Title	時間論理とその情報科学への応用
Author(s)	今井，英明
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1529
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

時間論理とその情報科学への応用

指導教官　小野寛晰 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

今井英明

2002 年 2 月 15 日

目 次

第 1 章

はじめに

1950 年代に A.Prior は哲学的論理学の立場から、英語などの文にあらわれる現在・過去・未来・完了などの時制の論理的性質を分析するために時制論理（*tense logic*）の研究を始めた。その研究は自然言語の解析や、自然言語の意味論の研究に影響を与えた。1980 年代になってから、並列プログラムの正当性の検証においてその仕様の記述に時制論理の枠組が有効であることが認識されるようになった。しかし、具体的な問題の記述のためには next や until のような新たな様相演算が必要になる。また、情報科学への応用面からの要請でさらに記述力を強めて述語論理に拡張し、時間的区間や実時間を扱うことが出来るようにした体系の研究も行われている。これらの体系を総称して時間論理（*temporal logic*）という。

時間の概念を扱うことの出来る時間論理は、並列プログラムの仕様検証、VLSI の設計、自然言語処理、人工知能など、情報科学の様々な分野に応用されている。その基礎となる体系はいくつかの時間演算を持つ命題論理であるが、扱われる問題によっては実時間が表現可能な多種述語論理などの複雑な体系が用いられる。しかし、記述力や表現力を強めると、その一方では元々の時制論理が持っていた決定可能性のような好ましい論理的性質が失われてしまう。とはいえ、実際に扱われる問題の種類によってはさほど複雑な論理体系を必要としない場合も多い。

本研究では、基本的な時間論理の持つ好ましい性質を保持しつつ、その記述力や表現力の向上を意図して時間論理と他の様相論理を組み合わせた論理について議論する。組み合わせる論理としては認識論理を考え、特に知識の論理と呼ばれる演算との組み合わせについて議論を行う。

以下に、本論文の具体的な構成について述べる。

まず第二章「様相論理とそのセマンティクス」では基本的な様相論理の概要について述

べ、第三章「時間論理と認識論理」では準備段階として時間論理と認識論理それぞれの基本的な体系について解説する。第四章以下では時間論理と認識論理を組み合わせた論理である認識時間論理について解説をしているが、四章ではエージェント間、及び時間概念と認識概念の間に依存関係のないもっとも基本的な体系について述べる。第五章では認識演算に関してエージェント間に依存関係のある認識時間論理について述べ、第六章では時間概念と認識概念の間に依存関係のある認識時間論理について述べている。

　四～六章ではそれぞれの認識時間論理の体系に関して完全性と有限モデル性の証明を行っており、これらを示すことにより、記述力や表現力を強めつつも、本来の好ましい性質を保持していることを提示できると考えている。

第 2 章

様相論理とそのセマンティクス

日常的な思考の中に現れる推論は多くの場合、その推論が行われる状況や時間の前後関係などの様々な因子を含んでいる。そのような推論形式を分析するために、様相論理を導入する。

様相論理の様相演算は普通「必然性」や「可能性」を表していると解釈されるが、これに対し様々な解釈を与えることにより様相論理に類似した論理体系が得られる。本論文ではその中の時間論理と認識論理、そしてそれらを組み合わせた認識時間論理について議論を行うが、この章ではまず基本的な様相論理に関しての概要を述べることとする。

2.1 様相論理

様相論理（*modal logic*）はアリストテレスにより体系的な研究が始められ、中世の哲学者や神学者にその研究が受け継がれてきた。それを現代的な観点から整理したのはC.I.Lewis と C.H.Langford である。

アリストテレスは文の様相（*mode*）、すなわちある文が事実として正しいこととそれが必然的に正しいこととを区別し、それらの間になりたつ論理関係を明らかにしようとした。様相論理では、

(1) 必然的に A である

ことを、普通は記号 $\Box$ を使って $\Box A$ と表す。このとき $\neg\Box A$ は

(2) A は必然的ではない

および $\Box\neg A$ は

(3) A でないことは必然的である（A である可能性はない）

を意味することになる。(3) の否定、すなわち $\neg\Box\neg A$ を $\Diamond A$ と表す。$\Diamond A$ は

(4) A である可能性がある

ことを意味することになる。

これらの $\Box$ や $\Diamond$ を様相演算（*modal operator*）という。様相演算を命題 A に適用することにより、$A,\ \Box A,\ \neg\Box A,\ \neg\Diamond A,\ \Box\Box A,\ \Box\Diamond A,\ \Diamond\Box A$ などの様々な様相を考えることができる。

2.2　クリプキによるセマンティクス

S.Kripke による様相論理のセマンティクスは、以下に述べるクリプキフレームにより定められる。

定義 2.1 クリプキフレーム

空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M, R) を様相論理に対するクリプキフレームという。M および R をそれぞれ、このクリプキフレームの可能世界の集合および到達可能関係という。

定義 2.2 クリプキモデル

(M, R) をフレームとする。また V を各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする。このとき、V をフレーム (V, R) 上の付値という。そして、この三つ組 (M, R, V) をクリプキモデルという。与えられたクリプキモデルに対し、M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ を次のように帰納的に定義する。

1) $a \models p \Leftrightarrow a \in V(p)$　(p は命題変数)
2) $a \models A \wedge B \Leftrightarrow a \models A$ かつ $a \models B$
3) $a \models A \vee B \Leftrightarrow a \models A$ または $a \models B$
4) $a \models A \supset B \Leftrightarrow a \models A$ でないか、または $a \models B$
5) $a \models \neg A \Leftrightarrow a \models A$ でない
6) $a \models \Box A \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

$a \models A$ であるとき、「可能世界 a で A は真である」という。「$a \models A$ でない」ことは $a \not\models A$ と表す。5) と 6) より

7) $a \models \Diamond \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

がなりたつ。関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるため、V と $\models$ を同一視し、$\models$ を付値と呼ぶことや、$(M, R, \models)$ のことをクリプキモデルと呼ぶ場合もある。

第 3 章

時間論理と認識論理

この章では、認識時間論理に入る前の準備段階として、時間論理と認識論理それぞれについて述べる。時間論理と認識論理は様相論理の枠組みの中で研究されており、それらはいずれも、複数の様相演算を持つ多様相論理として形式化されている。

3.1 時間論理の体系 K_t

様相論理において時間的な議論を行うために、様相演算 G と H を導入し、GA、HA をそれぞれ、「未来においていつも A」、「過去においていつも A」と解釈する。また、$\neg G \neg A$ と $\neg H \neg A$ のそれぞれを FA および PA と表記し、それぞれ「未来のある時点で A」、「過去のある時点で A」と解釈することができる。

時間論理のもっとも基本的な体系である K_t は以下の公理及び推論規則を付け加えて得られる体系である。

公理

(a) **CL**（古典論理の公理）

(b) $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$

$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$

(c) $q \to GPq$

$q \to HFq$

(d) $Gp \to GGp$

$Hp \to HHp$

推論規則

$$(e)\quad Generalization\quad \frac{A}{GA},\ \frac{A}{HA}$$

$$(f)\quad Modus\ ponens\quad \frac{A\quad A \to B}{B}$$

公理 (c) は未来と過去の対称性、公理 (d) は時間の推移性を表している。

3.2 時間論理のフレームと付値

時間論理に対しても様相論理の場合と同様にフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。この場合、それぞれの可能世界は一つ一つの時点を表すことになる。また、R を到達可能関係とすると aRb は、時点 b は時点 a より後にあることを意味することになる。

