Title	効率的に解ける多次元輸送問題の研究
Author(s)	木川田, 智明
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1471
Rights	
Description	Supervisor:平石 邦彦, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

効率的に解ける多次元割輸送問題の研究

指導教官　平石　邦彦 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

木川田　智明

2001 年 2 月 15 日

要 旨

目 次

第 1 章

輸送問題について

1.1 背景

オペレーションズ・リサーチ（OR）は第二次大戦頃から、文字通りオペレーション（軍事作戦）のリサーチ（研究）として始まったものであるが、戦後、この考えたかと手法が経営や社会の問題解決に役立つようになり、1957 年には日本オペレーションズ・リサーチ学会が設立された。オペレーションズ・リサーチは大学の教育にも取り入れられ、経営工学や管理工学科のある大学ではかならず OR の講義が解説されているのが現状である。

このように目覚しい発達をとげた OR は経営科学、社会科学、工学などに大きな影響を与えている。OR は実際の問題を如何に科学的に解決するかという目的を達成するために活用されている。数学モデルをつくり、これを解くために数式を使うことが多い。また、OR では、解決の難しい問題を、如何に優しく、エレガントに解くかということを目指しているのも面白い点である。また、困難な問題点をより平易な手法で解明し、また計算時間のよりかからない方法を生み出すことは、それだけ高度なものと評価される。

OR の分野に輸送問題というカテゴリーがある。製品を生産地から消費地まで最も安い費用で輸送する方法を求めるという問題。線形計画問題の一種であるが，条件によっていくつかのタイプに分けられる。

輸送問題を解くにあたって、重要な性質 Monge property がある。この性質には非常に長い歴史があり、すでに 1781 年に G. Monge (1746-1818) と言うフランスのエンジニアと数学者によって考え出された。A.J Hoffman [1] は 1961 年に、問題をある形に変形させ、その変形した形が Monge property を満たせば、North-West Corner Rule と呼ばれる非常に簡単かつ効率的な方法で輸送問題を解けること示した。その方法は多次元輸送問題に拡張されている。一般型の輸送問題に対しては、すでに A. Aggrawal と J.K. Park [2]

により高次元の Monge property が提案されており、また最適解にいたる解法も示されている。

一方、E.R. Barnes と A.J. Hoffman [3] は（二次元）輸送問題に輸送量に対して上界に関する制約が加わった場合についても同様な方法で解けることを示した。究では、その結果を三次元輸送問題に拡張した。まず、上界制約が加わった三次元輸送問題に対し、実行可能解が存在する必要充分条件を示した。さらに、上界制約が加わった三次元輸送問題を解くアルゴリズムを提案し、その正当性を示した。

1.2 論文の構成

題 2 章 本研究で用いている言葉の定義や扱う問題の定義、制約条件についてのべている。

題 3 章 本研究で提案する上界制約付きの 3 次元輸送問題の必要十分条件と解を見つけるアルゴリズムを述べている。

題 4 章 今後の課題について述べている。

第 2章

輸送問題について

2.1　輸送問題

輸送問題とは複数の工場（始点）から複数の倉庫（終点）へ製品を輸送する総輸送コストを最小にする最適化問題として広く知られている。例として、m 箇所の石鹸工場が、n 箇所の倉庫に一定量の製品を輸送するにあたって、輸送費を最小化するといった問題である。

各工場 i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ から各倉庫 j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ にトラック一台分の製品を送るのに必要な費用 c_{ij} は全て既知であるとする。ここで、もし各工場の生産量に制限がなければ問題は簡単に解ける。なぜならこの場合は、倉庫の側からみて輸送費の最も安い工場からその倉庫の必要量を全部送ってやればよいからである。ところが通常は各工場から送り出せる量には限りがあるので、問題は複雑になる。

今、工場 i の生産量を a_i、倉庫 j の必要量を b_j とし、工場 i から倉庫 j への輸送量をトラック x_{ij} 台分とすると、以下の制約が満たされる。

- 工場 A_i からの総輸送量は a_i 以下である。すなわち、
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$
- 倉庫 B_j への総輸送量は b_j と等しい。すなわち、
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$
- 輸送は工場から倉庫に向けて一方向的に行われる。すなわち、
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \ldots, n.$$

また、工場 i から倉庫 j へトラック一台分の製品を送るのに必要な費用 c_{ij} となることから、総輸送費は以下のように表すことができる。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

以上により、この輸送問題は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, && (2.2)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m, && (2.3)\\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, && (2.4)\\
& x_{ij} \ge 0, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. && (2.5)
\end{aligned}$$

これは、ヒッチコック型の輸送問題 [1] と呼ばれるもので、古くからさまざまな分野で実際に解かれてきた線形計画問題である。F.L. ヒッチコックが 1941 年に定式化し、解法をしめした。

2.1.1 線形計画問題の標準形と基準形

線形計画問題は、いくつかの変数の一次不等式と一次等式条件の下で、それらの変数に関する一次式を最小化したり最大化したりする問題である。この中で、特に制約条件がいくつかの一次等式と変数の非負条件のみからなる問題を標準形の最小化問題という。この他に、クラス編成問題、飼料混合問題、最適価格決定問題、日程計画問題などが線形計画法の一種として扱われる。本研究では、特にヒッチコック型の問題に着目する。

本研究で扱っていく問題の標準形は、

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, && (2.6)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, && (2.7)\\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, && (2.8)\\
& x_{ij} \ge 0, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. && (2.9)
\end{aligned}$$

制約条件を満たす x_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ をこの問題の実行可能解と呼ぶ。実行可能解の中で目的関数を最小化するものを最適解、そのときの目的関数の値を最適値とい

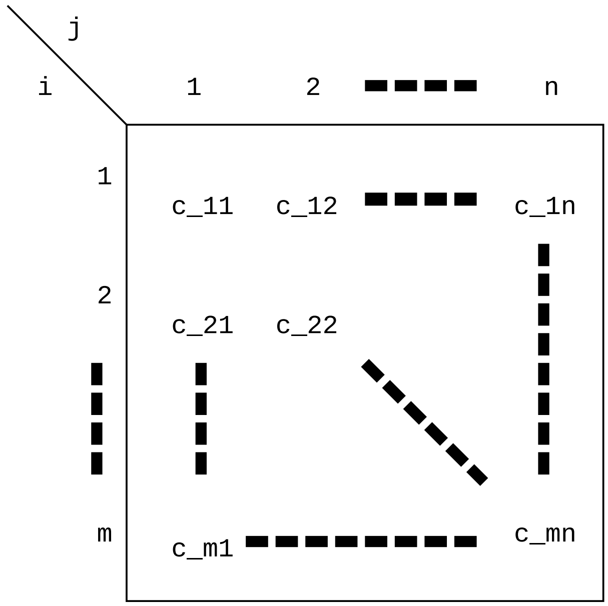

表 2.1: コスト関数

う。同様の式で、目的関数の最大化する問題も存在する。これは、目的関数を

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

とする最小化問題と等価であるから、最小化問題が解ければ最大化問題も解けることは明らかである。

式 (2.6)〜(2.9) によって定義される輸送問題が実行可能解をもつためには、工場側の総供給可能量と倉庫側の総需要量が等しくなければならない。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

ここで、本研究で扱う問題は 3 次元となり、より複雑になる。後のことを考えて、表 2.1 と表 2.2 を用意しておく。

2.1.2 North-West Corner Rule

このアルゴリズムは単純でかつ効率的であり、一組の実行可能解を求めるための方法として広く知られている ([9] より)。まず、輸送量 x_{11} の値に a_1 と b_1 の小さいほうを割り当てる。次にまだ決まっていない変数で最も上の左上方 (北西隅) にあるものを選んで、こ

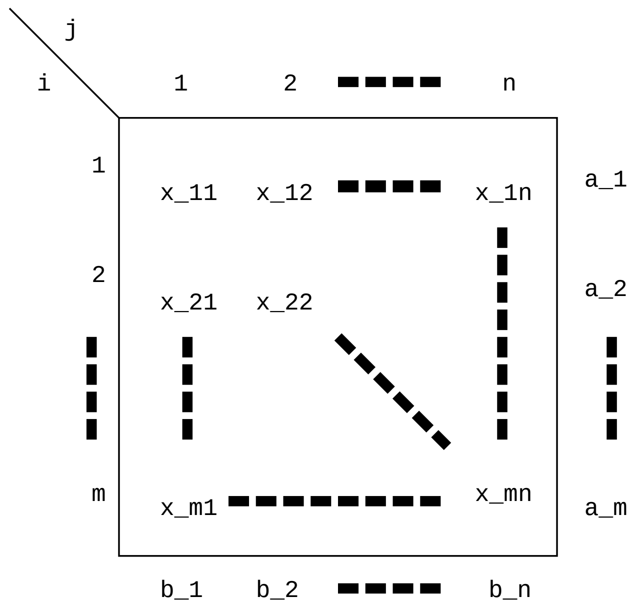

表 2.2: 需要供給制約

の値に対応しるう供給量を固定する。このとき、値は最初に固定した供給量の残存需要と、値に対応するもうひとつの供給量の小さな値を選択する。アルゴリズムは、以下である [1]。

