| | |
|---|---|
| Title | アロー論理における決定可能性に関する研究 |
| Author(s) | 森岡，竜司 |
| Citation | |
| Issue Date | 2001-03 |
| Type | Thesis or Dissertation |
| Text version | author |
| URL | http://hdl.handle.net/10119/1459 |
| Rights | |
| Description | Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士 |

修 士 論 文

# アロー論理における決定可能性に関する研究

指導教官　小野 寛晰教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

森岡 竜司

2001 年 2 月 15 日

# 目 次

# 第 1章

# 序説

## 1.1　背景

アロー論理は古典論理に様相演算子 $\circ, \otimes, \iota\delta$ を加えることにより得られる論理である。これらの様相演算子に意味を与えることにより、動的な状況を形式的に表現することが可能となるため、言語学や人工知能といった応用分野に広く利用されている。
アロー論理が他の様相論理と大きく異なるのは、クリプキモデルにおいて可能世界のそれぞれの元をアロー（矢）によって表現している点である。ただし、アローとは二項関係を一般化した概念である。
例えば、次の２つの文を考えてみる
 Man walks in the park； he whistles.
 He whistles； man walks in the park.
この２つの分の意味の違いを検討したいとき、例えば、古典論理の「かつ」のように、静的な意味論では Man と he が無関係と理解されるためにに２つの文は同じ意味を持つ。しかし、左から右へ向けて読むと言う動的な意味論を与えることにより、he が動的な要素であるとみなせば２つの文は異なる意味をもつことになる。
また、時間を形式化した時間論理においても、時間を点の集合とみなすか、区間の集合とみなすかという２つの考え方がある。点に比べて区間の集合を時間と考えると、点を幅のない区間として解釈できるので記述力がより強いと考えられる。

## 1.2 本論文の構成

本論文は次のような構成を持つ。第 2 章では、様相論理とアロー論理の定義及び、それらの基本的な概念について述べる。
第 3 章では、本論文の主テーマである決定可能性について、先行研究であるアロー論理の決定可能性を示す方法及び決定不可能性を示す方法について述べ、本研究との関連について触れる。
第 4 章では、Gyuris の結果を中心に結合律があっても決定可能性がいえるような体系およびそれらの証明方法について代数的な手法を用いた詳細な解説を行う。
第 5 章では、Gyuris の結果の拡張を項書換え系の手法を用いて行う。
最後に第 6 章で、本研究のまとめを行う。

# 第 2 章

# 様相論理とアロー論理

本章では、様相論理およびアロー論理の基本的な概念について説明を行う。

## 2.1 様相論理

様相論理は古典論理の拡張で、必然性や可能性を形式化するために考案された論理である。様相論理では古典論理の言語に階数 1 の様相演算子 $\Box$ や、階数 2 の様相演算子 $\circ$ が導入される。
例えば、 $\Box\mathbf{A}$ は「$\mathbf{A}$ は必然的である」、「$\mathbf{A}$ は常に未来において真である」、「$\mathbf{A}$ であることを知っている」などと読まれ、$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$ は「$\mathbf{A}$ のあとに常に $\mathbf{B}$ が起る」、「$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は同時に起る」、「$\mathbf{A}$ は $\mathbf{B}$ に含まれる」などと読まれる。
このように様相論理は知識、時間、信念、義務などを形式化するために様々な分野で応用されている。
以下では、できるだけ一般的な形で様相論理の定義を与えておく。

**Definition 2.1** (**modal similarity type**)
$\mathbf{O}$ を様相演算子の集合、$\rho : \mathbf{O} \longrightarrow \omega$ を $\mathbf{O}$ の各演算子に有限の階数を割り当てる写像とする。階数 0 の様相演算子を定数、階数 1 のとき *unary*、階数 2 のとき *binary* という。このとき、組 $\mathbf{S} = (\mathbf{O}, \rho)$ を *modal similarity type* という。

例えば、$\varphi, \psi$ を論理式とするとき古典論理で用いられる否定記号 $\neg$ は $\neg\varphi$ のように *unary* として用いられ、$\vee$ は $\varphi \vee \psi$ のように *binary* として用いられる。なお、様相演算子 $\Box$ は普通 $\Box\varphi$ のように *unary* として用いられる。

**Definition 2.2** (**modal language**)
$\mathbf{S}$ を *modal similarity type*、$\mathbf{Q}$ を命題変数の集合とする。このとき、組 $\mathbf{M} = (\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ を *modal language* という。ここで、 $\mathbf{M} = (\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ において論理式の集合 $\mathbf{Fm(M)}$ は帰納的に以下のように定義される。

*1.* 全ての命題変数は論理式である。

*2.* $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ が論理式の時、$\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \nabla(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ は論理式である。

ここで、 $\nabla$ は階数 $n$ の様相演算子である。
また、省略記号として、$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ , $\neg\varphi \vee \psi$ 、 $\neg\nabla\neg(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ の代わりにそれぞれ、$\varphi \wedge \psi$ 、 $\varphi \rightarrow \psi$ 、$\underline{\nabla}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ を用いる。

**Definition 2.3（代入）**
関数 $\sigma : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Fm}(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ を代入という。
代入 $\sigma$ は以下のように定義すると、準同型写像 $\sigma : \mathbf{Fm}(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Fm}(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ へ一意的に拡張される。

$$\begin{aligned} \sigma(\neg\varphi) &= \neg\sigma(\varphi) \\ \sigma(\varphi \vee \psi) &= \sigma(\varphi) \vee \sigma(\psi) \\ \sigma(\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n)) &= \nabla(\sigma\varphi_1, ..., \sigma\varphi_n) \end{aligned}$$

例えば、$\sigma(p) = \varphi, \sigma(q) = \psi$ とすると、$\sigma(p \vee \neg q) = \varphi \vee \neg\psi$ である。

**Definition 2.4（推論規則）**
以下の３つの推論規則を *orthdox* な推論規則という。

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ (MP)$$

$$\frac{\varphi}{\underline{\nabla}(\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}, \varphi, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n)}\ (UG)$$

$$\frac{\varphi}{\sigma\varphi}\ (SUB)$$

ここで、 $\nabla$ は階数 $n$ の様相演算子、$\sigma$ は代入である。

例えば、$\nabla$ を普通の様相演算子 $\diamond$ とするとき、$(UG)$ は $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$ となり、必然化の規則を表す。

$\Sigma$ を論理式の集合とする。$\Sigma$ が推論規則 $R$ に対して閉じているとは、$R$ の上に現れる論理式がすべて $\Sigma$ に属すとき、下に現れる論理式も $\Sigma$ に属すことである。

modal language $\mathbf{M}$ において、normal な様相論理とは以下のような条件を満たすような $\mathbf{Fm}(\mathbf{M})$ の部分集合 $\Lambda$ のことである。

1. $\Lambda$ は次にあげた (CT) および分配律 (DB) を含む。
   (CT) 古典論理において恒真な全ての論理式
   (DB) $\underline{\nabla}(p_1, .., p_{i-1}, p \to p', p_{i+1}, .., p_n) \to \underline{\nabla}(p_1, .., p_{i-1}, p', p_{i+1}, .., p_n)$
2. $\Lambda$ は orthodox な推論規則に対して閉じている。

**Definition 2.5（Kripke フレーム）**
$\mathbf{W}$ を空でない集合,$\mathbf{I}$ を階数 $n$ の様相演算子に対して $n+1$ 項の関係を与える関数とする。このとき、$\mathbf{W}$ を可能世界、 $\mathbf{I}$ を到達可能関係といい、組 $\mathbf{F} = (\mathbf{W}, \mathbf{I})$ を *Kripke* フレームという。

様相演算子 $\nabla$ に対して、$R_\nabla$ を $\rho(\nabla) + 1$ 項間の到達可能関係として *Kripke* フレームを $\mathbf{F} = (\mathbf{W}, \mathbf{R}_\nabla)$ と書く。

**Definition 2.6（Kripke モデル）**
$(\mathbf{W}, \mathbf{I})$ を *Kripke* フレームとする。$\mathbf{v}$ を $\mathbf{Q}$(命題変数の集合) から $\mathbf{W}$ の部分集合への関数とする。
このとき、$\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$ を *Kripke* モデルという。また、$\mathbf{v}$ を付値という。
関数 $\mathbf{v}$ は次のように定義すると、全ての論理式から $\mathbf{W}$ の部分集合への関数として拡張される。

$\mathbf{v}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{v}(\varphi) \cup \mathbf{v}(\psi)$

$\mathbf{v}(\neg\varphi) = \mathbf{W} - \mathbf{v}(\varphi)$

$\mathbf{v}(\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n)) = \{w_0 | \exists w_1, ..., w_n \in \mathbf{W}\ \ s.t\ \ \mathbf{R}_\nabla(w_0, ..., w_n)\ w_i \in \mathbf{v}(\varphi_i)\ (0 < i < n)\ \}$

例えば、$\nabla$ が $\Diamond$ のとき $R_\nabla$ は 2 項関係
$\mathbf{v}(\Diamond\varphi) = \{w_0 | \exists w_1 \in \mathbf{W}\ \ s.t.\ \mathbf{R}_\nabla(w_0, w_1)\ \ w_1 \in \mathbf{v}(\varphi)\}$ となり、通常の $\Diamond$ に対する付置に一致する。

$w \in v(\varphi)$ のとき、論理式 $\varphi$ は モデル $\mathbf{M}$ の $w$ で true であるといい、$\mathbf{M}, w \models \varphi$ と書く。また、$\mathbf{M}, w \models \varphi$ が全ての $w \in \mathbf{M}$ に対して成り立つとき、論理式 $\varphi$ はモデル $\mathbf{M}$ で

true であるといい、$\mathbf{M} \models \varphi$ と書く。

論理式 $\varphi$ が $w$ において $\mathbf{F}$ 上の任意の付値 $\mathbf{v}$ に対して true であるとき、$\varphi$ は 可能世界 $w$ で valid であるといい、$\mathbf{F}, w \models \varphi$ と書く。
論理式 $\varphi$ が全ての $w$ において valid であるとき $\varphi$ はフレーム $\mathbf{F}$ で valid であるといい、$\mathbf{F} \models \varphi$ と書く。さらに、フレームのクラス $\mathbf{K}$ に対して $\mathbf{K}$ に属す任意のフレームで、valid であるとき単に $\mathbf{K}$ で valid であるといい、$\mathbf{K} \models \varphi$ と書く。

Kripke フレーム $\mathbf{F}$ で valid となる論理式全体を $\mathbf{L}(\mathbf{F})$ で表す。

$$\mathbf{L}(\varphi) = \{\varphi | \mathbf{F} \models \varphi\}$$

また、フレームのクラス $\mathbf{C}$ に対して

$$\mathbf{L}(\mathbf{C}) = \bigcap \{\mathbf{L}(\mathbf{F}) | \mathbf{F} \in \mathbf{C}\}$$

と定義する。

## 2.2　アロー論理

アロー論理は動的な状況を論理的に記述するために使われる。例えば、１００ｍ走っている状況を２０ｍと８０ｍに分けて記述するとき最初の２０ｍ走っている状況を $\varphi$ 、次の８０ｍを走っている状況を $\psi$ と考えて、$\varphi \circ \psi$ で１００ｍを走っている状況を記述できる。このとき、古典論理における $\vee$ や $\wedge$ では表現できない順序を意味の中に取り入れることができる。また、「立ち上がる」を $\varphi$ で記述したとき、$\otimes\varphi$ でその逆の動作「座る」を表現することもできる。このようにアロー論理は動的な表現を行うことができる。

様々なアロー論理が知られているが、以下ではもっとも基本的なアロー論理について紹介する。本論文で用いられるアロー論理の様相演算子は $\{\, \circ, \otimes, \iota\delta \,\}$ の３つである。また、それぞれの階数は２、１、０である。これらの直観的な意味はそれぞれ、結合、逆、非遷移といった操作である。このことについてはアローフレームのところでもう少し詳しく述べる。
本論文で扱うアロー論理は言語として $\neg, \vee, \wedge, \to, \circ, \otimes, \iota\delta$ を持つ。

論理式 は以下のように帰納的に定義される。

1. 全ての命題変数は論理式である。また、$\iota\delta$ も論理式である。
2. $\phi$ と $\psi$ が論理式ならば, $\neg\phi$ , $\phi \vee \psi$ , $\phi \circ \psi$ $\otimes\phi$ もまた論理式である。

公理としては以下のものを持つ。

(**PT**) 古典論理において恒真な全ての論理式。

(**K**) $((p_0 \vee p_1) \circ p_2) \leftrightarrow ((p_0 \circ p_2) \vee (p_1 \circ p_2))$

$(p_0 \circ (p_1 \vee p_2)) \leftrightarrow ((p_0 \circ p_1) \vee (p_0 \circ p_2))$.