空でない集合 M と、M 上の推移的な二項関係 R の対 (M,R) を時間論理のフレームという。フレーム (M,R) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし、$a \in M$ に対し、

(1) $a \models GA \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$
(2) $a \models HA \Leftrightarrow bRa$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。時間論理のフレームに対し、三つ組 $(M,R,\models)$ を時間論理のモデルとよぶ。

時間論理に関して、様相論理と同様の方法を用いて次の結果を示すことができる。

定理 3.1 (K_t の完全性と有限モデル性)

(1) 時間論理 K_t は時間論理のフレーム全体のクラスに関して完全である。

(2) K_t は有限モデル性を持つ。
すなわち、A が K_t で証明可能であるなら、ある有限な時間論理のモデル (M,R) が存在し、$(M,R) \not\models A$ となる。

3.3 時間論理の拡張体系

時間論理の基本的な体系 K_t にいくつかの公理を付け加えることによって時間の構造を特定した様々な時間論理の拡張体系について議論されている。本論文ではこれらの拡張体系について詳しく述べることはしないが、公理とそれに対応する時間の構造に関しての表を載せておく。

公理	セマンティクス
(a) $Fp \wedge Fq \to F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(Fp \wedge q)$ (b) $Pp \wedge Pq \to P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(Pp \wedge q)$	total order
(a) $G \perp \vee FG \perp$ (b) $H \perp \vee PH \perp$	max,min あり
(a) $Gp \to Fp$ (b) $Hp \to Pp$	max,min なし
(a) $Fp \to FFp$ (b) $Pp \to PPp$	稠密（有理数 Q）
(a) $p \wedge Hp \to FHp$ (b) $p \wedge Gp \to PGp$	離散的（整数 Z）
(a) $Fp \wedge FG\neg p \to F(HFp \wedge G\neg p)$ (b) $Pp \wedge PH\neg p \to P(GPp \wedge H\neg p)$	完備（実数 R）
$H(Hp \to p) \to Hp$	整列（自然数 N）
(a) $FGp \to GFp$ (b) $PHp \to HPp$	合流性

一例として、体系 K_t に $p \wedge Hp \to FHp,\ \ p \wedge Gp \to PGp$ という公理を付け加えた体系では、時間の構造が離散的になることが知られている。この体系における可能世界の例としては、整数の集合などがあげられる。

3.4 認識論理

論理式 $\Box A$ を、「ある人 α が A であることを知っている」と解釈するとき、$\Box$ が普通の様相演算に似た論理的性質を持っていることがすでに知られている。

ここでは認識論理として、様相演算 K_α、または B_α を持つ体系を考える。

知識の論理 K_K

様相演算として K_α を導入し、$K_\alpha A$ を「エージェント α が A であることを知っている」と解釈する。知識の論理 K_K は以下の公理と規則によって定められる。

公理

CL

$K_\alpha(p \to q) \to (K_\alpha p \to K_\alpha q)$

$K_\alpha p \to p$

$K_\alpha p \to K_\alpha K_\alpha p$

$\neg K_\alpha p \to K_\alpha \neg K_\alpha p$

推論規則

$$Generalization \quad \frac{A}{K_\alpha A}$$

$$Modus\ ponens \quad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

公理 $K_\alpha p \to p$ は知識が正しいことを表し、公理 $K_\alpha p \to K_\alpha K_\alpha p$ と公理 $\neg K_\alpha p \to K_\alpha \neg K_\alpha p$ は知っていることも知らないことも自己認識していることを表している。

信念の論理 K_B

様相演算として B_α を導入し、$B_\alpha A$ を「エージェント α が A であることを信じている」と解釈する。信念の論理 K_B は以下の公理と規則によって定められる。

公理

CL

$B_\alpha(p \to q) \to (B_\alpha p \to B_\alpha q)$

$B_\alpha p \to \neg B_\alpha \neg p$

$B_\alpha p \to B_\alpha B_\alpha p$

$\neg B_\alpha p \to B_\alpha \neg B_\alpha p$

推論規則

$$Generalization \quad \frac{A}{B_\alpha A}$$

$$Modus\ ponens \quad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

公理 $B_\alpha p \to \neg B_\alpha \neg p$ は対立する事象を同時に信じないことを表し、公理 $B_\alpha p \to B_\alpha B_\alpha p$ と公理 $\neg B_\alpha p \to B_\alpha \neg B_\alpha p$ は信じていることも信じていないことも自己認識していることを表している。

3.5 認識論理のフレームと付値

認識論理に対しても様相論理の場合と同様にフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。

空でない集合 M と、M 上の二項関係 R の対 (M, R) を認識論理のフレームという。フレーム (M, R) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし、$a \in M$ に対し、

K_K: $a \models K_\alpha A \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$
K_B: $a \models B_\alpha A \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。
　認識論理のフレーム上の二項関係 R は以下の性質を持つ。

K_K: 反射的、推移的、ユークリッド的
K_B: 継続的、推移的、ユークリッド的

　認識論理に関して、様相論理と同様の方法を用いることにより次の結果が成り立つことが知られている。

定理 3.2 (K_K の完全性と有限モデル性)
(1) 認識論理 K_K は知識の論理のフレーム全体のクラスに関して完全である。
(2) K_K は有限モデル性を持つ。

定理 3.3 (K_B の完全性と有限モデル性)
(1) 認識論理 K_B は信念の論理のフレーム全体のクラスに関して完全である。
(2) K_B は有限モデル性を持つ。

第 4章

認識時間論理（その１）

前章で述べた時間論理と認識論理の二つの論理を組み合わせた認識時間論理について述べる。この章では特に、時間概念と認識概念の間に何も依存関係がない場合について議論する。

4.1 認識時間論理の体系 K_tK_α

時間論理と認識論理を組み合わせることにより、「過去のある時点においてエージェント α は A であることを知っている」（$PK_\alpha A$）などという表現が可能になる。このような体系のうちもっとも基本的な体系が K_tK_α である。認識時間論理 K_tK_α の公理と推論規則は以下のように与えられる。

公理

CL

$G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$

$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$

$K_\alpha(p \to q) \to (K_\alpha p \to K_\alpha q)$

$q \to GPq$

$q \to HFq$

$Gp \to GGp$

$Hp \to HHp$

$K_\alpha p \to p$

$K_\alpha p \to K_\alpha K_\alpha p$

$\neg K_\alpha p \to K_\alpha \neg K_\alpha p$

推論規則

$Generalization \quad \dfrac{A}{GA}, \dfrac{A}{HA}, \dfrac{A}{K_\alpha A}$

$Modus\ ponens \quad \dfrac{A \quad A \to B}{B}$

4.2 K_tK_α のフレームと付値

認識時間論理の体系 K_tK_α に対しても様相論理の場合と同様にフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。

空でない集合 M と、M 上の推移的な二項関係 R_t、及び反射的、推移的、ユークリッド的な二項関係 R_α の組 (M, R_t, R_α) を認識論理のフレームという。フレーム (M, R_t, R_α) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし、$a \in M$ に対し、

