

Title	証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究
Author(s)	松田, 真由美
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1555
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する 研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

松田 真由美

2002 年 3 月

目次

1	序章	1
2	部分構造論理の sequent 計算の体系	3
2.1	古典命題論理 LK と直観主義命題論理 LJ	3
2.1.1	LK, LJ の論理式	3
2.1.2	古典命題論理 LK の体系	3
2.1.3	直観主義命題論理の体系	5
2.1.4	証明図	6
2.2	部分構造論理の sequent 計算	7
2.2.1	命題定数と weakening	7
2.2.2	multiplicative conjunction と multiplicative disjunction	8
2.2.3	部分構造論理 CFL の体系	10
2.2.4	FL の implication	12
2.2.5	いろいろな部分構造論理	12
3	Kolmogorov 型の埋め込み	14
3.1	埋め込み関係の定義	14
3.2	Theorem 3.1 の左辺から右辺が導かれること	15
3.3	Theorem 3.1 の右辺から左辺が導かれること	19
4	FLew から FLe への埋め込み——小野-桐山型	29
4.1	埋め込み関係の定義	29
4.2	Theorem 4.1 の左辺から右辺が導かれること	30
4.3	Theorem 4.1 の右辺から左辺が導かれること	30
4.3.1	FLew に同等な体系 $FLew^+$ の形式化とその関係	31
4.3.2	体系 $FLew^+$ から FLe への埋め込み	33

5	LK から CFLec への埋め込み	40
5.1	埋め込み関係の定義	40
5.2	Theorem 5.1 の左辺から右辺が導かれること	41
5.3	Theorem 5.1 の右辺から左辺が導かれること	41
5.3.1	古典論理の体系 LK^* の形式化と LK と LK^* の体系	41
5.3.2	体系 LK^* の CFLec への埋め込み	46
6	結論	52

第 1 章

序章

人間の日常的な思考の一般的な法則を取り扱うための古典論理と直観主義論理に対し、1930 年代半ばに G.Genzen によって自然演繹の体系と sequent 計算の体系が導入され、それらに基づいた証明論的な研究が行われるようになった。近年、我々の実際の推論に近づいた論理を研究するために、古典論理 LK や直観主義論理 LJ から exchange 規則、contraction 規則、weakening 規則の全部あるいは一部を取り除いた論理、例えば、weakening 規則のない適切論理 (relevant logic)、contraction 規則を除いた BCK 論理、Girard(1987) による weakening 規則と contraction 規則のない線形論理 (linear logic)、Lambek(1958) による構造規則のすべてを取り除いた Lambek calculus などの部分構造論理が盛んに研究されるようになった。

シンタクティカルな性質の一つとして、どんな証明可能な論理式に対しても常に無駄のない証明図をつくることが出来るということを意味する cut 除去定理という結果がある。この cut 除去定理から多くの基本的な部分構造論理が決定可能であるという結果や補間定理などが導かれている ([1])。

本研究では、部分構造論理の諸性質を明らかにするために、最近までに分かっている部分構造論理間の埋め込み関係について調査をする。代表的な埋め込みについての結果の一つとして、Kolmogolv-style translation による LK の LJ への埋め込みが知られている。この方法を部分構造論理に適用し、二重否定の法則の成り立つ論理はそれを除いた論理に埋め込めることを証明する。次に LJ から FLec への埋め込みに関する桐山-小野の方法 ([3]) を拡張し、FLew 及び LK がそれぞれ weakening 規則を取り除いた FLe 及び FLec に埋め込めることを示す。

本論文は以下のような構成になっている。第 2 章では第 3 章以降の議論として LK、LJ からはじめて、部分構造論理の体系を紹介する。次に第 3 章では Kolmogolv-style translation

を使った CFL_e の FLe への埋め込みを中心に証明を与え、第 4 章では桐山-小野の方法 ([3]) を使って FL_{ew} から FLe への埋め込みを考える。第 5 章では第 4 章と同じような方法で LK から FL_{ec} への埋め込み定理を証明する。

第 2 章

部分構造論理の sequent 計算の体系

sequent 計算の基本的な体系である LK について説明する。その後、部分構造論理の基本的な体系 FL について説明する。

2.1 古典命題論理 LK と直観主義命題論理 LJ

2.1.1 LK, LJ の論理式

LK と LJ の論理結合子として次のようなものを使う。

$\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction), $\supset$ (implication), $\neg$ (negation)

これらの論理結合子を使って次のように論理式が定義される。

Definition 2.1

論理式を帰納的に定義する。

1. それぞれの命題変数は論理式である。

2. A, B がともに論理式ならば、

$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (\neg A)$

はいずれも論理式である。

2.1.2 古典命題論理 LK の体系

LK の sequent 計算における基本的な表現である式 (sequent) とは、 A_i, B_j を論理式としたとき

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$$

という形をした表現である。ただし、 m, n は 0 でもよい。

LK で公理に相当する始式 (initial sequent) は

$$A \rightarrow A$$

という形の式である。

また、推論規則は一般に

$$\frac{S}{S_1} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \ S_2}{S}$$

という形をしている。ここで、 S_1, S_2 および S は式である。上の推論規則を I とするとき、 S_1 および S_2 は I の上式、 S は I の下式といわれる。以下では有限個 (0 個でもよい) の論理式をコンマで区切った列を表すのに、 Γ, Δ 等のギリシャ語の大文字を使うことにする。LK の推論規則を以下にあげる。

○ LK の推論規則

Structual rule:

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (w \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta} (\rightarrow w)$$

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (c \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, A, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta} (\rightarrow c)$$

Exchange rule:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (e \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, B, A, \Theta} (\rightarrow e)$$

Cut rule:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad \Sigma, A, \Pi \rightarrow \Delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Theta} (cut)$$

Rule for logical connective:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad \Pi, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta} (\rightarrow \supset)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\wedge 1 \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\wedge 2 \rightarrow) \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \wedge B, \Theta} (\rightarrow \wedge) \\
\\
\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\vee \rightarrow) \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta} (\rightarrow \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta} (\rightarrow \vee 2) \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \Theta} (\neg \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Theta} (\rightarrow \neg)
\end{array}$$

2.1.3 直観主義命題論理の体系

直観主義論理 LJ の sequent 計算の体系では

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B \quad (\text{ただし、} m \text{ は } 0 \text{ でもよく、} B \text{ は空でもよい。})$$

という形の式のみを考える。

公理に相当する始式 (initial sequent) は LK のときと同様に

$$A \rightarrow A$$

という形の式である。LJ の推論規則は LK のそれらを次のように制限することにより得られる。

○ LJ の推論規則

Structural rules

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow D} (w \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A} (\rightarrow w)$$

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow D} (c \rightarrow)$$

Exchange rule:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow D} (e \rightarrow)$$

Cut rule:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Sigma, A, \Pi \rightarrow D}{\Sigma, \Gamma, \Pi \rightarrow D} (cut)$$

Rule for logical connective:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Pi, B, \Sigma \rightarrow D}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow D} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow D} (\wedge 1 \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, B, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow D} (\wedge 2 \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} (\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow D \quad \Gamma, B, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \rightarrow D} (\vee \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\rightarrow \vee 1) \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\rightarrow \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow} (\neg \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A} (\rightarrow \neg)$$

このように LJ の体系では LK の式の $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\supset$ の論理式の数をつつまたは空にした式を使うので推論規則の $(\rightarrow e)$ 及び $(\rightarrow c)$ は現れない。

2.1.4 証明図

始式から出発し、それに推論規則を次々と適用していく過程をすべて記述したものを LK(または LJ) の証明図という。そして、証明図の一番下にある式をその証明図の終式という。

Definition 2.2 (証明図とその終式)

証明図およびその証明図の終式を帰納的に定義する。

1. 始式はそれだけで証明図であり、その証明図の終式はその始式自身である。
2. P_1 (および P_2) はそれぞれ S_1 (および P_2) を終式とする証明図とする。さらに、

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が、 LK (または LJ) の推論規則の一つであれば、

$$\frac{P_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は証明図であり、その終式は S である。

また、式 S を終式とするような証明図が存在するときには、 S は LK (または LJ) で証明可能である (provable) という。また、そのような証明図を S の証明図、または S に到る証明図という。式 $\rightarrow A$ が証明可能であるとき論理式 A が LK (または LJ) で証明可能であるという。この論文では今後、例えば LK (または LJ) で証明可能であるとき $LK \vdash \rightarrow A$ ($LJ \vdash \rightarrow A$) と書くことがある。さらに、 $A \supset B$ かつ $B \supset A$ が $LK(LJ)$ で証明可能のとき、 $LK(LJ)$ において A は B と論理的に同値であるという。

2.2 部分構造論理の sequent 計算

部分構造論理の中の基本的な体系である $(C)FL$ はおおざっぱに言うと $LJ(LK)$ からすべての構造規則を取り除いたものをいう。ここでは、部分構造論理の体系の性質を LK, LJ の体系を中心に始式や推論規則をあげて説明していく。

2.2.1 命題定数と weakening

ここでは命題定数の $\top, \perp$ や t, f を持つ体系での始式と推論規則を導入し、構造規則 weakening とその関係について述べる。

LK では	LJ では
1. $\Gamma \rightarrow \top$	1'. $\Gamma \rightarrow \top$
2. $\Gamma, \perp, \Sigma \rightarrow \Delta$	2' $\Gamma, \perp, \Sigma \rightarrow D$

これらによって

論理式 A が証明可能 $\iff A$ は論理的に $\top$ と同値

がいうことができる。しかし、 $A \supset \top$ は 1(1') よりすぐにいえるが、 $\top \supset A$ は次のように weakening を使わないと示すことができない。

$$\frac{\frac{\rightarrow A}{\top \rightarrow A} (w \rightarrow)}{\top \supset A} (\rightarrow \supset)$$

下の様に $\neg A$ が $A \supset \perp$ と論理的に同値であることも weakening を使わないと示すことができない。

$$\frac{\frac{A \rightarrow A}{\neg A, A \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\neg A, A \rightarrow \perp} (\rightarrow w) \quad \frac{A \rightarrow A \quad \perp \rightarrow}{A \supset \perp, A \rightarrow} (\supset \rightarrow)$$

$$\frac{}{\neg A \rightarrow A \supset \perp} (\rightarrow \supset) \quad \frac{A \supset \perp, A \rightarrow}{A \supset \perp \rightarrow \neg A} (\rightarrow \neg)$$

上のようなことが起こるので weakening の持たない論理ではこれらの $\top, \perp$ の他に命題定数 t, f を導入し、さらに次の始式と推論規則が加えられる。

3. $\rightarrow t$

4. $f \rightarrow$

LK では

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, t, \Sigma \rightarrow \Delta} (tw) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, f, \Theta} (fw)$$

LJ では

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, t, \Sigma \rightarrow D} (tw) \quad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow f} (fw)$$

これらの始式と推論規則は証明可能な論理式の中で t が最弱の論理式であり、また矛盾が証明可能な論理式、すなわち式 $A \rightarrow$ が証明可能となるような論理式 A 、の内 f が最強のものであるということ意味している。さらに、 $\neg A$ が $A \supset f$ と論理的に同値であるということを次のように示すことができる。

$$\frac{\frac{A \rightarrow A}{\neg, A \rightarrow} (\neg A \rightarrow)}{\neg A, A \rightarrow f} (fw) \quad \frac{A \rightarrow A \quad f \rightarrow}{A \supset f \rightarrow} (\supset \rightarrow)$$

$$\frac{}{\neg A \rightarrow A \supset f} (\rightarrow \neg) \quad \frac{A \supset f \rightarrow}{A \supset f \rightarrow \neg A} (\rightarrow \neg)$$

また、weakening 規則のある論理では t と $\top$ 及び f と $\perp$ はそれぞれ論理的に同値になる。

2.2.2 multiplicative conjunction と multiplicative disjunction

ここでは multiplicative conjunction と multiplicative disjunction という論理結合子についての推論規則を導入しそれらの論理結合子が式の論理式の列の中に現れるコンマと同等であることを示す。まず、

$$LK \vdash A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n \iff LK \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$$

が成り立つことは次のようにして確かめられる。

Proof.

