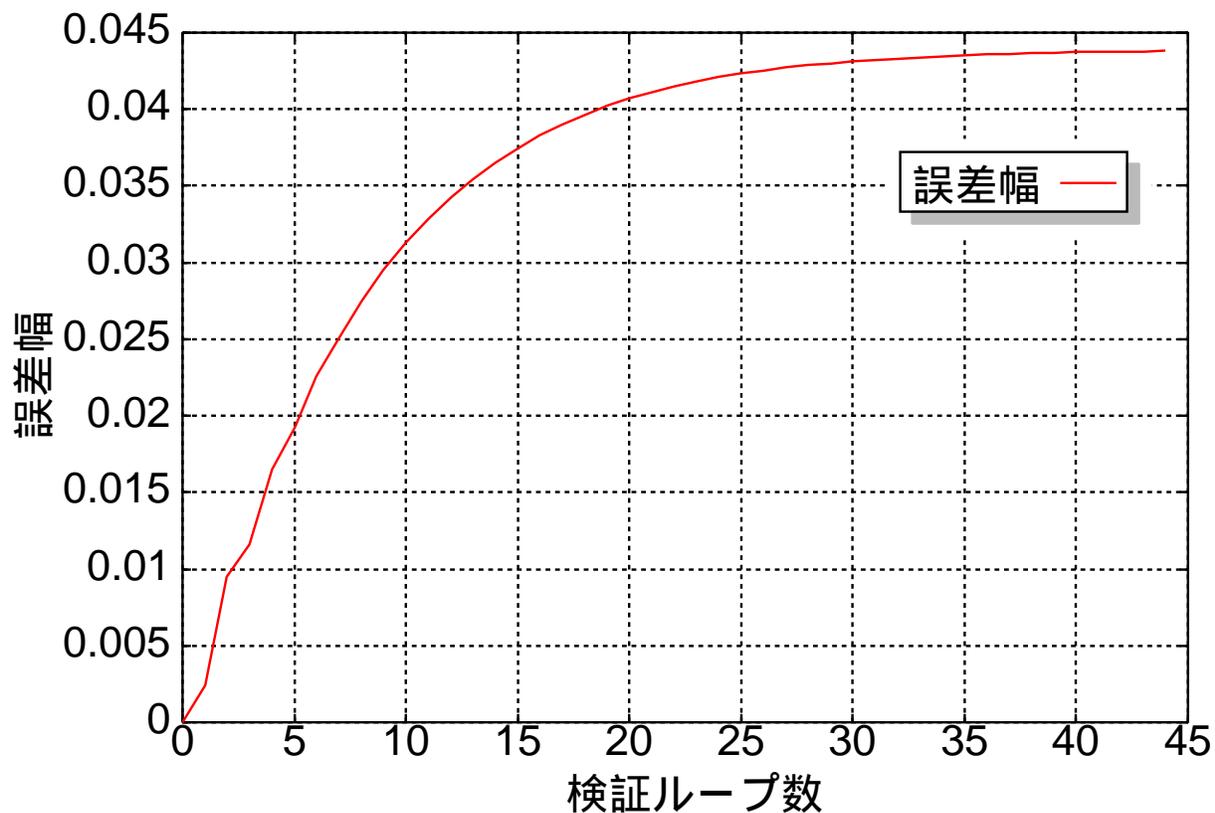


図 7.17: Re=100 での推定誤差幅の成長

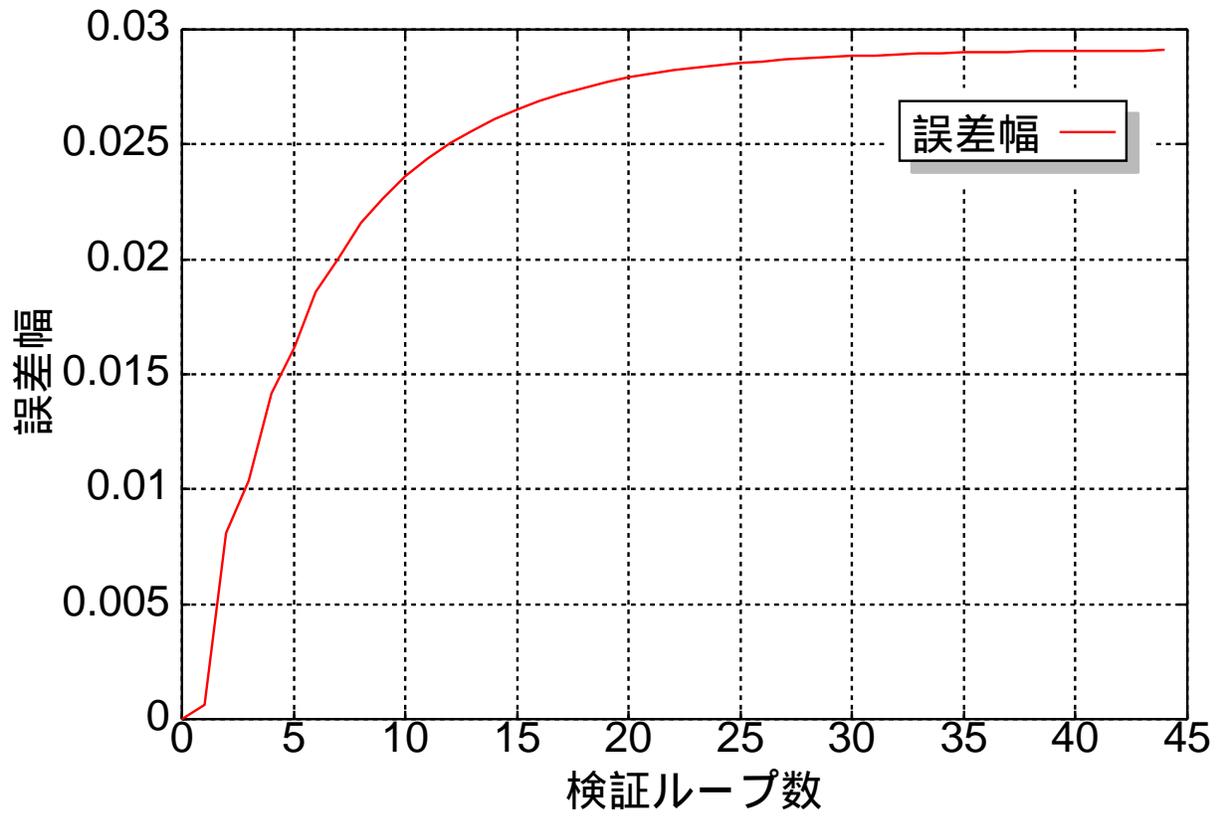


図 7.18:  $Re=300$  での推定誤差幅の成長

図 7.19 および図 7.20 はそれぞれ Reynolds 数=100 および 300 での計算において、検証を完了して求めた推定誤差幅分布のうち、管の中心軸 ( $y = 0.5$ ) における推定誤差分布と、二次元 Poiseuille 流の中心軸での圧力分布の厳密解の式からの値との関係を示したものである。