$a \models GA \Leftrightarrow aR_tb$ となるすべての b に対し $b \models A$
$a \models HA \Leftrightarrow bR_ta$ となるすべての b に対し $b \models A$
$a \models K_\alpha A \Leftrightarrow aR_\alpha b$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。

4.3 K_tK_α の完全性の証明

定理 4.1 (フレームに関する完全性)
任意の論理式 A に対し、A が認識時間論理 K_tK_α で証明可能となるための必要十分条件は A が認識時間論理の任意のフレームで恒真となることである。

論理式の二つの集合の対に対して、ある様相論理 L で極大無矛盾という概念を定義する。まず様相論理の論理式全体の集合を Φ とする。Φ の部分集合 U と V の対 (U, V) が L で無矛盾であるとは、U に属する有限個の論理式 $A_1, \cdots, A_m$ と V に属する有限個の論理式 $B_1, \cdots, B_n$ をどのように選んでも様相論理 L で式

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \to B_1 \vee \cdots \vee B_n$$

が証明可能ではないこととする。そうでないとき、(U, V) は L で矛盾するという。対 (U, V) が L で無矛盾ならば明らかに $U \cap V = \emptyset$ である。なぜなら、もし $B \in U \cap V$ とすると $B \to B$ は L で証明可能だから、(U, V) が L で無矛盾であるという仮定に反するからである。

対 (U,V) が L で無矛盾であり、さらに $U\cup V=\Phi$ であるとき (U,V) は L で極大無矛盾であるといわれる。

補助定理 4.2 対 (U_0,V_0) が L で無矛盾のとき、$U_0\subseteq U$ かつ $V_0\subseteq V$ となる Φ の部分集合 U と V が存在して、(U,V) は L で極大無矛盾になる。すなわち、任意の無矛盾な対は極大無矛盾な対にまで拡張できる。

この補助定理は次のように証明される。まず Φ に属する論理式を適当な順で一列に並べて、$C_1,C_2,C_3,\cdots$ としておく。以下で L で無矛盾な対 $(U_n,V_n)(n=1,2,\cdots)$ を定義する。いま (U_m,V_m) がすでに定義され、さらに L で無矛盾であると仮定しよう（$m=0$ のときは確かに仮定は満たされている）。このとき対 $(U_m,V_m\cup\{C_{m+1}\})$ と対 $(U_m\cup\{C_{m+1}\},V_m\})$ のうちの少なくとも一方は L で無矛盾である。なぜなら、もしそうでないとすると U_m に属する論理式 $A_1,\cdots,A_k,A_1^{'}\cdots,A_p^{'}$ および V_m に属する論理式 $B_1,\cdots,B_h,B_1^{'}\cdots,B_q^{'}$ が存在して、次の二つの式、

(1) $A_1,\cdots\cdots,A_k\rightarrow B_1,\cdots\cdots,B_h,C_{m+1}$
(2) $C_{m+1},A_1^{'}\cdots\cdots,A_p^{'}\rightarrow B_1^{'}\cdots,B_q^{'}$

がともに L で証明可能になる（$\Gamma\rightarrow\Delta$ が証明可能であれば $\Gamma\rightarrow\Delta,C$ および $C,\Gamma\rightarrow\Delta$ はともに証明可能になるということから、C_{m+1} が (1) の右辺および (2) の左辺に必ず含まれると仮定することができる)。(1) と (2) に対し (cut) を適用すると、

(3) $A_1,\cdots\cdots,A_k,A_1^{'}\cdots\cdots,A_p^{'}\rightarrow B_1,\cdots\cdots,B_h,B_1^{'}\cdots\cdots,B_q^{'}$

が証明可能になるが、これは (U_m,V_m) が L で無矛盾であるという仮定に反する。

さて、$(U_m,V_m\cup\{C_{m+1}\})$ が L で無矛盾のときには

$$U_{m+1}=U_m,\quad V_{m+1}=V_m\cup\{C_{m+1}\}$$

とし、そうでないときには $(U_m\cup\{C_{m+1}\},V_m\})$ が L で無矛盾だから

$$U_{m+1}=U_m\cup\{C_{m+1}\},\quad V_{m+1}=V_m$$

と定める。明らかに (U_{m+1},V_{m+1}) は L で無矛盾になる。

ここで $U=\bigcup_{m=0}^{\infty}U_m,\ V=\bigcup_{m=0}^{\infty}V_m$ とする。明らかに $U_0\subseteq U$ かつ $V_0\subseteq V$。また任意に論理式 B を Φ から取ると、ある k があって $B=C_{k=1}$ と表される。ところが (U_{k+1},V_{m+1}) の定め方から $C_{k+1}\in U_{k+1}$ または $C_{k+1}\in V_{k+1}$ のいずれかが成り立つ。前者であれば $B\in U$、後者であれば $B\in V$ となる。したがって $U\cup V=\Phi$ であることがわかる。

最後に対 (U,V) が L で無矛盾であることを示す。もしそうでないとすると、U に属する論理式 $A_1,\cdots,A_k$ と V に属する論理式 $B_1,\cdots,B_h$ が存在して、

(4) $A_1, \cdots, A_k \to B_1, \cdots\cdots, B_h$

が L で証明可能になる。U と V の定義から。十分大きい m を取ると、$A_1, \cdots, A_k \in U_m$ および $B_1, \cdots, B_h \in V_m$ になる。すると (4) から (U_m, V_m) が L で矛盾することになり、(U_m, V_m) の無矛盾性に反することになる。

さて、$K_t K_\alpha$ のカノニカルなクリプキモデル $(M, R_t, R_\alpha, \models)$ をつぎのように定める。まず、

$$M = \{U(\subseteq \Phi) | (U, \Phi - U) \text{ は } K_t K_\alpha \text{で極大無矛盾 }\}$$

とする。つぎに $U \in M$ に対し、

$$U_G = \{A | GA \in U\}$$
$$U_H = \{A | HA \in U\}$$
$$U_K = \{A | K_\alpha A \in U\}$$

と定義する。そして、$U_1, U_2 \in M$ に対し、

$$U_1 R_t U_2 \Leftrightarrow (U_1)_G \subseteq U_2$$
$$U_1 R_t U_2 \Leftrightarrow (U_2)_H \subseteq U_1$$
$$U_1 R_\alpha U_2 \Leftrightarrow (U_1)_\alpha \subseteq U_2$$

と定める。さらに任意の $U \in M$ 及び任意の命題変数 p に対し、

$$U \models p \Leftrightarrow p \in U \quad (1)$$

と定める。

補助定理 4.3 集合 U が M の要素であるならばつぎの 1), 2) がなりたつ。

1) 論理式 $A_1, \cdots, A_m$ が U に属し、式 $A_1, \cdots, A_m \to B$ が L で証明可能ならば論理式 B も U に属する。

2) 任意の論理式 A に対し、A か $\neg A$ のどちらか一方のみが U に属する。

この補助定理の証明を与えておく。

1) V を $\Phi - U$ とすると、(U, V) は L で極大無矛盾である。いま $B \notin U$ とすると $A_1, \cdots, A_m$ が U に属し B が V に属することになる。ところが $A_1, \cdots, A_m \to B$ が L で証