($\Rightarrow$) の証明。

$LK \vdash A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$ を仮定する。すると、 $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$ を終式とする LK の証明図が存在するから、この証明図の下に次のような推論を付け加えることにより、 $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$ に到る証明図を得ることができる。

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n} (\wedge \rightarrow)}{A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n} (c \rightarrow)}{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1, \dots, \vee B_n} (\rightarrow \vee) \\ \frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n, B_1 \vee \dots \vee B_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n} (\rightarrow c)$$

□

Proof.

($\Leftarrow$) の証明。

まず、

$$\frac{\frac{A_1 \rightarrow A_1}{A_1 \dots A_m \rightarrow A_1} (w \rightarrow) \quad \frac{\frac{A_2 \rightarrow A_2}{A_1, \dots, A_m \rightarrow A_2} (w \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{A_1, \dots, A_m \rightarrow A_3 \wedge \dots \wedge A_n} (\rightarrow \wedge)}{A_1, \dots, A_n \rightarrow A_2 \wedge \dots \wedge A_n} (\rightarrow \wedge)}{A_1, \dots, A_n \rightarrow A_1 \wedge \dots \wedge A_n} (\rightarrow \wedge)$$

より、 $LK \vdash A_1, \dots, A_n \rightarrow A_1 \wedge \dots \wedge A_n \dots (a)$

全く同様に、 $LK \vdash B_1 \vee \dots \vee B_n \rightarrow B_1, \dots, B_n \dots (b)$

(a), (b) より、

$$\frac{\frac{\vdots}{A_1, \dots, A_n \rightarrow A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \quad \frac{\vdots}{B_1 \vee \dots \vee B_n \rightarrow B_1, \dots, B_n}}{(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_n), A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_n} (\supset \rightarrow)$$

よって、 $LK \vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_n), A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_n$

次に $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_n)$ を cut 論理式とし、上の式と cut を適用すると、

$$\frac{\frac{\vdots}{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n} (\rightarrow \supset) \quad \frac{\vdots}{(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_n), A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n} (cut)}{A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n}$$

となり、 $LK \vdash A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$

□

このように連続して現れるコンマは、左辺ならば conjunction, 右辺ならば disjunction を意味していることが分かるが、上の証明では推論規則に weakening 規則と contraction 規則を必要とした。そのため weakening や contraction を持たない部分構造論理ではコンマが conjunction や disjunction を意味しているとは限らない

コンマを表現するためにここで2つの論理結合子 $*$ と $+$ を導入しさらに $*$ と $+$ についての次の推論規則を付け加える。論理結合子 $*$ は multiplicative conjunction 又は fusion という。

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A * B, \Sigma \rightarrow \Delta} (* \rightarrow)$$

次は $*$ についての推論規則と双対な論理結合子 $+$ (multiplicative disjunction という) についての推論規則である。

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Pi, A, B, \Sigma}{\Gamma \rightarrow \Pi, A + B, \Sigma} (\rightarrow +) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Lambda \quad \Sigma, B \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma, A + B \rightarrow \Sigma, \Theta} (+ \rightarrow)$$

これらの推論規則を使うと

式 $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$ が証明可能 $\iff$ 式 $A_1 * \dots * A_m \rightarrow B_1 + \dots + B_n$ が証明可能

を示すことは容易である。ここで、 $+$ についての推論規則は矢印の右側の論理式の出現が高々一つに制限した LJ 体系では導入されないことに注意しておく。

2.2.3 部分構造論理 CFL の体系

ここで部分構造論理のうち基本的な体系である CFL の定義を与える。部分構造論理 CFL は LK からすべての構造規則を取り除き、命題定数である $\top, \perp, t, f$ に関する始式と推論規則を付け加え、さらに $*$ に関する推論規則を付け加えたものである。ここに部分構造論理 CFL の体系をもう一度整理して述べておく。

○ CFL の始式と推論規則

Initial sequent:

1. $A \rightarrow A$
2. $\Gamma \rightarrow \top$
3. $\Gamma, \perp, \Sigma \rightarrow \Delta$
4. $\rightarrow t$
5. $f \rightarrow$

2 から 5 は命題変数を考えた体系の場合に加える。

Rule for logical constant:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, t, \Sigma \rightarrow \Delta} (tw) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, f, \Theta} (fw)$$

Rule for logical connective

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad \Pi, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta} (\rightarrow \supset) \\[10pt] \frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\wedge 1 \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\wedge 2 \rightarrow) \\[10pt] \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \wedge B, \Theta} (\rightarrow \wedge) \\[10pt] \frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\vee \rightarrow) \\[10pt] \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta} (\rightarrow \vee 1) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta} (\rightarrow \vee 2) \\[10pt] \frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} (\neg \rightarrow) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Theta} (\rightarrow \neg) \\[10pt] \frac{\Gamma \rightarrow A, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A * B, \Sigma \rightarrow \Delta} (* \rightarrow) \\[10pt] \frac{\Gamma \rightarrow \Pi, A, B, \Sigma}{\Gamma \rightarrow \Pi, A + B, \Sigma} (\rightarrow +) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Lambda \quad \Sigma, B \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma, A + B, \rightarrow \Sigma, \Theta} (+ \rightarrow) \end{array}$$

FL では上の CFL の推論規則のうち + に関する推論規則は持たない。さらに FL の体系は CFL の体系の式の中の矢印の右側の論理式の個数を高々一つに制限した体系である。また、FL は $\neg \perp$ と $\top$ 、 $\neg t$ と f の間で次のような Lemma が成り立つ。

Lemma 2.1

FL で $\neg \perp$ と $\top$ 、 $\neg t$ と f はそれぞれ論理的に同値である。

2.2.4 FL の implication

FL の implication について注意しておく。fusion と implication の間には

$$FL \vdash A * B \rightarrow C \iff FL \vdash A \rightarrow B \supset C$$

という関係が成り立つ。しかし、exchange 規則がないので

$$FL \vdash A * B \rightarrow C \iff FL \vdash B \rightarrow A \supset C$$

は一般的には成り立たない。そこで新たな implication $\supset^*$ を導入し、さらに次のような implication $\supset^*$ の規則を付け加える。

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset^* B} (\rightarrow \supset^*) \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Pi, B, \Sigma \rightarrow}{\Pi, \Gamma, A \supset^* B, \Sigma \rightarrow} (\supset^* \rightarrow)$$

すると、

$$FL \vdash A * B \rightarrow C \iff FL \vdash B \rightarrow A \supset^* C$$

が成り立つ。

2.2.5 いろいろな部分構造論理

CFL にいくつかの構造規則を付け加えることにより部分構造論理の基本的な体系を定義することができる。それらは exchange、contraction、weakening の頭文字をそれぞれとって e、c、w と表わし、それらの頭文字を CFL の添字につけてその論理の構造規則の有無を表わす。ここでの構造規則は古典論理の構造規則を使う。まとめると次のようになる。

$$CFL_e = CFL + exchange$$

$$CFL_{ew} = CFL + exchange + weakening$$

$$CFL_{ec} = CFL + exchange + contraction$$

$$CFL_{ecw}(LK) = CFL + exchange + contraction + weakening$$

上のように古典論理 LK からいくつかの構造規則を取り除いて、古典論理よりも弱い部分構造論理を与えることができる。これと同じ方法で直観主義論理 LJ からいくつかの構造規則を取り除いて、部分構造論理を与えることができる。名前の付け方は CFL の C を取り除いて FLe、FLew、FLec、FLecw などと書き上と同様に次のようにいうことができる。

$$FLe = FL + exchange$$

$$FLew = FL + exchange + weakening$$

$$FLec = FL + exchange + contraction$$

$$FLecw(LJ) = FL + exchange + contraction + weakening$$

FLcw は contraction と weakening を持つ体系であるが、conjunction や multiplicative conjunction の推論規則を用いると exchange 規則を導くことができる。従って、FLcw は FLecw と同等である。

G.Genzen が sequent 計算の体系において示した基本的な結果に次の cut 除去定理がある。

Theorem 2.2

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \rightarrow \Delta$ に到る $LK(LJ)$ の証明図で cut を一度も用いないものが存在する。

cut 除去定理は decidability や interpolation theorem、subformula property を導くのに極めて有効とされる性質である。部分構造論理においても次に示すように cut 除去定理が成り立つことが知られている ([1])。

Theorem 2.3

$FL, FLe, FLw, FLew, FLec, FLecw, CFLe, CFLeW, CFLeW$ で cut 除去定理が成り立つ。

第 3 章

Kolmogorov 型の埋め込み

ここでは、CFLe と FLe の証明可能性についての関係を考える。Kolmogorov-style translation を使うと LK の LJ への埋め込みが成り立つことが知られている。本論文ではこの translation を使って CFLe と FLe の間でも同様の関係が成り立つことを示す。

3.1 埋め込み関係の定義

次に示すのは Kolmogorov-style translation である。この translation を使った FLe と CFLe の埋めこみ関係を Theorem 3.1 として表わす。

The Kolmogorov-style translation

$$T(\perp) := \neg\neg\perp$$

$$T(\top) := \top$$

$$T(f) := f$$

$$T(t) := \neg\neg t$$

$$T(p) := \neg\neg p$$

$$T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$$

$$T(A \supset B) := \neg\neg(T(A) \supset T(B))$$

$$T(A * B) := \neg\neg(T(A) * T(B))$$

$$T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$$

$$T(A + B) := \neg(\neg T(A) * \neg T(B))$$

Theorem 3.1

$$FLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D) \Leftrightarrow CFLe \vdash \Gamma \rightarrow D$$

この定理が成り立つと、例えば、FLe で $\neg\neg T(A) \wedge T(B) \rightarrow T(D)$ が証明可能ならば CFLe で $A \wedge B \rightarrow D$ が成り立つことになる。はたして、本当にこれがいえるのであろうか。

3.2 Theorem 3.1 の左辺から右辺が導かれること

Theorem 3.1 の左辺から右辺が導かれることを示す前に次の二つの Lemma 3.2, Lemma 3.3 を証明しておく。

Lemma 3.2

$$FLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D) \Rightarrow CFLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D)$$

Proof.

CFLe は FLe より強い体系なので明らかに成り立つ。 □

以下では体系 L で式 $A \rightarrow B$ および $B \rightarrow A$ がともに証明可能であることを $L \vdash A \leftrightarrow B$ と表わすことにする。

Lemma 3.3

$$CFLe \vdash D \leftrightarrow T(D)$$

Proof.