図に示されているように、緑の線で示される厳密解は、赤い二線で示される推定誤差範囲中に含まれることがわかる。

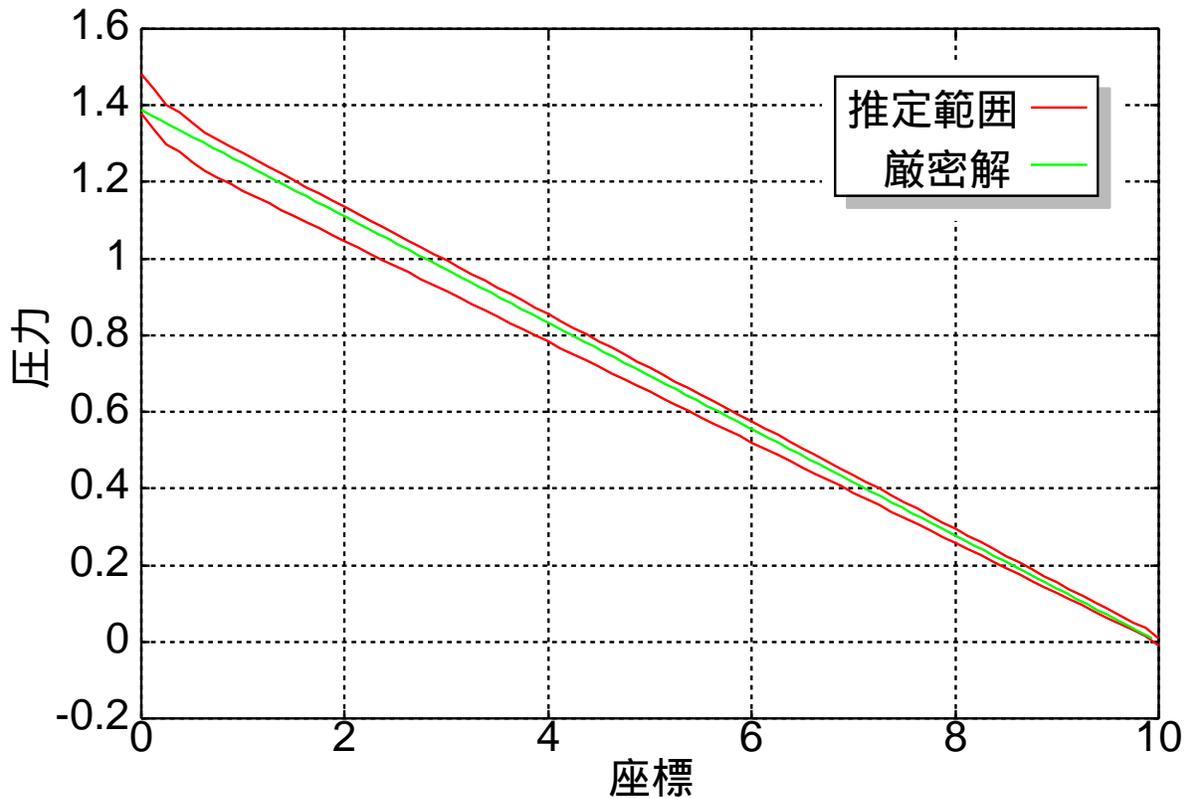


図 7.19: Re=100 での推定誤差範囲と厳密解

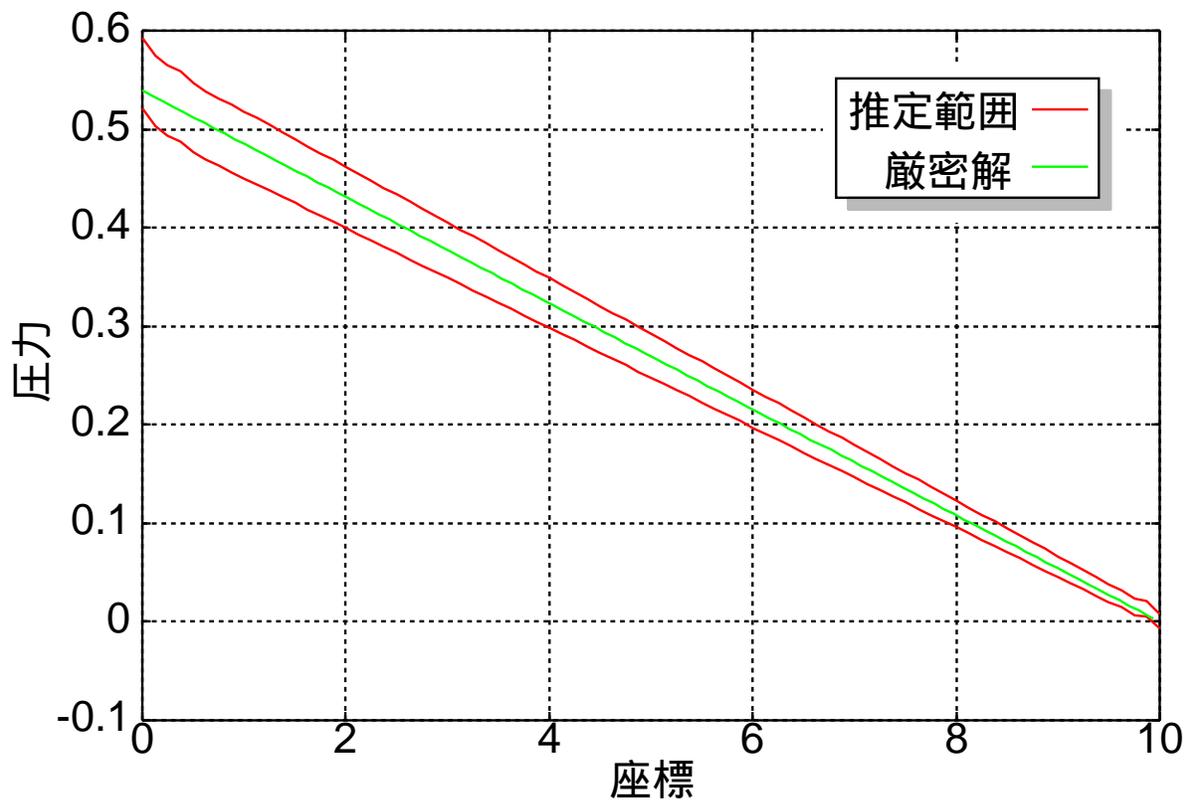


図 7.20:  $Re=300$  での推定誤差範囲と厳密解

次に，より細かなメッシュで求めた近似解に対する検証の方が，推定される誤差幅が小さくなることを確認するために， $8 \times 80$  分割のメッシュおよび  $16 \times 160$  分割のメッシュにおいて Reynolds 数=100， $\Delta t=0.01$  の計算を定常になるまで行って求めた圧力場に対する検証を行い，次のような結果を得た．

