| | |
|---|---|
| Title | 動的論理に関する研究 |
| Author(s) | 町田，拓 |
| Citation | |
| Issue Date | 2002-03 |
| Type | Thesis or Dissertation |
| Text version | author |
| URL | http://hdl.handle.net/10119/1575 |
| Rights | |
| Description | Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士 |

修 士 論 文

# 動的論理に関する研究

指導教官　小野 寛晰 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

町田 拓

修了年月:平成 14 年 3 月

# 目次

# 第 1 章

# はじめに

## 1.1 背景

様相論理は古典命題論理では十分に説明することができない日常的な推論を扱うため、「必然」、「可能」といった様相概念を表す演算子を導入し、その表現力を増したものであり、この様相演算子に対しての解釈を変えることにより、様々な論理体系が構築できる。

動的論理（dynamic logic）は、プログラム毎にその実行状態を表す様相演算子を導入した体系で、手続き型プログラム言語の仕様の記述やプログラムの正当性の検証のために用いられる。

計算機とプログラムに関する論理の研究は 1960 年代後半に Thiele と Engeler により始められた。動的論理は、Salwicki による algorithmic logic、Constable による monadic programming logic 等を経て、1976 年に Pratt により導入された比較的新しい研究分野である。動的論理を基礎とするいくつかの体系では未だ解決されていない重要な問題が存在し、それと同時に動的論理のソフトウェア科学への応用可能性の観点から、論理学と計算機科学の両面からの研究が盛んに行われている。

動的論理においては、繰り返し演算子 $^*$ の存在が論理体系を複雑にする。未解決問題の多くはこの繰り返し演算子に関わるものである。そのため、1996 年に命題動的論理の繰り返し演算子 $^*$ の性質を少し弱め S4 の $\Box$ の性質を持つ演算子に置き換えた論理 $\mathcal{A}$ が導入された [1]。本研究では、この論理 $\mathcal{A}$ を中心に考察を進めていく。また対応する sequent 計算の体系の導入し、あわせてこちらの体系についても考察を進める。

## 1.2 本論文の構成

本論文は次のような構成を持つ。第 2 章で動的論理、繰り返し演算子を置き換えた論理 $\mathcal{A}$ およびその sequent 計算の体系 $MA$ の基本的な概念について述べる。第 3 章では、[1] で展開されている $\mathcal{A}$ tableau system の完全性の証明の紹介をする。第 4 章では、論理 $\mathcal{A}$ の完全性のカノニカルモデルを用いた証明を与える。続いて第 5 章で体系 $MA$ の証明論的考察を行い、cut 除去定理、補間定理の証明を示す。最後に第 6 章で本研究のまとめを行う。

# 第 2 章

# 動的論理およびその周辺の体系

本章では動的論理および本研究で中心となる論理 $\mathcal{A}$ についての基本的な概念の説明を行う。

## 2.1 動的論理

動的論理は様相論理の一種である。様相論理は命題論理を拡張したもので「必然」、「可能」といった様相概念を表す演算子を導入してその表現力を増したものである。この様相演算子に対しての解釈により、時間論理、認識論理といった様々な論理体系がある。動的論理では、この様相演算子に対してプログラムの解釈を与えたものである。例えば、次のようなプログラムを考える。

$$x := 0;\ \ \text{while}\ \ x^2 < y\ \ \text{do}\ \ x := x + 1;$$

これは、

1. $x$ に 0 を代入する
2. $x^2$ の値が $y$ の値よりも小さいかを判定する
3. 2 が成立する限り $x$ に 1 を加える

というプログラムである。動的論理において、上の例にある $x := 0$ および $x := x + 1$ 等のようなコンピュータに仕事をさせる命令を**プログラム**と呼び、$x^* < y$ のようなプログラム中における変数の値などの状態を表すものを**論理式**と呼ぶ。ここで、$x := 0$ というプログラムを $\alpha$、$x := x+1$ というプログラムを $\beta$、$x^* < y$ という論理式を $A$ とおく。すると、上

のプログラムは ;（連続的合成）、 $^*$（繰り返し）、 ?（テスト）の演算子を用いることにより、動的論理において

$$\alpha; (A?; \beta)^*; \neg A?$$

と表すことができる。上の 3 つの演算子に更に $\cup$（非決定的選択）を加えることにより、動的論理においてどのような決定手続き型プログラムも作ることができる。

以下で基本的な動的論理である命題動的論理について紹介する。

**定義 2.1** 動的論理において使用される演算子は、以下のものである。

- 論理式に関する演算子
  - (a) $\wedge, \vee, \neg, \supset$ 論理結合子
- プログラムに関する演算子
  - (b) ; 合成演算子
  - (c) $\cup$ 選択演算子
  - (d) $^*$ 繰り返し演算子
- 論理式、プログラム双方に関する演算子
  - (e) [ ] 必然演算子
  - (f) ? テスト演算子

以下では、論理式すべての集合を $\Phi$、命題変数すべての集合を $\Phi_0$、プログラムすべての集合を $\Pi$、基本プログラムすべての集合を $\Pi_0$ とする。

**定義 2.2 (動的論理の論理式およびプログラム)** 動的論理において、論理式とプログラムは以下のように帰納的に定義される。

- $\Phi_0 \subseteq \Phi$
- $\Pi_0 \subseteq \Pi$
- $A, B \in \Phi$ ならば、$A \wedge B, A \vee B, \neg A, A \supset B \in \Phi$
- $\alpha, \beta \in \Pi$ ならば、$\alpha; \beta, \alpha \cup \beta, \alpha^* \in \Pi$

- $\alpha \in \Pi, A \in \Phi$ ならば、$[\alpha]A \in \Phi$

- $A \in \Phi$ ならば、$A? \in \Pi$

論理式の定義は $[\alpha]A \in \Phi$ という条件によりプログラムに依存し、プログラムの定義は $A? \in \Pi$ という条件により論理式に依存する。したがって論理式とプログラムの定義は別々にすることができない。

$A \in \Phi, \alpha, \beta \in \Pi$ としたとき、主な合成プログラムおよび論理式の直観的な意味は以下のようになる。

- $[\alpha]A$：$\alpha$ をどのように実行してもそのあと $A$ が真

- $\alpha;\beta$：$\alpha$ の実行に続き $\beta$ を実行

- $\alpha \cup \beta$：$\alpha$ と $\beta$ のどちらか一方を非決定的に選択し実行

- $\alpha^*$：$\alpha$ を有限回（０回以上）実行

- $A?$：$A$ が真か偽かをテスト

可能性演算子 $\langle\ \rangle$ は、$\langle\alpha\rangle A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \neg[\alpha]\neg A$ と定義される。また、主なプログラムは動的論理の枠組みのなかで以下のように定義できる。

$$
\begin{aligned}
\text{skip} &\overset{\text{def}}{=} 1? \\
\text{fail} &\overset{\text{def}}{=} 0? \\
\text{if } A_1 \to \alpha_1 \mid \cdots \mid A_n \to \alpha_n \text{ fi} &\overset{\text{def}}{=} A_1?;\alpha_1 \cup \cdots \cup A_n?;\alpha_n \\
\text{do } A_1 \to \alpha_1 \mid \cdots \mid A_n \to \alpha_n \text{ od} &\overset{\text{def}}{=} (A_1?;\alpha_1 \cup \cdots \cup A_n?;\alpha_n)^*;(\neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n)? \\
\text{if } A \text{ then } \alpha \text{ else} \beta &\overset{\text{def}}{=} \text{if } A \to \alpha \mid \neg A \to \beta \text{ fi} \\
&= A?;\alpha \cup \neg A?;\beta \\
\text{while } A \text{ do } \alpha &\overset{\text{def}}{=} \text{do } A \to \alpha \text{ od} \\
&= (A?;\alpha)^*;\neg A? \\
\text{repeat } \alpha \text{ until } A &\overset{\text{def}}{=} \alpha;\text{while } \neg A \text{ do } \alpha \\
&= \alpha;(\neg A?;\alpha)^*;A?
\end{aligned}
$$

動的論理の公理としては、以下のものをとる。

**定義 2.3 (動的論理の公理系)** 動的論理の公理は次のものからなる。

1. 古典論理において恒真であるすべての論理式
2. $[\alpha](A \supset B) \supset ([\alpha]A \supset [\alpha]B)$
3. $[\alpha](A \wedge B) \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\alpha]B$
4. $[\alpha \cup \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\beta]A$
5. $[\alpha; \beta]A \leftrightarrow [\alpha][\beta]A$
6. $[A?]B \leftrightarrow (A \supset B)$
7. $A \wedge [\alpha][\alpha^*]A \leftrightarrow [\alpha^*]A$
8. $A \wedge [\alpha^*](A \supset [\alpha]A) \supset [\alpha^*]A$

また動的論理の推論規則は次のものからなる。

- $(M.P.)$
$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$
- $(GEN)$
$$\frac{A}{[\alpha]A}$$

**例** 動的論理において以下は証明可能である。

1. $[\alpha^*]A \supset [\alpha^*][\alpha^*]A$
2. $[\alpha^*]A \supset A$
3. $[\alpha^*]A \supset [\alpha]A$

証明

1. 定義 2.3 の公理 8 より $[\alpha^*]A \wedge [\alpha^*]([\alpha^*]A \supset [\alpha][\alpha^*]A) \supset [\alpha^*][\alpha^*]A$。また公理 7 より $[\alpha^*]([\alpha^*]A \supset [\alpha][\alpha^*]A)$。よって $(M.P.)$ より $[\alpha]A \supset [\alpha^*][\alpha^*]A$。
2. 定義 2.3 の公理 7 より明らか。
3. 2 より $[\alpha][\alpha^*] \supset [\alpha]A$。したがって定義 2.3 の公理 7 より $[\alpha^*]A \supset [\alpha][\alpha^*]A$。ゆえに $[\alpha^*]A \supset [\alpha]A$。