$\otimes (p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (\otimes p_0 \vee \otimes p_1)$

**K** は様相演算子の $\vee$ に対する分配律のことである。

推論規則としては Modus Ponens , Substitution , Necessitation を持つ
これら３つの $(NES)$ は $(UG)$ の特別な形となっている。

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,(MP) \qquad \frac{\phi}{\sigma\phi}\,(SUB)$$

$$\frac{\varphi}{\neg(\neg\varphi \circ \neg\psi)} \qquad \frac{\psi}{\neg(\neg\varphi \circ \neg\psi)}\,(NEC)$$

$$\frac{\varphi}{\neg \otimes \neg\varphi}\,(NEC)$$

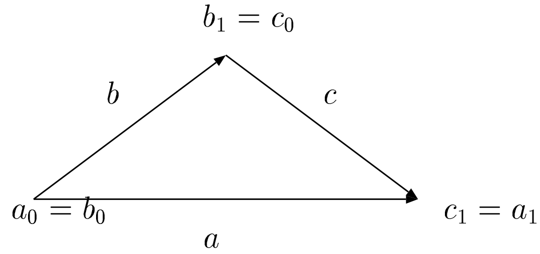
## 2.3 Kripke フレーム

アロー論理の特徴が現れるのは、フレームに関する概念である。通常、様相論理では論理式を点とみなすことでフレームが構成されるが、アロー論理においては論理式をアローとみなすことでフレームが構成される。

論理式をアローとみなすために、アローの基本的な概念を考えてみる。
例えば、ベクトル空間におけるベクトルの和、関数における合成、言語における結合など、結合という概念が自然であると考えられる。そこで最初に次の３項関係を定義する。

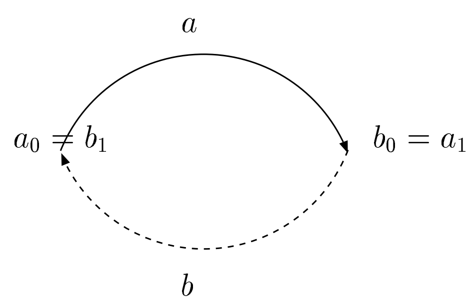
$a = (a_0, a_1), b = (b_0, b_1), c = (c_0, c_1)$ とする。

$$\mathbf{C}_{abc} \Leftrightarrow a_0 = b_0, b_1 = c_0, c_1 = a_1$$



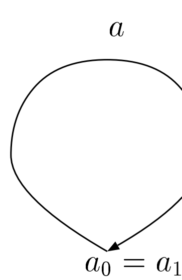

次に、ベクトル空間における逆ベクトル、関数における逆関数など、逆元という概念も基本的であると考えられる。しかし、この概念は言語学においては適当な例はない。この、２項関係を次のように定義する。

$$\mathbf{R}_{ab} \Leftrightarrow a_0 = b_1, b_0 = a_1$$




最後に、アローの中でもどこにも遷移しないようなアローを考えておく、これは恒等写像や単位元の概念に対応する。

$$\mathbf{I}_a \Leftrightarrow a_0 = a_1$$



$\mathbf{W}$ を空でない集合、$\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{I}$ をそれぞれ $\mathbf{W}$ の３項、２項、１項関係で上で述べたような関係を抽象化した関係とする。このとき、$\mathbf{W}$ を可能世界、$\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I}$ を到達可能関係といい、組 $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ をアローフレームという。

$(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ をアローフレームとする。
また、$\mathbf{v}$ を命題変数の集合から $\mathbf{W}$ の部分集合への関数とする。このとき、組 $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ をアローモデルという。
与えられたアローモデル $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ に対して、$\mathbf{M}$, $a \models \phi$ ($\mathbf{M}$ の世界 $a$ で $\phi$ がなりたつと読む), は次のように帰納的に定義される。

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{M}, a \models p & \Leftrightarrow & a \in \mathbf{V}(p) \\
\mathbf{M}, a \models \iota\delta & \Leftrightarrow & \mathbf{I}a \\
\mathbf{M}, a \models \neg\phi & \Leftrightarrow & \mathbf{M}, a \not\models \phi \\
\mathbf{M}, a \models \phi \vee \psi & \Leftrightarrow & \mathbf{M}, a \models \phi \text{ または } \mathbf{M}, a \models \psi \\
\mathbf{M}, a \models \phi \circ \psi & \Leftrightarrow & \text{ある } b, c \text{ が存在して} \mathbf{C}abc \text{ かつ } \mathbf{M}, b \models \phi \text{ かつ } \mathbf{M}, c \models \psi \\
\mathbf{M}, a \models \otimes\phi & \Leftrightarrow & \text{ある } b \text{ が存在して} \mathbf{R}ab \text{ かつ } \mathbf{M}, b \models \phi.
\end{array}
$$

すなわちアローフレームとは２．１節で定義した Kripke フレームで、$\mathbf{R}_{\iota\delta}$, $\mathbf{R}_{\circ}$, $\mathbf{R}_{\otimes}$ としたものに他ならない。
アロー論理の論理式に対する恒真性は２．１節と同様に定義される。

## 2.4 ２次元様相論理

この節では様相論理においてフレームの積を導入した多次元様相論理の概説および多次元様相論理とアロー論理との関係について述べる。

次のような modal similarity type を考える。
階数０の様相演算子： $\iota\delta$
階数１の様相演算子： $\Diamond_H, \Diamond_V, \otimes$
階数２の様相演算子： $\circ$
２．１節の定義によりこれらの modal similarity に対して Kripke 流の意味論を与えるこ

とができる。

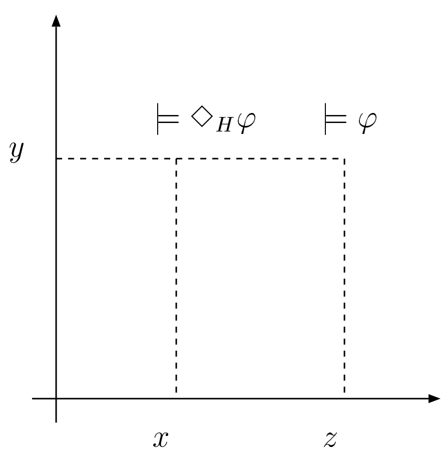
ある集合 $\mathbf{U}$ に対して $\mathbf{W}=\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ とする。また、$\mathbf{I}$ を以下を満たすような関数とする。
$\mathbf{I}(\iota\delta)=\{(u,v)|u=v\}$
$\mathbf{I}(\Diamond_H)=\{((u,v),(x,y))|v=y\}$
$\mathbf{I}(\Diamond_V)=\{((u,v),(x,y))|u=x\}$
$\mathbf{I}(\otimes)=\{((u,v),(x,y))|u=y,v=x\}$
$\mathbf{I}(\circ)=\{((u,v),(w,x),(y,z))|u=w,v=z,x=y\}$
このとき、$\mathbf{F}=(\mathbf{W},\mathbf{I})$ を square フレーム という。

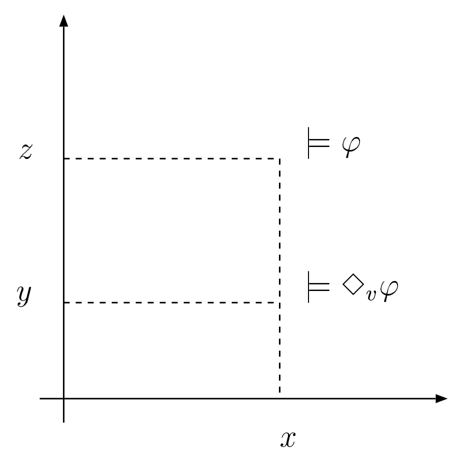
square モデルは square フレーム をもとに定義される。Kripke フレームを考える時は、square フレーム は universe $\mathbf{U}$ から一意的に決まることをここで注意しておく。

$\mathbf{M}$ を square model 、$(x,y)\in\mathbf{W}$ とする。このとき、$\mathbf{W}$ の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ は以下のように帰納的に定義される。

$(x,y)\models\Diamond_H\varphi \iff$ ある $z\in\mathbf{U}$ が存在して $(z,y)\models\varphi$
$(x,y)\models\Diamond_V\varphi \iff$ ある $z\in\mathbf{U}$ が存在して $(x,z)\models\varphi$

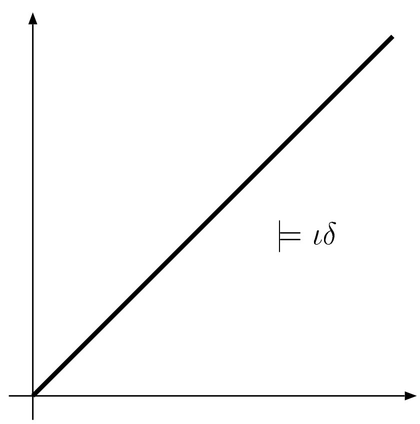
これらは次の図のようになる。

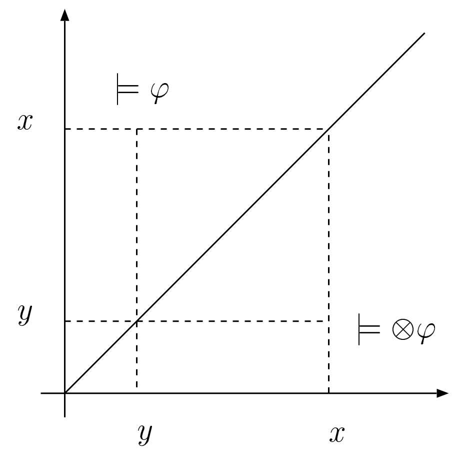


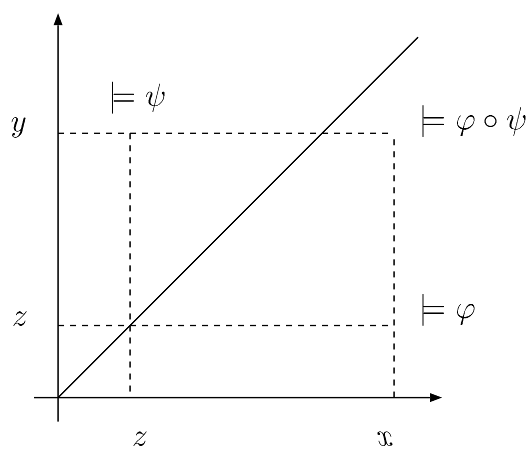



$(x, y) \models \iota\delta \iff x = y$
$(x, y) \models \otimes\varphi \iff (y, x) \models \varphi$
$(x, y) \models \varphi \circ \psi \iff$ ある $z \in \mathbf{U}$ が存在して $(x, z) \models \varphi$ かつ $(z, y) \models \psi$