明可能なので (U,V) が L で矛盾することになり、$U\in M$ という仮定に反する。したがって、B は U に属さなければならない。

2) 式 $A,\neg A\rightarrow$ は L で証明可能なので、A と $\neg A$ がともに U に属すことはない。A と $\neg A$ が両方とも U に属さないとすると、A と $\neg A$ はともに V に属すことになる。これは式 $\rightarrow A,\neg A$ が L で証明可能であることに反する。したがって、A と $\neg A$ のいずれか一方のみが L に属することになる。

系 4.4 集合 U が M の要素であるとつぎの 1) から 7) がなりたつ。

1) $A\wedge B\in U\Leftrightarrow A\in U$ かつ $B\in U$

2) $A\vee B\in U\Leftrightarrow A\in U$ または $B\in U$

3) $A\supset B\in U\Leftrightarrow A\notin U$ または $B\in U$

4) $\neg A\in U\Leftrightarrow A\notin U$

5) $GA\in U\Leftrightarrow UR_tU'$ となるどんな $U'(\in M)$ に対しても $A\in U'$

6) $HA\in U\Leftrightarrow U'R_tU$ となるどんな $U'(\in M)$ に対しても $A\in U'$

7) $K_\alpha A\in U\Leftrightarrow UR_\alpha U'$ となるどんな $U'(\in M)$ に対しても $A\in U'$

この系の証明は以下のように示される。

1) まず $A\wedge B\in U$ とする。L では $A\wedge B\rightarrow A$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $A\in U$ となる。同様に、$A\wedge B\rightarrow B$ は L で証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $B\in U$ となる。ゆえに $A\in U$ かつ $B\in U$ である。次に、$A\in U$ かつ $B\in U$ とする。L では $A,B\rightarrow A\wedge B$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $A\wedge B\in U$ となる。

2) まず $A\in U$ とする。L では $A\rightarrow A\vee B$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $A\vee B\in U$ となる。同様に、$B\in U$ とした場合にも、L では $B\rightarrow A\vee B$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $A\vee B\in U$ となる。次に、$A\notin U$ かつ $B\notin U$ とする。これらは補助定理 4.3 の 2) より $\neg A\in U$ かつ $\neg B\in U$ となる。L では $\neg A,\neg B\rightarrow\neg(A\vee B)$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $\neg(A\vee B)\in U$ である。これは、補助定理 4.3 の 2) より $A\vee B\notin U$ となる。

3) まず $A \supset B \in U$ とし、さらに $A \in U$ とする。L では式 $A, A \supset B \to B$ が証明可能なので、補助定理 4.3 の 1) より $B \in U$ となる。次に、$A \supset B \notin U$ とする。補助定理 4.3 の 2) より $\neg(A \supset B) \in U$ である。ところで、$\neg(A \supset B) \in U \to A \wedge \neg B$ が L で証明可能なことより、二つの式 $\neg(A \supset B) \in U \to A$、$\neg(A \supset B) \in U \to \neg B$ は L で証明可能である。したがって補助定理 4.3 の 1) より、A は $\neg B$ ともに U に属する。ゆえに、$A \in U$ かつ $B \notin U$ となる。

4) 補助定理 4.3 の 2) より自明である。

5) まず $GA \in U$ とし、また UR_tU' とする。すると $A \in U_G \subseteq U'$ となる。次に $GA \notin U$ とする。このとき対 $(U_G, \{A\})$ は L で無矛盾である。なぜなら、もしそうでないとすると、U に属するある論理式 $GB_1, \cdots, GB_n$（したがって $B_1, \cdots, B_n \in U_G$）に対し、式

(2) $B_1, \cdots\cdots, B_n \to A$

が L で証明可能になる。ここで推論規則 $Generalization$ を (2) に適用すると、

(3) $GB_1, \cdots\cdots, GB_n \to GA$

も L で証明可能になることがわかる。$GB_1, \cdots, GB_n \in U$ だから $GA \in U$。これは仮定に反する。したがって $(U_G, \{A\})$ は L で無矛盾でなければならない。そこで補助定理 4.2 を使うと、L で極大無矛盾となる対 (U', V') が存在して $U_G \subseteq U'$ かつ $A \in V'$ となる。これはいいかえれば $U' \in M$ でさらに UR_tU' かつ $A \notin U'$ を意味している。したがって 5) も示される。

6)、7) も 5) と同様にして示される。

完全性を証明するにあたって、まず、

$$(U_1)_\alpha = (U_2)_\alpha \Leftrightarrow (U_1)_\alpha \subseteq U_2 \quad (4)$$

となることを示す。

1. (4) の ($\Leftarrow$) の証明
右側を仮定した上で、つぎのことが成り立つことを示す。

$$A \in (U_1)_\alpha \Leftrightarrow A \in (U_2)_\alpha$$

まず $A \in (U_1)_\alpha$ と仮定する。すると $K_\alpha A \in U_1$ となる。そこで、$K_\alpha A \to K_\alpha K_\alpha A$ は証明可能なので $K_\alpha K_\alpha A \in U_1$ である。したがって、$K_\alpha A \in (U_1)_\alpha$ だから $K_\alpha A \in U_2$ となる。ゆえに $A \in (U_2)_K$ が成り立つ。

つぎに $A \in (U_2)_\alpha \Rightarrow A \in (U_1)_\alpha$ となることを示す。このとき、対偶を取って $A \notin (U_1)_\alpha \Rightarrow A \notin (U_2)_\alpha$ を示すことにする。言い換えれば、$K_\alpha A \notin U_1 \Rightarrow K_\alpha A \notin U_2$ を示せばよい。まず $K_\alpha A \notin U_1$ を仮定すると、U_1 が極大無矛盾であることから $\neg K_\alpha A \in U_1$ が成り立つ。$\neg K_\alpha A \to K_\alpha \neg K_\alpha A$ は証明可能だから $K_\alpha \neg K_\alpha A \in U_1$ である。したがって $\neg K_\alpha A \in (U_1)_\alpha$ となる。仮定より $\neg K_\alpha A \in U_2$ であるので $K_\alpha A \notin U_2$がいえる。

2. (4) の $(\Rightarrow)$ の証明

$(U_1)_\alpha = (U_2)_\alpha$ を仮定して $A \in (U_1)_\alpha \Rightarrow A \in U_2$ となることをいえばよい。

まず、$A \in (U_1)_\alpha$ とすると、仮定より $A \in (U_2)_K$ が成り立つ。したがって $K_\alpha A \in U_2$ となる。ここで、$K_\alpha A \to A$ は証明可能なので、$A \in U_2$ が導かれる。