## 2.2 論理 $\mathcal{A}$

命題動的論理において、繰り返し演算子 $^*$ の存在は論理体系を複雑なものにする。例えば、ある論理式中に $[\alpha]A$ というかたちのものが現れたとする。定義 2.3 の $[\alpha^*]A \leftrightarrow A \wedge [\alpha][\alpha^*]A$ という公理より、$[\alpha^*]A$ は $A \wedge [\alpha][\alpha^*]A$ に置き換えられるが、$A \wedge [\alpha][\alpha^*]A$ の $[\alpha^*]A$ は、同公理より再び $A \wedge [\alpha][\alpha^*]A$ に置き換えられ、以下同じ事が続く。
このような繰り返し演算子 $^*$ が引き起こす複雑さを取り除き、しかも動的論理の持つ性質の多くを保持した体系として、文献 [1] において繰り返し演算子 $^*$ を様相論理 S4 の必然演算子 $\Box$ に置き換えた論理 $\mathcal{A}$ が導入されている。この論理 $\mathcal{A}$ は命題動的論理より弱い体系であるが、十分に強い表現力を持つ。$\Box$ は各基本プログラム毎にあるが、以下では議論を簡単にするため基本プログラムを $\alpha$ 1 つに固定する。本節では論理 $\mathcal{A}$ の基本的な説明を行う。

$\mathcal{A}$ におけるプログラムおよび論理式の定義は、$PDL$ のそれに、

$$A \in \Phi \text{ならば} \Box A \in \Phi$$

を加えたものである。

**定義 2.4 (論理 $\mathcal{A}$ の公理系)** 論理 $\mathcal{A}$ の公理は次のようなものからなる。

- $PL$：古典論理のすべてのトートロジー
- $K(\alpha)$：$[\alpha](A \supset B) \supset ([\alpha]A \supset [\alpha]B)$
- $K(\Box)$：$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$
- $T(\Box)$：$\Box A \supset A$
- $4(\Box)$：$\Box A \supset \Box\Box A$
- $I(\Box, \alpha)$：$\Box A \supset [\alpha]A$

また論理 $\mathcal{A}$ の推論規則は次のようなものからなる。

- $(M.P.)$
$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$
- $(RN_{\Box})$
$$\frac{A}{\Box A}$$

### 2.2.1 $\mathcal{A}$-tableau

以下では文献 [2] に従って $\mathcal{A}$-tableau system について説明する。まず、$\mathcal{A}$-tableau で使われる記号を定義する。

**定義 2.5 (付値付き論理式)** $A \in \Phi$ であるとき、

- $\mathrm{T}A$
- $\mathrm{F}A$

を付値付き論理式という。ただし、$\mathrm{T}A$ は $A$ が真であることを、$\mathrm{F}\ A$ は $A$ が偽であることを表す。

$A \in \Phi$ であるとき、

- $\mathcal{V}^{\Box}$ は $\mathrm{T}\Box A$ または $\mathrm{F}\Diamond A$ を意味する
- $\mathcal{V}^{\alpha}$ は $\mathrm{T}[\alpha]A$ または $\mathrm{F}\langle\alpha\rangle A$ を意味する
- $\pi^{\Box}$ は $\mathrm{T}\Diamond A$ または $\mathrm{F}\Box A$ を意味する
- $\pi^{\alpha}$ は $\mathrm{T}\langle\alpha\rangle A$ または $\mathrm{F}[\alpha]A$ を意味する

上記の $\mathcal{V}^{\Box}, \mathcal{V}^{\alpha}, \pi^{\Box}, \pi^{\alpha}$ から様相演算子を除いたものを、添字 $_0$ を付けることにより表す。例えば、$\mathcal{V}^{\Box} = \mathrm{T}\Box A$ ならば、$\mathcal{V}^{\Box}_0 = \mathrm{T}A$ である。また、$S$ を論理式の集合としたとき、

- $S^{\Box} = \{\mathcal{V}^{\Box} | \mathcal{V}^{\Box} \in S\}$
- $S^{\alpha} = \{\mathcal{V}^{\alpha}_0 | \mathcal{V}^{\alpha} \in S\}$

とする。以下に $\mathcal{A}$-tableau 規則をあげる。

- 論理結合子に関する規則

T$\wedge$ 規則

$$\frac{\mathrm{T}(A \wedge B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A \\ \mathrm{T}B\end{array}}$$

F$\wedge$ 規則

$$\frac{\mathrm{F}(A \wedge B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{F}B}$$

T∨ 規則

$$\frac{\mathrm{T}(A \vee B)}{\mathrm{T}A \mid \mathrm{T}B}$$

F∨ 規則

$$\frac{\mathrm{F}(A \vee B)}{\begin{array}{c}\mathrm{F}A \\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

T¬ 規則

$$\frac{\mathrm{T}(\neg A)}{\mathrm{F}A}$$

F¬ 規則

$$\frac{\mathrm{F}(\neg A)}{\mathrm{T}A}$$

T⊃ 規則

$$\frac{\mathrm{T}(A \supset B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{T}B}$$

F⊃ 規則

$$\frac{\mathrm{F}(A \supset B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A \\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

これら論理結合子に関する tableau 規則を適用したときの結果は、T∧、F∨ のような枝分かれしないものと、F∧、T⊃ のような枝分かれをするものに分けられる。前者の形をしたものを $\alpha$ 論理式、後者を $\beta$ 論理式とすると、それぞれに tableau 規則を適用した結果は、

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

の形に一般化できる。$\alpha$ 論理式には $\mathrm{T}(A \wedge B)$、$\mathrm{F}(A \vee B)$、$\mathrm{F}(A \supset B)$、$\mathrm{F}\neg A$ の 4 つがあり、それぞれに tableau 規則を適用した結果の $\alpha_1, \alpha_2$ は以下の表のようになる。

| $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{T}(A \wedge B)$ | $\mathrm{T}A$ | $\mathrm{T}B$ |
| $\mathrm{F}(A \vee B)$ | $\mathrm{F}A$ | $\mathrm{F}B$ |
| $\mathrm{F}(A \supset B)$ | $\mathrm{F}A$ | $\mathrm{T}B$ |
| $\mathrm{F}\neg A$ | $\mathrm{T}A$ | $\mathrm{T}A$ |

同様に、$\beta$ 論理式は $\mathrm{T}(A \vee B)$、$\mathrm{F}(A \wedge B)$、$\mathrm{T}(A \supset B)$、$\mathrm{T}\neg A$ であり、それぞれに tableau 規則を適用した結果の $\beta_1, \beta_2$ は以下の表のようになる。

| $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{T}(A \vee B)$ | $\mathrm{T}A$ | $\mathrm{T}B$ |
| $\mathrm{F}(A \wedge B)$ | $\mathrm{F}A$ | $\mathrm{F}B$ |
| $\mathrm{T}(A \supset B)$ | $\mathrm{T}A$ | $\mathrm{F}B$ |
| $\mathrm{T}\neg A$ | $\mathrm{F}A$ | $\mathrm{F}A$ |

以上は古典命題論理の tableau 体系の規則である。これに次の規則を加えたものが $\mathcal{A}$-tableau 体系である。

- $\mathcal{V}^{\Box}$ 規則
$$\frac{\mathcal{V}^{\Box}}{\mathcal{V}_0^{\Box}}$$
- $\pi^{\Box}$ 規則
$$\begin{array}{c} S, \pi^{\Box} \\ \hline\hline S^{\Box} \\ \pi^{\Box} \end{array}$$
- $\pi^{\alpha}$ 規則
$$\begin{array}{c} S, \pi^{\alpha} \\ \hline\hline S^{\Box} \\ S^{\alpha} \\ \pi_0^{\alpha} \end{array}$$

$\pi^{\Box}$ および $\pi^{\alpha}$ 規則の $=$ は、これらの規則を適用することにより世界が変わることを意味している。実際の tableau の証明においては $\downarrow$ によって世界が変わったことを示す。

**定義 2.6 (tableau)** $\mathcal{A}$-*tableau system* を以下のように定義する。論理式 $A$ を *tableau* により証明するとき、

1. *tableau* による証明は F$A$ から始まり、F$A$ は *tableau* である。
2. *tableau* に $\alpha$ 論理式が現れたとき、つまり
$$\begin{array}{c} S \\ \alpha \end{array}$$
のとき、これに $\alpha$ 規則を適用して得られた
$$\begin{array}{c} S \\ \alpha \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$
も *tableau* である。ただし、$S$ はこの *tableau* において $\alpha$ より上に現れるすべての集合とする。

3. *tableau* に $\beta$ 論理式が現れた場合、つまり

$$\begin{array}{c} S \\ \beta \end{array}$$

のとき、これに $\beta$ 規則を適用して得られた

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ & \beta & \\ / & & \backslash \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array}$$

も *tableau* である。ただし、$S$ はこの *tableau* において $\beta$ より上に現れるすべての集合とする。

4. *tableau* に $\mathcal{V}^{\Box}$ が現れた場合、つまり

$$\begin{array}{c} S \\ \mathcal{V}^{\Box} \end{array}$$

のとき、これに $\mathcal{V}^{\Box}$ 規則を適用して得られた

$$\begin{array}{c} S \\ \mathcal{V}^{\Box} \\ \mathcal{V}_0^{\Box} \end{array}$$

も *tableau* である。ただし、$S$ はこの *tableau* において $\mathcal{V}^{\Box}$ より上に現れるすべての集合とする。

5. *tableau* に $\pi^{\Box}$ が現れた場合、つまり

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^{\Box} \end{array}$$

のとき、これに $\pi^{\Box}$ 規則を適用して得られた

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^{\Box} \\ \downarrow \\ S^{\Box} \\ \pi_0^{\Box} \end{array}$$

も *tableau* である。ただし、$S$ はこの *tableau* において $\pi^{\Box}$ より上に現れるすべての集合とする。

*6.* *tableau* に $\pi^\alpha$ が現れた場合、つまり

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^\alpha \end{array}$$

のとき、これに $\pi^\alpha$ 規則を適用して得られた

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^\alpha \\ \downarrow \\ S^\Box \\ S^\alpha \\ \pi_0^\alpha \end{array}$$

も *tableau* である。ただし、$S$ はこの *tableau* において $\pi^\alpha$ より上に現れるすべての集合とする。

これらの手順で得られたもののみを論理式 $A$ の $\mathcal{A}$-*tableau* という。また、*tableau* の一番上にある F$A$ から一番下にある論理式までの一連の論理式の集まりを枝という。