これらは次の図のようになる。



このように、２次元様相論理の様相演算子の中から数学的に自然な演算 $\circ$ 、逆元 $\otimes$ 、単位元 $\iota\delta$ といった演算子を取り出した様相論理としてアロー論理を考えることもできる。

ここで、アローフレームのクラス分けを行う。
アローフレームを可能世界が持つ性質に応じて、以下の３つにクラス分けする。

**R**-frame $\Leftrightarrow$ 可能世界が反射的
**S**-frame $\Leftrightarrow$ 可能世界が対称的
**T**-frame $\Leftrightarrow$ 可能世界が推移的

ここで、反射的、対称的、推移的とは以下のような関係のことである。

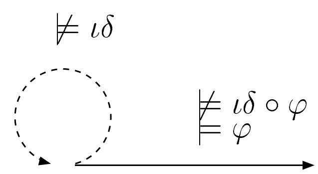
関係 **U** が反射的 $\Leftrightarrow x\mathbf{U}x$
関係 **U** が対称的 $\Leftrightarrow x\mathbf{U}y$ ならば $y\mathbf{U}x$
関係 **U** が推移的 $\Leftrightarrow x\mathbf{U}y$ かつ $y\mathbf{U}z$ ならば $x\mathbf{U}z$

valid な論理式と上でクラス分けを行ったフレームの関係は次のようになる。

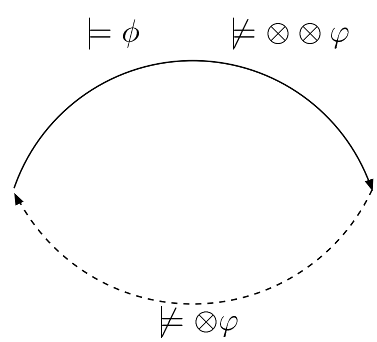
（１）**F** が **R**-frame $\Leftrightarrow \iota\delta \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$ が **F** で valid
（２）**F** が **S**-frame $\Leftrightarrow \otimes\otimes\varphi \leftrightarrow \varphi$ が **F** で valid
（３）**F** が **T**-frame $\Leftrightarrow \varphi \circ (\psi \circ \chi) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \chi$ が **F** で valid

(証明)
（１）($\Rightarrow$)
R-frame **F** を $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ とする。$(x, y) \in \mathbf{W}$ に対して、$(x, y) \models \iota\delta \circ \varphi$ とする。このとき、ある $z$ が存在して $(x, z) \models \iota\delta$ かつ $(z, y) \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ ある $z$ が存在して $x = z$ かつ $(z, y) \models \varphi$
$\Leftrightarrow (x, y) \models \varphi$
逆に、$(x, y) \models \varphi$ とする、可能世界 **W** が反射的であるから、$(x, x) \in \mathbf{W}$ が常に成り立つ。
$\Leftrightarrow (x, x) \models \iota\delta$ かつ $(x, y) \models \varphi$
$\Leftrightarrow (x, y) \models \iota\delta \circ \varphi$
したがって、 $\iota\delta \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$ は **F** で valid になる。

(⇐)
対偶を示す。
与えられたフレームが反射的でないとすると以下に示すようなモデルが作られる。これは、明らかに $\iota\delta \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$ を偽にするようなモデルである。
図で点線はアローが存在していないことを表している。

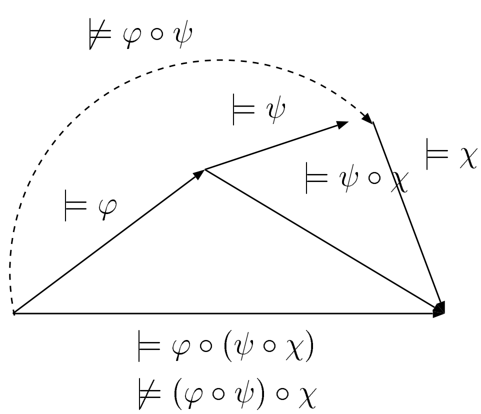



（2）(⇒)
S-frame $\mathbf{F}$ を $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ とする。$(x, y) \in \mathbf{W}$ に対して、 $(x, y) \models \otimes \otimes \varphi$ とする。このとき、$(y, x) \models \otimes\varphi$
$\Leftrightarrow (x, y) \models \varphi$
逆に、$(x, y) \models \varphi$ とする。可能世界 $\mathbf{W}$ が対称的であるから、$(x, y) \in \mathbf{W} \Rightarrow (y, x) \in \mathbf{W}$ が成り立つ。よって
$\Rightarrow (y, x) \models \otimes\varphi$
$\Rightarrow (x, y) \models \otimes \otimes \varphi$
したがって、$\otimes \otimes \varphi \to \varphi$ は $\mathbf{F}$ で valid になる。
(⇐)
対偶を示す。
与えられたフレームが対称的でないとすると以下に示すようなモデルが作られる。これは、$\otimes \otimes \varphi \to \varphi$ を偽にするようなモデルとなっている。



（3）($\Rightarrow$)
T-frame $\mathbf{F}$ を $(\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ とする。$(x, y) \in \mathbf{W}$ に対して、$(x, y) \models \varphi \circ (\psi \circ \chi)$ とする。
このとき、ある $u$ が存在して $(x, u) \models \varphi$ かつ $(u, y) \models \psi \circ \chi$
$\Rightarrow$ ある $u$ が存在して $(x, u) \models \varphi$ かつ、ある $v$ が存在して $(u, v) \models \psi$ かつ $(v, y) \models \chi$
ここで、可能世界 $\mathbf{W}$ が推移的であるから。$(x, u), (u, v) \in \mathbf{W} \Rightarrow (x, v) \in \mathbf{W}$ が成り立つ。
よって、
$\Rightarrow$ ある $v$ が存在して $(x, v) \models \varphi \circ \psi$ かつ $(v, y) \models \chi$
$\Rightarrow (x, y) \models (\varphi \circ \psi) \circ \chi$
逆も同様に示される。

($\Leftarrow$) 対偶を示す。
与えられたフレームが推移的でないとすると以下に示すようなモデルが作られる。これは、$\varphi \circ (\psi \circ \chi) \to (\varphi \circ \psi) \circ \chi$ を偽にするようなモデルとなっている。




### 2.4.1 Kripke 完全性

$\Lambda$ を様相論理とする。あるフレームのクラス $\mathbf{C}$ が存在して

$$\Lambda = \mathbf{L}(\mathbf{C}) = \bigcap \{\mathbf{L}(\mathbf{F}) | \mathbf{F} \in \mathbf{C}\}$$

が成り立つとき $\Lambda$ は Kripke 完全であるという。

Kripke完全性を示すための方法として、canonicalモデルを用いる方法がある。canonicalモデルは次のように構成される。

**Definition 2.7** $\Lambda$ を様相論理、$\mathbf{A}$ をその論理式として、$\neg\mathbf{A} \notin \Lambda$ のとき、$\mathbf{A}$ は $\Lambda$ -*consistent* であるという。また、$\mathbf{C}$ を様相論理式の集合としたとき、任意の有限個の $\mathbf{C}$ の要素 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k$ について $\neg(\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_k) \notin \Lambda$ であるとき、$\mathbf{C}$ は $\Lambda$ -*consistent* であるという。

**Definition 2.8** $\Lambda$ を様相論理としたとき、次の条件を満たす $\Lambda$ の部分集合 $\Gamma$ を $\Gamma$ -*maximal* という。
*(1)* $\Gamma$ は $\Lambda$ -*consistent*
*(2)* 任意の論理式に対して、$\mathbf{A} \in \Gamma$ かつ $\neg\mathbf{A} \in \Gamma$ のいずれかが必ず成り立つ。

**Theorem 2.9** $\Lambda$ を様相論理としたとき、任意の $\Lambda$ -*consistent* な論理式の集合に対しこれを含むような $\Lambda$ -*maximal* な集合が存在する。

**Definition 2.10** $\Lambda$ を様相演算子 $\{\Box_1, ..., \Box_n\}$ を持つ様相論理とする。$\mathbf{W}^\Lambda$ を $\Lambda$ -*maximal* な集合全体とし、$s, t \in \mathbf{W}^\Lambda$ に対し

$$s\mathbf{R}_i^\Lambda t \overset{def}{\Leftrightarrow} \{\mathbf{A} | \Box_i \mathbf{A} \in s\} \subseteq t$$

として到達可能関係を定めたとき、フレーム $\mathbf{F}^\Lambda = (\mathbf{W}^\Lambda, \mathbf{R}_1^\Lambda, ..., \mathbf{R}_n^\Lambda)$ を $\Lambda$ の *canonical* フレームという。
さらに、$\mathbf{F}^\Lambda$ 上に

$$v^\Lambda(p) = \{s \in \mathbf{W}^\Lambda | p \in s\}$$

としたとき、モデル $\mathbf{M}^\Lambda = (\mathbf{F}^\Lambda, v^\Lambda)$ を $\Lambda$ の *canonical* モデルという。

**Definition 2.11** $\Lambda$ を様相論理とする。

$$\Lambda = \{\mathbf{A} | \mathbf{F}^\Lambda \models \mathbf{A}\}$$

が成り立つとき、$\Lambda$ は *canonical* であるという。

このとき、$\Lambda = \mathbf{L}(\{\mathbf{F}^\Lambda\})$ と表せるので、$\Lambda$ は Kripke 完全となる。

# 第 3 章

# 決定可能性

## 3.1　決定可能性について

　論理式が与えられたとき、その論理式の証明可能性、恒真性、充足可能性などを判定する有限の手続きが存在するか否かを研究することが論理学における主要な研究テーマとなっている。

**Definitoin 3.1（決定可能性）**
論理 $\Lambda$ に対して、論理式 $\varphi$ が与えられたとき $\varphi \in \Lambda$ か否かを判定する有限の手続きが存在するとき、論理 $\Lambda$ は決定可能であるという。

　与えられた論理の決定可能性を示す有効な手段は 2 つある。
一つは、その論理が有限モデル性を持つことを示す方法である。有限モデル性を持つ論理は有限公理化可能であれば決定可能性がいえる。もう一つは、その論理を **Gentzen** 流のシーケント計算によって形式化を行い、カット除去定理が成り立つことを示す方法である。次節ではアロー論理においての有限モデル性について議論を行う。