D についての構造に関する帰納法で証明する。

$D : \top, f$ のとき

$T(D) := D$ なので明らかに成り立つ。

$D : \perp, t$ のとき

$T(D) := \neg\neg D = D$ なので明らかに成り立つ。

$D : P$ (P は atomic symbol のとき)

$$\frac{\frac{P \rightarrow P}{\neg P, P \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\frac{P, \neg P \rightarrow}{P \rightarrow \neg \neg P} (\rightarrow \neg)} \quad \frac{\frac{P \rightarrow P}{\rightarrow \neg P, P} (\rightarrow \neg)}{\neg \neg P \rightarrow P} (\neg \rightarrow)$$

したがって $CFLe \vdash P \rightarrow \neg \neg P$, $CFLe \vdash \neg \neg P \rightarrow P$

$T(P) = \neg \neg P$ より $CFLe \vdash P \leftrightarrow T(P)$

$D : A \wedge B$ のとき

induction hypothesis より $CFLe \vdash A \leftrightarrow T(A)$, $CFLe \vdash B \leftrightarrow T(B)$ が成り立つ。

$$\frac{\frac{A \rightarrow T(A)}{A \wedge B \rightarrow T(A)} (\wedge \rightarrow) \quad \frac{B \rightarrow T(B)}{A \wedge B \rightarrow T(B)} (\wedge \rightarrow)}{\frac{A \wedge B \rightarrow T(A) \wedge T(B)}{\neg(T(A) \wedge T(B)), A \wedge B \rightarrow} (\neg \rightarrow)} (\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\frac{A \wedge B, \neg(T(A) \wedge T(B)) \rightarrow}{A \wedge B \rightarrow \neg \neg(T(A) \wedge T(B))} (e \rightarrow)}{A \wedge B \rightarrow \neg \neg(T(A) \wedge T(B))} (\rightarrow \neg)$$

よって、 $CFLe \vdash A \wedge B \rightarrow \neg \neg(T(A) \wedge T(B))$

ここで $\neg \neg(T(A) \wedge T(B))$ は $T(A \wedge B)$ に等しいので $CFLe \vdash A \wedge B \rightarrow T(A \wedge B)$

$$\frac{\frac{T(A) \rightarrow A}{T(A) \wedge T(B) \rightarrow A} (\wedge \rightarrow) \quad \frac{T(B) \rightarrow B}{T(A) \wedge T(B) \rightarrow B} (\wedge \rightarrow)}{\frac{T(A) \wedge T(B) \rightarrow A \wedge B}{\rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B)), A \wedge B} (\rightarrow \neg)} (\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\frac{\rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B)), A \wedge B}{\neg \neg(T(A) \wedge T(B)) \rightarrow A \wedge B} (\neg \rightarrow)}{A \wedge B \rightarrow \neg \neg(T(A) \wedge T(B)) \rightarrow A \wedge B} (\neg \rightarrow)$$

よって、 $CFLe \vdash \neg \neg(T(A) \wedge T(B)) \rightarrow A \wedge B$

ここで、 $\neg \neg(T(A) \wedge T(B))$ は $T(A \wedge B)$ に等しいので $CFLe \vdash T(A \wedge B) \rightarrow A \wedge B$

$D : A \supset B$ のとき

induction hypothesis より $CFLe \vdash A \leftrightarrow T(A)$, $CFLe \vdash B \leftrightarrow T(B)$ が成り立つ。

$$\frac{\frac{T(A) \rightarrow A \quad B \rightarrow T(B)}{A \supset B, T(A) \rightarrow T(B)} (\supset \rightarrow)}{\frac{A \supset B \rightarrow T(A) \supset T(B)}{\neg(T(A) \supset T(B)), A \supset B \rightarrow} (\neg \rightarrow)} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{\frac{A \supset B, \neg(T(A) \supset T(B)) \rightarrow}{A \supset B \rightarrow \neg \neg(T(A) \supset T(B))} (e \rightarrow)}{A \supset B \rightarrow \neg \neg(T(A) \supset T(B))} (\rightarrow \neg)$$

よって、 $CFL_e \vdash A \supset B \rightarrow \neg\neg(T(A) \supset T(B))$

ここで、 $\neg\neg(T(A) \supset T(B))$ は $T(A \supset B)$ に等しいので $CFL_e \vdash A \supset B \rightarrow T(A \supset B)$

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow T(A) \quad T(B) \rightarrow B}{T(A) \supset T(B), A \rightarrow B} (\supset \rightarrow)}{T(A) \supset T(B) \rightarrow A \supset B} (\rightarrow \supset)}{\rightarrow \neg(T(A) \supset T(B)), A \supset B} (\rightarrow \neg)}{\neg\neg(T(A) \supset T(B)) \rightarrow A \supset B} (\neg \rightarrow)$$

よって、 $CFL_e \vdash \neg\neg(T(A) \supset T(B)) \rightarrow A \supset B$

ここで、 $\neg\neg(T(A) \supset T(B))$ は $T(A \supset B)$ に等しいので $CFL_e \vdash T(A \supset B) \rightarrow A \supset B$

$D : A * B$ のとき

induction hypothesis より $CFL_e \vdash A \leftrightarrow T(A), CFL_e \vdash B \leftrightarrow T(B)$ が成り立つ。

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow T(A) \quad B \rightarrow T(B)}{A, B \rightarrow T(A) * T(B)} (\rightarrow *)}{A * B \rightarrow T(A) * T(B)} (* \rightarrow)}{\neg(T(A) * T(B)), A * B \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\frac{A * B, \neg(T(A) * T(B)) \rightarrow}{A * B \rightarrow \neg\neg(T(A) * T(B))} (\rightarrow \neg)}$$

よって、 $CFL_e \vdash A * B \rightarrow \neg\neg(T(A) * T(B))$

ここで、 $\neg\neg T(A) * T(B)$ は $T(A * B)$ に等しいので $CFL_e \vdash A * B \rightarrow T(A * B)$

$$\frac{\frac{\frac{T(A) \rightarrow A \quad T(B) \rightarrow B}{T(A), T(B) \rightarrow A * B} (\rightarrow *)}{T(A) * T(B) \rightarrow A * B} (* \rightarrow)}{\rightarrow \neg(T(A) * T(B)), A * B \rightarrow} (\rightarrow \neg)}{\neg\neg(T(A) * T(B)) \rightarrow A * B} (\neg \rightarrow)$$

よって、 $CFL_e \vdash \neg\neg(T(A) * T(B)) \rightarrow A * B$

ここで、 $\neg\neg T(A) * T(B)$ は $T(A * B)$ に等しいので $CFL_e \vdash T(A * B) \rightarrow A * B$

$D : A \vee B$ のとき

induction hypothesis より $CFLe \vdash A \leftrightarrow T(A), CFLe \vdash B \leftrightarrow T(B)$ が成り立つ。

$$\begin{array}{c}
\frac{A \rightarrow T(A)}{\neg T(A), A \rightarrow} (\neg \rightarrow) \quad \frac{B \rightarrow T(B)}{\neg T(B), B \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg T(A), A \rightarrow}{A, \neg T(A) \rightarrow} (e \rightarrow) \quad \frac{\neg T(B), B \rightarrow}{B, \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\frac{A, \neg T(A) \rightarrow}{A, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow} (\wedge \rightarrow) \quad \frac{B, \neg T(B) \rightarrow}{B, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow} (\wedge \rightarrow) \\
\frac{A, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow}{A \vee B, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow} (\vee \rightarrow) \\
\frac{A \vee B, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow}{A \vee B \rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))} (\rightarrow \neg)
\end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$

ここで、 $\neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ は $T(A \vee B)$ に等しいので $CFLe \vdash A \vee B \rightarrow T(A \vee B)$

$$\begin{array}{c}
\frac{T(A) \rightarrow A}{\rightarrow \neg T(A), A} (\rightarrow \neg) \quad \frac{T(B) \rightarrow B}{\rightarrow \neg T(B), B} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A), A}{\rightarrow \neg T(A), A \vee B} (\rightarrow \vee) \quad \frac{\rightarrow \neg T(B), B}{\rightarrow \neg T(B), A \vee B} (\rightarrow \vee) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A), A \vee B}{\rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(B), A \vee B} (\rightarrow \wedge) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(B), A \vee B}{\neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \rightarrow A \vee B} (\neg \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \rightarrow A \vee B$

ここで、 $\neg(\neg T(A) \vee \neg T(B))$ は $T(A \vee B)$ に等しいので $CFLe \vdash T(A \vee B) \rightarrow A \vee B$

$D : A + B$ のとき

induction hypothesis より $CFLe \vdash A \leftrightarrow T(A), CFLe \vdash B \leftrightarrow T(B)$ が成り立つ。

$$\begin{array}{c}
\frac{A \rightarrow T(A)}{\neg T(A), A \rightarrow} (\neg \rightarrow) \quad \frac{B \rightarrow T(B)}{\neg T(B), B \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg T(A), A \rightarrow}{A, \neg T(A) \rightarrow} (e \rightarrow) \quad \frac{\neg T(B), B \rightarrow}{B, \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\frac{A, \neg T(A) \rightarrow}{\neg T(A), \neg T(B), A + B \rightarrow} (+ \rightarrow) \\
\frac{\neg T(A), \neg T(B), A + B \rightarrow}{A + B, \neg T(A), \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\frac{A + B, \neg T(A), \neg T(B) \rightarrow}{A + B, \neg T(A) * \neg T(B) \rightarrow} (* \rightarrow) \\
\frac{A + B, \neg T(A) * \neg T(B) \rightarrow}{A + B \rightarrow \neg(\neg T(A) * \neg T(B))} (\rightarrow \neg)
\end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash A + B \rightarrow \neg(\neg T(A) * \neg T(B))$

ここで、 $\neg(\neg T(A) * \neg T(B))$ は $T(A + B)$ に等しいので $CFLe \vdash A + B \rightarrow T(A + B)$

$$\begin{array}{c}
\frac{T(A) \rightarrow A}{\rightarrow \neg T(A), A} (\rightarrow \neg) \quad \frac{T(B) \rightarrow B}{\rightarrow \neg T(B), B} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A), A}{\rightarrow \neg T(A) * \neg T(B), A, B} (\rightarrow *) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A) * \neg T(B), A, B}{\rightarrow \neg T(A) * \neg T(B), A + B} (\rightarrow +) \\
\frac{\rightarrow \neg T(A) * \neg T(B), A + B}{\neg(\neg T(A) * \neg T(B)) \rightarrow A + B} (\neg \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash \neg(\neg T(A) * \neg T(B)) \rightarrow A + B$

ここで、 $\neg(\neg T(A) * \neg T(B))$ は $T(A + B)$ に等しいので $CFLe \vdash T(A + B) \rightarrow A + B$ $\square$

Corollary 3.4

$$CFLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D) \Rightarrow CFLe \vdash \Gamma \rightarrow D$$

Proof.

Lemma 3.3 より、Corollary 3.4 が成り立つ。 $\square$

すると、Theorem 3.1 の左辺から右辺が導かれることが以下のように示される。

Proof.

Lemma 3.2 かつ Corollary 3.4 より直ちに Theorem 3.1 の左辺から右辺が導かれる。 $\square$

そこで次にその逆が成り立つことを示す。

3.3 Theorem 3.1 の右辺から左辺が導かれること

Theorem 3.1 の右辺から左辺が導かれることを示す。そのためにまず、次のことを証明しておく。

Lemma 3.5

$$FLe \vdash \neg\neg T(D) \rightarrow T(D)$$

Proof.

