Title	A study of left residuated lattices and logics without contraction and exchange rules
Author(s)	金子, 慎一郎
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1564
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰, 情報科学研究科, 修士

A study of left residuated lattices and logics without contraction and exchange rules

金子 慎一郎 (010033)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2002 年 2 月 15 日

キーワード: 部分構造論理, 束, residuated lattice, exchange rule, contraction rule, variety.

1 序論

近年、部分構造論理の研究が盛んに行われいる。古典論理 (**Cl**) や直観主義論理 (**Int**) は、exchange rule、contraction rule、weakening rule の三つの構造規則をもっている。直観主義論理 (**Int**) からいくつかまたはすべての構造規則を除いた論理体系のことを部分構造論理と呼ぶ。部分構造論理の例として Lambek calculus、線形論理 (linear logic)、BCK 論理などがあげられる。Lambek calculus は構造規則を持っていず、線形論理は、contraction rule と weakening rule を持っていず、BCK 論理は、contraction rule を持っていない。このような論理体系において、どのような論理的性質を持ち、論理的性質を持たないかということを研究することは、除いた構造規則がどのように論理体系に影響を与えるのかを探ることができる。また、代数的意味を与えることで、より一般的な視点から部分構造論理を考察することができる。これにより、部分構造論理の間の関係も研究することができる。なお、本研究においては、contraction rule と exchange rule を除いた論理体系 ($\mathbf{FL_w}$) を中心に扱う。

Residuated lattice は、1930 年代のころから研究が行われてきた。しかし、最近の研究により、Residuated lattice は部分構造論理の代数的意味を与えることがわかった。Contraction のない論理 $\mathbf{FL_{ew}}$ の代数的意味付け (可換性 residuated lattice) の研究は、盛んになされている ([1]、[3])。しかし、$\mathbf{FL_w}$ の代数的意味論に対する研究は、まだ、あまり行われていない。なお、構造規則の exchange rule は、代数の可換性と対応する。よって、$\mathbf{FL_w}$ に対応する代数では、可換性が必ずしも成り立たない。

この論文では、まず初めに $\mathbf{FL_w}$ とその簡略したものである $\mathbf{FL'_w}$ を紹介する。次に $\mathbf{FL'_w}$ の代数的意味付けである left residuated lattice を導入し、その基礎的な性質を調べる。最後に不等式 C_n を用いて、left residuated lattice のクラス分けを行う。

2 Contraction rule 及び exchange rule を持たない論理 $\mathbf{FL_w}$

$\mathbf{FL_w}$ は、直観主義論理から contraction rule と exchange rule を除いた論理体系である。$\mathbf{FL_w}$ には、exchange rule がないので implications を二つ持つ。本研究においては、議論を簡略にするために implications をひとつしか持たない体系 $\mathbf{FL'_w}$ を扱う。

3 Left residuated lattice

Boolean 代数が古典論理の代数的意味付けであるのと同様に、Left residuated lattice は $\mathbf{FL'_w}$ の代数的意味付けとなる。前に述べたように、モノイド演算子が、必ずしも可換でないことが Left residuated lattice の特徴である。この節では、まず、Left residuated lattice とその filter を定義し、その後に、subdirectly irreducible left residuated lattice と simple left residuated lattice を紹介する。

まず初めに Left residuated lattice を定義する。代数 $\mathbf{M} = \langle M, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ が、Left residuated lattice であるとは、以下の条件を満たすときである。

1. $\langle M, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ is a bounded lattice with the greatest element 1 and the least 0,
2. $\langle M, \cdot, 1\rangle$ is a monoid,
3. $c \cdot a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \to b$ (left-residuation),
4. $w \cdot (x \vee y) \cdot z = (w \cdot x \cdot z) \vee (w \cdot y \cdot z)$.