## 3.2 有限モデル性

アロー論理 $\Lambda$ が有限フレームのあるクラスに関して完全であるとき $\Lambda$ は有限モデル性を持つといわれる。
すなわち、$\Lambda$ がフレームのクラス $\mathbf{K}$ に関して完全であるとする。$\varphi$ を任意の論理式としたとき、$(\mathbf{W}, \mathbf{R}_\nabla) \in \mathbf{K}$ となるようなモデル $\mathbf{M} = (\mathbf{W}, \mathbf{R}_\nabla, \mathbf{v})$ に対して、ある $a \in \mathbf{W}$ が存在して $\mathbf{M}, a \not\models \varphi$ が成り立つとする。そのとき、$\mathbf{W}^*$ が有限集合であるような $(\mathbf{W}^*, R^*_\nabla) \in \mathbf{K}$ に対し、ある $a^* \in \mathbf{W}^*$ が存在して $\mathbf{M}^*, a^* \not\models \varphi$ となるような $\mathbf{M}^*$ を作ることができれば $\Lambda$ の有限モデル性が導かれる。

有限モデル性を示す代表的な手法が次に述べる filtration である。

### filtration

$\mathbf{K}$ をフレームのクラス $\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$ を $\mathbf{F} \in \mathbf{K}$ である Kripke モデル、$\Sigma$ を $\mathbf{K}$ で valid となるような論理式の集合で、部分論理式と Boolean 結合子で閉じているものとする。このとき、$\equiv_\Sigma \subseteq \mathbf{W} \times \mathbf{W}$ を次のように定義する。

$$\text{任意の } w, v \in \mathbf{W} \text{ に対し}$$
$$w \equiv_\Sigma v \Leftrightarrow (\forall \varphi \in \Sigma)\mathbf{M}, w \models \varphi \;\; \textit{iff} \;\; \mathbf{M}, v \models \varphi$$

さらに、$\bar{w} = \{v : w \equiv_\Sigma v\}$ とおく。すると $\mathbf{W}$ の $\equiv_\Sigma$ に関する同値類 $\bar{w}$ と $\Sigma$ の部分集合 $\{\varphi \in \Sigma : \mathbf{M}, w \models \varphi\}$ の間には１対１対応が成り立つ。そこで、以下では $\bar{w}$ と $\{\varphi \in \Sigma : \mathbf{M}, w \models \varphi\}$ を同一視し、$\varphi \in \bar{w}$ のような表現も許す。（これは正確には $\mathbf{M}, w \models \varphi$ のことである。）

Kripke モデル $\mathbf{M}^* = (\mathbf{F}^*, \mathbf{v}^*)$ が次の４条件を満たすとき、$\Sigma$ 上での $\mathbf{M}$ の filtration という。
(1) $\mathbf{F}^* \in \mathbf{K}$
(2) $\mathbf{W}^* = \{\bar{w} : w \in \mathbf{W}\}$
(3) $\mathbf{v}^*(p) = \{\bar{w} \in \mathbf{W}^* : p \in \bar{w}\}$
(4) $\mathbf{K}$ フレームの全ての様相演算子に対して以下の min, max が成り立つ。
min : $\mathbf{R}_\nabla x_0 \cdots x_n \;\; \Rightarrow \mathbf{R}^*_\nabla \bar{x_0} \cdots \bar{x_n}$
max : 全ての $\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \Sigma$ に対し

$\mathbf{R}^*_{\nabla}\bar{x}\bar{y_1}\cdots\bar{y_n}$ かつ $\varphi_1 \in \bar{y_1}$ かつ $\cdots$ かつ $\varphi_n \in \bar{y_n} \ \ \Rightarrow \ \ \nabla(\varphi_1,...,\varphi_n) \in \bar{x}$

これらの条件から次の補題が得られる。

**Lemma 3.2** $\mathbf{M}^* = (\mathbf{F}^*, \mathbf{v}^*)$ を $\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$ の $\Sigma$ 上での *filtration* とする。このとき、次の２つが成り立つ。

（１） $(\forall\varphi \in \Sigma)(\forall\bar{x} \in \mathbf{W}^*) : \varphi \in \bar{x}$ *iff* $\mathbf{M}^*, \bar{x} \models \varphi$

（２） $(\forall\varphi \in \Sigma)(\forall x \in \mathbf{W}) : \mathbf{M}, x \models \varphi$ *iff* $\mathbf{M}^*, \bar{x} \models \varphi$

**K** を あるフレームのクラスとする。**K** が filtration 可能であるとは、任意の論理式の集合 **X** と任意の Kripke フレーム $\mathbf{F} \in \mathbf{K}$ 、任意の Kripke モデル $\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$ に対して、ある論理式の集合 $\Sigma \supset \mathbf{X}$ と、ある $\Sigma$ 上での **M** の filtration $(\mathbf{F}^*, \mathbf{v}^*)$ が存在して $\mathbf{F}^* \in \mathbf{K}$ を満たすことである。

**Theorem 3.3** **K** をあるフレームのクラスとするとき、次の２つが成立。

*(1)* **K** が *filtration* 可能なとき、$\Theta_S(\mathbf{K}) = \Theta_S(\mathbf{FinK})$ が成立。

ここで、**FinK** は **K** の有限フレーム全体の集合とする。

*(2)* **K** が有限公理化可能で *filtration* 可能なとき **K** は決定可能である。

Theorem ３．２ (2) の証明の大まかな内容は以下のように述べられる。あたえられた体系が有限公理化可能でさらに、有限モデル性を持つとする。そのとき、論理式 $\varphi$ に到る証明を一段ずつ作る作業と有限フレームのうちで公理は恒真になるが $\varphi$ を偽にするモデルを調べる作業を交互に行うことにより与えられた論理式が証明可能かどうかを判定できる。しかし、この方法は決定可能性を示すためには有効であるが一般には効率のよい決定手続きではない。

有限モデル性が成り立つようなアロー論理は２．３節で定義したフレームのクラスに対して、クラス分けが行える。

**Theorem 3.4** *R-frame* と *S-frame* に関しては *filtration* が可能であり。*T-frame* は *filtration* 可能ではない。

T-frame は filtration 可能でないだけでなく、決定不可能であることを次節で示すことにする。

## 3.3 決定不可能性について

この節では決定不可能性が得られるための条件について $\circ$ の結合律を中心として述べる。最初に T-frame に対応するような $\circ$ の結合律を公理として持つようなアロー論理のうち決定不可能なものが存在することをであることを示す。

次のような体系を考える。ただし、$\top$ は $p \to p$ の省略形とする。

公理：

$(p \circ q) \circ r \leftrightarrow p \circ (q \circ r)$

$\top \circ \neg (\top \circ p_0) \to \neg p_0$

$\neg (p_0 \circ \top) \circ \top \to \neg p_0$

where $\top \sim p_0 \to p_0$

推論規則：

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (MP) \qquad \frac{\phi}{\sigma\phi}\ (SUB)$$

$$\frac{\varphi}{\neg(\neg\varphi \circ \neg\psi)} \qquad \frac{\psi}{\neg(\neg\varphi \circ \neg\psi)}\ (NEC)$$

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{(\chi \circ \varphi) \leftrightarrow (\chi \circ \psi)}$$

**Theorem 3.5** この体系は決定不可能である。

(証明)

**K** を上の体系に対応するつぎのような代数とする。

$\mathbf{K} = \{\mathbf{A} \in \mathbf{BAO} : \mathbf{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, ;)$
$\mathbf{A} \models x; 0 = 0; x = 0$
$\mathbf{A} \models (x; y); z = x; (y; z)$
$\mathbf{A} \models 1; -(1; x) \leq -x$
$\mathbf{A} \models -(x; 1); 1 \leq -x\}$

まず、よく知られている **Post** [5] の結果として Turing machine における停止問題と半群における語の問題が同値であることがわかっている。すなわち、停止問題の決定不可能性から半群で quasi-equation theory が決定不可能であることが導かれる。
ここで quasi-equation とは次のような表現とする。

$$\wedge_{1<i<n} s_i = t_i \rightarrow s_0 = t_0$$

次に、半群の言語で書かれた quasi-equation $q$ が計算可能な関数 $e$ によって次の条件を満たすような等式に変換されることを $\mathbf{K}$ が discriminator variety になることを使って示す。

$$(*) \quad q \text{ が全ての半群で成立} \quad \mathit{iff} \quad \mathbf{K} \models e(q)$$

このことが示されれば、$q$ の決定不可能性から、$\mathbf{K}$ での等式理論の決定不可能性が示される。

**Definition 3.6** $\mathbf{A} \in \mathbf{BAO}$ とする。$\mathbf{I} \subseteq A$ が $\mathbf{A}$ のイデアルとは、ある $\mathbf{A}$ の合同関係 $\mathbf{R}$ が存在して $\mathbf{I} = 0^{\mathbf{A}}/\mathbf{R}$ となることである。
すなわち、$\mathbf{I}$ がイデアルであるとは、$\mathbf{I}$ が $\mathbf{A}$ のある合同関係 $\mathbf{R}$ によって、$\mathbf{A}$ の最小元 $0^{\mathbf{A}}$ の合同クラスとなっていることである。

**Lemma 3.7** $\mathbf{A} \in \mathbf{BAO}$ かつ $\mathbf{I} \subseteq A$ とする。
$\mathbf{I}$ が $\mathbf{A}$ のイデアルであるための必要十分条件は、$\mathbf{I}$ がブール代数のイデアルであり、さらに次の条件を満たすことである。
$\forall$ 階数 $n$ の演算子 $f \in \mathbf{A}$ $\forall p_0, ..., p_{n-1} \in A$ $\forall i < n$ $\forall a \in \mathbf{I}$
$[f(p_0, ..., p_{i-1}, ..., a, p_{i+1}, ..., p_{n-1}) - f(p_0, ..., p_{i-1}, ..., 0, ..., p_{i+1}, ..., p_{n-1})] \in \mathbf{I}$

（証明）
（必要性）

$\mathbf{I}$ をイデアルとすると。$\forall a \in \mathbf{I}$ に対して $a\mathbf{R}0$ である。
$(\Rightarrow)$ $\mathbf{R}$ が合同関係であるから。
$\forall f \in \mathbf{A}\forall \bar{p}, \forall \bar{q} \in \mathbf{A}\forall a \in \mathbf{I}$
$f(\bar{p}, 0, \bar{q})\mathbf{R}f(\bar{p}, 0, \bar{q})$
$\Rightarrow (f(\bar{p}, a, \bar{q}) - f(\bar{p}, b, \bar{q}))\mathbf{R}0$
よって、$(f(\bar{p}, a, \bar{q}) - f(\bar{p}, 0, \bar{q})) \in \mathbf{I}$