Lemma 2.1 より、 $FLe \vdash T(\top) \leftrightarrow \neg\perp$, $FLe \vdash T(f) \leftrightarrow \neg t$ である。このことと T の定義より任意の D に対し、ある論理式 E が存在して、 $FLe \vdash \neg E$ が成り立つ。ところで、任意の論理式 C に対し、 $FLe \vdash \neg\neg\neg C \leftrightarrow \neg C$ が次のように証明できる。

$$\begin{array}{c} \frac{C \rightarrow C}{\neg C, C \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\ \frac{\neg C, C \rightarrow}{C, \neg C \rightarrow} (e \rightarrow) \\ \frac{C, \neg C \rightarrow}{C \rightarrow \neg\neg C} (\rightarrow \neg) \\ \frac{C \rightarrow \neg\neg C}{\neg\neg\neg C, C \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\ \frac{\neg\neg\neg C, C \rightarrow}{\neg\neg\neg C \rightarrow \neg C} (\rightarrow \neg) \end{array}$$

すると、 $FLe \vdash \neg T(D) \leftrightarrow \neg\neg\neg E$, $FLe \vdash \neg\neg\neg E \leftrightarrow \neg E$, $FLe \vdash \neg E \leftrightarrow T(D)$ より、

$$FLe \vdash \neg\neg T(D) \leftrightarrow T(D)$$

□

Lemma 3.6

$$CFLe \vdash \Gamma \rightarrow \Delta \Rightarrow FLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma) \rightarrow$$

Proof.

initial sequent のとき

induction hypothesis より明らか。

 $(e \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (e \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(B), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(B), T(A), T(\Sigma) \rightarrow} (e \rightarrow)$$

よって、 $CFLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(B), T(A), T(\Sigma) \rightarrow$ $(\rightarrow e)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, B, A, \Theta} (\rightarrow e)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(B), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(B), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (e \rightarrow)$$

よって、 $CFLe \vdash \neg T(\Theta), \neg T(B), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow$ $(\supset \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad \Pi, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} (\supset \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(A), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Gamma), \neg T(A) \rightarrow} (e \rightarrow)}{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(A)} (\rightarrow \neg) \quad \neg \neg T(A) \rightarrow T(A) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow T(A)}{\neg T(\Theta), T(\Gamma), T(A) \supset T(B), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (cut) \quad \neg T(\Delta), T(\Pi), T(B), T(\Sigma) \rightarrow \\
\hline
\frac{\neg T(\Delta), T(\Pi), T(A) \supset T(B), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A) \supset T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg(T(A) \supset T(B))}{\neg \neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (\rightarrow \neg) \\
\hline
\frac{\neg \neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), \neg \neg(T(A) \supset T(B)), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\hline
\frac{}{\neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), \neg \neg(T(A) \supset T(B)), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

Lemma 3.5 より、 $FLe \vdash \neg \neg T(A) \rightarrow T(A)$ なので、

$CFL e \vdash \neg T(\Delta), \neg T(\Theta), T(\Pi), \neg \neg(T(A) \supset T(B)), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow$

ここで、 $\neg \neg(T(A) \supset T(B))$ は $T(A \supset B)$ に等しいから、

$$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(\Delta), T(\Pi), T(A \supset B), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow$$

$(\rightarrow \supset)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta} (\rightarrow \supset)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(B), T(\Gamma), T(A) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Gamma), T(A), \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow)}{\neg T(\Theta), T(\Gamma), T(A) \rightarrow \neg \neg T(B)} (\rightarrow \neg) \quad \neg \neg T(B) \rightarrow T(B) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma), T(A) \rightarrow T(B)}{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \supset T(B)} (cut) \quad \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \supset T(B) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \supset T(B)}{\neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow} (\rightarrow \supset) \\
\hline
\frac{\neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Gamma), \neg(T(A) \supset T(B)) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma), \neg(T(A) \supset T(B)) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg(T(A) \supset T(B))} (e \rightarrow) \\
\hline
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg(T(A) \supset T(B))}{\neg \neg \neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow} (\rightarrow \neg) \\
\hline
\frac{\neg \neg \neg(T(A) \supset T(B)), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg \neg \neg(T(A) \supset T(B)), T(\Gamma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

Lemma 3.5 より、 $FLe \vdash \neg \neg T(B) \rightarrow T(B)$ なので、

$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg \neg \neg(T(A) \supset T(B)), T(\Gamma) \rightarrow$

ここで、 $\neg \neg \neg(T(A) \supset T(B))$ は $T(A \supset B)$ に等しいから、

$$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(A \supset B), T(\Gamma) \rightarrow$$

($\wedge 1 \rightarrow$) のとき

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \rightarrow \Delta} (\wedge 1 \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c} \frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(\Sigma) \rightarrow}{\frac{\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A) \wedge T(B) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B))} (\rightarrow \neg)} T(A), \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A) \rightarrow} (e \rightarrow) \\ \frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B))}{\neg \neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\ \frac{\neg \neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), \neg \neg(T(A) \wedge T(B)), T(\Sigma) \rightarrow} (e \rightarrow) \end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), \neg \neg(T(A) \wedge T(B)), T(\Sigma) \rightarrow$

ここで、 $\neg \neg(T(A) \wedge T(B))$ は $T(A \wedge B)$ に等しいから、

$$CFLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A \wedge B), T(\Sigma) \rightarrow$$

($\wedge 2 \rightarrow$) のとき

($\wedge 1 \rightarrow$) のときと同様に示すことができる。

($\rightarrow \wedge$) のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A \wedge B, \Theta} (\rightarrow \wedge)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c} \frac{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(A) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(A)} (e \rightarrow)} \neg \neg T(A) \rightarrow T(A) \\ \frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(A)}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(A)} (\rightarrow \neg) \quad (cut) \end{array}$$

Lemma 3.5 より、 $FLe \vdash \neg \neg T(A) \rightarrow T(A)$ なので、

$\vdash \neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \cdots (a)$

同様に induction hypothesis より

$$\begin{array}{c} \frac{\neg T(\Theta), \neg T(B), \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \rightarrow}{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(B) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(B)} (e \rightarrow)} \neg \neg T(B) \rightarrow T(B) \\ \frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(B)}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(B)} (\rightarrow \neg) \quad (cut) \end{array}$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(A) \rightarrow} (e \rightarrow)}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(A) \wedge \neg T(B) \rightarrow} (\wedge 1 \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))}{\neg \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)), \neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\neg \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)), \neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{}{\neg T(\Theta), \neg \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow$

ここで、 $\neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ は $T(A \vee B)$ に等しいから、

$$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(A \vee B), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow$$

$(\rightarrow \vee 2)$ のとき

$(\rightarrow \vee 1)$ のときと同様に示すことができる。

$(\neg \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} (\neg \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(A), T(\Gamma) \rightarrow$$

$(\rightarrow \neg)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Theta} (\rightarrow \neg)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma), T(A) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow \neg T(A)} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow \neg T(A)}{\neg \neg T(A), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg \neg T(A), \neg T(\Theta), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg \neg T(A), T(\Gamma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg \neg T(A), T(\Gamma) \rightarrow$

$(\rightarrow *)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\frac{\neg T(\Lambda), \neg T(A), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(A) \rightarrow} (e \rightarrow)}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(A)} (\rightarrow \neg) \quad \neg \neg T(A) \rightarrow T(A)}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(A)} (cut)$$

Lemma 3.5 より、 $FLe \vdash \neg \neg T(A) \rightarrow T(A)$ なので、

$\vdash \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \cdots (a)$

同様に induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\frac{\neg T(\Theta), \neg T(B), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Sigma), \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow)}{\neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow \neg \neg T(B)} (\rightarrow \neg) \quad \neg \neg T(B) \rightarrow T(B)}{\neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow T(B)} (cut)$$

Lemma 3.5 より、 $FLe \vdash \neg \neg T(B) \rightarrow T(B)$ なので、

$\vdash \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow T(B) \cdots (b)$

$(a), (b)$ より

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow T(A) \quad \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow T(B)}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow T(A) * T(B)} (\rightarrow *)}{\neg (T(A) * T(B))}, \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\frac{\frac{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma), \neg (T(A) * T(B)) \rightarrow}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow \neg \neg (T(A) * T(B))} (\rightarrow \neg)}{\neg \neg \neg (T(A) * T(B)), \neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), \neg \neg \neg (T(A) * T(B)), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (e \rightarrow)$$

$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), \neg \neg \neg (T(A) * T(B)), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow$

ここで、 $\neg \neg (T(A) * T(B))$ は $T(A * B)$ に等しいから、

$$CFL e \vdash \neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(A * B), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow$$

$(* \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A * B, \Sigma \rightarrow \Delta} (* \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(B), T(\Sigma), T(\Delta) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A), T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A), T(B) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A) * T(B) \rightarrow} (* \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A) * T(B) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg(T(A) * T(B))} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg(T(A) * T(B))}{\neg\neg(T(A) * T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg\neg(T(A) * T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), \neg\neg(T(A) * T(B)), T(\Sigma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), \neg\neg(T(A) * T(B)), T(\Sigma) \rightarrow$

ここで、 $\neg\neg(T(A) * T(B))$ は $T(A * B)$ に等しいから、

$$CFLe \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A * B), T(\Sigma) \rightarrow$$

$(\rightarrow +)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Pi, A, B, \Sigma}{\Gamma \rightarrow \Pi, A + B, \Sigma} (\rightarrow +)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg T(\Sigma), \neg T(B), \neg T(A), \neg T(\Pi), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Sigma), T(\Gamma), \neg T(A), \neg T(B) \rightarrow} (e \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Sigma), T(\Gamma), \neg T(A), \neg T(B) \rightarrow}{\neg T(\Sigma), T(\Gamma), \neg T(A) * \neg T(B) \rightarrow} (* \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Sigma), T(\Gamma), \neg T(A) * \neg T(B) \rightarrow}{\neg T(\Sigma), T(\Gamma) \rightarrow \neg(\neg T(A) * \neg T(B))} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\neg T(\Sigma), T(\Gamma) \rightarrow \neg(\neg T(A) * \neg T(B))}{\neg\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), \neg T(\Sigma), T(\Gamma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), \neg T(\Sigma), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Pi), \neg\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), T(\Gamma) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $\vdash \neg T(\Pi), \neg\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), T(\Gamma) \rightarrow$

ここで、 $\neg(\neg T(A) * \neg T(B))$ は $T(A + B)$ に等しいから、

$$CFLe \vdash \neg T(\Pi), \neg T(A + B), T(\Gamma) \rightarrow$$

$(+ \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow \Lambda \quad \Sigma, B \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma, A + B, \rightarrow \Lambda, \Theta} (+ \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), T(A) \rightarrow}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg T(A)} (\rightarrow \neg) \quad \frac{\neg T(\Theta), T(\Sigma), T(B) \rightarrow}{\neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow \neg T(B)} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow \neg T(A) \quad \neg T(\Theta), T(\Sigma) \rightarrow \neg T(B)}{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma), \rightarrow \neg T(A) * \neg T(B)} (* \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Lambda), T(\Gamma), \neg T(\Theta), T(\Sigma), \rightarrow \neg T(A) * \neg T(B)}{\neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg T(A) * \neg T(B)} (e \rightarrow) \\
\frac{\neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow \neg T(A) * \neg T(B)}{\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), \neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow} (\neg \rightarrow) \\
\frac{\neg(\neg T(A) * \neg T(B)), \neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma), \neg(\neg T(A) * \neg T(B)) \rightarrow} (e \rightarrow)
\end{array}$$

よって、 $CFL_e \vdash \neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma), \neg(\neg T(A) * \neg T(B)) \rightarrow$
 ここで、 $\neg(\neg T(A) * \neg T(B))$ は $T(A + B)$ に等しいから、

$$CFL_e \vdash \neg T(\Lambda), \neg T(\Theta), T(\Gamma), T(\Sigma), T(A + B) \rightarrow$$

よって Lemma 3.5 が証明できた。 □

次に Theorem 3.1 の右辺から左辺が導かれることを示す。

Proof.