分割数	離散化変動量 $\alpha$	最大誤差幅	最大相対誤差	検証ループ数	ICCG 反復回数
$8 \times 80$	$8.99781 \times 10^{-3}$	$6.93331 \times 10^{-6}$	$7.29182 \times 10^{-3}$	24 回	54 回
$16 \times 160$	$2.08259 \times 10^{-3}$	$4.15929 \times 10^{-5}$	$1.53490 \times 10^{-3}$	999 回	104 回

表 7.3: 検証結果

ここで， $16 \times 160$  分割のメッシュでの検証ループ数が 999 回となっているのは，本来ならば検証条件に従い候補者集合  $P$  と写像  $T_h F(P)$  の大きさが

$$|P| \geq |T_h F(P)| \quad (7.4)$$

となるまで検証アルゴリズムを反復させるのであるが，候補者集合  $P$  と写像  $T_h F(P)$  各々の大きさの差は漸近的に減少するものの，完全な一致とは至らなかったため反復を 999 回で打ち切ったためである．

図 7.21(P.66) は各々のメッシュ分割数において検証アルゴリズム中での推定誤差幅の成長の推移を示したものである．

$8 \times 80$  分割メッシュでの誤差幅の方が  $16 \times 160$  分割メッシュにおける誤差幅よりも成長速度も早く大きくなることが示されている．

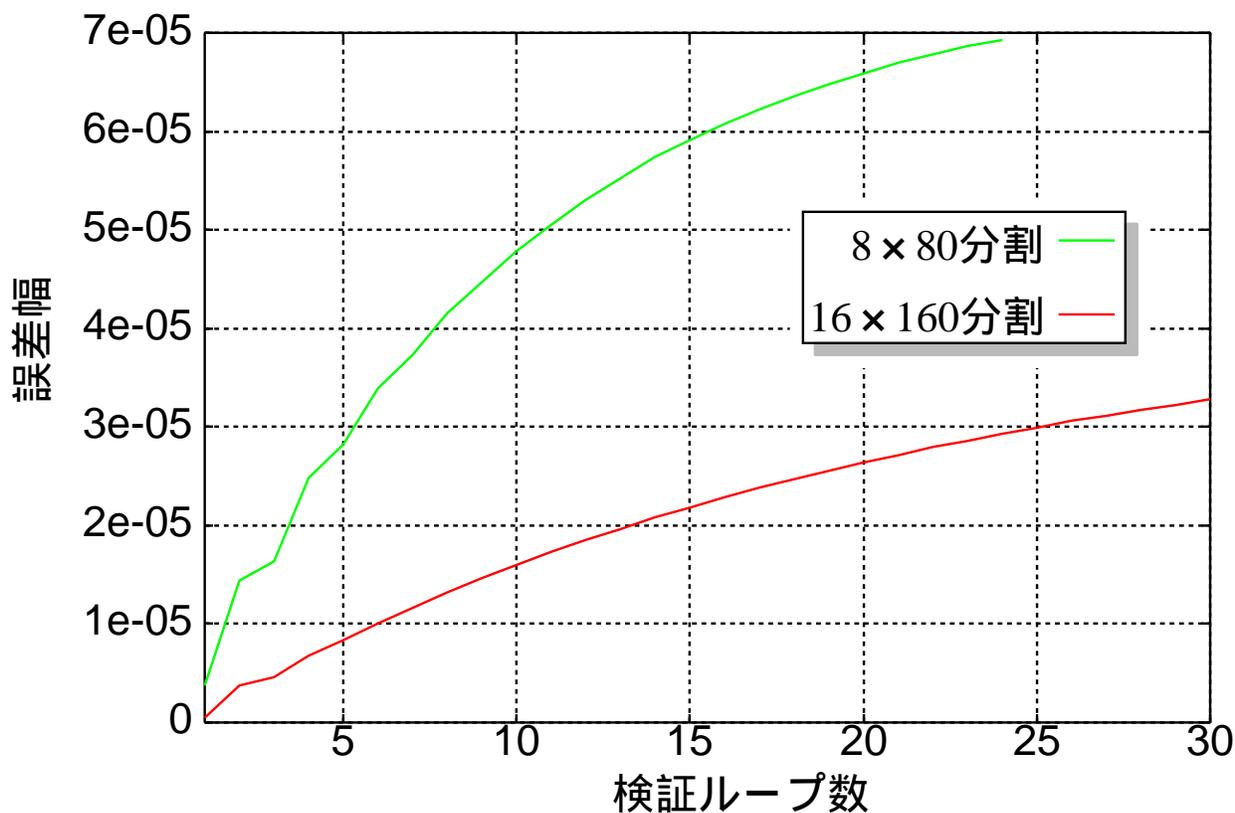


図 7.21: 推定誤差幅の成長

二次元管に対する検証では， $Re=100$  と  $Re=300$  の二つのケース，および  $8 \times 80$  分割と  $16 \times 160$  分割の二種類のメッシュにおいて厳密解を包含する誤差範囲を検証することに成功した．

しかし二次元管は非圧縮粘性流の流れシミュレーションでは最も単純なモデルであり，流速と圧力および誤差の分布も極めて明解であった．

この技術はシミュレーションの信頼性を保証する技術であり，信頼性を保証する技術それ自体の信頼性が重要であることは言うまでもない．

実際の科学・技術のアプリケーションとしての流体シミュレーションでは，当然ながらより複雑な計算モデルを対象とするため，このような単純なモデルによる実証だけでは「精度保証付きシミュレーション」の信頼性について十分な保証を与えるには至らないであろう．