**定義 2.7** 以下の条件を満たすとき、*tableau* の枝は閉じているという。

*1.* 枝上に任意の論理式 $A$ に対し、T$A$ および F$A$ が存在する

*2.* 枝上に T$\perp$ が存在する

*3.* 枝上に F$\top$ が存在する

**定義 2.8** ある論理式 $X$ に対して、F$X$ から証明が始まる *tableau* においてすべての枝が閉じているとき、その *tableau* は閉じているといい、$X$ は証明可能であるという。

**例** $\Box A \supset A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A)$ は $\mathcal{A}$-tableau で証明可能である。

$$
\begin{array}{llll}
 & \mathrm{F}\Box A \supset A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A) & & (1) \\
 & \mathrm{T}\Box A & & (2) \\
 & \mathrm{F}A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A) & & (3) \\
 & \mathrm{T}A & & (4) \\
\swarrow & & \searrow & \\
\mathrm{F}A\ (5) & & \mathrm{F}\Box(A \supset [\alpha]A) & (6) \\
 & & \downarrow & \\
 & & \mathrm{T}\Box A & (7) \\
 & & \mathrm{F}A \supset [\alpha]A & (8) \\
 & & \mathrm{T}A & (9) \\
 & & \mathrm{F}[\alpha]A & (10) \\
 & & \downarrow & \\
 & & \mathrm{T}\Box A & (11) \\
 & & \mathrm{F}A & (12) \\
 & & \mathrm{T}A & (13)
\end{array}
$$

この例の場合、(1) は証明すべき論理式であり、これに F$\supset$ 規則を適用した結果が (2) および (3) である。(2) に $\mathcal{V}^{\Box}$ を適用すると (4) が導け、(3) に F$\wedge$ を適用すると (5)、(6) が導ける。(6) に $\pi^{\Box}$ 規則を適用すると (7)、(8) が導ける（この場合、$S$ は (1)〜(5)、$\pi^{\Box}$ は (6) であり、(7) が $S^{\Box}$、(8) が $\pi_0^{\Box}$ である）。(8) に F$\supset$ 規則を適用すると (9)、(10) が、(10) に $\pi^{\alpha}$ 規則を適用すると (11)、(12) が、(12) に $\mathcal{V}^{\Box}$ を適用すると (13) がそれぞれ導ける。すると、これ以上の規則の適用はできない。ここで、各枝についてみてみると、左側の枝には T$A$,F$A$（(4)、(5)）があるので、この枝は閉じた枝となる。また右側の枝上にも T$A$,F$A$（(13)、(12)）があるので、閉じた枝となる。ゆえにこの tableau の枝はすべて閉じているので、論理式 $\Box A \supset A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A)$ は $\mathcal{A}$-tableau で証明可能である。

### 2.2.2 $\mathcal{A}$ の sequent 計算の体系 $MA$

前節で論理 $\mathcal{A}$ の tableau について説明した。本節では、この $\mathcal{A}$ に対するゲンツェン流の sequent 計算の体系 $MA$ を導入する。その前に基本となる命題論理の体系 $LK$ について説明する。

体系 $LK$ において、$A_1, \cdots, A_m \ \rightarrow \ B_1, \cdots, B_n$ の形をしたものを式 (sequent) と呼ぶ。ただし、$m, n$ は 0 でもよい。この式の直観的な意味は、「$A_1, \cdots, A_m$ までを仮定すると $B_1 \vee \cdots \vee B_n$ が導かれる」ということである。$LK$ の推論規則は一般に

$$\frac{S_1}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

の形をしており、この推論規則を I とすると、$S_1, S_2$ を I の上式、$S$ を I の下式と呼ぶ。以下では有限個（0 個を含む）の論理式を並べた列を $\Gamma, \Delta$ 等のギリシャ大文字で表す。体系 $LK$ の始式および推論規則を以下にあげる。

- 始式

$$A \rightarrow A \text{ という形の式、ただし } A \text{ は任意の論理式}$$

- 構造に関する推論規則

（weakening 規則）

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} \ (w \rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \ (\rightarrow w)$$

（contraction 規則）

$$\frac{A, A \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} \ (c \rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \ (\rightarrow c)$$

（exchange 規則）

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \rightarrow \Delta} \ (e \rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Sigma} \ (\rightarrow e)$$

（cut 規則）

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Sigma} \ (cut)$$

cut 規則の論理式 $A$ を、cut 論理式という。

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to) \qquad \frac{B, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B}\ (\to \wedge) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}\ (\to \vee) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}\ (\to \vee)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Pi \to, \Sigma}{A \supset B, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}\ (\supset\to) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}\ (\to\supset)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}\ (\neg \to) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\ (\to \neg)$$

**定義 2.9 (証明図と終式)** 証明図および終式を以下のように帰納的に定義する。

1. 始式は証明図であり、その証明図の終式でもある。
2. $P_1, P_2$ は $S_1, S_2$ を終式とする証明図であるとする。さらに

$$\frac{S_1}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が $LK$ の推論規則の一つならば、

$$\frac{P_1}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は証明図であり、その終式は $S$ である。

式 $S$ を終式とするような証明図が存在するとき、$S$ は $LK$ で証明可能であるといい、その証明図を $S$ の証明図という。

体系 $MA$ は、上記の $LK$ に $\Box$ と $[\alpha]$ に対する推論規則を付け加えることにより拡張したものである。

**定義 2.10 (体系 $MA$)** 体系 $MA$ は古典命題論理の *sequent* 計算の体系 $LK$ に、$\mathcal{A}$-*tableau* の $\mathcal{V}^{\Box}, \pi^{\Box}, \pi^{\alpha}$ の各規則に対応する以下の推論規則を付け加えたものである。

- $\mathcal{V}^{\Box}$ に対応

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\ (\mathcal{V}^{\Box})$$

- $\pi^{\Box}$ に対応

$$\frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\pi^{\Box})$$

- $\pi^{\alpha}$ に対応

$$\frac{\Box\Gamma, \Sigma \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]A}\ (\pi^{\alpha})$$

**例**　$MA$ において $\Box A \to A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A)$ は証明可能である。

$$\cfrac{\cfrac{A \to A}{\Box A \to A}\ (\mathcal{V}^{\Box}) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\Box A \to A}\ (\mathcal{V}^{\Box})}{\Box A \to [\alpha]A}\ (\pi^{\alpha})}{A, \Box A \to [\alpha]A}\ (w \to)}{\Box A \to A \supset [\alpha]A}\ (\to\supset)}{\Box A \to \Box(A \supset [\alpha]A)}\ (\pi^{\Box})}{\Box A \to A \wedge \Box(A \supset [\alpha]A)}\ (\to \wedge)$$

# 第 3 章

# 体系 $\mathcal{A}$ の tableau に関する完全性

本章では [1] による論理 $\mathcal{A}$ の、tableau に関する健全性定理および完全性定理の証明を紹介する。この定理の証明は多少複雑であるため、続く第 4 章において別のアプローチによる証明、すなわちフレームに関する完全性定理の証明を行う。

## 3.1 $\mathcal{A}$ のセマンティクス

この節では、$\mathcal{A}$-フレームという概念を用いて定められる $\mathcal{A}$ のセマンティクスについて述べる。

**定義 3.1 ($\mathcal{A}$-フレーム)** $W$ を空でない集合とし、$R_\alpha, R_\Box$ を $W$ 上の二項関係とする。このときこれら 3 つの組 $(W, R_\alpha, R_\Box)$ を $\mathcal{A}$-フレームという。また、$W$ を可能世界の集合、そして $R_\alpha$ および $R_\Box$ を到達可能関係という。ただし、二項関係 $R_\alpha, R_\Box$ には

- $R_\Box$ は反射的かつ推移的
- $R_\alpha \subseteq R_\Box$

なる条件があるものとする。

**定義 3.2 ($\mathcal{A}$-モデル)** $(W, R_\alpha, R_\Box)$ を $\mathcal{A}$-フレームとし、$V$ を各命題変数 $p$ に対して $V(p) \subseteq W$ となるような写像とする。このとき $V$ を $\mathcal{A}$- フレーム $(W, R_\alpha, R_\Box)$ 上の付値といい、$(W, R_\alpha, R_\Box, V)$ を $\mathcal{A}$-モデルという。この $\mathcal{A}$-モデルに対し、$W$ の要素と論理式間の二項関係 $\models$ を以下のように帰納的に定義する。

- $w \models p \Longleftrightarrow w \in V(p)$

- $w \models \top$
- $w \models \bot$ ではない
- $w \models \neg A \iff w \models A$ ではない
- $w \models A \wedge B \iff w \models A$ かつ $w \models B$
- $w \models A \vee B \iff w \models A$ または $w \models B$
- $w \models A \supset B \iff w \models A$ ならば $w \models B$
- $w \models A \leftrightarrow B \iff w \models A$ かつそのときに限り $w \models B$
- $w \models [\alpha]A \iff wR_\alpha w'$ となる任意の $w' \in W$ に対し $w' \models A$
- $w \models \Box A \iff wR_\Box w'$ となる任意の $w' \in W$ に対し $w' \models A$

関係 $\models$ は付値 $V$ より一意に定まるので、以下では $V$ は $\models$ に置き換える。

**定義 3.3 (恒真な論理式)** $\mathcal{A}$-フレーム $(W, R_\alpha, R_\Box)$ 上の任意の付値 $\models$ および任意の $a \in W$ に対し $a \models A$ となるとき、論理式 $A$ は $(W, R_\alpha, R_\Box)$ で恒真であるという。$\mathcal{A}$-モデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において、ある $b \in W$ に対し $b \not\models A$ となるとき、論理式 $A$ は $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において偽であるという。また、ある付値 $\models$ に対して $A$ が $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ で偽であるならば、$A$ は $\mathcal{A}$-フレームで偽であるという。

## 3.2 $\mathcal{A}$ の健全性定理

この節と次の節では $\mathcal{A}$-tableau system の健全性定理および完全性定理の証明を与える。この証明は [2] に述べられている証明を部分的に改良したものである。これを示すために、２つの補助定理を示す。

**定義 3.4** $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ を $\mathcal{A}$-モデル、$S$ を付値付き論理式の集合とする。このとき、$w \in W$ に対して、任意の $A \in S$ で $w \models A$ となるとき、$w \models S$ と書く。

**補助定理 3.1** $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ をクリプキモデル、$S$ を付値付き論理式の集合とする。このとき、$wR_\alpha w'$ となる任意の $w \in W, w' \in W$ に対し、

1. $w \models S$ ならば $w' \models S^\alpha \cup \{\mathcal{V}_0^\Box | \mathcal{V}^\Box \in S\}$

