Title	証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究
Author(s)	松田，真由美
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1555
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究

松田 真由美

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2002 年 2 月 15 日

キーワード: 部分構造論理, 古典論理, 直観主義論理, 構造規則, 埋め込み.

1 はじめに

人間の日常的な思考の一般的な法則を取り扱うための古典論理と直観主義論理に対し、1930 年代半ばに G.Genzen によって自然演繹の体系と sequent 計算の体系導入されそれらに基づいた証明論的が行われるようになった。その後、我々の実際の推論に近づいた論理を研究するために、古典論理 LK や直観主義論理 LJ から exchange 規則、contraction 規則、weakening 規則の全部あるいは一部を取り除いた論理、例えば、weakening 規則のない適切論理 (relevant logic)、contraction 規則を除いた BCK 論理、Girard(1987) による weakening 規則と contraction 規則のない線形論理 (linear logic)、Lambek(1958) による構造規則のすべてを取り除いた Lambek calculus などの部分構造論理が盛んに研究されるようになった。

シンタクティカルな性質の一つとして、どんな証明可能な論理式に対しても常に無駄のない証明図をつくることが出来るということを意味する cut 除去定理という結果がある。この cut 除去定理から多くの基本的な部分構造論理が決定可能であるという結果や補間定理などが導かれている ([1])。

本研究では、部分構造論理の諸性質を明らかにするために、最近までに分かっている部分構造論理間の埋め込み関係について調査をする。代表的な埋め込みについての結果の一つとして、Kolmogolv-style translation による LK の LJ への埋め込みが知られている。この方法を部分構造論理に適用し、二重否定の法則の成り立つ論理はそれを除いた論理に埋め込めることを証明する。次に LJ から FLec への埋め込みに関する桐山-小野の方法 ([3])

を拡張し、FLew 及び LK がそれぞれ weakening 規則を取り除いた FLe 及び FLec に埋め込めることを示す。

2 部分構造論理の sequent 計算の体系

部分構造論理とは Gentzen の sequent 計算の形式的体系 LK および LJ から構造規則 exchange, weakening, contraction をいくつか、あるいは全部を省いたものとして形式化される。ここでは、古典論理 LK からから contraction, weakening, contraction および weakening を除いて得られる体系をそれぞれ CFLew, CFLec, CFLe と表わし、また直観主義論理 LJ から contraction, weakening, contraction および weakening を除いて得られる体系をそれぞれ FLew, FLec, FLe と表わすことにする。

3 Kolmogolv-style の埋め込み

下に示す Kolmogorov-style transration を使うと LK の LJ への埋め込みが成り立つことが知られている。本論文ではこの transration を使って CFLe と FLe の間でも同様の関係 (Theorem 3.1) が成り立つことを示した。
The Kolmogorov-style translation

$$
\begin{array}{ll}
T(\bot) := \neg\neg\bot & T(\top) := \top \\
T(f) := f & T(t) := \neg\neg t \\
T(p) := \neg\neg p & T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \\
T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) & T(A \supset B) := \neg\neg(T(A) \supset T(B)) \\
T(A + B) := \neg(\neg T(A) * \neg T(B)) & T(A * B) := \neg\neg(T(A) * T(B))
\end{array}
$$

Theorem 3.1

$$FLe \vdash T(\Gamma) \to T(D) \Leftrightarrow CFLe \vdash \Gamma \to D$$

上の translation を使うと、FLe と CFLew、FLec と CFLec の間においても埋め込み関係が成り立つ。

4 FLew から FLe への埋め込み——小野-桐山型

桐山-小野の論文 [3] の §3 では述語論理の LJ の述語論理の FLec への transration を用いて FLec の undecidability が示されている。この方法を使って命題論理 FLew の FLe への埋め込みを試みた。今回は、より簡単な translation を、FLe で constant を用いること無しに定める。次に示すのがその translation と埋め込み関係である。

sequent $\Gamma \to A$ が与えられたとする (以下では sequent を fix して考える)。
$\mathcal{P}$ を $\Gamma \to A$ に現れる propositional symbol 全体の集合（もちろん有限である）としたとき論理式 T を

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} (P \supset P)$$

により定める。
$\mathcal{P}$ に属す propositional symbol のみから構成されるような formula 全体の集合を $\Phi(= \Phi_{\mathcal{P}})$ とする。$B \in \Phi$ に対し formula B^* を次のように定める。

(1) B が $atomic(i.e\ B = P) \Rightarrow B^* = P \wedge T(= B \wedge T)$
(2) $B = C \circ D\ (\circ \in \wedge, \vee, \supset) \Rightarrow B^* = (C^* \circ D^*) \wedge T$
(3) $B = \neg C \Rightarrow B^* = (\neg C^*) \wedge T$

Theorem 4.1

$$FLew \vdash \Gamma \to A \Leftrightarrow FLe \vdash \Gamma^* \to A^*$$

また、Theorem 4.1 は、述語論理についても同様に成り立つ。

5 LK から CFLec への埋め込み

LK の CFLec への埋め込みを示す場合には桐山-小野の証明 [3] のように constant f を使ってその証明を与えた。その translation と埋め込み関係は次のようである。

式 $\Gamma \to \Delta$ が与えられたとする (以下では式を fix して考える)。
$\mathcal{P}$ を $\Gamma \to \Delta$ に現れる propositional symbol 全体の集合。（もちろん有限である）としたとき論理式 T を

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} (P \supset P) \wedge (f \supset f)$$

により定める。$\mathcal{P}$ に属す propositional symbol のみから構成されるような formula 全体の集合を $\Phi(= \Phi_{\mathcal{P}})$ とする ($\neg C$ は $C \supset f$ と定義する)。
$B \in \Phi$ に対し formula $|B|^+$、$|B|^-$ を次のように定める。

(1) B が atomic (すなわち B は P または f)$\Rightarrow |B|^- = B \wedge T, |B|^+ = B \vee f$
(2) $B = C \circ D\ (\circ \in \wedge, \vee, *) \Rightarrow |B|^- = (|C|^- \circ |D|^-) \wedge T, |B|^+ = (|C|^+ \circ |D|^+) \vee f$
(3) $B = C \supset D \Rightarrow |B|^- = (|C|^- \supset |D|^-) \wedge T, |B|^+ = (|C|^+ \supset |D|^+) \vee f$

Theorem 5.1

$$LK \vdash \Gamma \to \Theta \Leftrightarrow CFLec \vdash |\Gamma|^- \to |\Theta|^+$$

上の translation を使うと、CFLew と CFLe の間においても埋め込み関係が成り立つ。

6 おわりに

今回の研究で Kolmogorov-style translation や修正した桐山-小野型の translation を用いて多く埋め込みについての結果を得ることができた。

参考文献

[1] H. Ono, Proof-theoretic methods in nonclassical logic — an introduction, *Theories of Types and Proofs*, edited by M. Takahashi, M. Okada and M. Dezani-Ciancaglini, MSJ Memoirs 2, Mathematical Society of Japan, 1998, pp.207-254.

[2] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[3] E. Kiriyama and H. Ono, The contraction rule and decision problems for logics without structural rules, *Studia Logica* 50 (1991), pp.299-319.

[4] G. Takeuti, *Proof Theory*, 2nd edition, North-Holland, 1987.

[5] A.S.Troelstra, Lecture on linear logic, CSLI Lecture Note 29, Center for Study of Language and information Leland Stanford Junior University, 1992.