Lemma 3.6 より Δ 対する formula の列を 1 個、または 0 個に制限した次のことが成り立つ。

$$CFL_e \vdash \Gamma \rightarrow D \Rightarrow FLe \vdash \neg T(D), T(\Gamma) \rightarrow$$

ここで、式 $\neg T(D), T(\Gamma) \rightarrow$ に $(e \rightarrow), (\rightarrow \neg)$ を適用すれば

$$CFL_e \vdash \Gamma \rightarrow D \Rightarrow FLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow \neg \neg T(D)$$

よって Lemma 3.5 より、

$$CFL_e \vdash \Gamma \rightarrow D \Rightarrow FLe \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D)$$

□

上の Theorem 3.1 と同じ様な方法で次の定理が成り立つ。

Theorem 3.7

$$FLew \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D) \Leftrightarrow CFLew \vdash \Gamma \rightarrow D$$

$$FLec \vdash T(\Gamma) \rightarrow T(D) \Leftrightarrow CFLec \vdash \Gamma \rightarrow D$$

Theorem 3.7 の左辺から右辺を導く際に構造に関する規則で証明する weakening 規則、contraction 規則の場合の証明を以下に示す。これ以外の証明は weakening 規則、contraction 規則を必要としないので Theorem 3.1 と同じ様に証明できる。

$(w \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (w \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(\Sigma) \rightarrow} (w \rightarrow)$$

よって、 $\vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(\Sigma) \rightarrow$

$(\rightarrow w)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta} (w \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Theta), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (w \rightarrow)$$

よって、 $\vdash \neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma \rightarrow)$

$(c \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (c \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Delta), T(A), T(A), T(\Gamma), T(\Sigma) \rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(\Sigma) \rightarrow} (c \rightarrow)$$

よって、 $\vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(\Sigma) \rightarrow$

$(\rightarrow c)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, A, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, A, \Theta} (c \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow}{\neg T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow} (c \rightarrow)$$

よって、 $\vdash T(\Theta), \neg T(A), \neg T(\Lambda), T(\Gamma) \rightarrow$

第 4 章

FLew から FLe への埋め込み——小野-桐山型

桐山-小野の論文 [3] の §3 では述語論理の LJ の述語論理の FLec への translation を用いて FLec の undecidability が示されている。この方法を使って命題論理 FLew の FLe への埋め込みを試みた。ここでは、より簡単な translation を、FLe で constant を用いること無しに定める。

4.1 埋め込み関係の定義

次に定義する translation を使って、FLew と FLe の埋めこみ関係を Theorem 4.1 として表わす。

式 $\Gamma \rightarrow A$ が与えられたとする (以下では式を fix して考える)。

$\mathcal{P}$ を $\Gamma \rightarrow A$ に現れる propositional symbol 全体の集合 (もちろん有限である) としたとき論理式 T を

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} (P \supset P)$$

により定める。

$\mathcal{P}$ に属す propositional symbol のみから構成されるような formula 全体の集合を $\Phi (= \Phi_{\mathcal{P}})$ とする。 $B \in \Phi$ に対し formula B^* を次のように定める。

- (1) B が *atomic* (i.e. $B = P$) $\Rightarrow B^* = P \wedge T (= B \wedge T)$
- (2) $B = C \circ D$ ($\circ \in \wedge, \vee, \supset$) $\Rightarrow B^* = (C^* \circ D^*) \wedge T$

$$(3) B = \neg C \Rightarrow B^* = (\neg C^*) \wedge T$$

Theorem 4.1

$$FLew \vdash \Gamma \rightarrow A \Leftrightarrow FLe \vdash \Gamma^* \rightarrow A^*$$

この定理が成り立つと、例えば、FLew で $C \vee D \rightarrow A$ が証明可能ならば FLe で $(C^* \vee D^*) \wedge T \rightarrow A \wedge T$ が成り立つことになる。はたして、本当にこれがいえるのであろうか。

4.2 Theorem 4.1 の左辺から右辺が導かれること

次の Lemma 4.2 は容易に証明できる。

Lemma 4.2

$$1. FLew \vdash T$$

$$2. FLew \vdash B^* \equiv B$$

次に Theorem 4.2 の左辺から右辺が導かれることを示す。

Proof.

Lemma 4.2 の 2 より

$$FLew \vdash \Gamma^* \rightarrow A^* \Rightarrow FLew \vdash \Gamma \rightarrow A \cdots (1)$$

FLe は FLew より強い体系なので

$$FLe \vdash \Gamma^* \rightarrow A^* \Rightarrow FLew \vdash \Gamma^* \rightarrow A^* \cdots (2)$$

よって (1),(2) より、Theorem 4.1 の左辺から右辺の

$$FLe \vdash \Gamma^* \rightarrow A^* \Rightarrow FLew \vdash \Gamma \rightarrow A$$

が証明できた。

□

4.3 Theorem 4.1 の右辺から左辺が導かれること

以下で Theorem 4.1 の右辺から左辺が導かれることを示す。

4.3.1 FLew に同等な体系 $FLew^+$ の形式化とその関係

まず、FLew と同等な次のような体系 $FLew^+$ により形式化しておく。

1. Initial sequent

$$C_1 \cdots C_m, B \rightarrow B$$

ただし、 B は atomic, C_i は任意

2. Structural rules

exchange rule のみ

3. Logical rules

FL と同じ

すなわち、 $FLew^+$ は FLew の weakening rule を initial sequent に込めた体系であると考えられる。そのことを次のようにして確かめた。

Lemma 4.3

$$FLew \vdash \Delta \rightarrow C \Leftrightarrow FLew^+ \vdash \Delta \rightarrow C$$

Proof. (Lemma 4.3 の $(\Leftarrow)$)

$FLew^+$ は FLew よりも強い体系なので

$$FLew \vdash \Delta \rightarrow C \Leftarrow FLew^+ \vdash \Delta \rightarrow C$$

□

Proof. (Lemma 4.3 の $(\Rightarrow)$)

FLew の、 $\Delta \rightarrow C$ に到る cut-free proof を考える。

weakening については他の rule と交換可能だから、証明図の一番上に持ち上げることができるところをまず確かめる。

すなわち、次のことがいえる。

$(\wedge 1 \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow C} (\wedge 1 \rightarrow)}{D, A \wedge B, \Gamma \rightarrow C} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow C}{D, A, \Gamma \rightarrow C} (w \rightarrow)}{D, A \wedge B, \Gamma \rightarrow C} (\wedge 1 \rightarrow)$$

($\wedge 2 \rightarrow$) のとき

($\wedge 1 \rightarrow$) のときと同様に変換できる。

($\vee \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow C \quad B, \Gamma \rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \rightarrow C} (\vee \rightarrow)}{D, A \vee B, \Gamma \rightarrow C} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow C}{D, A, \Gamma \rightarrow C} (w \rightarrow) \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow C}{D, B, \Gamma \rightarrow C} (w \rightarrow)}{D, A \vee B, \Gamma \rightarrow C} (\vee \rightarrow)$$

($\supset \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A \quad B, \Sigma \rightarrow C}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow C} (\supset \rightarrow)}{D, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow C} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \frac{B, \Sigma \rightarrow C}{D, B, \Sigma \rightarrow C} (w \rightarrow)}{D, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow C} (\supset \rightarrow)$$

($\neg \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{D, \neg A, \Gamma \rightarrow} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A}{D, \Gamma \rightarrow A} (w \rightarrow)}{\neg A, D, \Gamma \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{D, \neg A, \Gamma \rightarrow} (e \rightarrow)$$

すると、これらの証明図の一番上の式は適当に exchange を用いれば

$$C_1, \dots, C_m, D \rightarrow D$$

の形になるが、 D は atomic でないかもしれない。 D が atomic でないときには以下のようにして D がより簡単な形をした initial sequent で置き換えられることを示す。まず、 $D : E \wedge F$ のとき

$$\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow E} (\wedge 1 \rightarrow) \quad \frac{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow F}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow F} (\wedge 2 \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow E \wedge F} (\rightarrow \wedge)$$

$D : E \vee F$ のとき

$$\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E}{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E \vee F} (\rightarrow \vee 1) \quad \frac{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow F}{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow E \vee F} (\rightarrow \vee 2)}{C_1, \dots, C_m, E \vee F \rightarrow E \vee F} (\vee \rightarrow)$$

$D : E \supset F$ のとき

$$\frac{\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E \quad C_1, \dots, C_m, F \rightarrow F}{C_1, \dots, C_m, E \supset F, C_1, \dots, C_m, E \rightarrow F} (\supset \rightarrow)}{\frac{C_1, \dots, C_m, C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F}{C_1, \dots, C_m, C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F} (e \rightarrow)}}{C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F} (c \rightarrow), (e \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, E \supset F \rightarrow E \supset F} (\rightarrow \supset)$$

$D : \neg E$ のとき

$$\frac{\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E}{\neg E, C_1, \dots, C_m, E \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\frac{C_1, \dots, C_m, \neg E, E \rightarrow}{C_1, \dots, C_m, \neg E, E \rightarrow} (e \rightarrow)}}{C_1, \dots, C_m, \neg E \rightarrow \neg E} (\rightarrow \neg)$$

により、

$$C_1, \dots, C_m, D \rightarrow D$$

で D を atomic に制限できることが分かる。以上の様にして得られた証明図は $FLew^+$ の $\Delta \rightarrow C$ に到る証明図になっている。よって

$$FLew \vdash \Delta \rightarrow C \Rightarrow FLew^+ \vdash \Delta \rightarrow C$$

が示された。 □

4.3.2 体系 $FLew^+$ から FLe への埋め込み

次に $FLew^+$ から FLe への埋め込みについて考える。

Lemma 4.4

Δ, C に現われる *propositional symbol* はすべて $\mathcal{P}$ に属するものとする。このとき、

$$FLew^+ \vdash \Delta \rightarrow C \Rightarrow FLe \vdash \Delta^* \rightarrow C^*$$

Lemma 4.4 の証明をする前に次の Lemma 4.5 を証明しておく。

Lemma 4.5

1. $P \in \mathcal{P}$ としたとき、

$$FLe \vdash \overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, P \rightarrow P$$

2. $FLe \vdash \overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}} \rightarrow T$

Proof.