（十分性）
関数 $f$ と $a, b, \bar{p}, \bar{q}$ に対して
$a;p - b;p \leq [(a-b);p + (a \cdot b);p] - b;p$
$\leq [(a-b);p + (-b);p] + [(a \cdot b);p - b;p] \leq (a-b);p - b;p \leq (a-b);p - 0;p$
が成り立つ。

$$a\mathbf{R}b \overset{def}{\Leftrightarrow} a \cdot -b + (-a) \cdot b$$

とおく。ここで、$\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ の合同関係になっていることを示せば $\mathbf{I} = 0/\mathbf{R}$ とおくことにより、$\mathbf{I}$ がイデアルであることを示せる。
仮定より $\mathbf{I}$ がブール演算子に関してイデアルとなっていることから、$\mathbf{R}$ はブール演算子に関しては合同関係となっている。
$a\mathbf{R}b$ とすると、$a - b \in \mathbf{I}$ かつ、$\mathbf{I}$ が不等号の小さい方で閉じていることから仮定と上の不等式より、$f$ やパラメーター $\bar{p}, \bar{q}$ の選び方に依らず $(f(\bar{p}, b, \bar{q}) - f(\bar{p}, b, \bar{q})) \in \mathbf{I}$ がいえる。
また、$(f(\bar{p}, a, \bar{q}) - f(\bar{p}, a, \bar{q})) \in \mathbf{I}$ が同様にいえる。
いま、$f$ を階数 n の演算子として、$a_0\mathbf{R}b_0, ..., a_{n-1}\mathbf{R}b_{n-1}$ とすると。
$f(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) - f(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$
$= [f(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) - f(b_0, a_1, ..., a_{n-1})] + [f(b_0, a_1, ..., a_{n-1}) - f(b_0, b_1, ..., a_{n-1})] + \cdots +$
$[f(b_0, b_1, ..., b_{n-2}, a_{n-1}) - f(b_0, b_1, ..., b_{n-1})]$
上で示したように、和の形にしたそれぞれの元は全て $\mathbf{I}$ に属する。従って、$(f(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) - f(b_0, b_1, ..., b_{n-1})) \in \mathbf{I}$ が成り立つ。
$(f(\bar{b}) - f(\bar{a})) \in \mathbf{I}$ も同様に示される。

$\mathbf{K}$ の言語である項 $c$ を次のように定義する。
$c(x) \overset{def}{=} x + (1;x) + (x;1) + (1;x;1)$
$Sir\mathbf{K}$ を $\mathbf{K}$ の subdirectly irreducible とする。

**Proposition 3.8** $\mathbf{A} \in Sir\mathbf{K}$ に対して次のことが成立

$$c^{\mathbf{A}}[a] = \begin{cases} 0^{\mathbf{A}} & \mathit{if}\ a = 0^{\mathbf{A}} \\ 1^{\mathbf{A}} & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

すなわち、$\mathbf{K}$ は *discriminator variety* である。

(証明)

任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{K}, a \in A$ に対して

$$\mathbf{Rl}_a A \overset{def}{=} \{b \in A : b \leq a\}$$

とおく。

これから、任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{K}, a \in A$ に対して $\mathbf{Rl}_{\mathbf{c^A[a]}}$ と $\mathbf{Rl}_{-\mathbf{c^A[a]}}$ がともに $\mathbf{A}$ のイデアルであることを示す。

このことをいうためには次の不等式が $\mathbf{A}$ で成り立つことをいえば、**Lemma3.3** より イデアルであることがいえる。

$1; c(x) \leq c(x)$

$c(x); 1 \leq c(x)$

$1; -c(x) \leq -c(x)$

$-c(x); 1 \leq -c(x)$

最初の不等式は

（左辺）$= 1; x + 1; (1; x) + 1; (x; 1) + 1; (1; x; 1)$

$\leq 1; x + 1; x + 1; x; 1 + 1; x; 1$

$= 1; x + 1; x; 1 \leq x + 1; x + x; 1 + 1; x; 1$ よりいえる。２つ目も同様。

３番目の不等式は $1; c(x) \leq c(x)$ の対偶と ; の単調性から

$1; -c(x) \leq 1; -(1; c(x))$ また公理から

$1; -(1; c(x)) \leq -c(x)$.

４番目も同様に示される。

$\mathbf{A} \in Sir\mathbf{K}$ として、$0^{\mathbf{A}} \neq a \in A$ としたとき、さらに $c^{\mathbf{A}}[a] \neq 1^{\mathbf{A}}$ と仮定すると $\mathbf{K} \models x \leq c(x)$ であるから $c^{\mathbf{A}}[a] = 0^{\mathbf{A}}$ は成り立たない。したがって、$\mathbf{Rl}_{\mathbf{c^A[a]}}$ と $\mathbf{Rl}_{-\mathbf{c^A[a]}}$ はともに 0 を元としてもたないイデアルとなっている。しかし $\mathbf{Rl}_{\mathbf{c^A[a]}} \cap \mathbf{Rl}_{-\mathbf{c^A[a]}} = \{0^{\mathbf{A}}\}$ であるから、これは任意の subdirectly irreducible な代数に対して最小の 0 でないイデアルが存在するという事実に矛盾する。よって、**Proposition** が成立する。

**Queq** を演算子 ; に対する半群上での全ての quasi-equation を含むような集合とする。任意の $q \in \mathbf{Queq}$ に対して、$e(q)$ を $\mathbf{K}$ 上の言語で以下のような等式とする。ただし、$a \oplus b = (a \cdot -b) + (b \cdot -a)$ とする。

$$e(q) \overset{def}{=} t_0 \oplus s_0 \leq c(t_1 \oplus s_1) + \cdots + c(t_n \oplus s_n)$$

このとき定義から、$\mathbf{K} \models e(q) \rightarrow q$ （１）
また **proposition3.4** より $\mathbf{SirK} \models q \rightarrow e(q)$ （２）
が成り立つ。このことから、次のことがいえる。

**Proposition 3.9** $q \in \mathbf{Queq}$ に対して、次が成立

$$q \text{ が全ての半群で成立 } \mathit{iff} \ \ \mathbf{K} \models e(q)$$

(証明)
$(\Leftarrow)$ ある半群を一つ固定して $\mathbf{G} \not\models q$ とする。この半群 $\mathbf{G} = (S, ;)$ は次のような方法で $\mathbf{K}$ のある元と１対１対応がつき、かつ準同型で結ばれる。
$e \notin S$ 新たにとり、$S' \overset{def}{=} S \cup \{e\}$ として新たな半群 $\mathbf{G}' = (S', ;)$ を定義する。また、任意の $a \in S'$ に対して $a; e = e; a = a$ と仮定する。
$\mathbf{C}_S \overset{def}{=} \{(b, b; a) : a, b \in S'\}$ として、$|$ で関係の結合を表し $\mathbf{D} \overset{def}{=} (\mathbf{C}_S, |)$ と定義する。このとき、$\mathbf{D}$ は $\mathbf{G}$ と１対１かつ準同型の対応がつくことが $\mathbf{G}$ の Cayley table を用いてわかる。
$\mathbf{B}$ を $S' \times S'$ を ; の結合 — で拡張した代数の全ての部分集合からなるブール代数とする。このとき、$\mathbf{B} \in \mathbf{K}$ であり、$\mathbf{D}$ は $\mathbf{B}$ を演算; に制限した代数と１対１かつ準同型な対応がつく。したがって、全ての半群上で $q$ が成り立つことはないとすると、$\mathbf{K} \not\models q$ がいえて、さらに上の（１）から、$\mathbf{K} \not\models e(q)$ がいえる。

$(\Rightarrow)$ $\mathbf{K}$ の代数を ; の演算のみに制限した代数は半群であるから、全ての半群において $q$ が成り立つとすると $\mathbf{SirK} \models q$ が成り立つ。したがって上の（４）から $\mathbf{SirK} \models e(q)$ であり、$bfK$ が discriminator variety であることから $\mathbf{K} \models e(q)$ であることが示された。

## 3.4　決定可能性を得るための条件：弱い形の結合律

ここで、結合律を持つようなアロー論理において決定可能性を得るためにはどのような条件があればよいかを考察する。

$\top$ を $p \to p$ の省略形として、次のような結合律を少し弱めた形の論理式を考えてみる。

$$(WA)((\varphi \wedge \iota\delta) \circ \top) \circ \top \leftrightarrow (\varphi \wedge \iota\delta) \circ (\top \circ \top)$$

この $(WA)$ と以下の８つを公理としてもつような normal なアロー論理は決定可能であることが知られている。

$(A1) \neg \otimes p \to \otimes \neg p$
$(A2) \otimes \neg p \to \neg \otimes p$
$(A3) \otimes \otimes p \to p$
$(A4) \otimes (p \circ q) \to \otimes q \circ \otimes p$
$(A5) p \circ \neg(\otimes p \circ q) \to \neg q$
$(A6) \iota\delta \to \otimes \iota\delta$
$(A7) \iota\delta \circ p \to p$
$(A8) p \to \iota\delta \circ p$

## 3.5 決定可能性を得るための条件：結合律と分配律

$\circ$ の結合律を公理として持つが決定可能性が得られるようなアロー論理は、分配律の公理をなくすことで得られる。すなわち、次の定理が得られる。

**Theorem 3.10** 古典論理で *valid* な論理式を言語として持ち、*(MP),(SUB),* そして以下のような $\circ$ に関する推論規則で閉じているようなアロー論理は決定可能である。

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{(\varphi \circ \chi) \leftrightarrow (\psi \circ \chi)} \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{(\chi \circ \varphi) \leftrightarrow (\chi \circ \psi)}$$

# 第 4 章

# アロー論理における決定可能性

ここまでで、$\circ$ の結合律を公理として持つようなアロー論理は少し条件を強めただけで決定不可能となることがわかった。しかし、結合律だけが決定不可能な原因となっているかというと、そうではない。実は様相論理において Kripke 意味論を用いて公理化を行うときに公理として用いられる分配律

$$\varphi \circ (\psi \vee \chi) \to (\varphi \circ \psi) \vee (\varphi \circ \chi)$$

も決定可能性に関わっている。
このことを第 4 章で見ていくことにする。結果は以下のようになっている。

| 決定可能性 | 結合律 | 分配律 |
|---|---|---|
| × | ◯ | ◯ |
| ◯ | ◯ | × |
| ◯ | × | ◯ |
| ◯ | × | × |

本章では Gyuris の結果 [6] について述べる。Gyuris は分配律を持たないようなアロー論理の体系においては、たとえ $\circ$ の結合律があったとしても決定可能性がいえることを示した。
さらにこの結果に対して、様相演算子を含む公理の中でそれらがブール演算子を含まなければ、それらの公理をいくら加えても決定可能性がいえる。
証明においては代数的手法を用いる、また、その証明の中で Don Pigozzi の結果 [10] を用いる。

## 4.1 結合律があり分配律がない体系

第 3 章では様相演算子 $\circ$ の結合律を公理として持たない体系は決定可能であることを述べた。本章では結合律の存在のみが決定不可能性の要因となっているわけではないことを述べる。例として、結合律を持つが分配律を持たないような体系で決定可能となるものが存在することを示す。

一般に様相論理においては様相演算子の分配律が公理として用いられる。たとえば様相論理 **K** においては、

$$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$$

が公理として用いられている。

様相演算子 $\circ$ の $\vee$ に対する分配律は次のようになる。

$$\varphi \circ (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \vee (\varphi \circ \chi)$$

分配律が証明可能でないような体系 **L** を以下のように定義する。

### 公理

(1) $\varphi \circ (\psi \circ \chi) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \chi$