(4) より、R_α は同値関係である。

カノニカルなクリプキモデルでの付値の定め方 (1) と系 4.4 を使うと、論理式 A の構成に関する帰納法によりつぎのことが示される。任意の $U (\in M)$ と任意の論理式 A に対し、

$$U \models A \Leftrightarrow A \in U \quad (5)$$

このことから定理 3.1 をつぎのようにして示すことができる。論理式 A は任意のフレームで恒真であるとする。いま、論理式 A が $K_t K_\alpha$ で証明可能でないとする。ここで対 $(\{\emptyset\}, \{A\})$ は $K_t K_\alpha$ で無矛盾になる。補助定理 3.2 を使うと、$K_t K_\alpha$ で極大無矛盾である対 (U, V) が存在し $\{\emptyset\} \subseteq U$ かつ $\{A\} \subseteq V$ となる。よって $A \notin U$ である。したがって $K_t K_\alpha$ のカノニカルなクリプキモデル $(M, R, \models)$ を考えると、$U \in M$ でありまた (5) から

$$U \not\models A$$

が得られる。これは論理式 A が任意のフレームで恒真であるという仮定に反する。したがって、論理式 A で証明可能でなければならない。

4.4 $K_t K_\alpha$ の有限モデル性

完全性の証明で使われたカノニカルなクリプキモデル $(M, R_t, R_\alpha, \models)$ において、M は無限集合になっている。しかし与えられた式を偽にするようなフレームを具体的に求めようとするときにはそれが有限であることが望ましい。いま可能世界の集合が有限集合であるようなフレームを有限フレームということにする。

定義 4.5 様相論理 L が有限フレームのあるクラスに関して完全であるとき、L は有限モデル性を持つといわれる。

定理 4.6 認識時間論理 K_tK_α は有限モデル性を持つ。

定理 3.6 について、ろ過法（$filtration\ method$）を用いて証明する。

与えられた論理式 A が K_tK_α で証明可能でないと仮定する。定理 3.1 から、A を偽にするようなクリプキモデル $(M, R_t, R_{alpha}, \models)$ が存在する。つまり、ある $a_0 \in M$ に対し、$a_0 \not\models A$ となる。いま、A の部分論理式全体の集合を $\Psi(A)$ とする。明らかに $\Psi(A)$ は有限集合である。

M の要素の間の関係 $\sim$ をつぎのように定義する。

> $a \sim b \Leftrightarrow \Psi(A)$ に属すすべての論理式 C に対して $a \models C$ のときまたそのときのみ $b \models C$ が成り立つ。

明らかに、関係 $\sim$ は M 上の同値関係である。要素 a の属す同値類を $[a]$ と表す。すなわち、$[a] = \{x \in M | a \sim x\}$ となる。同値類全体集合を $M/\sim$ と表すと、$M/\sim$ は有限集合である。

つぎに、$M/\sim$ 上の二項関係 S_t, S_α を

(1) $[a]S_t[b] \Leftrightarrow \Psi(A)$ に属す GC の形のすべての論理式 GC に対し、$a \models GC$ ならば $b \models GC \wedge C$
かつ
$\Psi(A)$ に属す HC の形のすべての論理式 HC に対し、$b \models HC$ ならば $a \models HC \wedge C$

$[a]S_\alpha[b] \Leftrightarrow \Psi(A)$ に属す $K_\alpha C$ の形のすべての論理式 $K_\alpha C$ に対し、$a \models K_\alpha C$ のときまたそのときにのみ $b \models K_\alpha C$

により定義する。上の定義が矛盾を引き起こさないこと、すなわち、

(2) すべての $GC \in \Psi(A)$ に対し $a \models GC$ ならば $b \models GC \wedge C$
すべての $HC \in \Psi(A)$ に対し $b \models HC$ ならば $a \models HC \wedge C$
すべての $K_\alpha C \in \Psi(A)$ に対し $a \models K_\alpha C$ のときまたそのときにのみ $b \models K_\alpha C$

(3) $a \sim a'$ かつ $b \sim b'$

を仮定すると、

(4) すべての $GC \in \Psi(A)$ に対し $a' \models GC$ ならば $b' \models GC \wedge C$
すべての $HC \in \Psi(A)$ に対し $b' \models HC$ ならば $a' \models HC \wedge C$
すべての $K_\alpha C \in \Psi(A)$ に対し $a' \models K_\alpha C$ のときまたそのときにのみ $b' \models K_\alpha C$

が導かれる。

このようにして得られた有限フレーム $(M/\sim, S_t, S_\alpha)$ 上の付値 $\models^+$ を

(5) $[a] \models^+ p \Leftrightarrow a \models p$ (p は $\Psi(A)$ に属す命題変数)

と定める。$a \models p$ かつ $a \sim a'$ ならば $a' \models p$ だからこの定義は矛盾を含まない。

$\Psi(A)$ に属すすべての論理式 B に対し、

(6) $[a] \models^+ B \Leftrightarrow a \models B$

が成り立つことを論理式 B の構成に関する帰納法を使って示す。

1) B が $C \wedge D$ の場合

$[a] \models^+ C \wedge D$ は付値の定義より $[a] \models^+ C \wedge [a] \models^+ D$ となる。帰納法の仮定より、$a \models C \wedge a \models D$ である。ゆえに、付値の定義より、$a \models C \wedge D$ となる。逆も同様にして示すことができる。

2) B が $C \vee D$ の場合

$[a] \models^+ C \vee D$ は付値の定義より $[a] \models^+ C \vee [a] \models^+ D$ となる。帰納法の仮定より、$a \models C \vee a \models D$ である。ゆえに、付値の定義より、$a \models C \vee D$ となる。逆も同様にして示すことができる。

3) B が $C \supset D$ の場合

$[a] \models^+ C \supset D$ は付値の定義より $[a] \not\models^+ C \vee [a] \models^+ D$ となる。帰納法の仮定より、$a \not\models C \vee a \models D$ である。ゆえに、付値の定義より、$a \models C \supset D$ となる。逆も同様にして示すことができる。

4) B が $\neg C$ の場合

$[a] \models^+ \neg C$ は付値の定義より $[a] \not\models^+ C$ となる。帰納法の仮定より、$a \not\models C$ である。ゆえに、付値の定義より、$a \models \neg C$ となる。逆も同様にして示すことができる。

5) B が GC の場合

まず、$[a] \models^+ GC$ と仮定する。さらに $aR_t b$ とする。

$a \models GC$ とすると、$aR_t b$ なので $b \models C$ である。また、$a \models GC$ から、R_t は推移的なので $a \models GGC$ である。ここで $aR_t b$ なので $b \models GC$ となる。ゆえに、$b \models GC \wedge C$ である。よって、

(7) $aR_t b$ ならば $[a]S_t[b]$

が成り立つ。したがって $[b] \models^+ C$ となる。ここで帰納法の仮定を使うと $b \models C$ が得られる。すなわち、$aR_t b$ ならば $b \models C$ が導かれるから、$a \models GC$ である。

逆に $a \models GC$ と仮定する。いま $[a]S_t[b]$ とすれば S_t の定義より $b \models GC \wedge C$ である。つまり、$b \models C$ となる。ゆえに帰納法の仮定から $[b] \models^+ C$ となる。したがって $[a] \models^+ GC$ が導かれる。

6) B が HC の場合

まず、$[b] \models^+ HC$ と仮定する。さらに $aR_t b$ とする。

$b \models HC$ とすると、$aR_t b$ なので $a \models C$ である。また、$b \models HC$ から、R_t は推移的なので $b \models HHC$ である。ここで $aR_t b$ なので $a \models HC$ となる。ゆえに、$a \models HC \wedge C$ である。よって、(7) が成り立つ。したがって $[a] \models^+ C$ となる。ここで帰納法の仮定を使うと $a \models C$ が得られる。すなわち、$aR_t b$ ならば $a \models C$ が導かれるから、$b \models HC$ である。