そこで次節ではより複雑な形状であるバックステップ管内の流れ場を対象とし6章での議論を適用することを試みた．

## 7.2 検証例 2 , 二次元のバックステップ流れ

次に比較的複雑な形状の流れ場に対する精度保証を試みるために、図 7.22 に示すようなバックステップ流れに対する検証を行った。

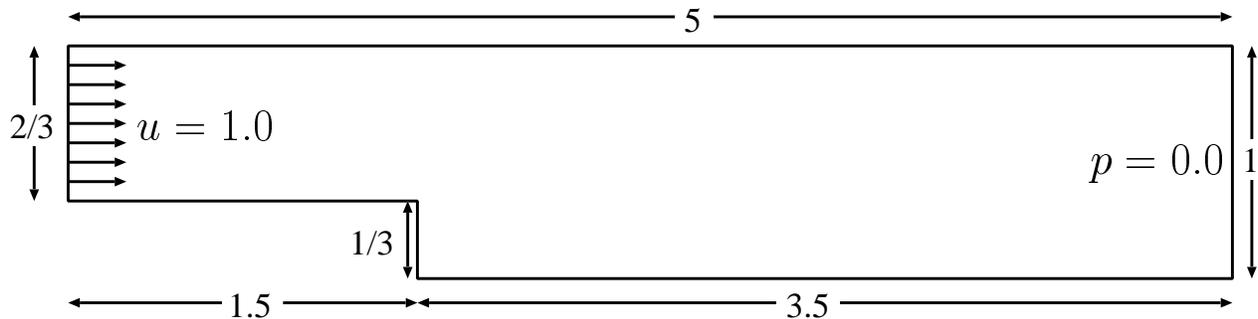


図 7.22: バックステップの形状と境界条件

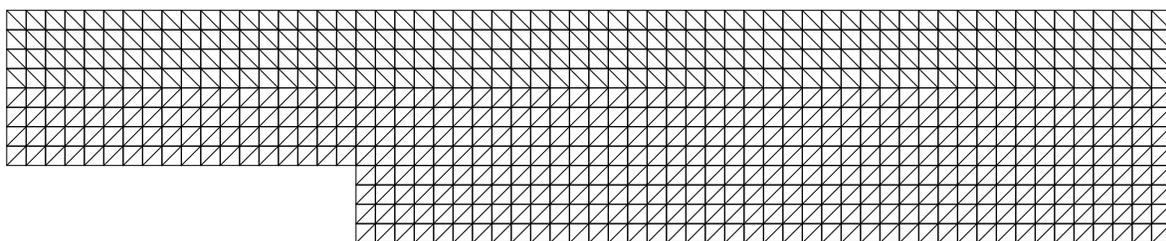
バックステップ管内での流れは、7.1 節で用いた単純な二次元管内での流れとは異なり、渦の発生する点でより複雑なモデルとなっている。

バックステップの計算結果では、前節での二次元管の流れと異なり、その複雑さ故に解析解を導くことが不可能であるため、前節での二次元の管での Poiseuille 流の厳密解のように、推定した誤差範囲内に厳密解が包含されるか否かの比較を行えない。

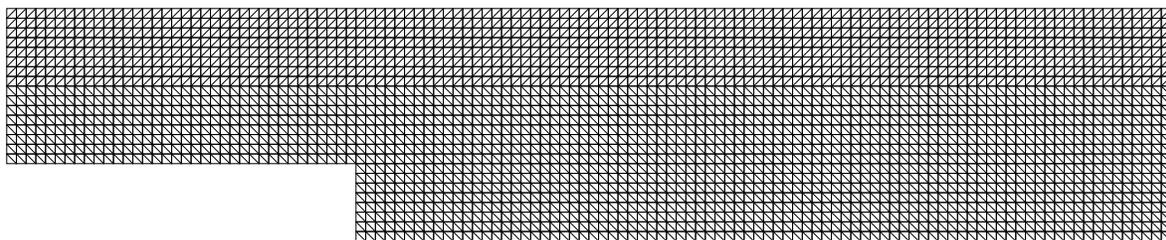
そのためここでは比較参照用を行うために図 7.23(P.68) に示すように二種類の細かさのメッシュを作成した。一つは  $12 \times 60$  分割であり、参照用のより細かいメッシュとして幅方向と長さ方向にそれぞれ二倍の分割数を持つ  $24 \times 120$  分割のメッシュを作成した。

$12 \times 60$  分割のメッシュを用いて計算した誤差範囲の評価を、 $12 \times 60$  分割のメッシュによる近似解よりも、より厳密解に近い近似解を求められることが期待できる  $24 \times 120$  メッシュでの結果と比較する。

$12 \times 60$  分割のメッシュを用いて前節の二次元管と同様に、 $Reynolds$  数 = 100 ,  $\Delta t = 0.01$  の条件で定常となるまで計算を行った結果の速度ベクトルと圧力コンターを図 7.24(P.68) に示す。



12×60 分割



24×120 分割

図 7.23: メッシュ分割  
上:12×60 分割, 下:24×120 分割

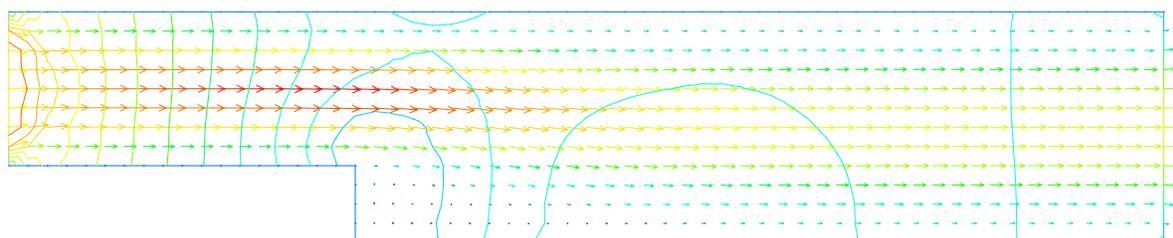


図 7.24: 流れ場の状態

図 7.24 に示される圧力分布に対し，6 章において議論した精度保証アルゴリズムを適用し，離散化誤差に関する有限次元の検証条件 (6.18) および丸目誤差に関する無限次元の検証条件 (6.19) の検証を行った．