1.

$$\frac{\frac{\frac{P \rightarrow P \quad P \rightarrow P}{P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \quad P \rightarrow P}{P \supset P, P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \quad P \rightarrow P}{P \supset P, P \supset P, P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \quad \vdots (\supset \rightarrow)}{\frac{P \supset P, \dots, P \supset P, P \rightarrow P}{\underbrace{T, \dots, T}_{m \text{ 個}}, P \rightarrow P} (\wedge 2, m \text{ 回 } \rightarrow)}$$

2. 上に引き続いて

$$\frac{T, \dots, T \rightarrow P \supset P}{\underbrace{T, \dots, T}_{m \text{ 個}} \rightarrow T} (\rightarrow \wedge)$$

一番下の推論規則は $T, \dots, T \rightarrow P \supset P$ と $(\rightarrow \wedge)$ を適用する。 P_i が k 個あれば k 回の $(\rightarrow \wedge)$ を適用する。

□

Proof. (Lemma 4.4)

証明の長さに関する帰納法によって証明する。

1. $\Gamma \rightarrow C$ が $FLew^+$ の *initial sequent* のとき

すなわち、 $C_1, \dots, C_m, P \rightarrow P$ のとき

まず、 C_i^* は $C_i' \wedge T$ の形で、 P^* は $P \wedge T$ であることを注意しておく。

Lemma 4.5 の 1 より

$$\frac{\frac{\overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, P \rightarrow P}{T, \dots, T, P \wedge T \rightarrow P} (\wedge 1, m \text{ 回 } \rightarrow)}{C_1' \wedge T, \dots, C_m' \wedge T, P \wedge T \rightarrow P} (P \wedge T) \text{ に対して、} (\wedge 2 \rightarrow)$$

従って

$$\vdash C_1^*, \dots, C_m^*, P^* \rightarrow P \dots (1)$$

一方、Lemma 4.5 の 2 を用いると

$$\frac{\overbrace{T, \dots, T}^{m+1 \text{ 個}} \rightarrow T}{C_1' \wedge T, \dots, C_m' \wedge T, P \wedge T \rightarrow T} (\wedge 2 \rightarrow, m+1 \text{ 回})$$

ただし $C_i' \wedge T$ は C_m^* に等しいものとする。従って

$$\vdash C_1^*, \dots, C_m^*, P^* \rightarrow T \dots (2)$$

(1), (2) と $(\rightarrow \wedge)$ より

$$\vdash C_1^*, \dots, C_m^*, P^* \rightarrow P \wedge T$$

$P \wedge T$ は P^* に等しいことから、

$$\vdash C_1^*, \dots, C_m^*, P^* \rightarrow P^*$$

2. structural rule のとき

(*exchange* $\rightarrow$) のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow D}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow D} (e \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\Gamma^*, A^*, B^*, \Sigma^* \rightarrow D^*}{\Gamma^*, B^*, A^*, \Sigma^* \rightarrow D^*} (e \rightarrow)$$

従って $\vdash \Gamma^*, B^*, A^*, \Sigma^* \rightarrow D^*$

3. logical rule のとき

$(\rightarrow \vee 1)$ のとき

$$\frac{\Delta \rightarrow D}{\Delta \rightarrow D \vee E} (\rightarrow \vee 1)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\Delta^* \rightarrow D^*}{\Delta^* \rightarrow D^* \vee E^*} (\rightarrow \vee 1)$$

よって、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow D^* \vee E^* \dots (3)$$

一方、Lemma 4.5 の 2 を用いると

$$\vdash \Delta^* \rightarrow T \dots (4)$$

(3),(4) と $(\rightarrow \wedge 1)$ より、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D^* \vee E^*) \wedge T$$

$(D^* \vee E^*) \wedge T$ は $(D \vee E)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D \vee E)^*$$

$(\rightarrow \vee 2)$ のとき

$(\rightarrow \vee 1)$ のときと同様に示すことができる。

$(\vee \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Delta, D, \Sigma \rightarrow F \quad \Delta, E, \Sigma \rightarrow F}{\Delta, D \vee E, \Sigma \rightarrow F} (\vee \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\Delta^*, D^*, \Sigma^* \rightarrow F^* \quad \Delta^*, E^*, \Sigma^* \rightarrow F^*}{\Delta^*, D^* \vee E^*, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\vee \rightarrow)}{\Delta^*, (D^* \vee E^*) \wedge T, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(D^* \vee E^*) \wedge T$ は $(D \vee E)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^*, (D \vee E)^*, \Sigma^* \rightarrow F^*$$

$(\rightarrow \wedge)$ のとき

$$\frac{\Delta \rightarrow D \quad \Delta \rightarrow E}{\Delta \rightarrow D \wedge E} (\rightarrow \wedge)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\Delta^* \rightarrow D^* \quad \Delta^* \rightarrow E^*}{\Delta^* \rightarrow D^* \wedge E^*} (\rightarrow \wedge)$$

よって、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow D^* \wedge E^* \dots (5)$$

一方、Lemma 4.5 の 2 を用いると

$$\vdash \Delta^* \rightarrow T \dots (6)$$

(5),(6) と $(\rightarrow \wedge)$ より、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D^* \wedge E^*) \wedge T$$

$(D^* \wedge E^*) \wedge T$ は $(D \wedge E)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D \wedge E)^*$$

$(\wedge 1 \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Delta, D, \Sigma \rightarrow F}{\Delta, D \wedge E, \Sigma \rightarrow F} (\wedge 1 \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\Delta^*, D^*, \Sigma^* \rightarrow F^*}{\Delta^*, D^* \wedge E^*, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\wedge 1 \rightarrow)}{\Delta^*, (D^* \wedge E^*) \wedge T, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(D^* \wedge E^*) \wedge T$ は $(D \wedge E)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^*, (D \wedge E)^*, \Sigma^* \rightarrow F^*$$

$(\wedge 2 \rightarrow)$ のとき

$(\wedge 1 \rightarrow)$ のときと同様に示すことができる。

$(\rightarrow \supset)$ のとき

$$\frac{\Delta, D \rightarrow E}{\Delta \rightarrow D \supset E} (\rightarrow \supset)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\Delta^*, D^* \rightarrow E^*}{\Delta^* \rightarrow D^* \supset E^*} (\rightarrow \supset)$$

よって、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow D^* \supset E^* \dots (7)$$

一方、Lemma 4.5 の 2 を用いると

$$\vdash \Delta^* \rightarrow T \dots (8)$$

(7),(8) と $(\rightarrow \wedge)$ より、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D^* \supset E^*) \wedge T$$

$(D^* \supset E^*) \wedge T$ は $(D \supset E)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (D \supset E)^*$$

$(\supset \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Delta \rightarrow D \quad \Pi, E, \Sigma \rightarrow F}{\Pi, D \supset E, \Delta, \Sigma \rightarrow F} (\supset \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\Delta^* \rightarrow D^* \quad \Pi^*, E^*, \Sigma^* \rightarrow F^*}{\Pi^*, D^* \supset E^*, \Delta^*, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\supset \rightarrow)}{\Pi^*, (D^* \supset E^*) \wedge T, \Delta^*, \Sigma^* \rightarrow F^*} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(D^* \supset E^*) \wedge T$ は $(D \supset E)^*$ であることから

$$\vdash \Pi^*, (D \supset E)^*, \Delta^*, \Sigma^* \rightarrow F^*$$

$(\rightarrow \neg)$ のとき

$$\frac{\Delta, D \rightarrow}{\Delta \rightarrow \neg D} (\rightarrow \neg)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\Delta^*, D^* \rightarrow}{\Delta^* \rightarrow \neg D^*} (\rightarrow \neg)$$

よって、

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (\neg D^*) \dots (9)$$

一方、Lemma 4.5 の 2 を用いると

$$\vdash \Delta^* \rightarrow T \cdots (10)$$

(9),(10) と $(\rightarrow \wedge)$ より,

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (\neg D^*) \wedge T$$

$(\neg D)^* \wedge T$ は $(\neg D)^*$ であることから

$$\vdash \Delta^* \rightarrow (\neg D)^*$$

$(\neg \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Delta \rightarrow D}{\neg D, \Delta \rightarrow} (\neg \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\Delta^* \rightarrow D^*}{\neg D^*, \Delta^* \rightarrow} (\neg \rightarrow)}{\neg D^* \wedge T, \Delta^* \rightarrow} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(\neg D^*) \wedge T$ は $(\neg D)^*$ であることから

$$\vdash (\neg D)^*, \Delta^* \rightarrow$$

よって Lemma 4.4 の証明ができた。

□

Lemma 4.3、Lemma 4.4 より Theorem 4.1(左辺から右辺) が成り立つ。

また、Theorem 4.1 は、述語論理についても同様に成り立つ。

第 5 章

LK から CFLec への埋め込み

前の章では FLew と FLe の証明可能性についての関係について考えたが、ここでは LK の CFLec への埋め込みを桐山-小野の証明 [3] のように constant f を使って試みた。

5.1 埋め込み関係の定義

次に定義する translation を使って、LK と CFLec の埋めこみ関係を Theorem 5.1 として表わす。

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が与えられたとする (以下では式を fix して考える)。

$\mathcal{P}$ を $\Gamma \rightarrow \Delta$ に現れる propositional symbol 全体の集合。(もちろん有限である) としたとき論理式 T を

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} (P \supset P) \wedge (f \supset f)$$

により定める。 $\mathcal{P}$ に属す propositional symbol のみから構成されるような formula 全体の集合を $\Phi (= \Phi_{\mathcal{P}})$ とする。

$B \in \Phi$ に対し formula $|B|^+, |B|^-$ を次のように定める ($\neg C$ は $C \supset f$ と定義する)。

- (1) B が atomic (すなわち B は P または f) $\Rightarrow |B|^- = B \wedge T, |B|^+ = B \vee f$
- (2) $B = C \circ D$ ($\circ \in \wedge, \vee, *$) $\Rightarrow |B|^- = (|C|^- \circ |D|^-) \wedge T, |B|^+ = (|C|^+ \circ |D|^+) \vee f$
- (3) $B = C \supset D \Rightarrow |B|^- = (|C|^- \supset |D|^-) \wedge T, |B|^+ = (|C|^+ \supset |D|^+) \vee f$

Theorem 5.1

$$LK \vdash \Gamma \rightarrow \Theta \Leftrightarrow CFLec \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

この定理が成り立つと例えば、LK で $C * D \rightarrow E$ が証明可能ならば FLe で $(|C|^- * |D|^+) \wedge T \rightarrow |E|^+$ が成り立つことになる。はたして、本当にこれがいえるのであろうか。

5.2 Theorem 5.1 の左辺から右辺が導かれること

次の Lemma 5.2 は容易に証明できる。

Lemma 5.2

1. $LK \vdash T$
2. $LK \vdash \rightarrow (|B|^- \equiv B) \wedge (|B|^+ \equiv B)$

次に Theorem 5.2 の左辺から右辺が導かれることを示す。

Proof.