North-West Corner Rule のアルゴリズム

Step1 $k = 1$ とする。

Step2 $\bar{x}_{i_k j_k} = \min(a_{i_k}, b_{j_k})$ とする。

Step3 a_{i_k} を $a_{i_k} - \bar{x}_{i_k j_k}$,$b_{i_k}$ から $b_{i_k} - \bar{x}_{i_k j_k}$ をひく。

Step4 $k = mn$ であれば、終わり。$k < mn$, であれば、k を $k + 1$ にして Step2 へ。

解法を具体的に説明するために、次の $m = 3, n = 5$ の数値例を利用する。North-West Corner Rule を用いて解くと表 2.5, 表 2.6 となる。

i \ j	1	2	3	4	5
1	3	6	7	5	2
2	8	3	4	3	5
3	2	8	6	4	6

c_ij

表 2.3: コスト関数 c_{ij}

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	x_11	x_12	x_13	x_14	x_15	16
2	x_21	x_22	x_23	x_24	x_25	35
3	x_31	x_32	x_33	x_34	x_35	19
b_j	18	17	14	6	15	

表 2.4: 需要供給制約

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	16	0	0	0	0	0
2	2	17	x_23	x_24	x_25	35
3	0	0	x_33	x_34	x_35	19
b_j	0	0	14	6	15	

表 2.5: x_{ij} の決定途中

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	16	0	0	0	0	0
2	2	17	14	2	0	0
3	0	0	0	4	15	0
b_j	0	0	0	6	0	

表 2.6: x_{ij} の決定

2.1.3 解の改善法

North-West Corner Rule で得られた表 2.6 の解を改善していくには、以下の条件を設定する方法をとることができる。これは、最小コストルールと呼ばれる方法である [10]。

Step1 値がゼロになっている変数を一つだけ選んで、その値を 0 からある正の値（コレを θ とする。）まで増加させる。

Step2 Step1 によって乱される供給のバランスを、正の値をもつ変数だけの調整によって回復する。

Step3 Step2 の手続きの結果、輸送費用が減少するならば,step1 で選んだ変数を他の変数が負にならないぎりぎりのレベルまで増加させる。

このように、どのゼロ変数を増やしても増加分は負とはならない。したがって、上記の手続きでは、これ以上解を改善することは不可能である。このような状態になったとき輸送問題の最適解が得られている。先のアルゴリズムでは、供給量 a_i と需要量 b_j の全てが整数であれば、変数の値は全ステップを通じて整数値に保たれる。数値例からも明らかなとおり、北西隅ルールで初期解を得る段階でも、解を改善するステップでも、整数同士の加算・減算のみで計算が済んでいるためである。

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	x_11	x_12	x_13	x_14	15	1
2	x_21	x_22	x_23	x_24	0	35
3	x_31	x_32	x_33	x_34	0	19
b_j	18	17	14	6	0	

表 2.7: 最小コストルール 1

2.2 Monge property

行列 $C = (c_{ij})$ において、この変数 $(x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{mn})$ を並べたベクトルを以下とする。

$$x = (x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{mn})^t$$

そして、$m+n$ 行、mn 列の行列を以下の制約によってならべる。そのベクトルを Monge property を満す Monge Sequence という。
全ての i, j に関して、

$$c_{i,j} + c_{i+1,j+1} \leq c_{i,j+1} + c_{i+1,j} \tag{2.10}$$

をみたす。

2.2.1 輸送問題と Monge property

輸送問題において、Hoffman は $O(m+n)$ の North-West Corner Rule アルゴリズムが、ソース m, シンク n の二次元輸送問題のある族を解くための必要十分条件を与えた [1]。2 次元輸送問題において、コスト関数が Monge property をみたし、かつそのときに限り、North-West Corner Rule で解け、ランニングコストを $O(m+n)$ に減退できる。**定理**

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	0	0	1	0	15	0
2	0	17	12	6	0	0
3	18	0	1	0	0	0
b_j	0	0	0	0	0	

表 2.8: 最終ステップ

$m \times n$ の 2 次元輸送問題におけるコスト関数 C が Monge property をみたし、かつそのときに限り North-West Corner Rule は 2 次元輸送問題を解く。

証明

まず、コスト関数が Monge property を満たしたときのみ、問題が解けることを証明する。c_{ij} が Monge property を満たさないと仮定する。この仮定により、$a_i, a_{i'}, b_j, b_{j'}$ は $1 \leq i \leq i' \leq m, 1 \leq j < j' \leq n$ に関して、

$$c_{i,j} + c_{i',j'} > c_{i,j'} + c_{i',j} \tag{2.11}$$

となる。いま、$a_i = a_{i'} = a_j = a_{j'} = 1$ で全てのほかの入力がゼロとなるようなベクトル A と B を考える。明らかに、問題の必要十分条件である 2.1.1 式を満す。。さらに、入力として与えられた A と B は、North-West Corner Rule アルゴリズムにより $x_{i,j} = 1$ また $x_{i',j'} = 1$ となり、実行可能となる。また他の変数はゼロとなる。しかしながら、$x_{i,j} = 1$ と $x_{i',j'} = 1$ にすることは仮定により、$c_{i,j'} + c_{i',j}$ は厳密に North-West Corner Rule アルゴリズムによって与えられた $c_{i,j} + c_{i',j'}$ よりも小さくなるはずである。それにより、North-West Corner Rule アルゴリズムは全ての A と B ベクトルに関しては輸送問題を解くことができない。

次に、コスト関数が Monge property を満たせば、問題が解けるこをと証明する。まず、辞書列に並んでいる実行可能解 X が最適解ではないとする。そして、X' を辞書列的に並

べられた最適解と仮定する。ここで、辞書式列で早く遅く並んでいる解 $\succ$ 辞書式列で早く並んでいる解 とする。並んだ仮定により、

$$c(X) > c(X^{'}) \text{ かつ} \succ X^{'} \tag{2.12}$$

である。いま、辞書列的にならんだ最初の変数 $x_{i,k}$ は X と X' に違う値が割り当てられているはずである。辞書列的にならんでいるはずであるので、$x_{i,j} > x^{'}_{i,j}$ を満たすはずである。このとき、a_i と b_j の制約をみたし、X' は $i < r \leq m$ かつ $j < s \leq n$ という値に関して、少なくとも 2 つの異なった変数 $x^{'}_{i,s}$ と $x^{'}_{r,j}$ があり、それはゼロではない値が割り当てられていなくてはならない。しかしながら、C は Monge property を満たすため、

$$c_{i,j} + c_{r,s} \leq c_{i,s} + c_{r,j} \tag{2.13}$$

である。ここで、$x^{'}_{i,s}$ と $x^{'}_{r,j}$ から

$$\epsilon = \min\{x^{'}_{i,s}, x^{'}_{r,j}\} \tag{2.14}$$

をひく。また、$x^{'}_{i,j}$ と $x^{'}_{r,s}$ に同じ ϵ を足す。こうして出来た新しい、$c(X'') \leq c(X')$ でかつ $X'' \succ X'$ となる実行可能解を X'' とする。そうすると X' が辞書的に並んだ最適解という仮定に存在に矛盾してしまう. よって、最適解が得られることとなる。(q.e.d)

2.3 三次元輸送問題の分類

多次元輸送問題の一つに、3 次元輸送問題がある。E.D.Shell は 3 次元輸送問題を 4 つの分類に分けた。

1. Three planar sums
2. Two planar sums
3. One planar and acial sum
4. Three axial sums

2.3.1 Three planar sums

この問題は多品目型の輸送問題として扱われている。

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}c_{ijk} \\
\text{subjest to} \quad & \sum_{i=1}^{l} x_{ijk} = A_{jk}, \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = B_{ik}, \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = E_{ij}, \\
& \sum_{j=1}^{m} A_{jk} = \sum_{i=1}^{l} B_{ki}, \sum_{k=1}^{n} B_{ki} = \sum_{j=1}^{l} E_{ij}, \sum_{i=1}^{l} E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} \\
& \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} B_{ik} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} E_{ij} \\
& x_{ijk} \geq 0.
\end{aligned}
$$

ここで、解の必要十分条件は以下である。

$$
\sum_{j=1}^{m} A_{jk} = \sum_{i=1}^{l} B_{ki}, \sum_{k=1}^{n} B_{ki} = \sum_{j=1}^{m} E_{ij}, \sum_{i=1}^{l} E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} B_{ik} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} E_{ij}
$$

という問題となる。

2.3.2 Two planar sums

Three planar sums の制約の中で E_{ij} の制約がない問題である。他の等式について考えると、２次元の問題に着目することができる。つまり、$(l+m)$ この等式が n 個あると考えることができる。したがって、これは、n この独立した２次元輸送問題として扱うことができる。２次元輸送問題に対しては、現在様々なアルゴリズムが存在する。

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}c_{ijk} \\
\text{subjest to} \quad & \sum_{i=1}^{l} x_{ijk} = A_{jk}, \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = B_{ik}, \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = E_{ij}, \\
& x_{ijk} \geq 0.
\end{aligned}
$$

ここで、この解の必要十分条件は以下である。

$$
\sum_{j=1}^{m} A_{jk} = \sum_{i=1}^{l} B_{ki}, \sum_{k=1}^{n} B_{ki} = \sum_{j=1}^{m} E_{ij}, \sum_{i=1}^{l} E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}
$$