その結果 3.5 節および 6.2 節で述べた検証アルゴリズムの反復の 26 回目において候補者集合  $P$  の大きさが写像  $T_h F(P)$  の大きさを越え，浮動点定理の検証条件

$$T_h F(P) \subset P \quad (7.5)$$

が成立し次のような結果が得られた．

Re	離散化変動量 $\alpha$	最大誤差幅	最大相対誤差	検証ループ数	ICCG 反復回数
100	$3.79391 \times 10^{-3}$	$9.95173 \times 10^{-6}$	$6.9394 \times 10^{-2}$	26 回	55 回

表 7.4: 検証結果

図 7.25(P.70) は本ケースの検証において，検証アルゴリズムの反復ループ中での推定誤差幅の成長の推移を示したものである．

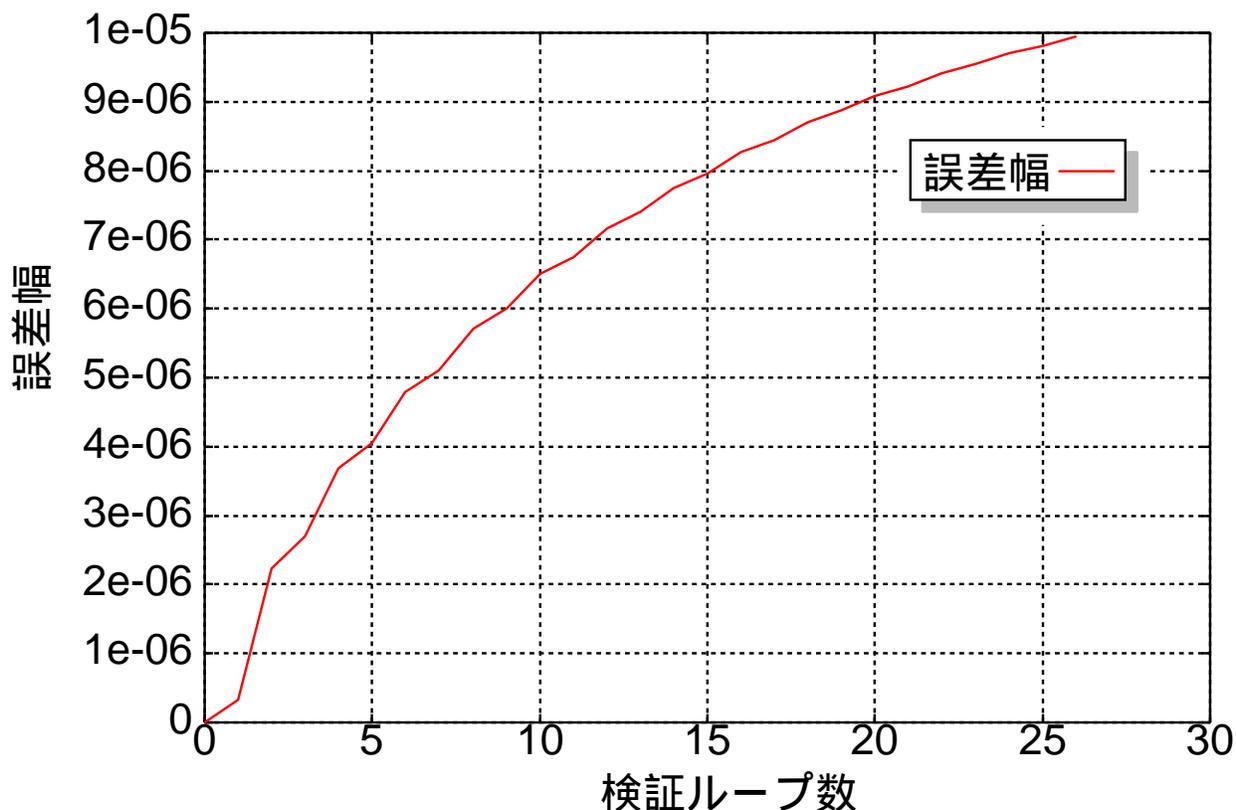


図 7.25: 推定誤差幅の成長

検証アルゴリズムの反復が進に従い，推定誤差量の成長量が次第に減少してゆくことが判る．このグラフによると誤差幅の成長はまだ続くようであるが，26 回目の反復において検証条件が成立しているため誤差幅は  $9.95173 \times 10^{-6}$  に確定している．

図 7.26(P.71) は検証アルゴリズムの反復ループ中において，候補者集合  $P$  と写像  $T_h F(P)$  それぞれの集合の大きさの変化を示したものである．

当初，写像による集合  $T_h F(P)$  は，候補者集合  $P$  の大きさと等しく検証条件

$$T_h F(P) \subset P \quad (7.6)$$

が成立していように思えるが，この時点では無限次元に関する検証条件 (6.19) が成立していないため，検証ループの反復は終了しない．

その後，写像  $T_h F(P)$  の方が候補者集合  $P$  よりも大きい状態が続くが，反復に従いその差は減少し 26 回目の反復で検証条件  $T_h F(P) \subset P$  が成立している．