*2.* $w \models S$ ならば $w' \models S^{\Box}$

*3.* $w \models \mathcal{V}^{\Box}$ ならば $w \models \mathcal{V}_0^{\Box}$

証明

1. $w \models S$ ならば、定義より任意の $A \in S$ に対して $w \models A$。$A$ のかたちが $\mathcal{V}^{\alpha}$ ならば、定義より $wR_{\alpha}w'$ となる任意の $w' \in W$ で $w' \models \mathcal{V}_0^{\alpha}$。したがって $w' \models \{\mathcal{V}_0^{\alpha}|\mathcal{V}^{\alpha} \in S\}$、つまり $w' \models S^{\alpha}$。また、$R_{\Box} \supseteq R_{\alpha}$ $wR_{\Box}w'$。よって、任意の $\mathcal{V}^{\Box} \in S$ に対して、定義より $w' \models \mathcal{V}_0^{\Box}$。ゆえに $w' \models \{\mathcal{V}_0^{\Box}|\mathcal{V}^{\Box} \in S\}$。したがって $w' \models S^{\alpha} \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}|\mathcal{V}^{\Box} \in S\}$。

2. $w'R_{\Box}w''$ となる任意の $w''$ をとる。$wR_{\Box}w'$ および $R_{\Box}$ が推移的であることより、$wR_{\Box}w''$ である。したがって、任意の $\mathcal{V}^{\Box} \in S$ で、$w \models \mathcal{V}^{\Box}$ ならば $w'' \models \mathcal{V}_0^{\Box}$、すなわち $w'R_{\Box}w''$ となる任意の $w''$ で $w'' \models \mathcal{V}_0^{\Box}$ が得られるので $w' \models \mathcal{V}_0^{\Box}$。ゆえに $w' \models S^{\Box}$。

3. 仮定より $w \models \mathcal{V}^{\Box}$ なので、定義より $wRw'$ となる任意の $w$ で $w' \models \mathcal{V}_0^{\Box}$。$R_{\Box}$ は反射的であるので $wRw$。よって $w \models \mathcal{V}_0^{\Box}$。

**定義 3.5 ($\mathcal{A}$-充足可能)** 論理式の集合 $S$ に対し、ある $\mathcal{A}$-モデルで $w \models S$ となる世界 $w$ が存在するとき、$S$ は $\mathcal{A}$-充足可能であるという。*tableau* の一つの枝上のすべての論理式の集合が $\mathcal{A}$-充足可能であるとき、その枝は $\mathcal{A}$-充足可能であるという。ある *tableau* に対し、いくつかの枝が $\mathcal{A}$-充足可能ならば、その *tableau* は $\mathcal{A}$-充足可能であるという。

**補助定理 3.2** $T$ を $\mathcal{A}$-充足可能な *tableau* と仮定する。このとき、$T$ にひとつの $\mathcal{A}$-*tableau* 規則を適用した結果得られる *tableau* $T'$ もまた $\mathcal{A}$ -充足可能である。

証明

$\theta$ を $T$ の $\mathcal{A}$-充足可能である枝とし、$\theta$ に $\mathcal{A}$-tableau 規則を適用するとする。このとき、各規則毎に考察する。

1. $\alpha$ 規則を適用する場合（$\theta = S, \alpha$ とし、これに $\alpha$ 規則を適用したものを $\theta_1 = S, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$ とする） $\theta$ は $\mathcal{A}$-充足可能であるので、ある $\mathcal{A}$-モデル $\mu = (W, R_{\alpha}, R_{\Box}, \models)$ において $w \models S$ かつ $w \models \alpha$ となる $w \in W$ が存在する。したがって定義より $w \models \alpha_1$ かつ $w \models \alpha_2$。ゆえに $\theta_1$ は $\mathcal{A}$-充足可能である。

2. $\beta$ 規則を適用する場合（$\theta = S, \beta$ とし、これに $\beta$ 規則を適用したものを $\theta_1 = S, \beta, \beta_1$ および $\theta_2 = S, \beta, \beta_2$ とする） $\theta$ は $\mathcal{A}$-充足可能であるので、ある $\mathcal{A}$-モデル $\mu = (W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において $w \models S$ かつ $w \models \beta$ となる $w \in W$ が存在する。したがって $w \models \beta_1$ または $w \models \beta_2$ である。ゆえに $\theta_1$ または $\theta_2$ のどちらかが $\mathcal{A}$- 充足可能である。

3. $\mathcal{V}^\Box$ 規則を適用する場合（$\theta = S, \mathcal{V}^\Box$ とし、これに $\mathcal{V}^\Box$ 規則を適用したものを $\theta_1 = S, \mathcal{V}^\Box, \mathcal{V}_0^\Box$ とする） $\theta$ は $\mathcal{A}$ -充足可能であるので、ある $\mathcal{A}$-モデル $\mu = (W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において $w \models S$ かつ $w \models \mathcal{V}^\Box$ となる $w \in W$ が存在する。補助定理 3.1 の 3 より $w \models \mathcal{V}_0^\Box$。ゆえに $\theta_1$ は $\mathcal{A}$- 充足可能である。

4. $\pi^\Box$ 規則を適用する場合（$\theta = S, \pi^\Box$ とし、これに $\pi^\Box$ 規則を適用したものを $\theta_1 = S^\Box, \pi^\Box$ とする） $\theta$ は $\mathcal{A}$-充足可能であるので、ある $\mathcal{A}$-モデル $\mu = (W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において $w \models S$ かつ $w \models \mathcal{V}^\Box$ となる $w \in W$ が存在する。ここで $w \models \pi^\Box$ ならば定義より $wR_\Box w_1$ となるある $w_1 \in W$ が存在して、$w_1 \models \pi_0^\Box$ となる。また、補助定理 3.1 の 2 より $w \models S$ ならば $w_1 \models S^\Box$。したがって $\theta_1$ は $\mathcal{A}$-充足可能である。

5. $\pi^\alpha$ 規則を適用する場合（$\theta = S, \pi^\alpha$ とし、これに $\pi^\alpha$ 規則を適用したものを $\theta_1 = S^\Box, S^\alpha, \pi_0^\alpha$ とする） $\theta$ は $\mathcal{A}$- 充足可能であるので、ある $\mathcal{A}$-モデル $\mu = (W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において $w \models S$ かつ $w \models \pi^\alpha$ となる $w \in W$ が存在する。ここで $w \models \pi^\alpha$ ならば定義より $wR_\alpha w_1$ となるある $w_1 \in \mu$ が存在して、$w_1 \models \pi_0^\alpha$ となる。また、補助定理 3.1 の 1、2 および $R_\alpha \supseteq R_\Box$ より、$w \models S$ ならば $w_1 \models S^\Box$ かつ $w_1 \models S^\alpha$。ゆえに $\theta_1$ は $\mathcal{A}$-充足可能である。

**定理 3.3 ($\mathcal{A}$ の健全性定理)** $A$ が $\mathcal{A}$-$tableau$ で証明できるならば、$A$ は任意の $\mathcal{A}$-モデルで恒真である。

証明

F$A$ より証明が始まる閉じた tableau があると仮定する。$\{\mathrm{F}A\}$ が $\mathcal{A}$- 充足可能であるとすると、補助定理 3.2 より、任意の規則を適用したものも $\mathcal{A}$-充足可能ある。しかし、閉じた tableau は $\mathcal{A}$-充足可能ではないので、これは矛盾。したがって、F$A$ は $\mathcal{A}$- 充足可能ではない。ゆえに任意の $w \in W$、任意の $\mathcal{A}$-モデルで $w \models A$ である。

## 3.3 $\mathcal{A}$ の tableau に関する完全性定理

この節では $\mathcal{A}$-tableau に関する完全性定理の証明を行う。これを示すために、まずは $\mathcal{A}$ の consistency property を定義し、それを用いて $\mathcal{A}$ のモデル存在定理を示す。

### 3.3.1 $\mathcal{A}$ の consistency property

ここでは $\mathcal{A}$ の consistency property の定義をし、またそれに関する重要な補助定理の証明を行う。

**定義 3.6 ($\mathcal{A}$-consistency property)** $\mathcal{C}$ を付値付き論理式の集合族とする。$\mathcal{C}$ が 任意の $S \in \mathcal{C}$ において以下の条件を満たすとき、$\mathcal{A}$-*consistency property* という。

1. $S$ は $\mathrm{T}A$ と $\mathrm{F}A$ を同時に含まない。また、$S$ は $\mathrm{F}\top$、 $\mathrm{T}\bot$ のどちらも含まない。
2. $\alpha \in S \Rightarrow S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$
3. $\beta \in S \Rightarrow S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ または $S \cup \{\beta_2\} \in C$
4. $\pi^\Box \in S \Rightarrow S^\Box \cup \{\pi_0^\Box\} \in \mathcal{C}$
5. $\pi^\alpha \in S \Rightarrow S^\Box \cup S^\alpha \cup \{\pi_0^\alpha\} \in \mathcal{C}$
6. $\mathcal{V}^\Box \in S \Rightarrow S \cup \{\mathcal{V}_0^\Box\} \in \mathcal{C}$

**定義 3.7 ($U$-compatible)** $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$-*consistency property* とし、$U$ を付値付き論理式の集合とする。このとき、任意の $S \in \mathcal{C}, Z \in U$ に対し $S \cup \{Z\} \in \mathcal{C}$ となるとき、$\mathcal{C}$ は $U$-*compatible* であるという。

**補助定理 3.4** $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$-*consistency property* とし、$\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ のすべての要素のすべての部分集合を含んでいるものとする。このとき $\mathcal{C}'$ も $\mathcal{A}$-*consistency property* である。また、$\mathcal{C}$ が $U$-*compatible* ならば $\mathcal{C}'$ も $U$-*compatible* である。