2.3.3 One planar and one axial sums

それぞれの制約式において、一つの軸と一つの平面についての制約のみで構成される問題である。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}c_{ijk} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = b_{ik} \\ & x_{ijk} \geq 0. \end{aligned}$$

解の必要十分条件は以下である。

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}$$

この問題において、仮に x_{hk} が x_{ijk} と変換できるのであれば、つまり $h = i + (k-1)n$ とすることが出来る場合には、２次元輸送問題に変換できる。

2.3.4 Three axial sums

この問題は一般型輸送問題として扱われている。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\sum_{k=n}^{n} c_{ijk}x_{ijk}, \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \quad 1 \leq i \leq l, \\ & \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ & \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_i, \quad 1 \leq k \leq n, \\ & x_{ijk} \geq 0, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

この問題は、Three plannar sums の問題の特別な場合である。そして、この問題の実行可能基底解の数は、$(l + m + n - 2)$ である。本研究では、この問題にたいして、アプローチする。
コスト関数 $C = (c_{ijk})$ の値を同じにして、４種類別の問題を解いていくと、制約が多ければ多いほど一般的に解が大きくなることが示されている [4]。

2.4　多次元輸送問題

W.B.Bein 等は 2 次元の Monge property を多次元に拡張した [8]。この拡張方法により、多次元での輸送問題を考える上で、このクラスにおける数値的な特徴を利用することができる。本研究では、この問題の三次元の場合について、上界が存在した場合に、実行可能解の存在についてのべている。W.B.Bein 等によって、３次元一般型輸送問題にはすでに最適解を求めるアルゴリズムが提案されている。したがって、上界が存在した場合の問題を考えるにあたって、上界が存在しない場合の問題を考察した。(便宜上この問題のみ、目的関数と制約条件の表記法が他の式と異なる。)

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d} c[i_1,i_2,\ldots,i_d]x_[i_1,i_2,\ldots,i_d], \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d(s.t.i_k=I)}^{m} = x_[i_1,i_2,\ldots,i_d] = a_k[I], \\
& for\ 1 \le k \le d\ and\ 1 \le I \le n_k, x_[i_1,i_2,\ldots,i_d] \ge 0, \\
& for\ 1 \le i_1 \le n_1, etc.
\end{aligned}
$$

$d \ge 2$ において、$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$ である d 次元 array $C = c[i_1, i_2, \dot{;} i_d]$ は以下の式を満たした時に多次元 Monge property を持つ。全ての入力 $c[i_1, i_2, \cdots i_d]$ と $c[j_1, j_2, \cdots j_d]$ において、

$$
\begin{gathered}
c[s_1,s_2,\ldots,s_d] + c[t_1,t_2,\ldots,t_d] \le c[i_1,i_2,\ldots,i_d] + c[j_1,j_2,\ldots,j_d] \\
where for 1 \le k \le d,\ s_k = \min i_k, j_k\ and\ t_k = \max\{i_k, j_k\}.
\end{gathered}
$$

当然のことながら、この多次元 Monge property を 2 次元 $d = 2$ の場合にしても成り立つことは明らかである。この Monge property を満たす array のことを Monge array と呼ぶ。

$Greedy_d$ アルゴリズム

W.W Bein 等は多次元の Monge property を用いて、North-West Corner Rule で輸送問題を解くアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムを $Greedy_d$ と呼ぶ。

Step1 $x[1,1,\ldots,1] = \min\{a_1[1], a_2[2], \ldots, a_d[1]\}$ にする。

Step2 各 $a_1[1], a_2[2], \ldots, a_d[1]$ から $\min\{a_1[1], a_2[1], \ldots, a_d[1]\}$ をひく.

Step3 Step1 から Step2 を全ての解が求まるまで繰り返し行う。

このアルゴリズムは 2 次元の North-West Corner Rule の多次元形式と考えることができる。このアルゴリズムにおいて、ステップ 2 で少なくとも $a_1[1], a_2[1], \ldots, a_d[1]$ の一つは 0 となる。このことは、対応している $d-1$ 次元の $subarray\ X$ を扱うことができる。$GREEDY_d$ アルゴリズムは実行可能解を辞書列式にならべる。そして、そのランニングタイムは $O(d(n_1+n_2+\cdots+n_d))$ に減らされる。なぜなら、おのおのの割り当てに $O(d)$ かかり、少なくとも一つの次元の制約の数を一つ減らせるからである。

定理

C が与えられた d 次元 コスト $C\ n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$ に対し、Monge property を満たし、かつその場合に限り、$GREEDY_d$ アルゴリズムは問題を解く。

証明

多次元 Monge property を満たした場合のみ、問題を解くことができることを証明する。この証明は限りなくシンプルである。まず、コスト関数 C が Monge property を満たさないとする。この仮定により、入力 $c[i_1, i_2, \ldots, i_d]$ と $c[j_1, j_2, \ldots, j_d]$ は以下となる。

$$c[s_1, s_2, \ldots, s_d] + c[t_1, t_2, \ldots, t_d] > c[i_1, i_2, \ldots, i_d] + c[j_1, j_2, \ldots, j_d] \tag{2.15}$$

ここで、$1 \leq k \leq$ に関して、$s_k = \min\{i_k, j_k\}$ と $t_k = \min\{i_k, j_k\}$。また、$(i_1, i_2, \ldots i_d), (j_1, j_2, \ldots j_d)$ と $(s_1, s_2, \ldots s_d), (t_1, t_2, \ldots t_d)$ は全て異なっているるとする。さて、いまベクトル $(1 \leq k \leq d)$ に関して $A_1, A_2, \ldots, A_d$ を考える。$i_k \neq j_k$ のとき $a_k[i_k] = 1$ かつ $a_k[j_k] = 1$ でとし、また $i_k = j_k$ のときは $a_k[i_k] = 2$ とする。そして、その他の $A_1, A_2, \ldots, A_d$ 入力は 0 とする。明らかに、

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_1[i] = \sum_{i=1}^{n_2} a_2[i] = \cdots = \sum_{i=1}^{n_d} a_d[i] \tag{2.16}$$

である。そして、$Greedy_d$ アルゴリズムは $(s_1, s_2, \cdots\ s_d), (t_1, t_2, \cdots t_d)$ を 1 にする。そして、他の変数を 0 にする。この解は実行可能解となる。ここで仮定により、グリーディーアルゴリズムによって得られた解において、コスト関数 $c[i_1, i_2, \cdots, i_d] + c[j_1, j_2, \cdots, j_d]$ は厳密にコスト関数 $c[s_1, s_2, \cdots, s_d] + c[t_1, t_2, \cdots, t_d]$ よりも小さくなってしまう。ここで、この $Greedy_d$ アルゴリズムがすべての $A_1, A_2, \ldots, A_d$ にたいして輸送問題を解いた事にはならなくなってしまう。

多次元 Monge property を満たした場合、問題を解くことができることを証明する。辞書列式にならんだ実行可能解 X が最適解でないと仮定する。また、X' を辞書列式にならんでいる最適解とする。仮定により $c(X) > c(X')$ and $X \succ X'$ である。いま、辞書列式にならんだ変数 $x[i_1[i_1], i_2[i_2], \ldots, i_d[i_d]]$ に X と X' が違う値で割り当てられているとする。X は辞書列式に並んである $X^{'}$ の辞書式列で後ろに割り当てられているはずである。
そこで、

$$x[i_1, i_2, \ldots, i_d] > x^{'}[i_1, i_2, \ldots, i_d]$$

となっていなくてはならない。$a_1[1], a_2[2], \ldots, a_d[d]$ が全て満たされることを保証するために、$X^{'}$ は

$$\begin{aligned}
&X^{'}[j_1^1, j_2^1, \quad \ldots \quad j_d^1]\\
&X^{'}[j_1^2, j_2^2, \quad \cdots \quad j_d^2]\\
&\qquad\qquad\quad \vdots\\
&X^{'}[j_1^d, j_2^d, \quad \cdots \quad j_d^d]\\
&\qquad\qquad\quad for \quad 1 \le k \le d \ and \ j_l^k \ge i_l,\\
&\qquad\qquad\quad for \quad 1 \le k \le d, \ j_k^k = i_k
\end{aligned}$$

全ての d 個の $(X^{'}[j_1^k, j_2^k, \ldots j_d^k]$ の d は異なっていなくてもいいとする。しかし少なくても２つはそれらがあるとする。そこでその２つを $X^{'}[j_1^v, j_2^v, \ \cdots \ j_d^v]$ と $X'[j_1^w, j_2^w, \cdots, j_d^w]$ とする。どちらともお互いに他方よりも大きくなることはない。たとえば、

$$j_k^v < j_k^w \ and \ j_l^v > j_l^w$$

となる k と l が存在する。
さて、ここで C は Monge property を満たしているはずなので、

$$\begin{aligned}
c[s_1, s_2, \cdots, s_d] + c[t_1, t_2, \cdots, t_d] \quad &\le \quad c[j_1^v, i_2^v, \cdots, i_d^v] + c[j_1^w, j_2^w, \cdots, j_d^w]\\
&where \quad for \ 1 \le k \le d,\\
s_k = \min\{j_k^v, j_k^w\} \qquad &and \qquad t_k = \max\{i_k^v, j_k^w\}
\end{aligned}$$

