Title	動的論理に関する研究
Author(s)	町田，拓
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1575
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

動的論理に関する研究

町田 拓

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

平成 14 年 2 月 15 日

キーワード: 動的論理、繰り返し演算子、有限モデル性、cut 除去定理、Craig の補間定理、完全性.

1 序論

様相論理は古典命題論理では十分に説明することができない日常的な推論を扱うため、「必然」、「可能」といった様相概念を表す演算子を導入し、その表現力を増したものである。この様相演算子に対し様々な解釈を与えることにより、例えば時間を扱う時間論理、法律に関連した義務論理といった論理体系が得られる。

動的論理（dynamic logic）は、プログラム毎にその実行状態を表す様相演算子を導入した体系で、手続き型プログラム言語の仕様の記述やプログラムの正当性の検証のために用いられる。

計算機とプログラムに関する論理の研究は 1960 年代後半に Thiele と Engeler により始められた。動的論理は、Salwicki による algorithmic logic、Constable による monadic programming logic 等を経て、1976 年に Pratt により導入された比較的新しい研究分野である。動的論理を基礎とするいくつかの体系では未だ解決されていない重要な問題が存在し、それと同時に動的論理のソフトウェア科学への応用可能性の観点から、論理学と計算機科学の両面からの研究が盛んに行われている。

動的論理においては、繰り返し演算子 * の存在が論理体系を複雑にする。未解決問題の多くはこの繰り返し演算子に関わるものである。そのため、1996 年に命題動的論理の繰り返し演算子 * の性質を少し弱め S4 の $\Box$ の性質を持つ演算子に置き換えた論理 $\mathcal{A}$ が導入された [1]。本論文ではこの論理 $\mathcal{A}$ を中心に議論を行う。また対応する sequent 計算の体系の導入し、あわせてこちらの体系についても考察を進める。

2　動的論理

まず動的論理において使用される演算子について説明する。論理式に関するものとして $\wedge, \vee, \supset, \neg$、プログラムに関するものとして $\cup$（非決定的選択）、$;$（連続的合成）、*（繰り返し）、論理式とプログラム双方に関するものとして $[\quad]$（必然）、$?$（テスト）がある。これらの演算子を使うことにより、主なプログラムは動的論理において以下のように定義できる。

$$
\begin{aligned}
\text{if } A_1 \to \alpha_1 \mid \cdots \mid A_n \to \alpha_n \text{ fi} &\stackrel{\text{def}}{=} A_1?;\alpha_1 \cup \cdots \cup A_n?;\alpha_n \\
\text{do } A_1 \to \alpha_1 \mid \cdots \mid A_n \to \alpha_n \text{ od} &\stackrel{\text{def}}{=} (A_1?;\alpha_1 \cup \cdots \cup A_n?;\alpha_n)^*;(\neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n)? \\
\text{if } A \text{ then } \alpha \text{ else} \beta &\stackrel{\text{def}}{=} \text{if } A \to \alpha \mid \neg A \to \beta \text{ fi} \\
&= A?;\alpha \cup \neg A?;\beta \\
\text{while } A \text{ do } \alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \text{do } A \to \alpha \text{ od} \\
&= (A?;\alpha)^*;\neg A?
\end{aligned}
$$

また、動的論理の公理から以下の式が導かれる。

- $[\alpha^*]A \supset A$
- $[\alpha^*]A \supset [\alpha]A$
- $[\alpha^*]A \supset [\alpha^*][\alpha^*]A$

これらの結果より、繰り返し演算子 * は反射的、推移的性質を持つことが分かる。これは後に述べる論理 $\mathcal{A}$ において重要な意味を持つ。

3　論理 $\mathcal{A}$ およびその体系 MA

論理 $\mathcal{A}$ は、動的論理の繰り返し演算子 * を様相論理 S4の 必然演算子 $\Box$ に置き換えることによってその複雑さを取り除いた体系で、文献 [1] により導入された、本論文において議論の中心となる体系である。以下では議論を簡単にするため、基本プログラムを α 一つに固定する。論理 $\mathcal{A}$ において $\Box$ と $[\alpha]$ の関係を示す公理として、$\Box A \supset [\alpha]A$ がある。同文献では命題論理の tableau に以下の規則を付け加えた論理 $\mathcal{A}$ の tableau system が定義され、tableau に関する完全性が示されている。

- $\mathcal{V}^\Box$ 規則
$$\frac{\mathcal{V}^\Box}{\mathcal{V}^\Box_0}$$
- $\pi^\Box$ 規則
$$\dfrac{S, \pi^\Box}{\dfrac{}{\begin{array}{c} S^\Box \\ \pi^\Box \end{array}}}$$
- π^α 規則
$$\dfrac{S, \pi^\alpha}{\dfrac{}{\begin{array}{c} S^\Box \\ S^\alpha \\ \pi^\alpha_0 \end{array}}}$$

ただし、$\pi^\Box$ および π^α 規則の $=$ は、これらの規則を適用することにより世界が変わることを意味している。

この論文では論理 $\mathcal{A}$ に対するゲンツェンの sequent 計算の体系 MA を導入する。この体系 MA は、命題論理の sequent 計算の体系 LK に $\mathcal{A}$-tableau system の各規則に対応する以下の推論規則を付け加えた体系である。

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta} \ (\mathcal{V}^{\Box})$$

$$\frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A} \ (\pi^{\Box})$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Sigma \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]A} \ (\pi^{\alpha})$$

この体系 MA において、本論文では cut 除去定理および Craig の補間定理の証明をあたえた。

4 意味論的アプローチ

文献 [1] において、体系 $\mathcal{A}$ の tableau による完全性が示されているが、その証明法は consistency property を利用するため複雑なものになっている。本論文ではクリプキによるセマンティクスを用いてフレームに関する完全性を、カノニカルなクリプキモデルを構成することにより示した。これにより $\mathcal{A}$ tableau system と sequent 計算の体系 MA の同等性も導くことができる。また濾過法により有限モデル性を示し、その応用として決定可能性の証明をあたえた。

5 結論

以上に述べてきたように、本研究では、繰り返し演算子を必然演算子に置き換えた論理 $\mathcal{A}$ を中心に議論を進め、同論理の完全性、有限モデル性を示した。また、対応する sequent 計算の体系 MA を導入し、cut 除去定理、Craig の補間定理を導いた。

今後の課題としては、動的論理に対する代数的アプローチや Mu-calculus によるアプローチが考えられる。

参考文献

[1] M. Castilho and A. Herzig, An alternative to the iteration operator of propositional dynamic logic, Technical report, IRIT - Universite Paul Sabatier, 1996.

[2] M. Fitting. Proof methods for modal and intuitionistic logics, Reidel Publishing Company, 1983

[3] R. Goldblatt, Logics of Time and Computation, Center for the study of language and information, 1992.

[4] D. Harel, D. Kozen and J. Tiuryn, Dynamic Logic, The MIT Press, 2000.

[5] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 情報科学セミナー, 日本評論社, 1994.