(2) $\otimes \otimes \varphi \leftrightarrow \varphi$

(3) $\otimes(\varphi \circ \psi) \leftrightarrow \otimes\psi \circ \otimes\varphi$

(4) $\otimes\iota\delta \leftrightarrow \iota\delta$

(5) $\iota\delta \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$

### 推論規則

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (MP) \qquad \frac{\phi}{\sigma\phi}\ (SUB)$$

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\otimes\varphi \leftrightarrow \otimes\psi}\ (NEC) \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \chi \leftrightarrow \phi}{\varphi \circ \chi \leftrightarrow \psi \circ \phi}\ (NEC)$$

**Theorem 4.1** この体系 **L** は決定可能である。

この定理の証明に入る前にいくつかの定義を準備しておく。

## 4.2 証明の準備

**Definition 4.2** 等式理論とは、言語 $\Sigma$ と $\Sigma$ 上の項の等式に関する理論である。等式仕様 $(\Sigma, \mathbf{E})$ が定義する等式理論は等式の集合 $\mathbf{E}$ を公理とし、次の２〜６の公理と推論規則によって導出される等式の集合である。

１. 公理

$(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash s = t \qquad s = t \in \mathbf{E}$ のとき

２. 代入規則

$$\frac{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash s = t}{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash \sigma s = \sigma t}$$

３. 置換規則

$$\frac{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash s_1 = t_1, ..., (\Sigma, \mathbf{E}) \vdash s_n = t_n}{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash f(s_1, ..., s_n) = f(t_1, ..., t_n)}$$

４. $(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash t = t$

５. $\dfrac{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash s = t}{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash t = s}$

６. $\dfrac{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash t_1 = t_2 \quad (\Sigma, \mathbf{E}) \vdash t_2 = t_3}{(\Sigma, \mathbf{E}) \vdash t_1 = t_3}$

**Definition 4.3** 空でない代数のクラス $\mathbf{K}$ が *variety* であるとは $\mathbf{K}$ が次の３つの演算に関して閉じていることをいう。

$\mathbf{A} \in \mathbf{K} \Rightarrow sub(\mathbf{A}) \in \mathbf{K}$ *(subalgebra)*

$\mathbf{A} \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha(\mathbf{A}) \in \mathbf{K}$ *(homomorphic image)*

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ *(direct product)*

ここで、*homomorphism, direct product* とは次のような演算とする。

**homomorphism**

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を同じ演算子を持つような代数とする。$\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が *homomorphism* であるとは、階数 $n$ の関数 $f$ に対して

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

が成り立つことである。

**direct product**

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を同じ演算子を持つような代数とする。$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ が *direct product* であるとは、*universe* を $A_1 \times A_2$ として、 階数 $n$ の関数 $f$ 、$a_i \in A_1, a'_i \in A_2 (1 \leq i \leq n)$ に対して

$$f^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_2}(< a_1, a'_1 >, ..., < a_n, ..., a'_n >) =< f^{\mathbf{A}_1}(a_1, ..., a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, ..., a'_n) >$$

が成り立つことである。

### 4.2.1 リンデンバウム代数

論理 $\mathbf{L}$ に対して論理式の集合を $\mathbf{F_L}$ とする。
任意の $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{F_L}$ に対して、$\varphi \approx_{\mathbf{T}} \psi$ を $\mathbf{T} \vdash_{\mathbf{L}} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ により定めると $\approx_{\mathbf{T}}$ は合同関係になる。そこで、

$$(\varphi)_{\mathbf{T}} = \{\psi \in \mathbf{F_L} : \mathbf{T} \vdash_{\mathbf{L}} (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$$

と合同関係のクラスを定義し、商集合 $\mathbf{F}_L / \approx_{\mathbf{T}}$ を $\mathbf{A_L^T}$ とおく。すなわち、

$$\mathbf{A_L^T} = \{(\varphi)_{\mathbf{T}} : \varphi \in \mathbf{F_L}\}$$

とする。このとき

$$\alpha_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A_L^T}, f)_{f \in t_L}$$

を $\mathbf{L}$ における $\mathbf{T}$ のリンデンバウム代数という。

$$Alg(\mathbf{L}) = \{\alpha_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} : \mathbf{T} \subseteq \mathbf{F_L}\}$$

すなわち、$\mathbf{T}$ を任意に動かして作られる $\alpha_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ 全体のクラスを $Alg(\mathbf{L})$ とおく。
このように定義すると全ての $\varphi \in \mathbf{F_L}$ に対して、

$$\varphi \text{ が } \mathbf{L} \text{ で valid} \Leftrightarrow Alg(\mathbf{L}) \models (\varphi \leftrightarrow 1)$$

が成り立つ。

さらに、次のことが成り立つ [1]。

**Proposition 4.4** 論理 $\mathbf{L}$ が決定可能であるための必要十分条件は、論理 $\mathbf{L}$ に対応する代数 $Alg(\mathbf{L})$ が決定可能な等式理論 *(equational theory)* を持つことである。すなわち、

$$Eq(Alg(\mathbf{L})) = \{(\tau = \sigma) : \tau, \sigma \text{は項で} Alg(\mathbf{L}) \models (\tau \leftrightarrow \sigma)\}$$

が決定可能となることである。

### 4.2.2 証明の方針

**S**' を以下のような等式集合の部分集合とする。

(1) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

(2) $\otimes \otimes x = x$

(3) $\otimes(x \circ y) = \otimes y \circ \otimes x$

(4) $\otimes \iota\delta = \iota\delta$

(5) $\iota\delta \circ x = x$

(6) $x \circ \iota\delta = x$

Theorem 4.1 の証明は以下の方針で行う。

**L** が決定可能

$\Leftrightarrow$ $Alg(\mathbf{L})$ の等式理論が決定可能 (proposition 4.4)

$\Leftrightarrow$ **S**' から生成される等式理論は決定可能 かつ

Boolean axiom から生成される等式理論は決定可能

最後の必要十分条件は以下に述べる Pigozzi の結果を用いて証明される。

**Theorem 4.5** *[10]* $\Gamma$ と $\Delta$ を演算子の集合で $\Gamma \bigcap \Delta = \phi$ とする。$\mathbf{Th}_\Gamma, \mathbf{Th}_\Delta$ でそれぞれ $\Gamma$ と $\Delta$ に関する定理の集合を表す。 いま、$\Theta \in \mathbf{Th}_\Gamma, \Phi \in \mathbf{Th}_\Delta$ として、$\Theta, \Phi$ はそれぞれ $\Gamma$ , $\Delta$ 上の等式理論とする。
このとき、$\Theta$ と $\Phi$ が共に決定可能ならば $\Theta \bigcup \Phi$ も決定可能である。

このことから、今 Boolean axiom から生成される等式理論が決定可能であることは明らかであるから、**S**' から生成される等式理論が決定可能であることを示せば証明は完成する。

**Proposition 4.6** **S**' から生成される等式理論は決定可能である。

### 4.2.3 項書き換え系：合流性について

この節では命題を証明するために用いられる項書換え系の概念について述べ、その合流条件についての基本的な結果を紹介しておく。

**Definition 4.7** （項書き換え系）
$\Sigma$ を記号の集合、$\mathbf{R}$ を $\Sigma$ 上の２項関係とする。このとき、以下のような条件を満たすような組 $(\Sigma, \mathbf{R})$ を（ $\Sigma$ 上の）項書き換え系という。

（１） $\mathbf{V}$ は 可算無限個の変数の集合。$\mathbf{F}$ は有限個の関数記号の集合で各関数記号はあらかじめ階数が決っているものとする。
このとき

$$\Sigma = \mathbf{V} \cup \mathbf{F}$$

（２） $\Sigma$ 上の項の集合 $\mathbf{T}(\Sigma)$ を以下の条件を満たす最小の集合と定義する。
（$a$） $x \in \mathbf{V} \Rightarrow x \in \mathbf{T}(\Sigma)$
（$b$） $f \in \mathbf{F}$ 、$f$ の階数が $n$ で 、$t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbf{T}(\Sigma) \ \Rightarrow \ f(t_1, ..., t_n) \in \mathbf{T}(\Sigma)$

（３）書き換え規則の集合 $\mathbf{R} = \{s_i \to t_i | s, t \in \mathbf{T}(\Sigma), i \in \mathbf{I}\ \}$ は項の対 $s_i, t_i$ から作る書き換え規則 $s_i \to t_i$ の集合で、$s_i, t_i, i \in \mathbf{I}$ は次の条件を満たす。
（$a$） $s_i \notin \mathbf{V}$
（$b$） $\mathbf{V}(t_i) \subseteq \mathbf{V}(s_i)$
ここで、$\mathbf{V}(t)$ は $t$ に含まれる変数の集合を表す。

書き換え規則を用いて項を書き換えることを簡約といい、書き換え規則を適用できる部分項をリデックスという。また、$\to \in \mathbf{R}$ において、$\to$ の反射推移的閉包を $\xrightarrow{*}$ で表す。

**Definition 4.8** （停止性）
$(\Sigma, \mathbf{R})$ を項書き換え系とする。$(\Sigma, \mathbf{R})$ が停止性を持つとは、次のような項の無限列 $t_0, t_1, ..., t_n, ...$ が存在しないことをいう。

$$t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n \to \cdots$$

**Definition 4.9** （合流性）
$\to \in \mathbf{R}$ が次の条件を満たすとき、合流性を持つという。

$$\text{全ての } a, b, c \in \Sigma \text{ に対して}$$
$$b \xleftarrow{*} a \xrightarrow{*} c \ \ \Rightarrow \ \ \exists d \ \ b \xrightarrow{*} d \xleftarrow{*} c$$

単一化とは、次のような操作のことを言う。２つの項が与えられたとき、その項に含まれる変数に対して適切な代入を行い、２つの項を同一の表現にすることである。
例えば、$g(f(x), a)$ と $g(f(b), y)$ を同一の表現にするには、$x$ に $b$ 、$y$ に $a$ を代入すると両者ともに $g(f(b), a)$ となり、単一化が可能である。

**Definition 4.10** （代入）
項の組 $(s,t)$ に対し、適切な代入 $\theta$ を行い $\theta s \equiv \theta t$ とすることを単一化といい、このときの $\theta$ を単一化代入という。

**Definition 4.11** （最汎単一化代入）
二つの項 $s,t$ を単一にする単一化代入 $\theta, \theta'$ に対して、ある代入 $\rho$ が存在して、 $\theta' = \rho\theta$ であるとき、$\theta$ は $\theta'$ より一般的な代入であるという。さらに、$s,t$ の任意の単一化代入 $\nu$ に対して、$\theta$ が $\nu$ より一般的な代入であるとき $\theta$ は最汎単一化代入であるといい、$mgu\theta$ と表す。

**Theorem 4.12** 単一化可能ならば最汎単一化代入が存在する。

あるリデックスを簡約することにより他のリデックスが消えるとき、リデックスが重なる、あるいは書き換え規則が重なるという。二つの書き換え規則が重なるとき、一方の書き換え規則から得られる項ともう一方の書き換え規則から得られる項によって作られる対を危険対という。