Lemma 5.2 の 2 より

$$LK \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Delta|^+ \Rightarrow LK \vdash \Gamma \rightarrow \Delta \cdots (1)$$

LK は CFLeC より強い体系なので

$$CFLeC \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Delta|^+ \Rightarrow LK \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Delta|^+ \cdots (2)$$

よって (1),(2) より、Theorem 5.1 の左辺から右辺の

$$CFLeC \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Delta|^+ \Rightarrow LK \vdash \Gamma \rightarrow \Delta$$

が証明できた。

□

5.3 Theorem 5.1 の右辺から左辺が導かれること

以下で Theorem 5.1 の右辺から左辺が導かれることを示す。

5.3.1 古典論理の体系 LK^* の形式化と LK と LK^* の体系

まず、LK を次のような体系 LK^* により形式化しておく。

1. Initial sequent

- (i) $C_1, \dots, C_m, B \rightarrow G_1, \dots, G_n, B$
 ただし、 B は atomic, C_i, G_j は任意の論理式
- (ii) $C_1, \dots, C_m, f \rightarrow G_1, \dots, G_n$

2. Structural rules

exchange rule 及び contraction rule

3. Rule for logical constants

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Lambda, f, \Theta} (f \ w)$$

4. Logical rules

CFL から $\neg$ についての推論規則を取り除いたもの

すなわち、 LK^* は LK の weakening rule を initial sequent に込めた体系であると考えられる。そのことを次のようにして確かめた。

Lemma 5.3

$$LK \vdash \Sigma \rightarrow \Theta \Leftrightarrow LK^* \vdash \Sigma \rightarrow \Theta$$

Proof. (Lemma 5.3 の $(\Leftarrow)$)

LK は LK^* よりも強い体系なので

$$LK \vdash \Sigma \rightarrow \Theta \Leftarrow LK^* \vdash \Sigma \rightarrow \Theta$$

□

Proof. (Lemma 5.3 の $(\Rightarrow)$)

LK の、 $\Sigma \rightarrow \Theta$ に到る cut-free proof を考える。

weakening については他の rule と交換可能だから、証明図の一番上に持ち上げることができ、それをまず確かめる。

すなわち、次のことがいえる。

($\wedge 1 \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta} (\wedge 1 \rightarrow)}{D, A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, A, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)}{D, A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta} (\wedge 1 \rightarrow)$$

($\wedge 2 \rightarrow$) のとき

($\wedge 1 \rightarrow$) のときと同様に示すことができる。

($\vee \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} (\vee \rightarrow)}{D, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, A, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, B, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)}{D, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} (\vee \rightarrow)$$

($\supset \rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad B, \Sigma \rightarrow \Lambda}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta} (\supset \rightarrow)}{D, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Theta \quad \frac{B, \Sigma \rightarrow \Lambda}{D, B, \Sigma \rightarrow \Lambda} (w \rightarrow)}{D, A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta} (\supset \rightarrow)$$

($*$ $\rightarrow$) のとき

$$\frac{\frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A * B, \Gamma \rightarrow \Theta} (* \rightarrow)}{D, A * B, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, A, B, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow)}{D, A * B, \Gamma \rightarrow \Theta} (* \rightarrow)$$

($\rightarrow \wedge$) のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \wedge B} (\rightarrow \wedge)}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \wedge B, D} (\rightarrow w)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A, D} (\rightarrow w) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, B, D} (\rightarrow w)}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \wedge B, D} (\rightarrow \wedge)$$

($\rightarrow \vee 1$) のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B} (\rightarrow \vee 1) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, D} (\rightarrow w)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A, D} (\rightarrow w) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, D} (\rightarrow \vee 1)$$

($\rightarrow \vee 2$) のとき

($\rightarrow \vee 1$) のときと同様に示すことができる。

($\rightarrow \supset$) のとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta} (\rightarrow \supset) \quad \Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta, D}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta, D} (\rightarrow w) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B, D} (\rightarrow e)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Theta, D} (w \rightarrow) \quad \Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta, D}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Theta, D} (\rightarrow \supset) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B, D} (\rightarrow e)$$

($\rightarrow *$) のとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *) \quad \Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta, A * B} (\rightarrow e) \quad \Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta, A * B, D}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta, A * B, D} (\rightarrow w)$$

これは、次のように変換できる。

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \rightarrow A, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow B, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *) \quad \Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta, D}{\Gamma, \Sigma \rightarrow A * B, \Lambda, \Theta, D} (\rightarrow w) \quad \Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta, A * B, D}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta, A * B, D} (\rightarrow e)$$

すると、これらの証明図の一番上の式は適当に exchange を用いれば

$$C_1, \dots, C_m, D \rightarrow G_1, \dots, G_n, D$$

または

$$C_1, \dots, C_m, f \rightarrow G_1, \dots, G_n$$

の形になるが、 D は atomic でないかもしれない。 D が atomic でないときには以下のようにして D がより簡単な形をした initial sequent で置き換えられることを示す。まず、 $D : E \wedge F$ のとき

$$\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow G_1, \dots, G_n, E}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E} (\wedge 1 \rightarrow) \quad \frac{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow G_1, \dots, G_n, F}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow G_1, \dots, G_n, F} (\wedge 2 \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, E \wedge F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E \wedge F} (\rightarrow \wedge)$$

$D : E \vee F$ のとき

$$\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow G_1, \dots, G_n, E}{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow G_1, \dots, G_n, E \vee F} (\rightarrow \vee 1) \quad \frac{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow G_1, \dots, G_n, F}{C_1, \dots, C_m, F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E \vee F} (\rightarrow \vee 2)}{C_1, \dots, C_m, E \vee F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E \vee F} (\vee \rightarrow)$$

$D : E \supset F$ のとき

$$\frac{\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E, G_1, \dots, G_n \quad C_1, \dots, C_m, F \rightarrow F, G_1, \dots, G_n}{C_1, \dots, C_m, E \supset F, C_1, \dots, C_m, E \rightarrow F, G_1, \dots, G_n, G_1, \dots, G_n} (\supset \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F, G_1, \dots, G_n, G_1, \dots, G_n} (e \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F, G_1, \dots, G_n} (\rightarrow c)}{C_1, \dots, C_m, E \supset F, E \rightarrow F, G_1, \dots, G_n} (c \rightarrow)}{C_1, \dots, C_m, E \supset F \rightarrow E \supset F, G_1, \dots, G_n} (\rightarrow \supset)}{C_1, \dots, C_m, E \supset F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E \supset F} (\rightarrow e)$$

$D : E * F$ のとき

$$\frac{\frac{C_1, \dots, C_m, E \rightarrow E \quad F \rightarrow F, G_1, \dots, G_n}{C_1, \dots, C_m, E, F \rightarrow E * F, G_1, \dots, G_n} (\rightarrow *)}{\frac{C_1, \dots, C_m, E, F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E * F}{C_1, \dots, C_m, E * F \rightarrow G_1, \dots, G_n, E * F} (\rightarrow e)} (* \rightarrow)$$

従って

$$C_1, \dots, C_m, D \rightarrow G_1, \dots, G_n, D$$

となり、D を atomic に制限できることが分かる。以上の様にして得られた証明図は LK^* の $\Sigma \rightarrow \Theta$ に到る証明図になっている。よって

$$LK \vdash \Sigma \rightarrow \Theta \Rightarrow LK^* \vdash \Sigma \rightarrow \Theta$$

が示された。 □

5.3.2 体系 LK^* の CFLec への埋め込み

次に LK^* から CFLec への埋め込みについて考える。

Lemma 5.4

Σ, Θ に現われる *propositional symbol* はすべて $\mathcal{P}$ に属するものとする。このとき、

$$LK^* \vdash \Sigma \rightarrow \Theta \Rightarrow CFLec \vdash |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

Lemma 5.4 の証明をする前に次の Lemma 5.5 を証明しておく。

Lemma 5.5

$P \in \mathcal{P}$ としたとき、

1. $CFLec \vdash \overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, P \rightarrow \overbrace{f, \dots, f}^{n \text{ 個}}, P$
2. $CFLec \vdash \overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, f \rightarrow \overbrace{f, \dots, f}^{n \text{ 個}}$

Proof.

1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{P \rightarrow P}{P \supset P} \quad \frac{P \rightarrow P}{P \rightarrow P}}{P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \quad \frac{P \rightarrow P}{P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \\
 \frac{P \supset P, P \rightarrow P}{P \supset P, P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \quad \frac{P \rightarrow P}{P \supset P, P \supset P, P \supset P, P \rightarrow P} (\supset \rightarrow) \\
 \vdots (\supset \rightarrow) \\
 \frac{P \supset P, \dots, P \supset P, P \rightarrow P}{T, \dots, T, P \rightarrow P} (\wedge 1 \rightarrow, m \text{ 回}) \\
 \frac{T, \dots, T, P \rightarrow P}{\overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, P \rightarrow \overbrace{f, \dots, f}^{n \text{ 個}}, P} (fw, n)
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{c}
\frac{f \rightarrow f \quad f \rightarrow}{f \supset f, f \rightarrow} (\supset \rightarrow) \quad \frac{f \rightarrow f}{f \rightarrow f} (\supset \rightarrow) \\
\frac{\frac{f \supset f, f \supset f, f \rightarrow f}{f \supset f, f \supset f, f \supset f, f \rightarrow f} (\supset \rightarrow) \quad f \rightarrow f (\supset \rightarrow)}{f \supset f, f \supset f, f \supset f, f \supset f, f \rightarrow f} (\supset \rightarrow) \\
\vdots (\supset \rightarrow) \\
\frac{f \supset f, \dots, f \supset f, f \rightarrow f, \dots, f}{T, \dots, T, f \rightarrow f, \dots, f} (\wedge 2 \rightarrow, m \text{ 回}) \\
\frac{T, \dots, T, f \rightarrow f, \dots, f}{\underbrace{(T, \dots, T)}_{m \text{ 個}} f \rightarrow \underbrace{f, \dots, f}_{n \text{ 個}}} (fw)
\end{array}$$

一番下の推論規則は式 $T, \dots, T, f \rightarrow f, \dots, f$ の矢印の右側の f の個数が n 個になるように適用する。

□

Proof. (Lemma 5.4)

証明の長さに関する帰納法によって証明する。

1. $\Sigma \rightarrow \Theta$ が LK^* の *initial sequent* のとき
 - i) $C_1, \dots, C_m, P \rightarrow G_1, \dots, G_n, P$ のとき

Lemma 5.5 の 1 より

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, P \rightarrow \overbrace{f, \dots, f}^{n \text{ 個}}, P}{T, \dots, T, P \rightarrow f, \dots, f, P \vee f} (\vee 1 \rightarrow)}{T, \dots, T, P \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f, P \vee f} (\vee 2, \rightarrow, n \text{ 回}) \\
\frac{T, \dots, T, P \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f, P \vee f}{T, \dots, T, P \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f, P \vee f} (\wedge 1 \rightarrow) \\
\frac{T, \dots, T, P \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f, P \vee f}{C_1' \wedge T, \dots, C_m' \wedge T, P \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f, P \vee f} (\wedge 2 \rightarrow, m \text{ 回})
\end{array}$$

ここで、 $|C_i|^-$ は $C_i' \wedge T$ 、 $|P|^-$ は $P \wedge T$ であり、 $|G_j|^+$ は $G_j' \vee f$ 、 $|P|^+$ は $P \vee f$ であるとする、

$$\vdash |C_1|^- , \dots , |C_m|^- , |P|^- \rightarrow |G_1|^+ \cdots |G_n|^+ , |P|^+$$

- ii) $C_1, \dots, C_m, f \rightarrow G_1, \dots, G_n$ のとき

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overbrace{T, \dots, T}^{m \text{ 個}}, f \rightarrow \overbrace{f, \dots, f}^{n \text{ 個}}}{T, \dots, T, f \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f} (\vee 2 \rightarrow, n \text{ 回})}{T, \dots, T, f \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f} (\wedge 1 \rightarrow) \\
\frac{T, \dots, T, f \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f}{C_1' \wedge T, \dots, C_m' \wedge T, f \wedge T \rightarrow G_1' \vee f, \dots, G_n' \vee f} (\wedge 2 \rightarrow, m \text{ 回})
\end{array}$$