逆に $b \models HC$ と仮定する。いま $[a]S_t[b]$ とすれば S_t の定義より $a \models HC \wedge C$ である。つまり、$a \models C$ となる。ゆえに帰納法の仮定から $[a] \models^+ C$ となる。したがって $[b] \models^+ HC$ が導かれる。

7) B が $K_\alpha C$ の場合

まず、$[a] \models^+ K_\alpha C$ と仮定する。さらに $aR_\alpha b$ とする。

$a \models K_\alpha C$ とすると、R_α は推移的なので $a \models K_\alpha K_\alpha C$ である。ここで $aR_\alpha b$ なので $b \models K_\alpha C$ となる。同様に、$b \models K_\alpha C$ のとき $a \models K_\alpha C$ となる。よって、

(8) $aR_\alpha b$ ならば $[a]S_\alpha[b]$

が成り立つ。したがって $[b] \models^+ C$ となる。ここで帰納法の仮定を使うと $b \models C$ が得られる。すなわち、$aR_\alpha b$ ならば $b \models C$ が導かれるから、$a \models K_\alpha C$ である。

逆に $a \models K_\alpha C$ と仮定する。いま $[a]S_\alpha[b]$ とすれば S_α の定義より $b \models K_\alpha C$ である。ここで R_α は反射的なので、$b \models C$ となる。ゆえに帰納法の仮定から $[b] \models^+ C$ となる。した

がって $[a] \models^+ K_\alpha C$ が導かれる。

(6) において a として a_0、B として A とすれば $[a_0] \not\models^+ A$ が得られる。したがって、A は $(M/\sim, S_t, S_\alpha, \models^+)$ で偽になる。つまり、論理式 A は有限フレーム $(M/\sim, S_t, S_\alpha)$ で偽になることがわかる。

第 5 章

認識時間論理（その２）

前章に引き続き、時間論理と認識論理の二つの論理を組み合わせた認識時間論理について述べる。この章では特に、認識演算の間に依存関係がある場合について議論する。

5.1 認識時間論理の体系 $K_tK_{\alpha\beta}$

認識時間論理の体系 $K_tK_{\alpha\beta}$ は、体系 K_tK_α に公理 $K_\alpha p \to K_\beta p$ を付け加え、オペレータ α だけでなく、オペレータ β の存在を取り込んだ認識時間論理の体系である。$K_tK_{\alpha\beta}$ の公理と推論規則は以下のように与えられる。

公理

CL

$G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$

$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$

$K_\alpha(p \to q) \to (K_\alpha p \to K_\alpha q)$

$K_\beta(p \to q) \to (K_\beta p \to K_\beta q)$

$q \to GPq$

$q \to HFq$

$Gp \to GGp$

$Hp \to HHp$

$K_\alpha p \to p$

$K_\beta p \to p$

$K_\alpha p \to K_\alpha K_\alpha p$

$K_\beta p \to K_\beta K_\beta p$

$\neg K_\alpha p \to K_\alpha \neg K_\alpha p$
$\neg K_\beta p \to K_\beta \neg K_\beta p$
$K_\alpha p \to K_\beta p$

推論規則

$$Generalization \quad \frac{A}{GA}, \frac{A}{HA}, \frac{A}{K_\alpha A}, \frac{A}{K_\beta A}$$

$$Modus\ ponens \quad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

認識時間論理の体系 K_tK_α と同様に、$K_tK_{\alpha\beta}$ に対してもフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。

空でない集合 M と、M 上の推移的な二項関係 R_t、及び反射的、推移的、ユークリッド的な二項関係 R_α の組 (M, R_t, R_α) を認識時間論理 $K_tK_{\alpha\beta}$ のフレームという。フレーム (M, R_t, R_α) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし、$a \in M$ に対し、

$a \models GA \Leftrightarrow aR_tb$ となるすべての b に対し $b \models A$
$a \models HA \Leftrightarrow bR_ta$ となるすべての b に対し $b \models A$
$a \models K_\alpha A \Leftrightarrow aR_\alpha b$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。

5.2 $K_tK_{\alpha\beta}$ の完全性の証明

定理 5.1 (フレームに関する完全性)

任意の論理式 A に対し、A が認識時間論理 $K_tK_{\alpha\beta}$ で証明可能となるための必要十分条件は A が認識時間論理 $K_tK_{\alpha\beta}$ の任意のフレームで恒真となることである。

公理 $K_\alpha p \to K_\beta p$ を導入したことにより、R_α と R_β の間に以下のような関係が生じる。

$$F \models K_\alpha p \to K_\beta p \Leftrightarrow \forall a \forall b(aR_\beta b \to aR_\alpha b)$$

以下、その証明を示す。

まず、$\forall a \forall b(aR_\beta b \to aR_\alpha b)$ を仮定する。すべての $a \in M$ に対して $a \models K_\alpha p \to K_\beta p$ というのを言いかえると、$a \models K_\alpha p$ ならば $a \models K_\beta p$ である。今、$a \models K_\beta p$ であるので、$aR_\beta b$ ならば $b \models p$ がいえる。この $b \models p$ を導くことにする。仮定と $aR_\beta b$ から、$aR_\alpha b$ である。$a \models K_\alpha p$ と $aR_\alpha b$ から、$b \models p$ を導くことができる。

つぎに、逆向きについて考える。$aR_\beta b$ を仮定する。そして、$x \models p \Leftrightarrow aR_\alpha x$ を定義しておく。まず、$a \models K_\alpha p$ と、$K_\alpha p \to K_\beta p$ から $a \models K_\beta p$ である。これと仮定 $aR_\beta b$ より、$b \models p$ となる。先に定義した $x \models p \Leftrightarrow aR_\alpha x$ の x と、$b \models p$ の b に置き換えてみることにより、$aR_\alpha b$ が導かれる。

健全性

$$K_\alpha p \to K_\beta p$$
$$a \models K_\beta p \Leftrightarrow aR_\beta b \text{ となるすべての } b \text{ に対し } b \models p$$

この $b \models p$ を導く。$R_\beta \subseteq R_\alpha$、$a \models K_\alpha p$ を仮定する。$aR_\beta b$ と $R_\beta \subseteq R_\alpha$ から $aR_\alpha b$ となる。$aR_\alpha b$ と $a \models K_\alpha p$ から、$b \models p$ が導かれる。

完全性

証明の流れとしては、カノニカルなクリプキモデルを用いて証明した K_tK_α の場合とほぼ同様であるため、K_tK_α の証明と異なる部分に絞って解説する。

まず、K_tK_α のカノニカルなクリプキモデルに付け加える形で、$U \in M$ に対して、

$$U_\beta = \{A | K_\beta A \in U\}$$

と定義し、$U_1, U_2 \in M$ に対し、

$$U_1 R_\beta U_2 \Leftrightarrow (U_1)_\beta \subseteq U_2$$

と定める。

以下は K_tK_α の場合と同様に証明を行えばよいのだが、公理 $K_\alpha p \to K_\beta p$ を付け加えたので、今考えているカノニカルなクリプキモデルにおいて、$UR_\beta V \Rightarrow UR_\alpha V$ という関係が成り立つことを確かめる必要がある。以下にその証明を示す。

$$UR_\beta V \Rightarrow UR_\alpha V$$

カノニカルなクリプキモデルの R_α と R_β の定義より、$U_\beta \subseteq V \Rightarrow U_\alpha \subseteq V$ となる。これは $(A \in U_\beta \to A \in V) \Rightarrow (A \in U_\alpha \to A \in V)$ という意味であり、 $A \in V$ を導くことで証明を行う。