証明
各定義毎に調べる。

- $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property であることの証明

1. $\mathcal{C}'$ の要素は $\mathcal{C}$ の部分集合であるが、$\mathcal{C}$ は命題変数 $p$ 及び $\neg p$ を持つような S は含まない。したがって $\mathcal{C}'$ も同様にそのような S を含まない。F⊤、T⊥ に関しても同様である。
2. $S \in \mathcal{C}', \alpha \in S$ を仮定する。このとき、$S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在する。$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$-consistency property であるので、$T \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$。$\mathcal{C}'$ の構成及び $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq T \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ より、$S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}'$。
3. $S \in \mathcal{C}', \beta \in S$ を仮定する。このとき、$S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在する。$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$-consistency property であるので、$T \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ または $T \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$。$\mathcal{C}'$ の構成及び $S \cup \{\beta_1\} \subseteq T \cup \{\beta_1\}, S \cup \{\beta_2\} \subseteq T \cup \{\beta_2\}$ より、$S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}'$ または $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}'$。
4. $S \in \mathcal{C}', \pi^{\Box} \in S$ を仮定する。このとき、$S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在する。$S^{\Box}$ の定義より $S^{\Box} \subseteq T^{\Box}$。$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$-consistency property であるので、$T^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}$。$\mathcal{C}'$ の構成及び $S^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \subseteq T^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\}$ より、$S^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。
5. $S \in \mathcal{C}', \pi^{\alpha} \in S$ を仮定する。このとき、$S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在する。$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$-consistency property であるので $T^{\Box} \cup T^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}$。いま $S \subseteq T$ であるので、定義より $S^{\alpha} \subseteq T^{\alpha}, S^{\Box} \subseteq T^{\Box}$。$\mathcal{C}'$ の構成及び $S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \subseteq T^{\Box} \cup T^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\}$ より、$S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}'$。
6. $S \in \mathcal{C}', \mathcal{V}^{\Box} \in S$ を仮定する。このとき、$S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在する。$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ -consistency property であるので、$T \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}$。$\mathcal{C}'$ の構成及び $S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \subseteq T \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\}$ より、$S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。

以上より、$\mathcal{C}'$ は $\mathcal{A}$-consistency property である。

- $\mathcal{C}'$ が $U$-compatible であることの証明
  $S \in \mathcal{C}', Z \in U$ とする。このとき $S \subseteq T$ となる $T \in \mathcal{C}$ が存在。$\mathcal{C}$ が $U$-compatible であるので $T \cup \{Z\} \in \mathcal{C}$。したがって、$S \cup \{Z\} \subseteq T \cup \{Z\} \in \mathcal{C}'$。ゆえに $\mathcal{C}'$ は $U$-compatible である。

**補助定理 3.5** $\mathcal{C}'$ *を部分集合で閉じた* $\mathcal{A}$*-consistency property とし、*$\mathcal{C}''$ *はすべての有限部分集合が* $\mathcal{C}'$ *に含まれる集合* $S$ *から成り立つとする。このとき、*$\mathcal{C}''$ *は* $\mathcal{A}$*-consistency property*

である。また、$\mathcal{C}'$ が $U$-*compatible* ならば $\mathcal{C}''$ も $U$-*compatible* である。

証明

- $\mathcal{A}$-consistency property であることの証明

1. ある命題変数 $p$ および $\neg p$ を含む $S \in \mathcal{C}''$ が存在すると仮定する。このときこの 2 つの論理式からなる有限集合は $\mathcal{C}'$ に含まれるはずである。しかし $\mathcal{C}'$ も $\mathcal{A}$-consistency property なのでこれは矛盾。F$\top$,T$\perp$ に関しても同様。
2. $S \in \mathcal{C}'', \alpha \in S$ とし、さらに $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \notin \mathcal{C}''$ を仮定する。このとき、$F_1 \subseteq S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ となる有限集合 $F_1 \notin \mathcal{C}'$ が存在する。$S \in \mathcal{C}''$ より $S$ のすべての有限部分集合は $\mathcal{C}'$ に含まれる。よって、$F_1$ は $S$ 自身の部分集合ではない、つまり、$\alpha_1, \alpha_2$ の少なくともどちらか一方が $F_1$ に含まれるはずである。いま $F_1 - \{\alpha_1\}$ を $F_1^1$、$F_1 - \{\alpha_2\}$ を $F_1^2$、$F_1 - \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を $F_1^12$ とする。このとき、
   - $F_1^1$ は $S$ の部分集合であるが、$F_1^1 \cup \{\alpha^1\} \notin \mathcal{C}'$
   - $F_1^2$ は $S$ の部分集合であるが、$F_1^2 \cup \{\alpha^2\} \notin \mathcal{C}'$
   - $F_1^12$ は $S$ の部分集合であるが、$F_1^12 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \notin \mathcal{C}'$

   のうちのいずれか、またはすべてが成り立つ。ここで $F = F_1^1 \cup F_1^2 \cup F_1^12 \cup \{\alpha\}$ とすると、$F$ は $S$ の有限部分集合であり $S \in \mathcal{C}'$ より $F \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property、$\alpha \in F$ より $F \cup \{\alpha_1\} \in \mathcal{C}', F \cup \{\alpha_2\} \in \mathcal{C}', F \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ は部分集合に関して閉じているので $F_1 \in \mathcal{C}'$。これは上の三つのどれかがなりたつことと矛盾。したがって $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}'$。
3. $S \in \mathcal{C}', \beta \in S$ とし、さらに $S \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}''$ かつ $S \cup \{\beta_2\} \notin \mathcal{C}''$ を仮定する。このとき、$S \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}''$ より $F_1 \subseteq S \cup \{\beta_1\}$ となる有限集合 $F_1 \notin \mathcal{C}'$ が存在。$S \in \mathcal{C}''$ より $S$ のすべての有限部分集合は $\mathcal{C}'$ に含まれる。よって、$F_1$ は $S$ 自身の部分集合でない、つまり、$\beta_1 \in F_1$。いま $F_1 - \{\beta_1\}$ を $F_1^1$ とする。このとき、$F_1^1 \subseteq S, F_1^1 \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}'$。同様に $F_2 \subseteq S \cup \{\beta_2\}$ となる $F_2 \notin \mathcal{C}''$ が存在し、$F_2 - \{\beta_2\}$ を $F_2^1$ とすると、$F_2^1 \subseteq S, F_2^1 \cup \{\beta_2\} \notin \mathcal{C}'$。ここで $F = F_1^1 \cup F_2^1 \cup \{\beta\}$ とすると、$F$ は $S$ の有限部分集合であり $S \in \mathcal{C}''$ より $F \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property、$\beta \in F$ なので $F \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}'$ または $F \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ は部分集合に関して閉じているので $F_1^1 \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}'$ または $F_2^1 \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}'$、これは矛盾。したがって $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}''$ または $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}''$。

4. $S \in \mathcal{C}'', \pi^{\Box} \in S$ とし、さらに $S^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \notin \mathcal{C}''$ を仮定する。このとき、$F_1 \subseteq S^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\}$ となる有限集合 $F_1 \notin \mathcal{C}'$ が存在。$S^{\Box} \subseteq S, S \in \mathcal{C}''$ より $F_1$ は $S^{\Box}$ 自身の有限部分集合でない、つまり $\pi_0^{\Box} \in F_1$。いま $F_1 - \{\pi_0^{\Box}\}$ を $F_1'$ とする。このとき、$F_1' \subseteq S^{\Box}, F_1' \cup \{\pi_0^{\Box}\} \notin \mathcal{C}'$。ここで $F = F_1' - \{\pi^{\Box}\}$ とすると、$F$ は $S$ の有限部分集合であり $S \in \mathcal{C}''$ より $F \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property なので $F^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。$F$ の構成より $F^{\Box} = {F'}_1^{\Box}$。また $F_1'$ のすべての要素が $S^{\Box}$ に属するので $F_1' = {F'}_1^{\Box}$。したがって $F^{\Box} = F_1'$、これは矛盾。ゆえに $S^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。
5. $S \in \mathcal{C}'', \pi^{\alpha} \in S$ とし、さらに $S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}''$ を仮定する。このとき、$F \subseteq S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\}$ となる有限集合 $F \notin \mathcal{C}'$ が存在。このとき $\{\pi_0^{\alpha}\}$ が $F$ に入るか否かの 2 つの場合に関して
   (a) $\{\pi_0^{\alpha}\} \notin F$ の場合。このとき $F \subseteq S^{\Box} \cup S^{\alpha}$。ここで $@F = \{[\alpha]B | B \in (F \cap S^{\alpha})\} \cup (F \cap S^{\Box})$ とすると、$@F \subseteq S$、$S \in \mathcal{C}''$ より $@F \in \mathcal{C}'$。$@F$ は有限なので $@F \in \mathcal{C}''$。$\{\pi^{\alpha}\} \in S$ より $@F \cup \{\pi^{\alpha}\} \in \mathcal{C}''$、したがって $@F \cup \{\pi^{\alpha}\} \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property なので $F \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ は部分集合に関して閉じているので $F \in \mathcal{C}'$、これは矛盾。ゆえに $S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}''$。
   (b) $\{\pi_0^{\alpha}\} \in F$ の場合。$F - \{\pi_0^{\alpha}\}$ を $F_1$ とする。このとき、$F_1$ は有限で $F_1 \subseteq S^{\Box} \cup S^{\alpha}$。i) の場合と同様に $F_1 \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \in \mathcal{C}'$ が得られる。これは矛盾。
6. $S \in \mathcal{C}'', \mathcal{V}^{\Box} \in S$ とし、さらに $S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}''$ を仮定する。このとき、$F_1 \subseteq S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\}$ となる有限集合 $F_1 \notin \mathcal{C}'$ が存在。$S \in \mathcal{C}''$ より、$F_1$ は $S$ 自身の有限部分集合であり得ない。つまり $\mathcal{V}_0^{\Box} \in F_1$。いま $F_1 - \{\mathcal{V}_0^{\Box}\}$ を $F'_1$ とする。このとき、$F'_1 \subseteq S, F'_1 \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \notin \mathcal{C}'$。ここで $F = F'_1 \cup \{\mathcal{V}^{\Box}\}$ とすると、$F$ は有限かつ $F \subseteq S$。また $S \in \mathcal{C}''$ より $F \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。$\mathcal{C}'$ は部分集合に関して閉じているので $F'_1 \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$、これは矛盾。したがって $S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}''$。

- $\mathcal{C}''$ が $U$-compatible であることの証明
  $S \in \mathcal{C}'', Z \in U$ を仮定する。$S \in \mathcal{C}''$ より $S$ のすべての有限部分集合は $\mathcal{C}'$ に属する。ここで $F$ を $F \subseteq S$ であるような有限集合とすると $F \in \mathcal{C}'$ かつ $\mathcal{C}'$ が $U$-compatible であることより $F \cup \{Z\} \in \mathcal{C}'$。ゆえに $S \cup \{Z\}$ のすべての有限部分集合は $\mathcal{C}''$ に属する。

**定義 3.8** 集合族 $\mathcal{C}$ は、$S \in \mathcal{C}$ となる任意の $S$ に対し、$S$ の任意の有限部分集合が $\mathcal{C}$ に属するときかつそのときに限り、*finite character* であるという。

**命題 3.6** 任意の $\mathcal{A}$-*consistency property*（$U$-*compatible*）は *finite character* な $\mathcal{A}$-*consistency property*（$U$-*compatible*）に拡張できる。