となっているはずである。それゆえに、d 個の $(j_1^v, i_2^v, \ldots, i_d^v)$ と $(j_1^w, i_2^w, \ldots, i_d^w)$ の両方とも他よりも大きくなっている故、d 個の
$(s_1^v, s_2^v, \ldots, s_d^v)$ と $(j_1^w, i_2^w, \ldots, i_d^w)$ は d 個の $(j_1^v, i_2^v, \ldots, i_d^v)$ と $(j_1^w, i_2^w, \ldots, i_d^w)$ と異なっていなくてはいけないはずである。ここで、

$$x^{'}[j_1^v, i_2^v, \cdots, i_d^v] \text{ と } x'[j_1^w, i_2^w, \cdots, i_d^w] \tag{2.17}$$

から

$$\epsilon = \min\{x'[j_1^v, i_2^v, \cdots, i_d^v], x'[j_1^w, i_2^w, \cdots, i_d^w]\} \tag{2.18}$$

をひく。また

$$x'[s_1, s_2, \cdots, s_d]) \text{ と } x'[t_1, t_2, \cdots, t_d] \tag{2.19}$$

に ϵ を加える。こうすることにより出来る新しい実行可能解を X'' する。そして、それは

$$c(X'') \leq c(X') \text{ かつ } X'' \succ X' \tag{2.20}$$

となっているはずである。こうしてできた X'' の存在というのは、仮定 X' が辞書列式にならんでいる最適解の存在に反する。したがって、辞書式に並んだ最適解 X' が最適とならないと矛盾を生じてしまう。(q.e.d)

第 3 章

上界制約つき輸送問題

本研究では、従来２次元で行われている上界制約付きの輸送問題を３次元に拡張した。まず、２次元の上界制約付きの輸送問題を定義する。これを解くアルゴリズムは E.R Barnes と A.J Hoffman[3] によって証明されている。

3.1 二次元上界制約付き Monge property

E.R.Barnes と A.J.Hoffman により、２次元の輸送問題のあるクラスにおいて、上界制約を与えた場合に、解を見つける方法が提案された。これは、問題のあるクラスが、与えられている上界制約とコスト関数がある状態をみたせば、最適解は North-West Corner Rule アルゴリズムで見つけることができる。この方法は、一般型多次元輸送問題の制約式にもう一つの入力が与えられている状況において、論じている。

まず次のような輸送問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} && (3.1) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m, && (3.2) \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n, && (3.3) \\ & x_{ij} \geq 0 \ for\ all\ i\ and\ j. \end{aligned}$$

また、コスト関数 $C = (c_{ij})$ に関しては Monge property が成立しているとする。

$$c_{ij} + c_{i+1,j+1} \geq c_{i,j+1} + c_{i+1,j} \; for \; 1 \leq i < m \; and \; 1 \leq j < n.$$

ここで、以下のような状況を定義する。それは、求める x_{ij} に関して、上限をつけるということである。

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x_{rs} \quad \leq \quad \gamma_{ij}, \quad for i = 1, \cdots, m, \; and \; j = 1, \cdots, n,$$

3.1.1　実行可能解の存在条件

さて、2 次元の輸送問題は必ず実行可能解があると証明されている。しかし、上界制約が負荷された場合は実行可能解が同様に存在するのであろうか？以下に、実行可能解が存在する必要十分条件とその証明する。

補題 3.1.1 *2* 次元上界制約着き輸送問題の必要十分条件は

$$\gamma_{ij} \geq \max\{0, \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{s=j+1}^{n} b_s\} \tag{3.4}$$
$$for \; i = 1, \cdots, m-1 \; and \; j = 1, \cdots, n-1.$$

である。

証明

輸送問題の解 x^0_{rs} を

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x^0_{rs} = \max\{0, \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{s=j+1}^{n} b_s\} \tag{3.5}$$
$$for \; i = 1, \cdots, m-1 \; and \; j = 1, \cdots, n-1.$$

そのほかの任意の解 x_{rs} は以下を満たす。

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x_{rs} \geq \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x^0_{rs} \tag{3.6}$$

必要条件を示す。もしも、x_{rs} が 3.1 式の実行可能解だとすると、

$$\gamma_{ij} \quad \geq \quad \sum_{r=1}^{j}\sum_{s=1}^{j} x_{rs}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{j}\sum_{s=1}^{j} x_{rs} - \sum_{r=i+1}^{m}\sum_{s=1}^{n} x_{rs} - \sum_{r=1}^{j}\sum_{s=j+1}^{j} x_{rs} + \sum_{r=i+1}^{j}\sum_{s=j+1}^{j} x_{rs} \\
&= \sum_{r=1}^{m} a_r - \sum_{r=i+1}^{m} a_r - \sum_{s=j+1}^{n} b_s + \sum_{r=i+1}^{m}\sum_{s=j+1}^{n} x_{rs} \\
&\geq \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{s=j+1}^{n} b_s.
\end{aligned}
$$

ここで、各xは$x_{rs} \geq 0$であることから導かれる。以上のことは、当然のことなが$\gamma_{ij} \geq 0$ということを意味しており、このことは3.4を示したことになる。

十分条件を示す。3.4が満たされていたと仮定する。x_{rs}^0がNorth-East corner ruleで決められた値とする。つまり、

$$x_{1,n}^0 = \min\{a_1, b_n\}.$$

とすることができる。ここで、x_{rs}^0は$r \leq i$と$s \geq j$、$(r,s) \neq (i,j)$に関して、以下の式で決められる。

$$x_{rs}^0 = \min\{a_i - \sum_{s=j+1}^{n} x_{is}^0, b_j - \sum_{r=1}^{i-1} x_{rj}^0\}.$$

これは、Frechetによって、minimalと呼ばれている。さて、ここで、簡単な帰納法で証明が可能となる。

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=j}^{n} x_{rs}^0 = \min\{\sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=j}^{n} b_s\}$$
$$for\ all = i\ and = j.$$

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{n} x_{rs}^0 = \sum_{r=1}^{i} a_r$$

であるから、$j \geq 2$に対して、

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j-1} x_{rs}^0 &= \sum_{r=1}^{i} a_r - \min\{\sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=j}^{n} b_s\} \\
&= \max\{0, \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{s=j}^{n} b_s\} \\
&\leq \gamma_{i,j-1}.
\end{aligned}
$$

以上によってx_{ij}^0は実行可能解であることが示された。(q.e.d)

3.1.2　２次元上界制約付き輸送問題のアルゴリズム

さて、この問題を解くアルゴリズム (3.1.2) を記載する。

Step1 $x_{11} = \min\{a_1, b_1, \gamma_{11}\}$ とする。

Step2 x_{ij} が $r \geq i < m,\ and\ \leq j < n,\ (r,s) \neq (i,j)$ で求められているならば、

$$x_{ij} = \min\{a_i - \sum_{s=1}^{j-1} x_{is}, b_j - \sum_{r=1}^{i-1} x_{rj}, \gamma_{ij} - \sum_{\substack{r \leq i \\ (r,s)\neq(i,j)}} \sum_{s \leq j} x_{rs}\} \tag{3.7}$$

補題 (3.1.2)
$r \geq i$ と $s \geq j$ に関しての $(m-1) \times (n-1)$ の行列 (γ_{ij}) は以下の不等式を満たす場合にはアルゴリズム (3.1.2) は実行可能解を持つ。

$$\gamma_{ij} + \gamma_{rs} \geq \gamma_{is} + \gamma_{rj}, \tag{3.8}$$
$$\gamma_{ij} \geq \gamma_{is} \tag{3.9}$$
$$\gamma_{ij} \geq \gamma_{rj} \tag{3.10}$$

証明
補題により、アルゴリズム (3.1.2) によって定義された (x_{ij}) は負ではないと示すことができれば十分である。そして、これにより、3.7 の３番目の x_{ij} は常に負ではないと示すことができれば十分である。明らかに $\gamma_{11} \geq 0$ であるから、x_{11} である。$x_{11}, \cdots, x_{1,j-1}$ が $1 < j < n$ に関して、負でないと示されたとすると、(3.3b) と $\sum_{s=1}^{j-1} x_{1s} \leq \gamma_{1,j-1}$ ということは、

$$\gamma_{1,j} - \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s} \geq \gamma_{1,j} - \gamma_{1,j-1} \geq 0.$$

を意味する。$1 \leq j < n$ に関して、$x_{1j} \geq 0$ が導かれる。同様に、$1 \leq i < m$ に関して、$x_{i1} \geq 0$。さて、定義されている式3.7の中の３番目の要素はなくなるので、$j = n,\ or\ i = m$ に関して、$x_{ij} \geq 0$ ということが分かる。
さて、各 $m > i > 1$ と $n > j > 1$ で $1 \leq r \leq i,\ 1 \leq s \leq j\ (r,s) \neq (i,j)$ に関して $x_{rs} \geq 0$ と示されていたとする。そのとき、$s = 1, \cdots, j-1$ に関して、$x_{is} = 0$ であると仮定すると、

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (r,s)\neq(i,j)}}^{i} \sum_{s=1}^{j} x_{rs} = \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=1}^{j} x_{rs} \leq \gamma_{i-1,j}$$