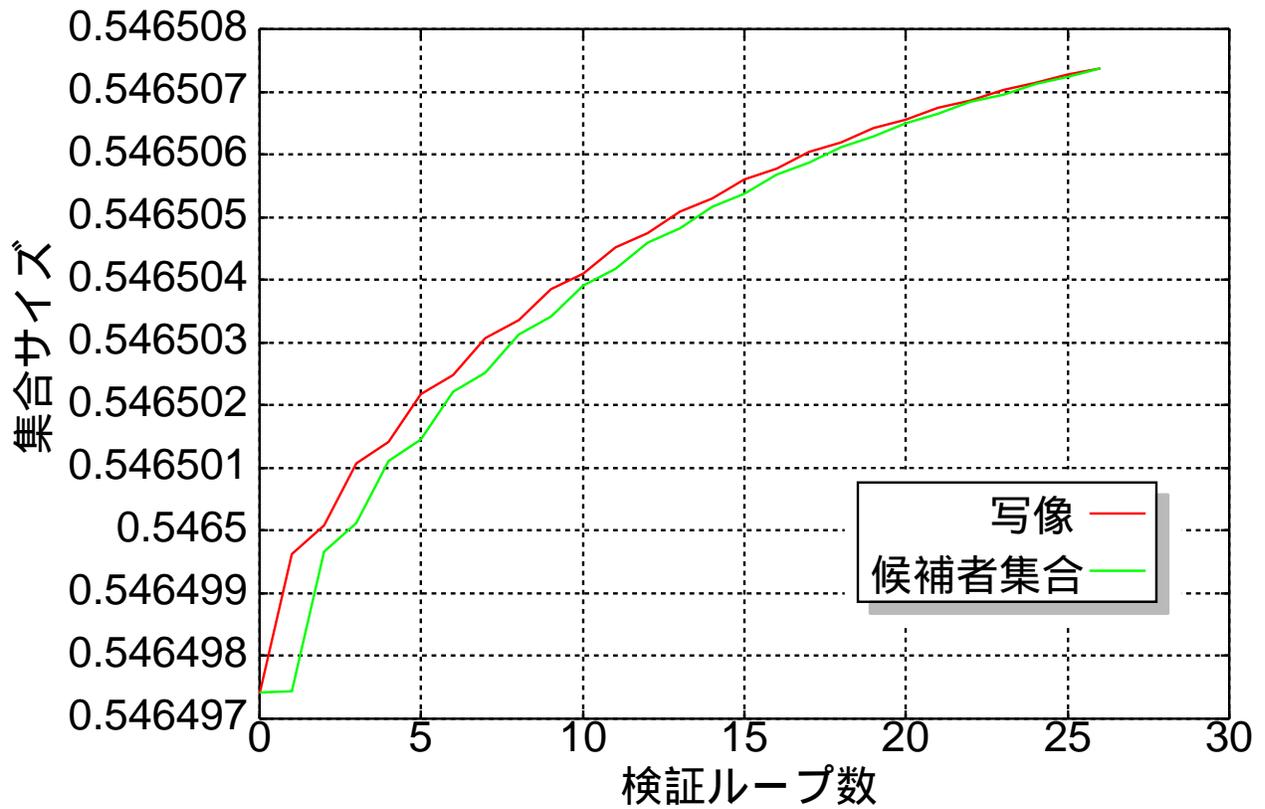


図 7.26: 集合サイズの推移

図 7.28(P.73) および図 7.29(P.74) は本ケースにおいて，検証を完了して求めた推定誤差分布のうち，管幅の  $y = 1/3$  および  $y = 2/3$  の位置における推定誤差分布と， $24 \times 120$  分割のメッシュをもちいて計算した圧力分布との関係を示したものである．

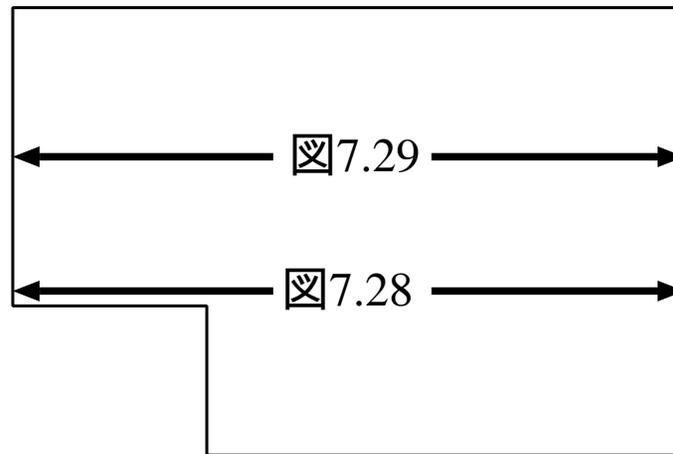


図 7.27: 圧力断面の位置

赤い線で示されているのが  $12 \times 60$  分割のメッシュによって計算した近似解よりもとめた推定誤差範囲，緑の線で示されているのが  $24 \times 120$  分割のメッシュにより求めた近似解である．

管の中心付近 ( $x = 5.0$ ) 以降の圧力変化が比較的ゆるやかな領域では  $12 \times 60$  分割メッシュよりもより厳密解に近いであろうと期待できる  $24 \times 120$  分割メッシュでの近似解を含んでいる．

しかし管の中心付近 ( $x = 5.0$ ) よりも流入側に近い領域および圧力の勾配が大きい領域では  $24 \times 120$  での近似解は推定範囲より外れてしまっている．

図 7.30 は検証により求められた誤差の分布を示したものである．ちょうど，乱れが生じるであろうステップ後方付近で大きな誤差が生じているように見え，渦にまきこまれる流れと，管後方へと流れ去る流れの分岐点でありその付近の壁面上での誤差が最大となっている．