証明
補助定理 3.4 および 3.5 から導ける。

上の結果から、ツォルンの補題を用いて次のことが証明できる。

**命題 3.7** $\mathcal{C}$ を *$\mathcal{A}$-consistency property* とする。このとき、$\mathcal{C}$ に属する任意の集合 $S$ に対し $S \subseteq S' \subseteq \mathcal{C}$ となるような極大集合 $S$ が存在する。

### 3.3.2 $\mathcal{A}$ のモデル存在定理

ここでは $\mathcal{A}$ のモデル存在定理の証明を行う。この定理は $\mathcal{A}$ の完全性定理を証明するときに使われる。いま $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$-consistency property とする。命題 3.6 より、$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ となる $\mathcal{A}$-consistency property かつ finite chraracter であるような $\mathcal{C}'$ が存在する。

**定義 3.9** $\mathcal{A}$ の固有モデル $(W^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}_{\alpha}, R^{\mathcal{A}}_{\Box}, \models^{\mathcal{A}})$ を以下のように定義する。

- $W^{\mathcal{A}}$：$\mathcal{C}'$ の極大集合全体の集まり
- $v, w \in W^{\mathcal{A}}$ に対し、$vR^{\mathcal{A}}_{\alpha}w \Leftrightarrow v^{\alpha} \subseteq w$
- $v, w \in W^{\mathcal{A}}$ に対し、$vR^{\mathcal{A}}_{\Box}w \Leftrightarrow v^{\Box} \subseteq w$
- $w \in W^{\mathcal{A}}$、命題変数 $p$ に対し、$w \models^{\mathcal{A}} p \Leftrightarrow \mathrm{T}p \in w$

**補助定理 3.8** 以下が成り立つ。

1. 任意の $v \in W^{\mathcal{A}}$ で $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}v$
2. 任意の $u, v, w \in W^{\mathcal{A}}$ で $uR^{\mathcal{A}}_{\Box}v$ かつ $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$ ならば $uR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$
3. 任意の $v, w \in W^{\mathcal{A}}$ で $vR^{\mathcal{A}}_{\alpha}w$ ならば $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$

証明

1. 定義より $v^{\Box} \subseteq v$、したがって $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}v$。
2. $uR^{\mathcal{A}}_{\Box}v$ かつ $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$ であると仮定する。すなわち、$u^{\Box} \subseteq v, v^{\Box} \subseteq v$。定義より $a \subseteq b \Rightarrow a^{\Box} \subseteq b^{\Box}$ であるので、$u^{\Box\Box} \subseteq v^{\Box}$。また、$a^{\Box\Box} = a^{\Box}$ であるので、$u^{\Box} \subseteq v^{\Box} \subseteq w$。したがって、$u^{\Box} \subseteq w$。ゆえに $uR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$。

3. $vR^{\mathcal{A}}_{\alpha}w$ を仮定し、さらに任意の $A$ で $\Box A \in v$ とする。このとき、$I(\Box, \alpha)$ より $[\alpha]A \in v$。$vR^{\mathcal{A}}_{\alpha}w$ より $A \in w$。したがって $vR^{\mathcal{A}}_{\Box}w$。

**定理 3.9 ($\mathcal{A}$ のモデル存在定理)** $\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$-*consistency property* であるとする。$S$ が $\mathcal{C}$-*consistent* ならば $S$ は $\mathcal{A}$-充足可能である。

証明

$\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$-consistency property とし、さらに $S$ を $\mathcal{C}$-consistent、つまり $S \in \mathcal{C}$ を仮定する。このとき $S$ が $\mathcal{A}$ -充足可能であることを示す。ここで、定義3.9で定めた $\mathcal{A}$-モデルを考える。このモデルは補助定理3.8より $\mathcal{A}$-モデルである。以下では

$$\text{任意の } w \in W^{\mathcal{A}}\text{、付値付き論理式 } Z \text{ に対し、} Z \in w \text{ ならば } w \models Z$$

が成り立つことを示す。この付値付き論理式 $Z$ のサイズによる帰納法により証明する。

- 基底段階
  $Z$ のサイズが0のとき、$Z$ は $\mathrm{T}p$ または $\mathrm{F}p$ である。ただし、$p$ は命題変数。このとき、
  - $\mathrm{T}p \in w \Rightarrow w \models^{\mathcal{A}} p$、よって $w \models p$
  - $\mathrm{F}p \in w \Rightarrow \mathrm{T}p \notin w$、つまり $w \not\models^{\mathcal{A}} p$、よって $w \not\models p$

- 帰納法の仮定
  任意の $w \in W^{\mathcal{A}}, n \geq 0$ 以下のサイズの各付値付き論理式において、$Z \in w$ ならば $w \models Z$ とする。

$Z$ のサイズ $n$ を $n > 0$ とする。$Z$ の形により以下のように場合分けする。

1. $Z = \alpha$ のとき $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property であることより $\alpha \in w$ ならば $w \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}'$。よって $w$ が極大であることより $\alpha_1, \alpha_2 \in w$。ゆえに帰納法の仮定より $w \models \alpha_1$ かつ $w \models \alpha_2$。したがって $w \models \alpha$。

2. $Z = \beta$ のとき $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property であることより $\beta \in w$ ならば $w \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}'$ または $w \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}'$。よって $w$ が極大であることより $\beta_1 \in w$ または $\beta_2 \in w$。ゆえに帰納法の仮定より $w \models \beta_1$ または $w \models \beta_2$。したがって $w \models \beta$。

3. $Z = \pi^{\Box}$ のとき $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property であることより $\pi^{\Box} \in w$ ならば $w^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}'$。ここで $\mathcal{C}'$ において $w^{\Box} \cup \{\pi_0^{\Box}\}$ を極大に拡張したものを $w'$ とする。このとき $w' \in W$。$\pi_0^{\Box} \in w'$ および $\pi_0^{\Box}$ のサイズが $\pi^{\Box}$ より小さいので帰納法の仮定より $w' \models \pi_0^{\Box}$。また $w^{\Box} \subseteq w'$ より $wR_{\Box}w'$。ゆえに $w \models \pi^{\Box}$。

4. $Z=\pi^\alpha$ のとき $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$ -consistency property であることより $\pi^\alpha \in w$ ならば $w^\alpha \cup w^\Box \cup \{\pi_0^\alpha\} \in \mathcal{C}'$。ここで $\mathcal{C}'$ において $w^\alpha \cup w^\Box \cup \{\pi_0^\alpha\}$ を極大に拡張したものを $w'$ とする。このとき $w' \in W$。$\pi_0^\alpha \in w'$ および $\pi_0^\alpha$ のサイズが $\pi^\alpha$ より小さいので帰納法の仮定より $w' \models \pi_0^\alpha$。また $w^\alpha \subseteq w'$ より $wR_\alpha w'$。ゆえに $w \models \pi^\alpha$。

5. $Z=\mathcal{V}^\Box$ のとき $wR_\Box w'$（つまり $w^\Box \subseteq w'$）となる任意の $w' \in W$ をとを考える。$\mathcal{V}^\Box \in w$ ならば $\mathcal{V}^\Box \in w^\Box$。$w^\Box \subseteq w'$ より $\mathcal{V}^\Box \in w'$。ゆえに $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{A}$-consistency property であることより $w' \cup \{\mathcal{V}_0^\Box\} \in \mathcal{C}'$。$w'$ は $\mathcal{C}'$ において極大であるので $\mathcal{V}_0^\Box \in w'$。帰納法の仮定より $w' \models \mathcal{V}_0^\Box$。よって $wR_\Box w'$ となる任意の $w' \in W$ で $w' \models \mathcal{V}_0^\Box$。以上より $w \models \mathcal{V}^\alpha$。

6. $Z=\mathcal{V}^\alpha$ のとき $wR_\alpha w'$（つまり $w^\alpha \subseteq w'$）となる任意の $w' \in W$ を考える。$\mathcal{V}^\alpha \in w$ ならば $w^\alpha$ の定義より $\mathcal{V}_0^\alpha \in w^\alpha$。$w^\alpha \subseteq w'$ より $\mathcal{V}_0^\alpha$。帰納法の仮定より $w' \models \mathcal{V}_0^\alpha$。したがって $wR_\alpha w'$ となる任意の $w' \in W$ で $w' \models \mathcal{V}_0^\alpha$。ゆえに $w \models \mathcal{V}^\alpha$。

### 3.3.3 $\mathcal{A}$ の完全性定理

**定義 3.10** 付値付き論理式の集合 $S$ は、$S$ の閉じた $\mathcal{A}$-*tableau* が存在しないとき $\mathcal{A}$-無矛盾であるという。

**補助定理 3.10** $\mathcal{C}$ をすべての $\mathcal{A}$-無矛盾集合からなるクラスとする。このとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$-*consistency property* である。

証明

1. $S \in \mathcal{C}$ とする。$S$ がある命題変数 $p$ と $\neg p$ を同時に含むと仮定すると、$S$ の閉じた tableau が存在する。よって $S$ は $\mathcal{A}$ -無矛盾ではない、つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。したがって $S$ はある命題変数 $p$ と $\neg p$ を同時に含まない。F⊤,T⊥ に関しても同様。

2. $S \in \mathcal{C}, \alpha \in S$ を仮定し、$S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \notin \mathcal{C}$ とする。このとき

$$\begin{array}{c} S \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。しかし $\alpha \in S$ であるので、最初に $\alpha$ 規則を適用して証明を始めると、

$$\begin{array}{c} S \\ \alpha \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

となる。これより先の証明として上の閉じた tableau の $\theta$ 以下と同じものをとれば、$S$ の閉じた tableau となる。したがって $S$ は $\mathcal{A}$- 無矛盾ではない。つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。ゆえに $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$。

3. $S \in \mathcal{C}, \beta \in S$ を仮定し、$S \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}, S \cup \{\beta_2\} \notin \mathcal{C}$ とする。$S \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}$ のとき

$$\begin{array}{c} S \\ \beta_1 \\ \theta_1 \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。また $S \cup \{\beta_1\} \notin \mathcal{C}$ のときは

$$\begin{array}{c} S \\ \beta_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。しかし $\beta \in S$ であるので、最初に $\beta$ 規則を適用して証明を始めると

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array}$$

となる。 これより先の証明は $\beta_1, \beta_2$ 以下がそれぞれ上の閉じた tableau の $\theta_1, \theta_2$ 以下と同じものをとれば