であり、それは

$$\gamma_{ij} - \sum_{\substack{r=1 \\ (r,s)\neq(i,j)}}^{i} \sum_{s=1}^{j} x_{rs} \geq \gamma_{i-1,j} - \gamma_{i-1,j} \geq 0.$$

ということを意味する。そして、これは $x_{ij} \geq 0$ を意味することになる。同様に、$r = 1, \cdots, i-1$ に関して、$x_{rj} = 0$ だと仮定すると、

$$\gamma_{ij} - \sum_{\substack{r=1 \\ (r,s)\neq(i,j)}}^{i} \sum_{s=1}^{j} x_{rs} \geq \gamma_{i-1,j} - \gamma_{i,j-1} \geq 0$$

となり、これは、$x_{rj} \geq 0$ を意味する。(q.e.d)

3.2 ３次元上界制約付き一般型輸送問題 typeA

本研究では、以下のような３次元問題を考え、その問題が解を持つ為の必要十分条件を与えることが出来た。また、その問題についてのアルゴリズムを提案する。
さて、問題は

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=n} c_{ijk} x_{ijk}, \quad 1 \leq i \leq l, && (3.11)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \quad 1 \leq i \leq l, && (3.12)\\
& \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \quad 1 \leq j \leq m, && (3.13)\\
& \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_i, \quad 1 \leq k \leq n, && (3.14)\\
& \sum_{i=1}^{l} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} x_{rst} \leq A_{jk}, \quad 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n, && (3.15)\\
& x_{ijk} \geq 0, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

また、以下の制約が満たされているとする。

$$\begin{aligned}
& a_i, b_j, e_k, A_{jk} \geq 0 && (3.16)\\
& \sum_{i=1}^{l} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{k=1}^{m} e_k = A_{mn} && (3.17)\\
& for\ all\ 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m,\ and\ 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

さて、コスト関数 $C = (c_{ijk})$ は多次元 Monge property を満たしているとする。

補題

次の条件を満たすとき、かつその時のみ上記の問題に対して実行可能解が存在する。

$$A_{jk} \geq max\{0, \sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\},\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n, \tag{3.18}$$

証明

必要条件を示す。実行可能解 x_{ijk} が存在したと仮定する。まず、全ての $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ に関して、

$$\begin{aligned}
A_{jk} &\geq \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} &(3.19)\\
&\geq \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} - \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=j+1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} - \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n} x_{rst} &(3.20)\\
&= \sum_{s=1}^{m} b_s - \sum_{s=j+1}^{m} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t &(3.21)\\
&= \sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t. &(3.22)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
A_{jk} \quad &\geq \quad \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} \geq 0 &(3.23)\\
&for \quad all\ 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

であるから、$\gamma_{ijk} \geq 0$ ということになる。よって、必要性が示された。

十分条件を示す。(2.1) が成立したとする。ここで、Upper North-West Corner Rule によって決められた条件式を満たす解とする。これは、まず

$$x^0_{1mn} = \min\{a_1, b_m, e_n\} \tag{3.24}$$

とする。ここで、x^0_{rst} を次のように決める。

$$x^0_{ijk} = \min\left\{\begin{array}{l}
a_i - \sum_{s=j+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n} x^n_{ist} - \sum_{t=k+1}^{n} x^0_{ijt} - \sum_{s=j+1}^{m} x^0_{isk}, \\
b_j - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{t=k+1}^{n} x^n_{rjt} - \sum_{t=k+1}^{0} x^0_{ijt} - \sum_{r=i+1}^{l} x^0_{rjk}, \\
c_i - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{s=j+1}^{m} x^0_{rsk} - \sum_{r=i+1}^{l} x^0_{ijt} - \sum_{s=j+1}^{m} x^0_{isk}
\end{array}\right\}.$$

とする。２次元の場合と同様に以下の式は帰納法によって示めされる。

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=j}^{m}\sum_{t=k}^{n} x_{rst}^{0} = \min\left\{\sum_{r=1}^{j} a_r, \sum_{s=j}^{m} b_s, \sum_{t=k}^{n} c_t\right\} \quad \text{for all } 1 \le i \le l, 1 \le j \le m, 1 \le k \le n. \tag{3.25}$$

さて、ここで、$1 \le i \le l, 1 \le j \le m, 1 \le k \le n,$ に対して、$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_k$ ということを思い出していただこう。そして、$1 \le j \le m$ と $1 \le k \le n$ に対して、

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^{0} &= \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^{0} - \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=j+1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^{0} - \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=k+1}^{n} x_{rst}^{0} && (3.26)\\
&= \sum_{s=1}^{m} b_s - \sum_{s=j+1}^{m} b_s - \min\{\sum_{r=1}^{l} a_r, \sum_{s=1}^{j} b_s, \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} && (3.27)\\
&= \sum_{s=1}^{j} b_s - \min\{\sum_{s=1}^{j} b_s, \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} && (3.28)\\
&= \max\{\sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{s=1}^{j} b_s, \sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} && (3.29)\\
&= \max\{0, \sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} \le A_{jk} && (3.30)
\end{aligned}$$

という関係式を書くことができる。このことは、定理の十分条件となる。(q.e.d)

3.2.1 アルゴリズム

さて、この問題の定義と必要十分条件が整ったところで、この問題を解くアルゴリズムを提案する。

Step1 $r \le i < l, s \le j < m, t \le k < n$ に関して、

$$x_{111} = \min\{a_1, b_1, e_1, A_{11}\}$$

とする。

Step2 $r \le i < l, s \le j < m, t \le k < n$ に関して、

$$x_{ijk} = \min \left\{ \begin{array}{l} a_i - \displaystyle\sum_{\substack{s=1 \\ (s,t) \neq (j,k)}}^{j} \sum_{t=1}^{k} x_{ist}, \\ b_j - \displaystyle\sum_{\substack{r=1 \\ (r,t) \neq (i,k)}}^{i} \sum_{t=1}^{k} x_{rjt}, \\ e_i - \displaystyle\sum_{\substack{r=1 \\ (s,t) \neq (j,k)}}^{i} \sum_{s=1}^{j} x_{rsk}, \\ A_{jk} - \displaystyle\sum_{r=1}^{i} \sum_{\substack{s=1 \\ (r,s,t) \neq (i,j,k)}}^{j} \sum_{t=1}^{k} x_{rst} \end{array} \right\} \tag{3.31}$$

補題

(y_{rst}) を制約条件を満たす任意の実行可能解とし、(x_{rst}) をアルゴリズムによって求められた解とすると、

$$\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} x_{rst} \ge \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} y_{rst}$$

となる。

証明

x^0_{rst} が Upper Northwest corner rule で決められた値とする。ここで、

$$x^0_{rst} = \min\{a_1, b_1, e_n, A_{11}\}.$$

次に、x^0_{rst} が $r \le i, s \le j, t \ge k$ に関して、$(r, s, t) \neq (i, j, k)$ という状況に関して決められていたとする。のとき、

$$x_{ijk} = \min \left\{ \begin{array}{l} a_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ (s,t) \neq (j,k)}}^{j} \sum_{t=1}^{k} x^0_{ist}, \\ b_j - \displaystyle\sum_{\substack{r=1 \\ (r,t) \neq (i,k)}}^{i} \sum_{t=1}^{k} x^0_{rjt}, \\ e_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ (s,t) \neq (j,k)}}^{j} \sum_{t=1}^{k} x^0_{rsk}, \\ A_{jk} - \displaystyle\sum_{r=1}^{i} \sum_{\substack{s=1 \\ (r,s,t) \neq (i,j,k)}}^{j} \sum_{t=1}^{k} x^0_{rst} \end{array} \right\}$$

がなりたつと仮定する。ここで、帰納法により、

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=k}^{n}x_{rst}^{0}=\min\left\{\sum_{r=1}^{i}a_r,\sum_{s=1}^{j}b_s,\sum_{t=k}^{n}e_t,A_{jk}\right\}$$
$$for\ 1\leq i\leq l,1\leq j\leq m,1\leq k\leq n.$$

となる。$x_{rst}^{0}=\min\{a_1,b_1,e_n,A_{11}\}$. であり、次の式を仮定がなりたっているとする。

$$\sum_{r=1}^{i'}\sum_{s=1}^{j'}\sum_{t=k'}^{n}x_{rst}^{0}=\min\{\sum_{r=1}^{i}a_r,\sum_{s=1}^{j}b_s,\sum_{t=k'}^{n}e_t,A_{jk}\}$$
$$for\ i'\leq i,j'\leq j\ and\ k'\geq k.$$