まず、$A \in U_\alpha$ はカノニカルなクリプキモデルの定義より、$K_\alpha A \in U$ となる。ここで公理 $K_\alpha p \to K_\beta p$ より、$K_\beta A \in U$ である。$K_\beta A \in U$ は定義より $A \in U_\beta$ となり、仮定より $A \in V$ が導かれる。

以上により、完全性を示すことができる。

5.3 $K_tK_{\alpha\beta}$ の有限モデル性

K_tK_α と同様に、ろ過法を用いて証明する。前回と同様にして作った有限集合 $M/\sim$ 上の二項関係 S_β を

$[a]S_\beta[b] \Leftrightarrow \psi(A)$ に属す $K_\beta A$ の形の全ての論理式 $K_\beta A$ に対し、$a \models K_\beta A$ のときまたそのときにのみ $b \models K_\beta A$

により定義する。

基本的な証明の流れは K_tK_α の場合と同様なので、異なる部分だけを示しておく。公理 $K_\alpha p \rightarrow K_\beta p$ により生ずる $[a]S_\beta[b] \rightarrow [a]S_\alpha[b]$ という関係が、今考えている有限モデル上で成り立つことを確かめる必要がある。

まず、$\psi(A)$ を、

$$\psi(A) = \psi_1 \cup \psi_2$$
$$\psi_1 = sub(A)$$
$$\psi_2 = \{K_\beta K_\alpha A | K_\alpha A \in sub(A)\}$$

と定義する。

$$[a]S_\beta[b] \rightarrow [a]S_\alpha[b]$$

$[a]S_\alpha[b]$ は S_α の定義より、$\forall K_\alpha B \in \Psi(A), (a \models K_\alpha B \Leftrightarrow b \models K_\alpha B)$ となる。まず $a \models K_\alpha B$ を仮定して $b \models K_\alpha B$ を導く。

$a \models K_\alpha B$ に公理 $K_\alpha p \rightarrow K_\alpha K_\alpha p$ を適用すると、$a \models K_\alpha K_\alpha B$ となる。ここで公理 $K_\alpha p \rightarrow K_\beta p$ より、$a \models K_\beta K_\alpha B$ である。$K_\beta K_\alpha B$ は ψ_2 の定義より、$\psi(A)$ に属していることになるので、S_β の定義より、$b \models K_\beta K_\alpha B$ となる。ここから、公理 $K_\beta p \rightarrow p$ により、$b \models K_\alpha B$ が導かれる。

$b \models K_\alpha B$ を仮定して $a \models K_\alpha B$ を導く場合も、同様の手法で証明が可能である。

以上により、$K_tK_{\alpha\beta}$ の有限モデル性を示すことができる。

第 6 章

認識時間論理（その３）

前章に引き続き、時間論理と認識論理の二つの論理を組み合わせた認識時間論理について述べる。この章では特に、時間と認識演算の間に依存関係がある場合について議論する。

6.1 認識時間論理の体系 $K_tK_\alpha I_2$

認識時間論理の体系 $K_tK_\alpha I_2$ は、体系 K_tK_α に公理を $I_2 : K_\alpha A \to GK_\alpha A$ を付け加え、これまで別個に扱ってきた時間と認識演算の間に依存関係を持たせた認識時間論理の体系である。$K_tK_\alpha I_2$ の公理と推論規則は以下のように与えられる。

公理

CL

$G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$

$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$

$K_\alpha(p \to q) \to (K_\alpha p \to K_\alpha q)$

$q \to GPq$

$q \to HFq$

$Gp \to GGp$

$Hp \to HHp$

$K_\alpha p \to p$

$K_\alpha p \to K_\alpha K_\alpha p$

$\neg K_\alpha p \to K_\alpha \neg K_\alpha p$

$K_\alpha A \to GK_\alpha A \quad : I_2$

推論規則

$$Generalization \quad \frac{A}{GA}, \frac{A}{HA}, \frac{A}{K_\alpha A}$$

$$Modus\ ponens \quad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

認識時間論理の体系 $K_t K_\alpha$ と同様に、$K_t K_\alpha I_2$ に対してもフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。

空でない集合 M と、M 上の推移的な二項関係 R_t、及び反射的、推移的、ユークリッド的な二項関係 R_α の組 (M, R_t, R_α) を認識時間論理 $K_t K_\alpha I_2$ のフレームという。フレーム (M, R_t, R_α) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし、$a \in M$ に対し、

$a \models GA \Leftrightarrow aR_t b$ となるすべての b に対し $b \models A$

$a \models HA \Leftrightarrow bR_t a$ となるすべての b に対し $b \models A$

$a \models K_\alpha A \Leftrightarrow aR_\alpha b$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。

6.2 $K_t K_\alpha I_2$ の完全性の証明

定理 6.1 (フレームに関する完全性)

任意の論理式 A に対し、A が認識時間論理 $K_t K_\alpha I_2$ で証明可能となるための必要十分条件は A が認識時間論理の任意のフレームで恒真となることである。

公理 I_2（$K_\alpha p \to K_\beta p$）を導入したことにより、以下のような関係が生じる。

$F \models K_\alpha A \to GK_\alpha A \Leftrightarrow \forall a \forall b \forall c(aR_t b$ かつ $bR_\alpha c \to aR_\alpha c)$

以下、その証明を示す。

まず、$\forall a \forall b \forall c(aR_t b$ かつ $bR_\alpha c \to aR_\alpha c)$ を仮定する。$aR_\alpha c$ と $a \models K_\alpha A$ から、$c \models A$ となる。次に、$bR_\alpha c$ と $c \models A$ から、$b \models K_\alpha A$ となる。$aR_t b$ と $b \models K_\alpha A$ から、$a \models GK_\alpha A$ が導かれる。

つぎに、逆向きについて考える。$aR_t b$ と $bR_\alpha c$ を仮定する。そして、$x \models p \Leftrightarrow aR_\alpha x$ を定義しておく。まず、$a \models K_\alpha p$ と公理 I_2 から、$a \models GK_\alpha p$ である。これと仮定 $aR_t b$ より、$b \models K_\alpha p$ となる。$b \models K_\alpha p$ と $bR_\alpha c$ から、$c \models p$ である。先に定義した $x \models p \Leftrightarrow aR_\alpha x$ の x と、$c \models p$ の c に置き換えてみることにより、$aR_\alpha c$ が導かれる。

完全性の証明の流れとしては、カノニカルなクリプキモデルを用いて証明した K_tK_α の場合とほぼ同様であるため、K_tK_α の証明と異なる部分に絞って解説する。

公理 I_2 を付け加えたので、今考えているカノニカルなクリプキモデルにおいて、$UR_tV,\ VR_\alpha W \Rightarrow UR_\alpha W$ という関係が成り立つことを確かめる必要がある。以下にその証明を示す。

$$UR_tV,\ VR_\alpha W \Rightarrow UR_\alpha W$$

カノニカルなクリプキモデルの R_t と R_α の定義より、$U_G \subseteq V, V_K \subseteq W \Rightarrow U_K \subseteq W$ となる。これは $(A \in U_G \to A \in V), (A \in V_\alpha \to A \in W) \Rightarrow (A \in U_\alpha \to A \in W)$ という意味であり、 $A \in W$ を導くことで証明を行う。