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \\ \theta_1 & & \theta_2 \end{array}$$

となり $S$ の閉じた tableau となる。したがって $S$ は $\mathcal{A}$-無矛盾ではない。つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。ゆえに $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ または $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$。

4. $S \in \mathcal{C}, \pi^{\square} \in S$ を仮定し、$S^{\square} \cup \{\pi_0^{\square}\} \notin \mathcal{C}$ とする。このとき

$$\begin{array}{c} S^{\square} \\ \pi_0^{\square} \\ \theta \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。しかし $\pi^{\square} \in S$ であるので、最初に $\pi^{\square}$ 規則を適用して証明を始めると

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^{\square} \\ \downarrow \\ S^{\square} \\ \pi_0^{\square} \end{array}$$

となる。これより先の証明として上の閉じた tableau の $\theta$ 以下と同じものをとれば、$S$ の閉じた tableau となる。たがって $S$ は $\mathcal{A}$- 無矛盾ではない。つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。ゆえに $S^{\square} \cup \{\pi_0^{\square}\} \in \mathcal{C}$。

5. $S \in \mathcal{C}, \pi^{\alpha} \in S$ を仮定し、$S^{\square} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \notin \mathcal{C}$ とする。このとき

$$\begin{array}{c} S^{\square} \\ S^{\alpha} \\ \pi_0^{\alpha} \\ \theta \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。ここで $\pi^{\alpha} \in S$ であるので最初に $\pi^{\alpha}$ 規則を適用して証明を始めると

$$\begin{array}{c} S \\ \pi^{\alpha} \\ \downarrow \\ S^{\square} \\ S^{\alpha} \\ \pi_0^{\alpha} \end{array}$$

となる。これより先の証明として上の閉じた tableau の $\theta$ 以下と同じものをとると、$S$ の閉じた tableau となる。たがって $S$ は $\mathcal{A}$-無矛盾ではない。つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。ゆえに $S^{\Box} \cup S^{\alpha} \cup \{\pi_0^{\alpha}\} \notin \mathcal{C}$。

6. $S \in \mathcal{C}, \mathcal{V}^{\Box} \in S$ を仮定し、$S \cup \{\mathcal{V}^{\Box}\} \notin \mathcal{C}$ とする。このとき

$$\begin{array}{c} S \\ \mathcal{V}^{\Box} \\ \theta \end{array}$$

の形をした閉じた tableau が存在するはずである。ここで $\mathcal{V}^{\Box} \in S$ なので最初に $\mathcal{V}^{\Box}$ 規則を適用して証明を始めると

$$\begin{array}{c} S \\ \mathcal{V}^{\Box} \\ \mathcal{V}_0^{\Box} \end{array}$$

となる。これより先の証明として上の閉じた tableau の $\theta$ 以下と同じものをとると、$S$ の閉じた tableau となる。たがって $S$ は $\mathcal{A}$-無矛盾ではない。つまり $S \notin \mathcal{C}$。これは矛盾。ゆえに $S \cup \{\mathcal{V}_0^{\Box}\} \in \mathcal{C}$。

**定理 3.11 ($\mathcal{A}$ の完全性定理)** $B$ を論理式とする。$B$ が $\mathcal{A}$ で定理のとき、$B$ は $\mathcal{A}$-*tableau* で証明可能である。

証明

$B$ が $\mathcal{A}$-tableau で証明可能でないとすると、$\{\mathrm{F}B\}$ の閉じた tableau は存在しない。つまり、補助定理 3.10 より $\{\mathrm{F}B\} \in \mathcal{C}$ となる。このとき、モデル存在定理より $\{\mathrm{F}B\}$ は $\mathcal{A}$-充足可能である。したがって $B$ は任意の $\mathcal{A}$ モデルで恒真ではない。これは矛盾である。

# 第 4 章

# sequent 計算の体系 $MA$ の完全性、有限モデル性

3 章において、論理 $\mathcal{A}$ の tableau に関する完全性定理を示した。この章では 3 章とは別のアプローチ、すなわち $\mathcal{A}$ フレームに関する sequent 計算 $MA$ の完全性を、またそれに続いて $\mathcal{A}$ の有限モデル性の証明を行う。

## 4.1 健全性定理

本節では完全性定理の証明に先立って、健全性定理の証明を行う。

**定理 4.1** ($MA$ **のフレームに関する健全性**) 任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し、$\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能ならば、$\Gamma \to \Delta$ は任意のフレームで恒真である。

証明
ここでは $(\mathcal{V}^\Box), (\pi^\Box), (\pi^\alpha)$ の場合のみを示す。

- $(\mathcal{V}^\Box)$ の場合

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\ (\mathcal{V}^\Box)$$

上の推論規則の上式が恒真ならば、下式も恒真であることを示す。ただし、記述を簡単にするために $\Gamma$ が $B, C$ の場合について考える。仮定より、フレーム $(W, R_\alpha, R_\Box)$ で論理式 $(A \wedge B \wedge C) \supset \Delta$ が恒真である。ここで、任意の $a \in W$ で $a \models (\Box A \wedge B \wedge C)$ であるとする。このとき、$R_\Box$ は反射的であるので $aR_\Box a$、つまり $a \models A$ となる。仮

定より $a \models (A \wedge B \wedge C) \supset \Delta$ なので、$a \models \Delta$。ゆえに $(\Box A \wedge B \wedge C) \supset \Delta$ は恒真である。

- $(\pi^{\Box})$ の場合

$$\frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\pi^{\Box})$$

上の推論規則の上式が恒真ならば下式も恒真であることを示す。ただし、記述を簡単にするため $\Gamma$ が $B, C$ の場合について考える。仮定より、フレーム $(W, R_\alpha, R_\Box)$ で論理式 $(\Box B \wedge \Box C) \supset A$ が恒真である。ここで、任意の $a \in W$ で $a \models \Box B \wedge \Box C$ であるとする。このとき $aR_\Box b$ となる任意の $b$ を選ぶと、仮定より $b \models (\Box B \wedge \Box C) \supset A$。$R_\Box$ は推移的であるので、$b \models \Box C \wedge \Box D$。したがって、$b \models A$ となる。$aR_\Box b$ となる任意の $b$ で $b \models A$、すなわち $a \models \Box A$。ゆえに $(\Box B \wedge \Box C) \supset \Box A$ は恒真である。

- $(\pi^{\alpha})$ の場合

$$\frac{\Box\Gamma, \Sigma \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]A}\ (\pi^{\alpha})$$

上の推論規則の上式が恒真ならば下式も恒真であることを示す。ただし、記述を簡単にするために $\Gamma$ が $B, C$、$\Sigma$ が $D, E$ の場合について考える。仮定より、フレーム $(W, R_\alpha, R_\Box)$ で論理式 $(\Box B \wedge \Box C \wedge D \wedge E) \supset A$ が恒真である。また、任意の $a \in W$ で $a \models \Box B \wedge \Box C \wedge [\alpha]D \wedge [\alpha]E$ とする。このとき $aR_\alpha b$ となる任意の $b$ を選ぶと、$b \models D$ かつ $b \models E$ がなりたつ。仮定より $b \models (\Box B \wedge \Box C \wedge D \wedge E) \supset A$。また $R_\Box$ は推移的であるので $b \models \Box B \wedge \Box C$。したがって、$b \models \Box B \wedge \Box C \wedge D \wedge E$。ゆえに $b \models A$ となる。$aR_\alpha b$ となる任意の $b$ で $b \models A$ なので、$a \models [\alpha]A$。ゆえに $(\Box B \wedge \Box C \wedge [\alpha]D \wedge [\alpha]E) \supset [\alpha]A$ は恒真である。

## 4.2 完全性定理

本節では $MA$ のフレームに関する完全性定理の証明を行う。これを示すために必要な幾つかの概念を定義する。

**定義 4.1 (無矛盾対)** $MA$ において論理式全体の集合を $\Phi$ とする。$\Phi$ の部分集合 $U$ と $V$ において任意の $A_1, \cdots, A_m \in U, B_1, \cdots, B_n \in V$ をとったとき、

$$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$$

が $MA$ 証明可能でないとき、対 $(U, V)$ は無矛盾であるという。

**定義 4.2 (極大無矛盾対)** 対 $(U, V)$ が無矛盾かつ $U \cup V = \Phi$ のとき、対 $(U, V)$ は極大無矛盾であるという。

**補助定理 4.2** 任意の無矛盾な対は極大無矛盾対に拡張できる。

証明
$\Phi$ に属する論理式を適当に並べ、$C_1, C_2, \cdots$ とする。$MA$ において無矛盾対 $(U_n, V_n)(n = 1, 2, \cdots)$ を定義する。いま $(U_n, V_n)$ を定義し、さらに無矛盾対であると仮定する。このとき、

1) $(U_m, V_m \cup \{C_{m+1}\})$
2) $(U_m \cup \{C_{m+1}\}, V_m)$

のうち少なくとも一つは無矛盾である。なぜなら 1),2) のどちらも無矛盾でないとすると、$A_1, \cdots, A_k, A'_1, \cdots, A'_p \in U_m$ および $B_1, \cdots, B_h, B'_1 \cdots, B'_q \in V_m$ が存在し、

3) $A_1, \cdots, A_k \to B_1, \cdots B_h, C_{m+1}$
4) $C_{m+1}, A'_1, \cdots, A'_p \to B'_1 \cdots, B'_q$

がともに $MA$ で証明可能となる。ここで 3) と 4) に対して cut を適用すると、

5) $A_1, \cdots, A_k, A'_1, \cdots, A'_p \to B_1, \cdots, B_h, B'_1 \cdots, B'_q$

が証明可能となる。これは $(U_m, V_m)$ が無矛盾であるという仮定に反する。

いま、1) が無矛盾のとき

$$U_{m+1} = U_m, \quad V_{m+1} = V_m \cup \{C_{m+1}\}$$

とし、そうでないときには

$$U_{m+1} = U_m \cup \{C_{m+1}\} \quad V_{m+1} = V_m$$

と定めると、明らかに $(U_{m+1}, V_{m+1})$ は無矛盾となる。

ここで、$U = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_m, V = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ とすると、$U_0 \subseteq U, V_0 \subseteq V$ となる。さらに任意の論理式 $B$ を $\Phi$ からとると、$B = C_{k+1}$ と表せる。$(U_{k+1}, V_{k+1})$ の定め方より $C_{k+1} \in U_{k+1}$ または $C_{k+1} \in V_{k+1}$ のいずれかが成り立つ。$C_{k+1} \in U_{k+1}$ ならば $B \in U$、$C_{k+1} \in V_{k+1}$ ならば $B \in V$ となる。よって $U \cup V = \Phi$。