ここで、

$$x_{ijk}=\min\left\{\begin{array}{l} a_i-\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\(s,t)\neq(j,k)}}^{j}\sum_{t=1}^{k}\ x_{ist}^{0}, \\ b_j-\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\(r,t)\neq(i,k)}}^{i}\sum_{t=1}^{k}\ x_{rjt}^{0}, \\ e_i-\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\(s,t)\neq(j,k)}}^{j}\sum_{t=1}^{k}\ x_{rsk}^{0}, \\ A_{jk}-\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\(r,s,t)\neq(i,j,k)}}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k}x_{rst}^{0} \end{array}\right\} \tag{3.32}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=k}^{n}x_{ist}^{0} &= \min\left\{a_i+\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=k}^{n}x_{ist}^{0},b_j+\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j-1}\sum_{t=k}^{n}x_{ist}^{0},e_k+\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=k+1}^{n}x_{ist}^{0},A_{jk}\right\}\\ &= \min\left\{\begin{array}{l} a_i+\min\left\{\displaystyle\sum_{r=1}^{i-1}a_r,\sum_{s=1}^{j}b_s,\sum_{t=k}^{n}e_t\right\}, \\ b_j+\min\left\{\displaystyle\sum_{r=1}^{i}a_r,\sum_{s=1}^{j-1}b_s,\sum_{t=k}^{n}e_t\right\}, \\ e_k+\min\left\{\displaystyle\sum_{r=1}^{i}a_r,\sum_{s=1}^{j}b_s,\sum_{t=k+1}^{n}e_t\right\}, \\ A_{jk} \end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \min\left\{\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{i} a_r, a_i + \sum_{s=1}^{j} b_s, a_i + \sum_{t=k}^{n} e_t, \\
b_j + \sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=1}^{j} b_s, b_j + \sum_{t=k}^{n} e_t, \\
e_k + \sum_{r=1}^{i} a_r, e_k + \sum_{s=1}^{j} b_s, \sum_{t=k}^{n} e_t, \\
A_{jk}
\end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=1}^{j} b_s, \sum_{t=k}^{n} e_t, A_{jk}\right\}
\end{aligned}
$$

これにより、示された。(q.e.d)

さて、ここでこのアルゴリズムに従って問題を解いていこうとすると、x_{ijk} の値に負の値が割り当てられてしまう場合がある。しがたって、以下の補題を条件に加える。ここで、この制約を加えることで、このアルゴリズムが実行可能解を出すことを保証できる。しかし、この議論は補題 (3.1.2) と同じ次元で考えることができるので、以下に制約だけを記載した。

補題 $(m-1)\times(n-1)$ の行列 A_{jk} が実行可能解の必要十分条件を満たしていて、以下の式を $s \leq j$ と $t \geq j$ に関して満たせば、解を求めるアルゴリズムは x_{ijk} の正数制約を満たした上で、実行可能解を与える。

$$
\begin{aligned}
A_{jk} + A_{st} &\geq A_{jt} + A_{sk} \\
A_{jk} &\leq A_{jt} \\
A_{jk} &\leq A_{rk}
\end{aligned}
$$

定理

アルゴリズムにより決定された x_{ijk} は問題の実行可能解となり、それは最適解となる。

証明

$C = (c_{ijk})$ に関して、定数を c_{ijk} に値数を加えても 3.11 式〜3.16 式の解と、補題 3.18 は 3.12 より明らかである。さらに、c_{ijk} の中のそのような操作は、多次元 Monge property を崩すことはない。さて、ここで多次元 Monge property は任意の平面において、２次元 Monge property が成立している。ここで、A_{jk} の制約を考えて、$j-k$ 平面に注目する。ここで、記号の関係から、c_{ijk} の i を任意に一つ固定して取った場合の c_{ijk} を $c_{jk}, (1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ とする。このとき、このことにより、$j = 1, \cdots, m$ に関して、$c_{jn} = 0$ とし、必要であれば、c_{jk} から c_{in} をひく。同様にして、$k = 1, \cdots, n$ に関して、$c_{mk} =$ とし、必要であれば、c_{jk} から c_{in} をひく。さて、各 $j = 1, \cdots, m-1$ と $k = 1, \cdots, n-1$ において、$F^{jk} = (F^{jk}_{st})$ を

$$F_{st}^{jk} = \begin{cases} 1 & (if\ s \leq j\ and\ t \leq k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおく。ここで、補題 3.2.1 により、

$$\max \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F_{st}^{jk} y_{st} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F_{st}^{jk} x_{st}$$

である。それの最大値は、3.12 式〜3.16 式と 3.18 式を満たす (y_{st}) に引き継がれる。これは、$C = F^{jk}$ の場合に対して、定理が成り立つことを示している。ここで、

$$\begin{aligned} f_{jk} &= c_{jk} - c_{j,k+1} + c_{j+1,k+1} - c_{j+1,k} \\ for \quad & j = 1, \cdots, m-1, k = 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

とする。多次元 Monge property は $f_{jk} \geq 0$ を保証する。すると、

$$\sum_{j=s}^{v} \sum_{k=t}^{w} f_{jk} = c_{st} - c_{s,w+1} + c_{v+1,w+1} - c_{v+1,t}$$
$$for\ any\ v > s, w > t.$$

特に、

$$\sum_{j=s}^{m-1} \sum_{k=t}^{n-1} f_{jk} = c_{st}$$

である。ここで、

$$c_{st} = \sum_{j=s}^{m-1} \sum_{k=t}^{n-1} f_{jk} F_{st}^{jk}$$

となり、

$$C = \sum_{j=s}^{m-1} \sum_{k=t}^{n-1} f_{jk}$$

となる。さて、この議論は、C の任意の i 平面に関しても同様のことがなりたつ。したがって、3.2.1 が x_{rst} が 3.11 式〜3.16 式と 3.18 式を満たし、かつ問題を解くことができる。そして、f_{ij} が負ではないことをしめしている。(q.e.d)

3.3 ３次元上界制約着き一般型輸送問題 typeAB

本研究では、さらに制約式が加わった場合の問題についてもアプローチした。

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk}, \quad 1 \le i \le l, & (3.33)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \quad 1 \le i \le l, & (3.34)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \quad 1 \le j \le m, & (3.35)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_i, \quad 1 \le k \le n, & (3.36)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} = A_{jk}, \quad 1 \le i \le l, 1 \le k \le n, & (3.37)\\
& \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} = B_{jk}, \quad 1 \le j \le m, 1 \le k \le n, & (3.38)\\
& x_{ijk} \ge 0, 1 \le i \le l, 1 \le j \le m, 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

また、以下の制約が満たされているとする。

$$
\begin{aligned}
a_i, b_j, e_k, A_{jk}, B_{ik} &\ge 0 & (3.39)\\
\sum_{i=1}^{l} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_i = \sum_{k=1}^{m} e_i &= A_{mn} = B_{ln} & (3.40)\\
for\ all\ 1 \le i \le l &, \quad 1 \le j \le m,\ and\ 1 \le k \le n,
\end{aligned}
$$

さて、コスト関数 $C = (c_{ijk})$ は多次元 Monge property を満たしているとする。

補題

次の条件を満たすときかつその時のみ上記の問題に対して実行可能解が存在する。

$$
\begin{aligned}
A_{jk} &\ge max\{0, \sum_{s=1}^{j} b_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\},\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n, & (3.41)\\
B_{jk} &\ge max\{0, \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\},\ 1 \le r \le l,\ 1 \le k \le n, & (3.42)
\end{aligned}
$$

証明

A_{jk} については、3.19 から 3.23 と同じ。B_{ik} についての必用条件を示す。

$$
B_{ik} \ge \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} - \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=k+1}^{k} x_{rst} \\
&= \sum_{r=1}^{l} a_r - \sum_{r=i+1}^{l} a_r - \sum_{t=k+1}^{n} e_t \\
&= \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{t=k+1}^{n} e_t .-
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
B_{ik} \quad \geq \quad & \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} \geq 0 \\
& for \quad all\ 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

であるから、$\gamma_{ijk} \geq 0$ ということになる。よって、必要性が示された。

十分条件を示す。A_{jk} に関しては、式 3.25 から 3.30 と同じ。全く同様にして、(2.1) が成立したとする。ここで、Upper North-West Corner Rule によって決められた条件式を満たす解とする。これは、まず

$$
x_{1mn}^0 = \min\{a_1, b_m, e_n\} \tag{3.44}
$$

とする。ここで、x_{rst}^0 を次のように決める。

$$
x_{ijk}^0 = \min \left\{ \begin{array}{l}
a_i - \sum_{s=j+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n} x_{ist}^0 - \sum_{t=k+1}^{0} x_{ijt}^0 - \sum_{s=j+1}^{m} x_{isk}^0, \\
b_j - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{t=k+1}^{n} x_{rjt}^0 - \sum_{t=k+1}^{0} x_{ijt}^0 - \sum_{r=i+1}^{l} x_{rjk}^0, \\
c_i - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{s=j+1}^{m} x_{rsk}^0 - \sum_{r=i+1}^{l} x_{ijt}^0 - \sum_{s=j+1}^{m} x_{isk}^0
\end{array} \right\}
$$

とする。２次元の場合と同様に以下の式は帰納法によって示めされる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=j}^{m}\sum_{t=k}^{n} x_{rst}^0 = \min\{\sum_{r=1}^{j} a_r, \sum_{s=j}^{m} b_s, \sum_{t=k}^{n} c_t\} \\
&for\ all\ 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

さて、ここで、$1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n,$ に対して、$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_i$ ということを思い出していただこう。そして、$1 \leq j \leq m$ と