次に、left residuated lattice の filter を定義する。空でない left residuated lattice $\mathbf{M}$ の部分集合 F が、filter であるとは、任意の $a, b \in M$ において以下の条件を満たすときである。

1. $1 \in F$,
2. $a, a \to b \in F \quad imply \quad b \in F$,
3. $a \in F \quad implies \quad (a \to b) \to b \in F$.

ここで定義された filter を用いると、$\mathbf{M}$ の filter 全体の集合と $\mathbf{M}$ の congruence 全体の集合との間に lattice isomorphic な関係があることが示される。

subdirectly irreducible left residuated lattice と simple left residuated lattice を紹介する前に、まず、次の A_m^S を定義する。

M の部分集合 S において、

$$
\begin{aligned}
D_0^S &= S \\
A_0^S &= \{w_1 \cdots w_k | w_i \in D_0^s, k \geq 1\} \\
D_1^S &= \left\{(x \to y) \to y | x \in A_0^S, y \in M\right\} \\
A_1^s &= \{w_1 \cdots w_k | w_i \in D_1^s, k \geq 1\} \\
&\vdots \\
D_{n+1}^S &= \{(x \to y) \to y | x \in A_n^s, y \in M\} \\
A_{n+1}^S &= \left\{w_1 \cdots w_k | w_i \in D_{n+1}^S, k \geq 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Left residuated lattice の filter と A_m^S を用いて、subdirectly irreducible left residuated lattice を次のように特徴づけることができる。

Left residuated lattice $\mathbf{M}$ が subdirectly irreducible であるときの必要十分条件は、次のような条件を満たす c が存在するときである。
任意の $x(< 1)$ に対し、$z \leq c$ を満たす z $(z \in A_m^x\ (m \geq 0))$ が存在する。

Simple left residuated lattice は次のように特徴づけることができる。

Left residuated lattice $\mathbf{M}$ が simple であるときの必要十分条件は、任意の $x(< 1)$ に対して $0 \in A_m^x$ となるような $m \geq 0$ が存在する。

4 C_n を加えた left residuated lattice

不等式 C_n は次のように書ける ([5])。

任意の $x, y \in M,\ n \geq 1$ において、

$$y^n \leq (y \to x) \to x \quad (C_n).$$

Left residuated lattice に C_n 加えた lattice の filter は、可換の residuated lattice の filter と同じであることが示される。よって、C_n を加えた subdirectly irreducible left residuated lattice と C_n を加えた simple left residuated lattice は、可換の residuated lattice のものと同じであることが証明できる (可換の residuated lattice の性質については [1], [3] を参照)。

次に、C_n を加えた left residuated lattice の variety を $\mathcal{NC}_n$ と書く。このとき、$\mathcal{NC}_n \subsetneq \mathcal{NC}_{n+1}$ を示すことができる。よって、$\{\mathcal{NC}_n\}_n$ は無限の上昇鎖をなす。

5 結論

本研究において、left residuated lattices の filter を用いて、subdirectly irreducible left residuated lattice と simple left residuated lattice を特徴づけることができた。C_n を付け加えた left residuated lattice においてもそれらを特徴づけることができた。また、left residuated lattice を C_n を用いてクラス分けすることができた。

参考文献

[1] Kowalski,T. and Ono,H. Residuated lattices: an algebraic glimpse at logics without contraction. (preliminary report), 2001.

[2] Ono,H and Komori,Y. Logics without the contraction rule. *Journal of Symbolic Logic 50* (1985) pp.169-201.

[3] Ono,H. Logic without contraction rule and residuated lattice I. To appear.

[4] Raftery,J.G. and Van Alten,C.J. On the algebra of noncommutative residuation: Polrims and left residuation algebras. *Math.Japonica 46*, No.1(1997), pp.29-46.

[5] Van Alten,C.J. and Raftery,J.G. On quasivariety semantics of fragments of intuitionistic propositional logic without exchange and contraction rules. *Reports on mathematical logic 31*, (1997), pp.3-55.