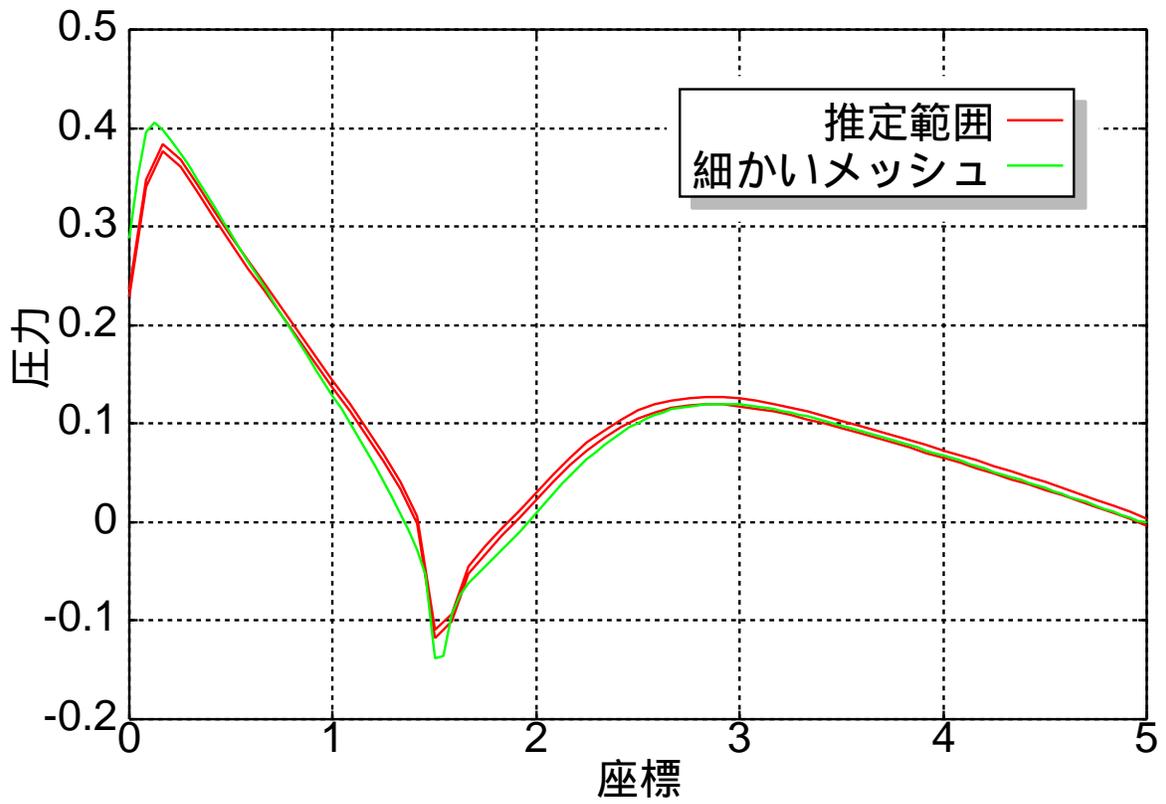


図 7.28:  $y=1/3$  での推定誤差幅と  $24 \times 120$  分割メッシュでの近似解

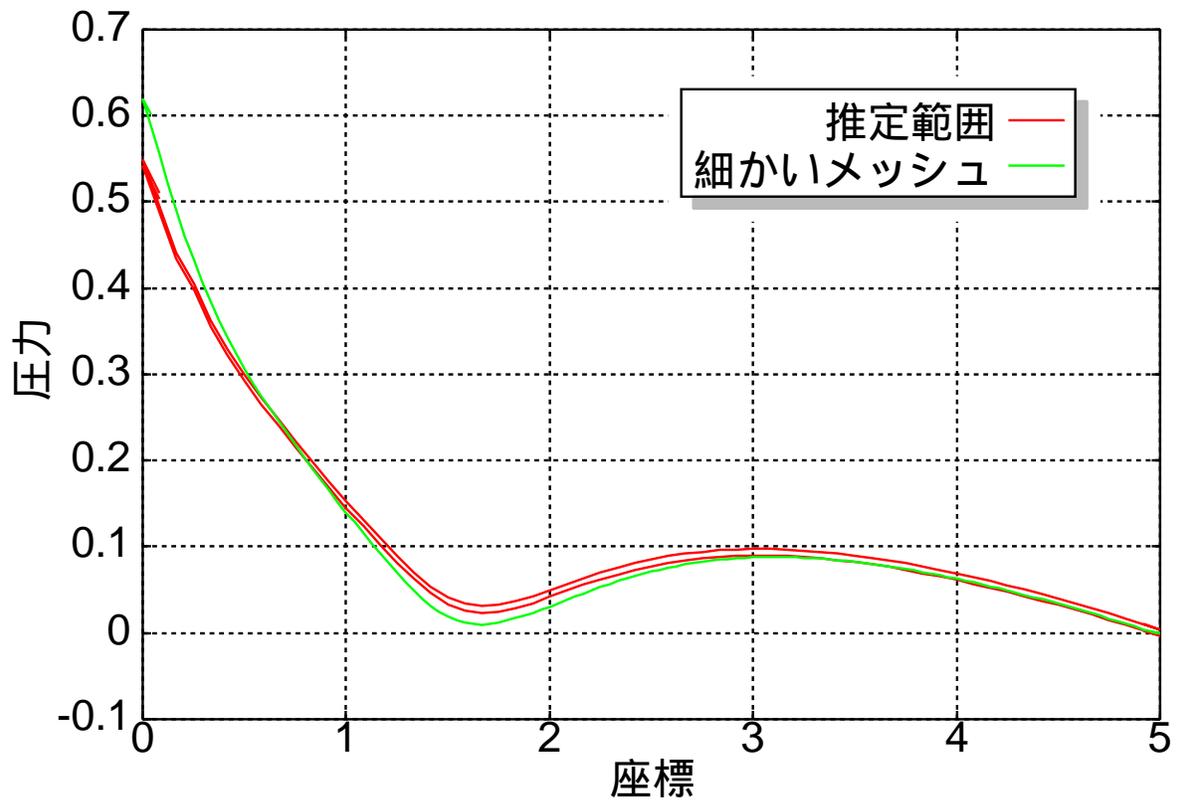


図 7.29:  $y=2/3$  での推定誤差幅と  $24 \times 120$  分割メッシュでの近似解

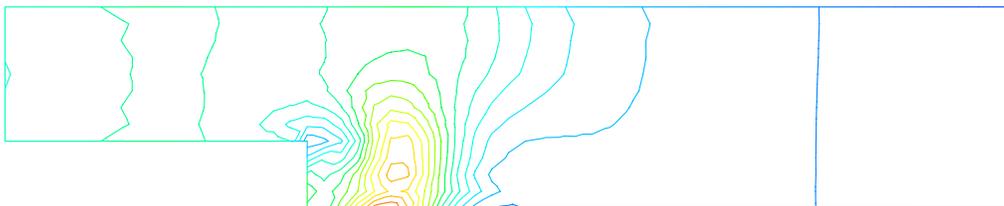


図 7.30: バックステップでの誤差コンター

## 第 8 章

### 結言

本研究では近年発達してきた精度保証付き数値計算の技法の一つであり，偏微分方程式への精度保証の技法である中尾理論を非圧縮粘性流を支配する Navier-Stokes 方程式へ適応する試みを行った．

4 章では第一に予備実験として常微分方程式に対する適応として次に示す常微分方程式の二点境界値問題

$$\begin{cases} -u'' - u = x \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

に対する定式化と検証を行った．

まず始めに問題  $-u'' - u = x$  を有限要素法により解き，それにより得られた近似解に対して中尾理論を用いた事後誤差評価を行った．

近似解を中心としてその周りに誤差領域を付与することにより作成した，問題の真の解を含む可能性がある集合（候補者集合）と，候補者集合から中尾理論に基づいた定式化から導き出される写像によって計算される像の集合は共に無限集合であり，検証条件に関する無限回の計算を必要とするが，それを避けるためにそれぞれの集合をその上限と下限で挟まれる区間として考え，プログラム中でその上限下限を意味する配列として扱う事により，無限回の計算が必要であった検証条件を離散化誤差と丸め誤差に関する二式の条件として表現することが出来た．

その結果 4.7 節に示すように，問題の厳密解を内包するような推定誤差領域を求めることに成功し，また，有限要素法により問題を解く際に，問題の定義される領域の分割数を増す方が近似解が含む誤差が少なくなり，推定誤差領域が小さくなることを確認した．

単純な微分方程式に対しての検証が成功したため，6 章において，この方法を非圧縮粘

性流の流速修正法によるシミュレーション中で現われる圧力 Poisson 方程式に対して適応することを試みた。

本研究では 3.5 章で述べた検証アルゴリズムを圧力 Poisson 方程式に対して適用するが、検証アルゴリズム中において写像  $T_h F(P)$  の計算は流速修正法の時間進展ループを適用して行う。流速修正法では未知関数を

$$\dots \rightarrow \text{中間流速} \rightarrow \text{流速} \rightarrow \text{圧力} \rightarrow \text{中間流速} \dots \quad (8.2)$$