$1 \leq k \leq n$ に対して、

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0 &= \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^0 - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^0 - \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=j+1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^0 && (3.46) \\
&= \sum_{s=1}^{l} a_r - \sum_{s=j+1}^{m} a_s - \min\{\sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=j+1}^{m} b_m, \sum_{t=1}^{n} e_t\} && (3.47) \\
&= \sum_{s=1}^{j} a_r - \min\{\sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{s=j+1}^{m} b_m, \sum_{t=1}^{n} e_t\} && (3.48) \\
&= \max\{\sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{r=1}^{i} a_r, \sum_{r=1}^{l} a_s - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} && (3.49) \\
&= \max\{0, \sum_{r=1}^{i} a_r - \sum_{t=k+1}^{n} e_t\} \leq B_{ik} && (3.50)
\end{aligned}$$

という関係式を書くことができる。このことは、定理の十分条件となる。(q.e.d)

第 4 章

今後の課題と付録

さて、二次元上界制約付き輸送問題３次元に拡張される際に 3.11 式〜3.16 式と 3.33 式〜3.39 式を提案し、その実行可能解の必要十分条件をしめした。しかしながら、３次元への拡張の際に、以下のような問題を考えるのが一般的であるように思う方もいらっしゃるだろう。

4.1 三次元上界制約付き輸送問題 typeABE

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \sum_{j=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk}, && (4.1)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = a_i, \quad 1 \le i \le l, && (4.2)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = b_j, \quad 1 \le j \le m, && (4.3)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} = e_i, \quad 1 \le k \le n, && (4.4)\\
& \sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} \le A_{jk}, \quad 1 \le i \le l, 1 \le k \le n, && (4.5)\\
& \sum_{i=1}^{i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} \le B_{jk}, \quad 1 \le j \le m, 1 \le k \le n, && (4.6)\\
& \sum_{i=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} \le E_{ij}, \quad 1 \le i \le l, 1 \le j \le m, && (4.7)\\
& x_{ijk} \ge 0, 1 \le i \le l, 1 \le j \le m, 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

また、以下の制約が満たされているとする。

$$\begin{aligned}
a_i, b_j, e_k, A_{jk}, B_{ik}, E_{ij} &\geq 0, && (4.8)\\
\sum_{i=1}^{l} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_i = \sum_{k=1}^{m} e_i &= A_{mn} = B_{ln} = E_{lm} && (4.9)\\
for\ all\ 1 \leq i \leq l \quad &, \quad 1 \leq j \leq m,\ and\ 1 \leq k \leq n,
\end{aligned}$$

この必要十分条件を本研究が参考にした [3] を軸に証明していく。そうすると、ある時点で崩壊してしまいます。簡単にいうと、必要条件と十分条件が異なってしまうのである。いかに、その証明を載せる。

必要条件

A_{jk} に関しては、3.19 式〜3.23 式。B_{ik} に関しては、3.23 式〜3.23 式に同じ。また、

$$\begin{aligned}
E_{ij} \quad &\geq \quad \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{n} x_{rst} \geq 0 && (4.10)\\
for \quad &all\ 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

確かに、必要条件は type A 型と type AB 型の拡張に思える。

十分条件を示そうとすると A_{jk} に関しては、3.24 式から 3.46 より typeA に同じ。B_{ik} に関しては、3.44 式〜3.45 式に同じ。しかし、同様の証明を進めていくと、

$$E_{ij} \geq \max\{0, \sum_{t=1}^{k} e_k - \sum_{r=i+1}^{m} a_r\}$$

となって欲しい。ここで、仮定として、

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=j}^{m}\sum_{t=k}^{n} x_{rst}^0 = \min\left\{\sum_{r=1}^{j} a_r, \sum_{s=j}^{m} b_s, \sum_{t=k}^{n} e_t\right\}$$

としておく。しかし、

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0 &= \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} x_{rst}^0 - \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n} x_{rst}^0 - \sum_{i+1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0 && (4.11)\\
&= \sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0 - \sum_{r=i+1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0 && (4.12)\\
&= \sum_{t=1}^{k} e_t - \min\left\{\sum_{r=i+1}^{l} x_{rst}^0, \sum_{s=1}^{m} x_{rst}^0, \sum_{t=1}^{k} x_{rst}^0\right\} && (4.13)\\
&= \max\left\{0, \sum_{t=1}^{k} e_k - \sum_{r=i+1}^{m} a_r\right\} && (4.14)
\end{aligned}$$

としたい。しかし、4.12 式から 4.13 式にいたる段階で、仮定に反してしまう。従って、ここではこれ以上証明を進めることができなくなってしまった。今後の課題としては、この方法にのっとり、しかしほかのテクニックを使用して、証明をすすめていくか。もしくは、全く別のアプローチをとる方法が考えられる。

4.2 三次元上界制約付き輸送問題 typeA の別解

別解

y が負ではない、さらに $(i,j,k)=(1,1,1)$ に対して、

$$x_{111}=\min\{a_1,b_1,e_1,A_{11}\} \tag{4.15}$$

は明らかになりたつ。ここで、

$$\sum_{t=1}^{k-1}x_{11t}\geq\sum_{t=1}^{k-1}y_{11t} \quad for\ all\ 1\leq k\leq n. \tag{4.16}$$

が成り立つと仮定する。また、準備として、

$$\begin{aligned}x_{\Delta i,\Delta j,\Delta k}=\min\{a_{\Delta i}-&\frac{\sum_{s=1}^{\Delta j}\sum_{t=1}^{\Delta k}}{(s,t)\neq(\Delta j,\Delta k)}x_{ist},b_{\Delta j}-\frac{\sum_{r=1}^{\Delta i}\sum_{t=1}^{\Delta k}}{(r,t)\neq(\Delta i,\Delta k)}x_{r\Delta jt},\\ e_{\Delta i}-&\frac{\sum_{r=1}^{\Delta i}\sum_{s=1}^{\Delta j}}{(r,s)\neq(\Delta i,\Delta j)}x_{rsk},A_{\Delta j,\Delta k}-\frac{\sum_{r=1}^{\Delta i}\sum_{s=1}^{\Delta j}\sum_{t=1}^{\Delta k}}{(r,s,t)\neq(\Delta i,\Delta j,\Delta k)}x_{rst}\}\end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで、アルゴリズムとここでの証明の添え字が重複しないように、以下を与えている。アルゴリズムでの (i,j,k) はそれぞれ、$(\Delta i,\Delta j,\Delta k)$ としてある。
さて、ここの証明の第一段階では、$(\Delta i,\Delta j,\Delta k)$ の値は

$$\Delta i=1,\Delta j=1,\Delta k=k \tag{4.18}$$

このことは、

$$x_{\Delta i,\Delta j,\Delta k} = x_{1,1,k} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&=\min\{a_1-\frac{\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{k}}{(s,t)\neq(1,k)}x_{ist},b_1-\frac{\sum_{r=1}^{1}\sum_{t=1}^{k}}{(r,t)\neq(1,k)}x_{r1t}\\ &,\quad e_k-\frac{\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{1}}{(r,s)\neq(1,1)}x_{rsk},A_{1,k}-\frac{\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{k}}{(r,s,t)\neq(1,1,k)}x_{11t}\}\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
&= \min\{a_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t}, b_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t} \\
&, \quad e_k, A_{1,k} - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t}\} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

を導き出す。そうすることによって、

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{k} x_{11t} &= \sum_{t=1}^{k} x_{11t} && (4.22) \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t} + x_{11k} && (4.23) \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t} + \min\{a_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t}, b_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t} \\
&, \quad e_k, A_{1,k} - \frac{\sum_{t=1}^{k}}{(t) \neq (k)} x_{11t}\} && (4.24) \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t} + \min\{a_1 - \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t}, b_1 - \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t} \\
&, \quad e_k, A_{jk} - \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t}\} && (4.25) \\
&= \min\{a_1, b_1, e_k + \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t}, A_{1k}\} && (4.26) \\
&\geq \min\{a_1, b_1, e_k + \sum_{t=1}^{k-1} y_{11t}, A_{1k}\} && (4.27) \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t} + \min\{a_1 - \sum_{t=1}^{k-1} y_{11t}, b_1 - \sum_{t=1}^{k-1} y_{11t} \\
&, \quad e_k, A_{jk} - \sum_{t=1}^{k-1} x_{11t}\} && (4.28) \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} y_{11t} + \min\{a_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k-1} y_{11t}}{(t) \neq (k)} y_{11t}, b_1 - \frac{\sum_{t=1}^{k-1} y_{11t}}{(t) \neq (k)} y_{11t}, \\
&, \quad e_k, \sum_{s=1}^{j} A_{jk} - \frac{\sum_{t=1}^{k-1} y_{11t}}{(t) \neq (k)} y_{11t}\} && (4.29) \\
&\geq y_{11t} && (4.30)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\sum_{r=1}^{i-1} x_{r11} \geq \sum_{r=1}^{i-1} y_{r11} \qquad (4.31)
$$
$$
for\ all\ 1 \leq i \leq l.
$$

が成り立つと仮定する。そうすることによって、

$$\Delta i = i, \Delta j = 1, \Delta k = 1 \tag{4.32}$$

を考えて、

$$\begin{aligned}
x_{\Delta i,\Delta j,\Delta k} &= x_{i,1,1} && (4.33)\\
&= \min\{a_r - \sum_{\substack{s=1\\(s,t)\neq(1,1)}}^{1}\sum_{t=1}^{1} x_{ist}, b_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r,t)\neq(i,1)}}^{i}\sum_{t=1}^{1} x_{r1t}\\
&\quad , e_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r,s)\neq(i,1)}}^{i}\sum_{s=1}^{1} x_{rs1}, A_{1,1} - \sum_{\substack{r=1\\(r,s,t)\neq(i,1,1)}}^{i}\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{1} x_{rst}\} && (4.34)\\
&= \min\{a_r, b_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}\\
&\quad , e_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}, A_{11} - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}\} && (4.35)
\end{aligned}$$