まず、$A \in U_\alpha$ はカノニカルなクリプキモデルの定義より、$K_\alpha A \in U$ となる。ここで公理 I_2 を適用すると、$GK_\alpha A \in U$ となる。$GK_\alpha A \in U$ は定義より、$K_\alpha A \in U_G$ である。仮定 $A \in U_G \to A \in V$ より、$K_\alpha A \in V$ となり、これは定義から、$A \in V_K$ となる。そして、仮定 $A \in V_\alpha \to A \in W$ から、$A \in W$ が導かれる。

以上により、完全性を示すことができる。

6.3 $K_tK_\alpha I_2$ の有限モデル性

K_tK_α と同様に、ろ過法を用いて証明する。

基本的な証明の流れは K_tK_α の場合と同様なので、異なる部分だけを示しておく。公理 I_2 により生ずる $[a]S_t[b]$ かつ $[b]S_\alpha[c] \Rightarrow [a]S_\alpha[c]$ という関係が、今考えている有限モデル上で成り立つことを確かめる必要がある。

まず、$\psi(A)$ を、

$$\psi(A) = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \psi_3 \cup \psi_4$$
$$\psi_1 = sub(A)$$
$$\psi_2 = GK_\alpha C | K_\alpha C \in sub(A)$$
$$\psi_3 = GK_\alpha \neg K_\alpha C | K_\alpha C \in sub(A)$$
$$\psi_4 = K_\alpha \neg K_\alpha C | K_\alpha C \in sub(A)$$

と定義する。

$$[a]S_t[b] \text{ かつ } [b]S_\alpha[c] \Rightarrow [a]S_\alpha[c]$$

$[a]S_\alpha[c]$ は S_α の定義より、$\forall K_\alpha B \in \Psi(A), (a \models K_\alpha B \Leftrightarrow c \models K_\alpha B)$ となる。まず $a \models K_\alpha B$ を仮定して $b \models K_\alpha B$ を導く。

$a \models K_\alpha B$ に公理 I_2 を適用すると、$a \models GK_\alpha B$ となる。$GK_\alpha B$ は ψ_2 の定義より、$\psi(A)$ に属していることになるので、S_t の定義より $b \models GK_\alpha B \wedge K_\alpha B$ となり、つまりは $b \models K_\alpha B$ である。これから、S_α の定義より、$c \models K_\alpha B$ が導かれる。

次に、$b \models K_\alpha B$ を仮定して $a \models K_\alpha B$ を導く。これを示すにあたっては、対偶をとり、

$$a \not\models K_\alpha B \Rightarrow c \not\models K_\alpha B$$

を示すことにする。$a \models \neg K_\alpha B$ に公理 $\neg K_\alpha p \rightarrow K_\alpha \neg K_\alpha p$ を適用すると、$a \models K_\alpha \neg K_\alpha B$ となる。ここで、公理 I_2 を適用すると、$a \models GK_\alpha \neg K_\alpha B$ となる。以下、$K_\alpha B \in \psi_1$ と $K_\alpha B \in \psi_4$ に場合分けをして議論を進める。

$K_\alpha B \in \psi_1$ の場合

$a \models GK_\alpha \neg K_\alpha B$ は S_t の定義から、$b \models GK_\alpha \neg K_\alpha B \wedge K_\alpha \neg K_\alpha B$ となり、つまりは $b \models K_\alpha \neg K_\alpha B$ である。これは、S_α の定義から $c \models K_\alpha \neg K_\alpha B$ となる。$c \models K_\alpha \neg K_\alpha B$ は公理 $K_\alpha p \rightarrow p$ から $c \models \neg K_\alpha B$ となり、$c \not\models K_\alpha B$ が導かれる。

$K_\alpha B \in \psi_4$ の場合

ψ_4 の定義より、$a \models GK_\alpha \neg K_\alpha \neg K_\alpha D$ となる。これに公理 $\neg K_\alpha p \rightarrow K_\alpha \neg K_\alpha p$ 及び $Generalization$ を以下のような形で適用する。

$$\neg K_\alpha D \rightarrow K_\alpha \neg K_\alpha D$$
$$\neg K_\alpha \neg K_\alpha D \rightarrow K_\alpha D$$
$$GK_\alpha \neg K_\alpha \neg K_\alpha D \rightarrow GK_\alpha K_\alpha D$$

すると、$a \models GK_\alpha K_\alpha D$ となる。ここでさらに、公理 $K_\alpha p \rightarrow p$ と $Generalization$ を以下のような形で適用する。

$$K_\alpha \rightarrow D$$
$$GK_\alpha K_\alpha D \rightarrow GK_\alpha D$$

すると、$a \models GK_\alpha D$ となる。$GK_\alpha D$ は ψ_2 の定義より、$\psi(A)$ に属していることになるので、S_t の定義より、

$$b \models K_\alpha D \quad (1)$$

となる。さてここで、$c \models K_\alpha B$ と仮定して矛盾を導くことにする。$c \models K_\alpha B$ は ψ_4 の定義から、$c \models K_\alpha \neg K_\alpha D$ である。これは S_α の定義より、$b \models K_\alpha \neg K_\alpha D$ となる。ここで公理 $K_\alpha p \rightarrow p$ を適用すると、

$b \models \neg K_\alpha D \quad (2)$

となる。明らかに、(1) と (2) は矛盾する。ゆえに、$c \not\models K_\alpha B$ である。

以上により、$K_t K_\alpha I_2$ の有限モデル性を示すことができる。

第 7 章

まとめ

認識時間論理の三つの体系について考察し、その完全性と有限モデル性を示すことができた。これにより、当初の目的であった記述力や表現力を強めつつも、本来の好ましい性質を保持するということを小規模ながらも実現できたと考える。

この研究の今後進むべき方向として考えられるのは、まずは信念の論理に関することであろう。本研究においては時間論理と知識の論理の組み合わせを重視したのであるが、継続性を持つ信念の論理との組み合わせを考えることで、さらなる記述力、表現力の向上、あるいは異なった可能性への道が開けるものと信ずる。

また、本研究ではエージェントが一人、ないしは二人の場合についてのみ議論したが、認識時間論理を実際に何らかの問題に応用することを考えると、n 人のエージェントが存在する場合についての体系へと拡張することが必要であろう。

参考文献

[1] J.P.Burgess 1984, Handbook of Philosophical Logic, Vol.2: Extensions of Classical Logic, in: Gabbay & Guenthner, eds. Kluwer Academic Publisher, 89-133.

[2] J.van Benthem, The Logic of Time, Kluwer Academic Publishers, 1983.

[3] R.Goldblatt, Logics of Time and Computation, CSLI Leland Stanford Junior University, 1992.

[4] D.Gabbay, I.Hodkinson, M.Reynolds, Temporal Logic, Mathematical Foundations and Computational Aspects, Clarendon Press, 1994.

[5] B.Richards, I.Bethke, J.van der Does, J.Oberlander, Temporal Representation and Inference, Academic Press, 1989.