**Definition 4.13** （危険対）
$r_1 : s_1 \to t_1, r_2 : s_2 \to t_2$ を書き換え規則とする。$r_2$ が出現位置 $u \in \mathbf{O}(s_1)$ で、$mgu\theta$ によって $r_1$ に重なるとする。このとき得られる項の対 $< \theta s_1[u \leftarrow t_2], \theta t_1 >$ を $r_1$ と $r_2$ の危険対という。

危険対を持つような項書き換え系の合流条件として次のような定理が重要である。

**Theorem 4.14** （合流条件）
$(\Sigma, \mathbf{R})$ が停止性を持つような項書換え系とする。
このとき

$\mathbf{R}$ が合流性を持つための必要十分条件は $\mathbf{R}$ の全ての危険対が合流性を持つことである。

## 4.3 命題の証明

２つの項が与えられたとき、等しいか否かを判定するアルゴリズムを与えることにより証明を行う。
まず、項の複雑さを判定するような complexity measure $\mathbf{m}$ を次のように定める。

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(\iota\delta) = 1$$
$$\mathbf{m}(\tau_1 \circ \tau_2) = \mathbf{m}(\tau_1) + 2\mathbf{m}(\tau_2)$$
$$\mathbf{m}(\otimes\tau) = 2^{\mathbf{m}(\tau)}$$

このようにおいて、**S'** を左辺から右辺への書き換え規則とみなす。例えば、$\otimes(\tau_1 \circ \tau_2) \Rightarrow \otimes\tau_2 \circ \otimes\tau_1$ のような書き換えが許される。

**Lemma 4.15** 全ての書き換えにおいて *complexity measure* が減少する。

このことから、有限回の書き換えの後にこれ以上書き換えができないような項が得られることになる。

（証明）

(1) $\mathbf{m}((x \circ (y \circ z))) = \mathbf{m}(x) + 2(\mathbf{m}(y) + 2\mathbf{m}(z))$
$= \mathbf{m}(x) + 2\mathbf{m}(y) + 4\mathbf{m}(z)$

$\mathbf{m}((x \circ y) \circ z) = \mathbf{m}(x \circ y) + 2\mathbf{m}(z)$
$= \mathbf{m}(x) + 2\mathbf{m}(y) + 2\mathbf{m}(z)$
$\mathbf{m}(z) \geq 1$ より $\mathbf{m}(x \circ (y \circ z)) > \mathbf{m}((x \circ y) \circ z)$

(2) $\mathbf{m}(\otimes \otimes x) = 2^{\mathbf{m}(\otimes x)} = 2^{2^{\mathbf{m}(x)}}$
よって、$\mathbf{m}(\otimes \otimes x) > \mathbf{m}(x)$

(3) $\mathbf{m}(\otimes(x \circ y)) = 2^{\mathbf{m}(x \circ y)} = 2^{\mathbf{m}(x)+2\mathbf{m}(y)} = 2^{\mathbf{m}(x)} \cdot 2^{2\mathbf{m}(y)} = 2^{\mathbf{m}(x)} \cdot 2^{\mathbf{m}(y)} \cdot 2^{\mathbf{m}(y)}$
$\mathbf{m}(\otimes y \circ \otimes x) = \mathbf{m}(\otimes y) + 2\mathbf{m}(\otimes x) = 2^{\mathbf{m}(y)} + 2 \cdot 2^{\mathbf{m}(x)}$
（a）$\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{m}(y)$ のとき
$2^{\mathbf{m}(y)} + 2 \cdot 2^{\mathbf{m}(x)} \leq 2^{\mathbf{m}(y)} + 2 \cdot 2^{\mathbf{m}(y)} = 3 \cdot 2^{\mathbf{m}(y)}$
$3 < 2^{\mathbf{m}(x)} \cdot 2^{\mathbf{m}(y)}$ であるから、$\mathbf{m}(\otimes(x \circ y)) > \mathbf{m}(\otimes y \circ \otimes x)$
（b）$\mathbf{m}(x) \geq \mathbf{m}(y)$ のとき
$2^{\mathbf{m}(y)} + 2 \cdot 2^{\mathbf{m}(x)} \leq 2^{\mathbf{m}(x)} + 2 \cdot 2^{\mathbf{m}(x)} = 3 \cdot 2^{\mathbf{m}(x)}$
$3 < 2^{\mathbf{m}(y)} \cdot 2^{\mathbf{m}(y)}$ であるから、$\mathbf{m}(\otimes(x \circ y)) > \mathbf{m}(\otimes y \circ \otimes x)$
よって $\mathbf{m}(\otimes(x \circ y)) > \mathbf{m}(\otimes y \circ \otimes x)$

(4) $\mathbf{m}(\otimes\iota\delta) = 2^{\mathbf{m}(\iota\delta)} = 2$

$\mathbf{m}(\iota\delta) = 1$

よって、$\mathbf{m}(\otimes\iota\delta) > \mathbf{m}(\iota\delta)$

(5) $\mathbf{m}(\iota\delta \circ x) = \mathbf{m}(\iota\delta) + 2\mathbf{m}(x) = 1 + 2\mathbf{m}(x)$

よって、$\mathbf{m}(\iota\delta \circ x) > \mathbf{m}(x)$

(6) $\mathbf{m}(x \circ \iota\delta) = \mathbf{m}(x) + 2\mathbf{m}(\iota\delta) = \mathbf{m}(x) + 2$

よって、$\mathbf{m}(x \circ \iota\delta) > \mathbf{m}(x)$

従って、この書き換えが高々 $\mathbf{m}(\varphi)$ ステップで終わることがわかる。
**S'** の書き換え規則を用いてこれ以上書き換えが行われないような項に到達したとき、そのような項を **正規形** という。

**Lemma 4.16** *S'* の書き換え規則での危険対は全て合流性を持つ。

（証明）

危険対を持つ書き換え規則の組み合わせは次のようになる。
(1)-(3), (1)-(5), (1)-(6), (2)-(3), (2)-(4), (3)-(5), (3)-(6), (5)-(6)
これらの、危険対が合流することを示す。

$\otimes(x \circ (y \circ z)) \stackrel{(1)}{\to} \otimes((x \circ y) \circ z) \stackrel{(3)}{\to} \otimes z \circ \otimes(x \circ y) \stackrel{(3)}{\to} \otimes z \circ (\otimes y \circ \otimes x) \stackrel{(1)}{\to} ((\otimes z \circ \otimes y) \circ \otimes x)$
$\otimes(x \circ (y \circ z)) \stackrel{(3)}{\to} \otimes(y \circ z) \circ \otimes x \stackrel{(3)}{\to} (\otimes z \circ \otimes y) \circ \otimes x$
よって、(1) と (3) の危険対は合流する。

$\iota\delta \circ (y \circ z) \stackrel{(1)}{\to} (\iota \circ y) \circ z \stackrel{(5)}{\to} y \circ z$
$\iota\delta \circ (y \circ z) \stackrel{(5)}{\to} y \circ z$

$x \circ (\iota\delta \circ z) \stackrel{(1)}{\to} (x \circ \iota\delta) \circ z \stackrel{(6)}{\to} x \circ z$
$x \circ (\iota\delta \circ z) \stackrel{(5)}{\to} x \circ z$
よって、(1) と (5) の危険対は合流する。

$x \circ (y \circ \iota\delta) \stackrel{(1)}{\to} (x \circ y) \circ \iota\delta \stackrel{(6)}{\to} x \circ y$

$x \circ (y \circ \iota\delta) \overset{(6)}{\to} x \circ y$

よって、(1) と (6) の危険対は合流する。

$\otimes \otimes (x \circ y) \overset{(2)}{\to} x \circ y$

$\otimes \otimes (x \circ y) \overset{(3)}{\to} \otimes(\otimes y \circ \otimes x) \overset{(3)}{\to} \otimes \otimes x \circ \otimes \otimes y \overset{(2)}{\to} x \circ \otimes \otimes y \overset{(2)}{\to} x \circ y$

よって、(2) と (3) の危険対は合流する。

$\otimes \otimes \iota\delta \overset{(2)}{\to} \iota\delta$

$\otimes \otimes \iota\delta \overset{(4)}{\to} \otimes\iota\delta \overset{(4)}{\to} \iota\delta$

よって、(2) と (4) の危険対は合流する。

$\otimes(\iota\delta \circ x) \overset{(3)}{\to} \otimes x \circ \otimes\iota\delta \overset{(4)}{\to} \otimes x \circ \iota\delta \overset{(6)}{\to} \otimes x$

$\otimes(\iota\delta \circ x) \overset{(5)}{\to} \otimes x$

よって、(3) と (5) の危険対は合流する。

$\otimes(x \circ \iota\delta) \overset{(3)}{\to} \otimes\iota\delta \circ \otimes x \overset{(4)}{\to} \iota\delta \circ \otimes x \overset{(5)}{\to} \otimes x$

$\otimes(x \circ \iota\delta) \overset{(6)}{\to} \otimes x$

よって、(3) と (6) の危険対は合流する。

$\iota\delta \circ \iota\delta \overset{(5)}{\to} \iota\delta$

$\iota\delta \circ \iota\delta \overset{(6)}{\to} \iota\delta$

よって、(5) と (6) の危険対は合流する。

よって、項書き換え系における前節の Theorem 4.14 から正規形が一意的に定まることがわかる。

## 4.4　決定手続き

2 つの項 $t$ と $s$ が与えられたとき、まずそれぞれの正規形をもとめる。次に正規形となった 2 つの項が等しいか否かを判定する。ここで、等しくないときは、ある代数 $\mathbf{A}$ が存在して $\mathbf{A} \models S'$ かつ $t^{\mathbf{A}} \neq s^{\mathbf{A}}$ となることを示す。以下ではそのことを $\mathbf{S}'$ が (1)-(6) 全体からなるときについて示す。

正規形の項が $\iota\delta$ を部分項として含むとき

$\otimes\iota\delta \to \iota\delta$

$\iota\delta \circ x \to x$

$x \circ \iota\delta \to \iota\delta$

という書き換えが行われているので、項の中に $\circ$ や $\otimes$ は出現しない。また変数も出現しないことがわかる。したがって、項は $\iota\delta$ 自身である。

正規形の項が $\otimes t$ を部分項として含むとき

$\otimes(x \circ y) \to \otimes y \circ \otimes x$

$\otimes\iota\delta \to \iota\delta$

$\otimes \otimes x \to x$

という書き換えが行われているので $t$ は $\iota\delta$ ではなく。また、$\circ$ を含まない。よって、$t$ は変数である。

以上より正規形の項は $\iota\delta$ である場合と、下の第二の形の項の 2 通りしかない。ただし各 $t_i$ は、ある変数 $x$ に対して $x$ または $\otimes x$ の形のいずれかである。

$$\begin{cases} \iota\delta \\ (\cdots(t_1 \circ t_2) \circ t_3) \cdots \circ) \circ t_n \end{cases}$$

ここで $\Sigma$ を集合とし、また $\mathbf{A}$ を $\Sigma \times \Sigma$ 上で有限な語全体からなる集合とする。$\mathbf{A}$ 上の演算子を次のように定義する。

$[a, b] \circ [c, d] = [a, b][c, d]$

$\otimes[a, b] = [b, a]$

$\otimes[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] = [b_n, a_n][b_{n-1}, a_{n-1}] \cdots [b_1, a_1]$