の順で解くことにより  $\Delta t$  刻みの時間進展を行っているが、検証ループ中ではこれにより時間進展が起きてしまつては、候補者集合  $P$  と写像  $T_h F(P)$  が属する時刻が異なつてしまうため、6.2 節に示すように、これらを同じ時間に属するようにするために検証ループ中の計算では中間流速を固定することとし、先述した一次元での予備実験と同様に候補者集合  $P$  および写像  $T_h F(P)$  をその上限下限で挟まれる区間を意味する配列として扱い、離散化誤差に関する検証条件に必要な写像  $T_h F(P)$  を問題  $F(P)$  の有限要素法による離散化として捕らえることにより

$$\left[ \underline{f}_i \geq \underline{P}_i \quad \text{かつ} \quad \bar{f}_i \leq \bar{P}_i \right] \quad (8.3)$$

として表現。次いで丸め誤差に関する検証条件に必要な  $\|g\|_{L^2}$  を、計算領域  $\Omega$  を  $M$  個の小領域  $\partial\Omega$  として扱い計算可能な形で表した。

その結果 7.1 節に示すように、Poiseuille 流れとなる二次元管内流れの圧力場に対する検証では、Reynolds 数=100 および 300 での計算において候補者集合  $P$  および写像  $T_h F(P)$  の収束を得られ、厳密解を包含する推定誤差範囲の検証に成功し、また一次元の予備実験および  $8 \times 80$  分割と  $16 \times 160$  分割メッシュでの結果から判るように、より細かなメッシュによる近似解に対する検証の方が、推定される誤差幅が小さくなることを確認した。

さらに、7.2 節では流れ場のより複雑なモデルに対する検証の実験としてバックステップ流れに対する検証を、二次元管内流れと同様の手法を用い、Reynolds 数=100 の場合について  $12 \times 60$  分割のメッシュを用いて行った。その結果、検証アルゴリズムの有限回の反復によって候補者集合  $P$  および写像  $T_h F(P)$  の収束を得ることが出来、推定誤差範囲を求めることに成功した。

しかし  $12 \times 60$  分割メッシュによる近似解よりも、さらに真の回に近いであろうことが期待できる  $24 \times 120$  分割メッシュによる近似解と、求まった推定誤差範囲を比較すると、圧力に対する境界条件が規定されている流出口付近および圧力の変化量が小さな領域では、

推定されが範囲がより真の解に近い近似解を内包しているが、圧力に対する境界条件から最も遠い流入口付近および圧力の変化が激しい領域ではそれは見られなかった。

これは流速修正法では、流入口・流出口付近の境界条件に対して本来は一樣とは限らないにも関わらず、計算の都合上様に、 $p = 0$ 、あるいは  $\partial p / \partial n = 0$  の条件を規定せざるを得ないために生じてしまう乱れであると考えられる [12]。

さて、本研究では流体シミュレーションの精度・信頼性の向上を一助となることを目的として、近年発達している精度保証付き数値計算の技法の一つである中尾による微分方程式への精度保証付き数値計算を、流速修正法による非圧縮粘性流解析における圧力 Poisson 方程式に適用したわけだが、二次元管内流れに対しては推定誤差範囲中に真の解を含むことと、メッシュ数を増やすことにより推定誤差幅を小さくできることを確認できたが、残念ながらバックステップ流れにおいては推定誤差範囲中における真の解の包含を厳密には達成できなかった。そこで現時点で考えられる課題としては

- 流入口に圧力を与え、流出側を自由とした境界条件での検証。
- 内部の計算の完全区間演算化による丸め誤差の扱い厳密化
- 楕円型境界値問題である圧力 Poisson 方程式を導く流速修正法ではなく、混合補間法など他の有限要素法に対する適応
- 誤差評価結果に基づき自動的に要求精度を達成するアダプティブの機構の組み込み

等が考えられる。

本研究がシミュレーションの精度・ならびに信頼性をより向上させる一助となれば幸いである。

## 参考文献

- [1] 大石進一, “現代非線形科学シリーズ6 精度保証付き数値計算”, コロナ社, 2000
- [2] 大石進一, “応用解析セミナー 数値計算”, 裳華房, 1999
- [3] 中尾充宏, 山本野人, “チュートリアル応用数理の最前線 精度保証付き数値計算”, 日本評論社, 1998
- [4] 渡辺善隆, 中尾充宏, “精度保証付きシミュレーション [4] - 偏微分方程式の精度保証 -”, シミュレーション学会誌, Vol.19, No.3 2000 pp.208-215.
- [5] 日本数値流体力学会有限要素法研究会 編, “有限要素法による流れのシミュレーション”, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998
- [6] 青木幸也, “並列プログラミング虎の巻 SMP 版”, 日本 IBM SP/2 並列化プログラミング講習会資料, 1999
- [7] Schultz, “Spline analysis”, Prentice-Hall, 1973
- [8] 森正武, “FORTRAN77 数値計算プログラミング”, 岩波書店, 1998
- [9] 戸川隼人, 中島正之, 杉原厚吉, 野寺隆志ら編, “インターネット時代の数学”, 共立出版, 1999
- [10] 山本野人, “有限要素法の誤差についての一考察, メッシュ全体の近似能力を見積もる”, 京都大学理学研究科数学教室数学談話会講演要旨, 2000
- [11] 渡辺善隆, 山本野人, 中尾充宏, “Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価”, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.928(1995)pp.201-31.

- [12] 数值流体力学編集委員会 編, “数值流体力学シリーズ 1 非圧縮性流体解析”, 東京大学出版会, 1995
- [13] Mitsuhiro T. Nakao, Nobito Yamamoto and Yoshitaka Watanabe, “Constructive  $L^2$  Error Estimates for Finite Element Solutions of the Stokes Equations”, *Reliable Computing*, Vol.4, No.2 (1998) pp.115-124.
- [14] 巽友正, “新物理学シリーズ 21 流体力学”, 培風館, 1982

# 謝辞

本稿作成にあたり多数の有益な指導・御助言を賜った松澤照男教授に深く感謝致します。ならびに松澤研究室の皆様，幾度となく叱咤・激励をして下さった渡辺先輩，そして全ての先人達へ感謝いたします。