ここで、 $|C_i|^-$ は $C_i' \wedge T$ で、 $|f|^-$ は $f \wedge T$ であり、 $|G_j|^+$ は $G_j' \vee f$ であるとす
ると、

$$\vdash |C_1|^-, \dots, |C_m|^-, |f|^- \rightarrow |G_1|^+, \dots, |G_n|^+$$

2. structural rule のとき

(*exchange* $\rightarrow$) のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (e \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{| \Gamma |^-, | A |^-, | B |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+}{| \Gamma |^-, | B |^-, | A |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+} (e \rightarrow)$$

従って、 $\vdash | \Gamma |^-, | B |^-, | A |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+$

($\rightarrow$ *exchange*) のとき

induction hypothesis から、(*exchange* $\rightarrow$) のときと同様に示すことができる。

(*contraction* $\rightarrow$) のとき

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, A, \Sigma \rightarrow \Delta} (c \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{| \Gamma |^-, | A |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+}{| \Gamma |^-, | A |^-, | A |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+} (c \rightarrow)$$

従って、 $\vdash | \Gamma |^-, | A |^-, | A |^-, | \Sigma |^- \rightarrow | \Delta |^+$

($\rightarrow$ *contraction*) のとき

induction hypothesis から、(*contraction* $\rightarrow$) のときと同様に示すことができる。

3. logical rule のとき

($\rightarrow \vee 1$) のとき

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Lambda, D, \Theta}{\Sigma \rightarrow \Lambda, D \vee E, \Theta} (\rightarrow \vee 1)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{|\Sigma|^- \rightarrow |D|^+, |\Theta|^+}{|\Sigma|^- \rightarrow |D|^+ \vee |E|^+, |\Theta|^+} (\rightarrow \vee 1)}{|\Sigma|^- \rightarrow (|D|^+ \vee |E|^+) \vee f, |\Theta|^+} (\rightarrow \vee 1)$$

$(|D|^+ \vee |E|^+) \vee f$ は $|D \vee E|^+$ であるから

$$\vdash |\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, |D \vee E|^+, |\Theta|^+$$

$(\rightarrow \vee 2)$ のとき

$(\rightarrow \vee 1)$ のときと同様に示すことができる。

$(\vee \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Delta, D, \Sigma \rightarrow \Theta \quad \Delta, E, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Delta, D \vee E, \Sigma \rightarrow \Theta} (\vee \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{|\Sigma|^-, |D|^-, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+ \quad |\Sigma|^-, |E|^-, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+}{|\Sigma|^-, |D|^- \vee |E|^- \vee T, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+} (\vee \rightarrow)}{|\Sigma|^-, (|D|^- \vee |E|^-) \wedge T, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(|D|^- \vee |E|^-) \wedge T$ は $|D \vee E|^-$ であることから

$$\vdash |\Sigma|^-, |D \vee E|^-, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

$(\rightarrow \wedge)$ のとき

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Lambda, D, \Theta \quad \Sigma \rightarrow \Lambda, E, \Theta}{\Sigma \rightarrow \Lambda, D \wedge E, \Theta} (\rightarrow \wedge)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{|\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, |D|^+, |\Theta|^+ \quad |\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, |E|^+, |\Theta|^+}{|\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, |D|^+ \wedge |E|^+, |\Theta|^+} (\rightarrow \wedge)}{|\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, (|D|^+ \wedge |E|^+) \vee f, |\Theta|^+} (\rightarrow \vee 1)$$

$(|D|^+ \wedge |E|^+) \vee f$ は $|D \wedge E|^+$ であることから

$$\vdash |\Sigma|^- \rightarrow |\Lambda|^+, |D \wedge E|^+, |\Theta|^+$$

($\wedge 1 \rightarrow$) のとき

$$\frac{\Delta, D, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Delta, D \wedge E, \Sigma \rightarrow \Theta} (\wedge 1 \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\frac{|\Sigma|^{-}, |D|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}}{|\Sigma|^{-}, |D|^{-} \wedge |E|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}} (\wedge 1 \rightarrow)}{|\Delta|^{-}, (|D|^{-} \wedge |E|^{-}) \wedge T, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}} (\wedge 1 \rightarrow)}$$

($|D|^{-} \wedge |E|^{-}) \wedge T$ は $|D \wedge E|^{-}$ であることから

$$\vdash |\Delta|^{-}, |D \wedge E|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}$$

($\wedge 2 \rightarrow$) のとき

($\wedge 1 \rightarrow$) のときと同様に示すことができる。

($\rightarrow \supset$) のとき

$$\frac{\Sigma, D \rightarrow E, \Theta}{\Sigma \rightarrow D \supset E, \Theta} (\rightarrow \supset)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\frac{|\Sigma|^{-}, |D|^{-} \rightarrow |E|^{+}, |\Theta|^{+}}{|\Sigma|^{-} \rightarrow |D|^{-} \supset |E|^{+}, |\Theta|^{+}} (\rightarrow \supset)}{|\Sigma|^{-} \rightarrow (|D|^{-} \supset |E|^{+}) \vee f, |\Theta|^{+}} (\rightarrow \vee 1)}$$

($|D|^{-} \supset |E|^{+}) \vee f$ は $|D \supset E|^{+}$ であることから

$$\vdash |\Sigma|^{-} \rightarrow |D \supset E|^{+}, |\Theta|^{+}$$

($\supset \rightarrow$) のとき

$$\frac{\Delta \rightarrow D, \Theta \quad \Pi, E, \Sigma \rightarrow \Lambda}{\Pi, D \supset E, \Delta, \Sigma \rightarrow \Theta, \Lambda} (\supset \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{\frac{|\Sigma|^{-} \rightarrow |D|^{+} \quad |\Pi|^{-}, |E|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}}{|\Pi|^{-}, |D|^{+} \supset |E|^{-}, |\Sigma|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}} (\supset \rightarrow)}{|\Pi|^{-}, (|D|^{+} \supset |E|^{-}) \wedge T, |\Sigma|^{-}, |\Sigma|^{-} \rightarrow |\Theta|^{+}} (\wedge 1 \rightarrow)}$$

$(|D|^+ \supset |E|^-) \wedge T$ は $|D \supset E|^-$ であることから

$$\vdash |\Pi|^- , |D \supset E|^- , |\Delta|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

$(\rightarrow *)$ のとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow D, \Lambda \quad \Sigma \rightarrow E, \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow D * E, \Lambda, \Theta} (\rightarrow *)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{|\Gamma|^- \rightarrow |D|^+, |\Lambda|^+ \quad |\Sigma|^- \rightarrow |E|^+, |\Theta|^+}{|\Gamma|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |D|^+ * |E|^+, |\Lambda|^+, |\Theta|^+} (\rightarrow *)}{|\Gamma|^- , |\Sigma|^- \rightarrow (|D|^+ * |E|^+) \vee f, |\Lambda|^+, |\Theta|^+} (\rightarrow \vee 1)$$

$(|D|^+ * |E|^+) \vee f$ は $|D * E|^+$ であることから

$$\vdash |\Gamma|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |D * E|^+, |\Lambda|^+, |\Theta|^+$$

$(* \rightarrow)$ のとき

$$\frac{\Gamma, D, E, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Gamma, D * E, \Sigma \rightarrow \Lambda, \Theta} (* \rightarrow)$$

induction hypothesis より

$$\frac{\frac{|\Gamma|^- , |D|^- , |E|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+}{|\Gamma|^- , |D|^- * |E|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+} (* \rightarrow)}{|\Gamma|^- , (|D|^- * |E|^-) \wedge T, |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+} (\wedge 1 \rightarrow)$$

$(|D|^- * |E|^-) \wedge T$ は $|D * E|^-$ であることから

$$\vdash |\Gamma|^- , |D * E|^- , |\Sigma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

よって Lemma 5.4 の証明ができた。

□

Lemma 5.3、Lemma 5.4 より、Theorem 5.1(左辺から右辺) が成り立つ。

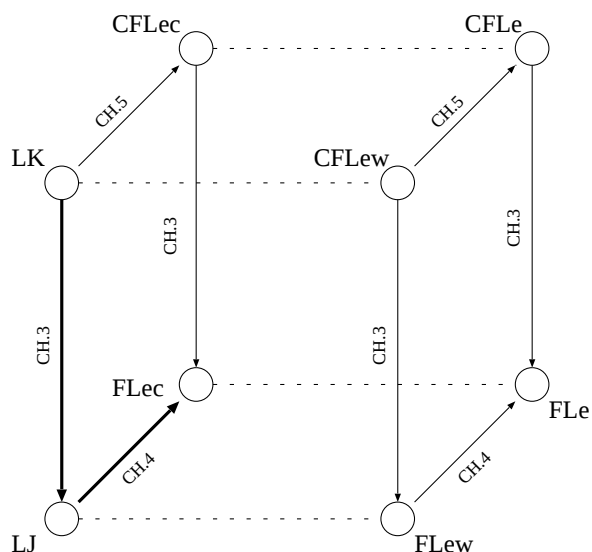
また、上と同じような方法で $CFLew$ と $CFLe$ において次のようなことがいえる。

Theorem 5.6

$$CFLew \vdash \Gamma \rightarrow \Theta \Leftrightarrow CFLe \vdash |\Gamma|^- \rightarrow |\Theta|^+$$

第 6 章

結論



部分構造論理における論理間に対する証明可能性についての関係を先のような図で表わした。立方体の上面はいわゆる C がつく部分構造論理で、下面は C がつかない部分構造論理である。図の矢印 $\longrightarrow$ は埋め込みを表わしており、例えば $A \longrightarrow B$ は論理 A から論理 B に埋め込めることを表わしている。

Kolmogorov-style translation を使うと $CFLex$ と $FLe(x$ には c または w または空の添字が入る) の間で埋め込み関係が成り立つことを示した。桐山-小野型の translation では constant f を用いないと、 $FLew$ から FLe への埋め込まれ、constant を用いると、 $LK(CFLecw)$ から $CFLec$ 及び $CFLew$ から $CFLec$ へ埋め込まれるを示した。

桐山-小野の論文では述語論理の $FLec$ の決定不能を示すために述語論理の直観主義論理から述語論理の $FLec$ への埋め込みを示している。今回の埋め込みの結果を使って、決定可能性などのさまざまな論理的性質を表わすための考察を行いたい。

謝辞

本研究を行うにあたり熱心に御指導下さいました小野寛晰教授に深く感謝致します。また、貴重なご意見を下さいました石原哉助教授、浜野正浩助手、Tomasz Kowalski 助手ならびに小野研究室、石原研究室の皆様に感謝致します。

参考文献

- [1] H. Ono, Proof-theoretic methods in nonclassical logic — an introduction, *Theories of Types and Proofs*, edited by M. Takahashi, M. Okada and M. Dezani-Ciancaglini, MSJ Memoirs 2, Mathematical Society of Japan, 1998, pp.207-254.
- [2] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.
- [3] E. Kiriya and H. Ono, The contraction rule and decision problems for logics without structural rules, *Studia Logica* 50 (1991), pp.299-319.
- [4] G. Takeuti, *Proof Theory*, 2nd edition, North-Holland, 1987.
- [5] A.S.Troelstra, Lecture on linear logic, CSLI Lecture Note 29, Center for Study of Language and information Leland Stanford Junior University, 1992.