$\iota\delta$ は空の語である。

こうして定義した代数 $\mathbf{A}$ では $\mathbf{A} \models S'$ であることが容易に確かめられる。

次に、正規形をした 2 つの項 $t, s$ が異なるとする。

正規形の項 $t, s$ が のうちいずれか一方 $\iota\delta$ のときは、一方が空で他方が空でないから、明らかに 2 つの語は異なる。

$t, s$ がそれぞれ

$t = (...(t_1 \circ t_2) \circ t_3) \circ ... \circ t_{n-1})$

$s = (...(s_1 \circ s_2) \circ s_3) \circ ... \circ s_{m-1})$

の形であるとする。

代数の解釈が

$t^{\mathbf{A}} = [a_1, b_1][a_2, b_2], , , , , [a_{n-1}, b_{n-1}]$

$s^{\mathbf{A}} = [a'_1, b'_1][a'_2, b'_2], , , , , [a'_{m-1}, b'_{m-1}]$

の形とする、$t$ と $s$ が異なる項のときは、$n$ と $m$ が異なるか、$n = m$ であるが、ある $[a_i, b_i], [a'_i, b'_i]$ が存在して $a_i \neq b_i$ または $a'_i \neq b'_i$ となり、$t^{\mathbf{A}} \neq s^{\mathbf{A}}$ が成り立つ。

# 第 5 章

# 拡張

この章では、４章での結果を拡張する。具体的には、様相演算子を含む公理の集合に数学的な意味を与えることにより拡張を行う。

## 5.1　群の公理への拡張

この節では Gyuris の提唱した体系において様相演算子を含む公理を群の公理に拡張する。Gyuris の提唱した体系では、様相演算子を含む公理の集合は $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の演算、$\otimes\mathbf{A}$ が $\mathbf{A}$ の逆元、$\iota\delta$ を単位元とみなせば、群の公理を弱めた形になっている。そこで、この集合を群の公理に拡張する。

４章の体系 $\mathbf{L}$ において様相演算子を含むような公理を以下のように拡張した体系を $\mathbf{G}$ とする。このような拡張をおこなっても決定可能性は保証される。

(1)$(\varphi \circ \psi) \circ \chi \leftrightarrow \varphi \circ (\psi \circ \chi)$
(2) $\otimes \otimes\varphi \leftrightarrow \iota\delta$
(3) $\otimes (\varphi \circ \psi) \leftrightarrow \otimes\psi \circ \otimes\varphi$
(4) $\otimes \iota\delta \leftrightarrow \iota\delta$
(5)$\iota\delta \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$
(6)$\varphi \circ \iota\delta \leftrightarrow \varphi$
(7) $\otimes \varphi \circ \varphi \leftrightarrow \iota\delta$
(8)$\varphi \circ \otimes\varphi \leftrightarrow \iota\delta$
(9) $\otimes \varphi \circ (\varphi \circ \psi) \leftrightarrow \psi$
(10)$\varphi \circ (\otimes\varphi \circ \psi) \leftrightarrow \psi$

**Theorem 5.1** $\mathbf{G}$ は決定可能である。

この定理を証明するために、Knuth-Bendix による完備化手続きを用いているために、この公理の集合の部分集合に対しては決定可能性は保証されない。

証明の方針は４章と同様に、項書換え系による定理から正規形の一意性を得たあとで、代数モデルを構成し決定可能性をいう。

停止性
４章と同様に complexity measure $\mathbf{m}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(\iota\delta) = 1$$
$$\mathbf{m}(\tau_1 \circ \tau_2) = 2\mathbf{m}(\tau_1) + \mathbf{m}(\tau_2)$$
$$\mathbf{m}(\otimes\tau) = 2^{\mathbf{m}(x)}$$

このとき、$\tau_1 \to \tau_2 \Rightarrow \mathbf{m}(\tau_1) > \mathbf{m}(\tau_2)$ がいえる。

危険対の合流性については、４章と同様に合流性がいえることから正規形が一意的に決まることがわかる。

## 5.2 カウンターモデル

二つの項が与えられそれぞれが正規形になったとする。このとき、二つの項が互いに異なるならばそのことを解釈できる代数をここで構成する。

(1) 正規形が $\iota\delta$ を含むとき
$\otimes\iota\delta \to \iota\delta$
$\iota\delta \circ x \to x$
$x \circ \iota\delta \to x$
という書き換えが行われているので正規形は $\iota\delta$ 自身である。

(2) 正規形が $\otimes x$ という形で与えられたとき

$\otimes\otimes x \to x$

$\otimes(x \circ y) \to \otimes y \circ \otimes x$

$\otimes\iota\delta \to \iota\delta$

$\otimes x \circ x \to \iota\delta$

$x \circ \otimes x \to \iota\delta$

$\otimes x \circ (x \circ y) \to y$

$x \circ (\otimes x \circ y) \to y$

という書き換えが行われているので正規形は $x$ が変数である場合しかありえない。

よって、正規形は 以下のように $\iota\delta$ であるか、各項が $\otimes x$ または $x$ （$x$ は変数）で右結合の形のいずれかに限られる。

（イ）$\iota\delta$

（ロ）$t_1 \circ (t_2 \circ \cdots \circ (t_{n-1} \circ t_n) \cdots)$

各 $t_i$ は、 $\otimes t$ または $t$

ただし、

$x \circ \otimes x \to \iota\delta$

$\otimes x \circ x \to \iota\delta$

$\otimes x \circ (x \circ y) \to y$

$\mathbf{A} \circ (\otimes \mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$

という書き換えが行われているので、

$t_i \circ t_{i+1}$ が $\otimes t \circ t$ や $t \circ \otimes t$ という形で現れることはない。

ここで異なる 2 つの項が与えられたときに、異なることを解釈できるような代数を以下のように定義する。

**Definition 5.1** $\mathbf{X} \overset{i}{=} \mathbf{Y}$ を次のように定義する。

$\mathbf{X} \overset{i}{=} \mathbf{Y} \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathbf{X}$ が $\mathbf{V}[a,b][b,a]\mathbf{W}$ で $\mathbf{Y}$ が $\mathbf{VW}$ または
$\mathbf{X}$ が $\mathbf{VW}$ で $\mathbf{Y}$ が $\mathbf{V}[a,b][b,a]\mathbf{W}$

また、$\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ であることを以下のように定義する。

$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \overset{def}{\Leftrightarrow}$ ある $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ が存在して

$\mathbf{X}$ が $\mathbf{A}_1$ かつ $\mathbf{Y}$ が $\mathbf{A}_n$ で $\mathbf{A}_j \stackrel{i}{=} \mathbf{A}_{j+1}$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$

この代数の演算を以下のように定義すると、上の公理を全て満たす。

$[a, b] \circ [c, d] = [a, b][c, d]$

$\otimes[a, b] = [b, a]$

$\otimes[a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n] = [a_n, b_n][a_{n-1}, b_{n-1}] \cdots [b_2, a_2][b_1, a_1]$

$\iota\delta$ は空。

実際に $\mathbf{L}$ に含まれていた公理がこの代数上でも成り立つことは明らかであるが新しく導入された公理も満たすことをここで確かめておく。

$\otimes x \circ x = \iota\delta$ について

左辺 $= \otimes[a, b] \circ [b, a] = [b, a][a, b]$

右辺 $= []$

$[b, a][a, b] \stackrel{i}{=} []$ より $[b, a][a, b] = []$

$x \circ \otimes x = \iota\delta$ も同様に示される。

$\otimes x \circ (x \circ y) = y$ について

左辺 $= \otimes[a, b] \circ ([a, b] \circ [c, d]) = [b, a][a, b][c, d]$

右辺 $= [c, d]$

$[b, a][a, b][c, d] \stackrel{i}{=} [c, d]$ より $[b, a][a, b][c, d] = [c, d]$

$x \circ (\otimes c \circ y) = y$ も同様に示される。

以上より $\mathbf{G}$ はこの代数モデルを用いて決定可能性をいえることがわかった。

# 第 6 章

# 結論

本研究ではアロー論理における決定可能性について、様相演算子 $\circ$ の結合律と分配律を公理として持つ体系を中心に決定可能性について議論を行い、項書換え系の手法を用いてアロー論理の言語を群の公理まで拡張しても決定可能性が得られることを示した。
今後の課題として、条件付き項書換え系の手法を用いて推論規則を拡張したときの決定可能性の考察を行いたい。

# 謝辞

本研究を行うにあたり、丁寧にご指導下さいました小野寛晰教授に感謝致します。また、貴重なご意見下さいました石原哉助教授、浜野正浩、Tomasz Kowalski 両助手にお礼申しあげます。また、２年間の学生生活全般においてお世話になりました研究室の皆様にお礼申し上げます。

# 参考文献


[1] H.Andréka, Á.Kurucz, I.Németi and I.Sain, Applying Algebraic Logic; A General Methodology, 1994, **http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Contents.html** .

[2] H.Andréka, Á.Kurucz, I.Németi, I.Sain and A.Simon, Causes and Remedies for Undecidability in Arrow Logics and in Multi-Modal Logics, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., $Arrow\ Logic\ and\ Multi-Modal\ Logic$, CSLI and FOLLI, 63-99, 1996.

[3] F.Baader and T.Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[4] S.Burris and H.P.Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.

[5] M.Davis, Unsolvable Problems,In J.Barwise eds., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[6] V.Gyuris, Associativity does not imply Undecidability without the Axiom of Moal Distribution, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., $Arrow\ Logic\ and\ Multi-Modal\ Logic$, CSLI and FOLLI, 63-99, 1996.

[7] M.Marx, S.Mikulas, I.Nemeti and I.Sain, Investigations in Arrow Logic, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., $Arrow\ Logic\ and\ Multi-Modal\ Logic$, CSLI and FOLLI, pp.35-61, 1996.

[8] M.Marx and Y.Venema, $Multi-Dimentional\ Modal\ Logic$, Number 4 in Applied Logic Series, Kluwer academic Publishers, 1997.

[9] H.Ono. Decidability and Finite Model Property of Substructural Logics. The Tbilsi Symposium on Logic, Language and Computation. CSLI Publications, 1998

[10] D.Pigozzi, The Join of Equational Theories, *Colloquium Mathematicum*, 30:15-25, 1974.

[11] S.Tojo, Event, State, and Process In Arrow Logic, Minds and Machines, 9:81-103, 1999.

[12] J.van Benthem, *Language in action*, In Categories, Lambdas and Dynamic Logic, Elsevier Science Publishers, 1991.

[13] J.van Benthem, A note on dynamic arrow logic, In J.van Eijck and A.Visser, eds., *Logic and Information Flow*, The MIT Press, pp.15-29, 1994.

[14] Y.Venema. A Crash Course in Arrow Logic, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., *Arrow Logic and Multi – Modal Logic*, CSLI and FOLLI, pp.3-34, 1996.

[15] 赤間世紀, 自然言語・意味論・論理, 共立出版, 1998.

[16] 井田哲雄, 計算モデルの基礎理論, 岩波講座ソフトウエア科学１２, 岩波書店, 1991.

[17] 小野寛晰, 情報科学における論理, 情報数学セミナー, 日本評論社, 1994.

[18] 竹内外史, 数理論理学 語の問題, 数理科学シリーズ７, 培風館, 1973.