先と同様に展開していくと,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{1} x_{rst} &= \sum_{r=1}^{i} x_{r11} && (4.36)\\
&= \sum_{r=1}^{i-1} x_{r11} + x_{r11} && (4.37)\\
&= \sum_{r=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{k} x_{11t} + \min\{a_r, b_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}\\
&\quad , e_1 - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}, A_{11} - \sum_{\substack{r=1\\(r)\neq(i)}}^{i} x_{r11}\} && (4.38)\\
&= \sum_{r=1}^{i-1} x_{r11} + \min\{a_r, b_1 - \sum_{r=1}^{i} x_{r11}\\
&\quad , e_1 - \sum_{r=1}^{i} x_{r11}, A_{11} - \sum_{r=1}^{i} x_{r11}\} && (4.39)\\
&= \min\{a_r + \sum_{r=1}^{i-1} x_{r11}, b_1, e_1, A_{11}\} && (4.40)\\
&\geq \min\{a_r + \sum_{r=1}^{i-1} y_{r11}, b_1, e_1, A_{11}\} && (4.41)\\
&= \sum_{r=1}^{i-1} y_{r11} + \min\{a_r, b_1 - \sum_{r=1}^{i} y_{r11}\\
&\quad , e_1 - \sum_{r=1}^{i} y_{r11}, A_{11} - \sum_{r=1}^{i} y_{r11}\} && (4.42)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{i-1} y_{r11} + \min\{a_i, b_1 - \frac{\sum_{r=1}^{i-1}}{(r,t) \neq (i-1,1)} y_{11t} x_{r11}, \\
&, \quad e_1 - \frac{\sum_{r=1}^{i-1}}{(r,1) \neq (i-1,1)} y_{r11}, A_{11} - \frac{\sum_{r=1}^{i-11}}{(r,s,t) \neq (i,1,1)} y_{r11}\} \quad (4.43) \\
&\geq y_{r11} \quad (4.44)
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\sum_{s=1}^{j-1} x_{1s1} \geq \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1} \quad (4.45)
$$
$$
for\ all\ 1 \leq j \leq m.
$$

が成り立つと仮定する。そうすることによって、

$$
\Delta i = 1, \Delta j = j, \Delta k = 1 \quad (4.46)
$$

このことは、

$$
\begin{aligned}
x_{\Delta i, \Delta j, \Delta k} &= x_{1,j,1} \quad (4.47) \\
&= \min\{a_1 - \frac{\sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{1}}{(s,t) \neq (j,1)} x_{1st}, b_j - \frac{\sum_{r=1}^{1} \sum_{t=1}^{1}}{(r,t) \neq (1,1)} x_{rjt} \\
&, \quad e_1 - \frac{\sum_{r=1}^{1} \sum_{s=1}^{j}}{(r,s) \neq (1,j)} x_{1sk}, A_{j,1} - \frac{\sum_{r=1}^{1} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{1}}{(r,s,t) \neq (1,j,1)} x_{1s1}\} \quad (4.48) \\
&= \min\{a_1 - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{11t}, b_j \quad (4.49) \\
&, \quad e_1 - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{1s1}, A_{1,k} - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{11t}\} \quad (4.50)
\end{aligned}
$$

先と同じく展開していくと、

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{1} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{1} x_{1s1} &= \sum_{s=1}^{j} x_{1s1} \quad (4.51) \\
&= \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s1} + x_{1s1} \quad (4.52) \\
&= \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s1} + \min\{a_1 - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{11t}, b_j \quad (4.53) \\
&, \quad e_1 - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{1s1}, A_{1,k} - \frac{\sum_{s=1}^{j}}{(s) \neq (j)} x_{11t}\} \quad (4.54)
\end{aligned}
$$

$$= \quad \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s1} + \min\{a_1 - \sum_{s=1}^{j} x_{1s1}, b_j \tag{4.55}$$

$$, \quad e_1 - \sum_{s=1}^{j}, A_{1,k} - \sum_{s=1}^{j} x_{1sq}\} \tag{4.56}$$

$$= \quad \min\{a_1, b_j + \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s1}, e_1, A_{j1}\} \tag{4.57}$$

$$\geq= \quad \min\{a_1, b_j + \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1}, e_1, A_{j1}\} \tag{4.58}$$

$$= \quad \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1} + \min\{a_1 - \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1}, b_1$$

$$, \quad e_1 - \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1}, A_{11} - \sum_{s=1}^{j-1} y_{1s1} y_{1s1}\} \tag{4.59}$$

$$\geq \quad y_{1s1} \tag{4.60}$$

これで、帰納法により、$i = 1, j = 1, k < n$ と $i = 1, j < m, k = 1$ と $i < l, j = 1, k = n$ の時、3.2.1 式はなりたつ。ここで、

$$\sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} x_{rst} \geq \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} y_{rst} \tag{4.61}$$

$$\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{t=1}^{k} x_{rst} \geq \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{t=1}^{k} y_{rst} \tag{4.62}$$

$$\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k-1} x_{rst} \geq \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k-1} y_{rst} \tag{4.63}$$

$$for\ some\ i < l\ and\ j < m\ and\ k < n.$$

が成り立つと仮定する。ここで、y が負ではないことから、

$$y_{ijk} \leq \min\{a_i - \overset{\sum_{t=1}^{k-1} \sum_{t=1}^{k} y_{ist}}{(s,t) \neq (j,k)} y_{11t}, b_j - \frac{\sum_{r=1}^{i} \sum_{t=1}^{k}}{(r,t) \neq (r,k)} y_{rjt}, \tag{4.64}$$

$$e_k - \frac{\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}}{(r,s) \neq (i,j)} y_{rsk}, A_{jk} \frac{\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k}}{(r,s,t) \neq (i,j,k)} y_{r,s,t}\} \tag{4.65}$$

これは、

$$\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} y_{r,s,t} \quad \leq \quad \min\{a_i + \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k} y_{rst}$$

$$, \quad b_j + \sum_{r=1}^{1} \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{t=1}^{k} y_{rst}, e_k + \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \sum_{t=1}^{k-1} y_{rst}, A_{jk}\} \tag{4.66}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \min\{a_i + \sum_{r=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{rst} \\
&, \quad b_j + \sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{j-1}\sum_{t=1}^{k} x_{rst}, e_k + \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k-1} x_{rst}, A_{jk}\} \qquad (4.67) \\
&= \quad \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\sum_{t=1}^{k} x_{r,s,t} \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

また、$i = l\ orj = m\ or\ k = n$ の場合には、の４番目の式が消されることによって、成立する。以上により、帰納法によって示された。(q.e.d)

謝辞

永きにわたり、未熟な私めを懇切丁寧に指導して下さった、北陸先端科学技術大学院大学の方々にお礼を申し上げ、深く感謝の意を表したいとおもいます。ならびに、指導教官である平石 邦彦助教授にはたびたびご迷惑の程をおかけいたしました。また、Milan Vlach 教授には数多くの助言をいただきました。また、高島 康裕助手にも慰めの言葉をいただき、非常に精神的にも助かりました。また、宋 少秋助手には沢山の言葉をいただきつつも、ご尽力を注いでいただき、真に感謝しております。みなさまの助言ななかったのならば、本日ここにあらずであります。研究室の方々にも、多大なご迷惑をおかけつつも、研究を進めることができたことを感謝しております。真にありがとうございます。

参考文献

[1] A.J.Hoffman, ”On simple linear programing problems”,In Proc of the Seventh Symposium in Pure Mathmatics of the AMS, pp.317-327,1963.

[2] A.Aggrawal and J.K.Park, ”Note on Searching in Multi-dimensional Monotone Arrays”, Submitted to Jurnal of Algrithms. Portions of this paper in Proceedings of the 29th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 497-512, 1988.

[3] E.R.Barnes,A.J.Hoffman,”On Transportation Problems With 上界制約 On Leading Rectangles”

[4] E.D.Schell,”Distribution of a Product by Several Properties.”,Directorate of Management Analysis, ”Proceeding of the Second Symposium in Linear Programing.” 2,615,DSC/Comptrollrer H.Q.U.S.A.F.,Washington,D.C.,Jan,1995.

[5] Haley K.B.,”The Solid Transportation Problem.”Operations Research 10,1962.

[6] Haley K.B.,”The Multi-dimensional Assignment Problem.”,Operations Research 11,368-397,1963.

[7] Milan Vlach,”Conditions For The Existence Of Solutions Of The Three-dimensional Planar Transportation Problem”Discrete Applied Mathematics 13,61-87,1986

[8] Wolfgang W.Bein,Peter Brucker,James K.Park,Pramod K.Pathak,”A Monge property for the d-dimensional Transportation Problem”,1991.

[9] 今野　浩　”線形計画法”, 日科技連出版社,1987.

[10] 真壁　肇, 小島　政和, 牧野　都冶, 森村　英典,”オペレーションズ・リサーチ”, 日本規格協会 1980