次に対 $(U, V)$ が $MA$ で無矛盾であることを示す。$(U, V)$ が無矛盾でないとすると、

6) $A_1, \cdots, A_k \to B_1, \cdots, B_h$

が証明可能となる $A_1, \cdots, A_k \in U$ および $B_1, \cdots, B_h \in V$ が存在する。十分大きい $m$ をとると $U, V$ の定義より、$A_1, \cdots, A_k \in U_m$ および $B_1, \cdots, B_h \in V_m$ となる。すると 6) から $(U_m, V_m)$ が $MA$ で矛盾し、$(U_m, V_m)$ の無矛盾性に反する。故に $(U_m, V_m)$ は無矛盾対である。

**定義 4.3 (カノニカルなクリプキモデル)** $MA$ のカノニカルなクリプキモデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ を以下のように定める。

- $W = \{U(\subseteq \Phi) | (U, \Phi - U)$ が極大無矛盾 $\}$
- $U_1, U_2 \in W$ に対して、$U_1 R_\alpha U_2 \Leftrightarrow \{A \in \Phi | [\alpha]A \in U_1\} \subseteq U_2$
- $U_1, U_2 \in W$ に対して、$U_1 R_\Box U_2 \Leftrightarrow \{A \in \Phi | \Box A \in U_1\} \subseteq U_2$
- $U \in W$ に対して、$U \models p \Leftrightarrow p \in U$

**補助定理 4.3** 以下が成り立つ。

*1.* 任意の $U \in W$ で、$U R_\Box U$

*2.* 任意の $U_1, U_2, U_3 \in W$ で、$U_1 R_\Box U_2$ かつ $U_2 R_\Box U_3$ ならば $U_1 R_\Box U_3$

*3.* 任意の $U_1, U_2 \in W$ で $U_1 R_\alpha U_2$ ならば $U_1 R_\Box U_2$

証明

1. $R_\Box$ の定義より明らか。
2. $U_1 R_\Box U_2$ かつ $U_2 R_\Box U_3$ を仮定する。任意の $\Box A \in U_1$ で、

$$\begin{array}{rcll} \Box A \in U_1 & \Rightarrow & \Box\Box A \in U_1 & (4(\Box) \text{ より}) \\ & \Rightarrow & \Box A \in U_2 & (U_1 R_\Box U_2 \text{ より}) \\ & \Rightarrow & A \in U_3 & (U_2 R_\Box U_3 \text{ より}) \end{array}$$

   よって、$U_1 R_\Box U_2$ かつ $U_2 R_\Box U_3$ ならば $U_1 R_\Box U_3$。

3. $U_1 R_\alpha U_2$ を仮定する。任意の $\Box A \in U_1$ で、$I(\Box, \alpha)$ より $[\alpha]A \in U_1$。ここで $U_1 R_\alpha U_2$ を使うと $A \in U_2$。ゆえに $U_1 R_\Box U_2$。

**補助定理 4.4** $U \in W_L$ のとき以下が成り立つ。

*1.* $A_1, \cdots, A_m \in U$ であり、$A_1, \cdots, A_m \to B$ が証明可能ならば $B \in U$。

*2.* 任意の論理式 $A$ に対し、$A$ または $\neg A$ のどちらか一方のみが $U$ に属する。

証明

1. 定義より、$(U, \Phi - U)$ は極大無矛盾である。$B \notin U$ とすると、$A_1, \cdots, A_m \in U, B \in \Phi - U$ となる。しかし、$A_1, \cdots, A_m \to B$ は証明可能なので $(U, \Phi - U)$ は矛盾することになり、$U \in W$ という仮定に反する。ゆえに $B \in U$ となる。

2. $A, \neg A \to$ は $MA$ において証明可能であるので、$A, \neg A \in U$ ではない。ここで、$A, \neg A \notin U$ とすると、$A, \neg A \in \Phi - U$ となる。これは $\to A, \neg A$ が $MA$ で証明可能であることに反する。ゆえに、$A$ または $\neg A$ のどちらか一方のみが $U$ に属する。

**補助定理 4.5** $U \in W$ のとき、以下が成り立つ。

*1.* $A \wedge B \in U \Leftrightarrow A \in U$ かつ $B \in U$

*2.* $A \vee B \in U \Leftrightarrow A \in U$ または $B \in U$

*3.* $A \supset B \in U \Leftrightarrow A \notin U$ または $B \in U$

*4.* $\neg A \in U \Leftrightarrow A \notin U$

*5.* $[\alpha]A \in U \Leftrightarrow UR_{\alpha}U'$ となる任意の $U' \in W$ で $A \in U'$

*6.* $\Box A \in U \Leftrightarrow UR_{\Box}U'$ となる任意の $U' \in W$ で $A \in U'$

証明

1. $[\Rightarrow]$ $A \wedge B \in U$ を仮定しさらに $A \notin U$ または $B \notin U$ とする。このとき $A \wedge B \to A$ は証明可能である。補助定理 4.4 より、これは矛盾。$A \wedge B \to B$ の場合も同様。
   $[\Leftarrow]$ $A \in U$ かつ $B \in U$ と仮定する。このとき $A, B \to A \wedge B$ は証明可能である。よって補助定理 4.4 より、$A \wedge B \in U$。

2. $[\Rightarrow]$ $A \vee B \in U$ を仮定しさらに $A \notin U$ かつ $B \notin U$ とする。このとき $A \vee B \to A, B$ は証明可能である。補助定理 4.4 より、これは矛盾。
   $[\Leftarrow]$ $A \in U$ または $B \in U$ を仮定する。$A \in U$ のときは $A \to A \vee B$、$B \in U$ のときは $B \to A \vee B$ がそれぞれ証明可能である。よって補助定理 4.4 より、$A \vee B \in U$。

3. $[\Rightarrow]$ $A \supset B \in U$ を仮定しさらに $A \in U$ とする。このとき $A, A \supset B \to B$ は証明可能である。よって補助定理 4.4 より、$B \in U$。
   $[\Leftarrow]$ $\neg A \in U$ または $B \in U$ を仮定し、さらに $A \supset B \notin U$ とする。$\neg A \in U$ のときは $\neg A \to A \supset B$、$B \in U$ のときは $B \to A \supset B$ がそれぞれ証明可能である。これは矛盾。

4. 明らか。

5. $[\Rightarrow]$ $[\alpha]A \in U, UR_\alpha U'$ を仮定する。このとき $R_\alpha$ の定義より $A \in U'$ は明らか。
$[\Leftarrow]$ $[\alpha]A \notin U$ を仮定し、さらに $(U_0, \{A\})$ が無矛盾でないとする。すると、ある $B_1, \cdots, B_n \in U'$ が存在して $B_1, \cdots, B_n \to A$ が証明可能となる。これに $K(\alpha)$ を適用すると $[\alpha]B_1, \cdots [\alpha]B_n \to [\alpha]A$ も証明可能となる。よって補助定理4.4より $[\alpha]A \in U$。これは矛盾。したがって、$(U_0, \{A\})$ は無矛盾である。補助定理4.2より極大無矛盾対 $(U', V')$ が存在して $U_0 \subseteq U'$ かつ $A \in V'$。つまり $U' \in W, UR_\alpha U'$ かつ $A \notin U'$。

6. 5. と同様。

**補助定理 4.6** 任意の $A \in \Phi, U \in W$ において、$U \models A \Leftrightarrow A \in U$。

証明
証明は論理式の構成に関する帰納法により行う。ここでは $A$ が $\Box C, [\alpha]C$ の場合のみ示す。任意の論理式 $C, V \in W$ において

1. $A$ が $[\alpha]C$ のかたちのとき、$V \models [\alpha]C$ とする。このとき $VR_\alpha W$ となる任意の $W$ で $W \models C$。つまり $VR_\alpha W$ となる任意の $W$ で $C \in W$。ゆえに補助定理4.5の5より $[\alpha]C \in V$。この証明は逆向きにも辿ることもできるので、$[\alpha]C \in V$ ならば$V \models [\alpha]C$。

2. $A$ が $\Box C$ のかたちのとき、$V \models \Box C$ とする。このとき $VR_\Box W$ となる任意の $W$ で $W \models C$。つまり $VR_\Box W$ となる任意の $W$ で $C \in W$。ゆえに補助定理4.5の6より $\Box C \in V$。この証明は逆向きに辿ることもできるので、$\Box C \in V$ ならば$V \models \Box C$。

**定理 4.7 (フレームに関する完全性定理)** 任意の式 $\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能となる必要十分条件は $\Gamma \to \Delta$ が任意の $\mathcal{A}$ フレームで恒真となることである。

証明
$\Gamma \to \Delta$ が任意のフレームで恒真であると仮定し、$\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能でないとするとする。$\Gamma$ を $A_1, \cdots, A_m$、$\Delta$ を $B_1, \cdots, B_n$ とすると、対 $(\{A_1, \cdots, A_m\}, \{B_1, \cdots, B_n\})$ は無矛盾になる。補助定理4.2より $MA$ で極大無矛盾対 $(U, V)$ が存在し、$\{A_1, \cdots, A_m\} \subseteq U, \{B_1, \cdots, B_n\} \subseteq V$ となる。ここで $MA$ のカノニカルなクリプキモデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ を考えると、$U \in W, U \models A_i\,(i = 1, \cdots, m), U \not\models B_j\,(j = 1, \cdots, n)$ となる。したがって

$U \not\models (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ となるが、これは $\Gamma \to \Delta$ が任意のフレームで恒真という仮定に矛盾する。ゆえに、$\Gamma \to \Delta$ は $MA$ で証明可能である。

この結果より次のことが導ける。

**系 4.8 (sequent 計算体系 $MA$ と $\mathcal{A}$-tableau system の同等性)** 式 $\to B$ が $MA$ で証明可能であるときかつそのときに限り $B$ が $\mathcal{A}$-*tableau* で証明可能である。

## 4.3 有限モデル性

前節において $MA$ のフレームに関する完全性定理を、カノニカルなクリプキモデルを使い示した。このカノニカルモデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ において $W$ は無限集合である。可能世界の集合が有限集合であるフレームを有限フレームといい、論理 $L$ が有限フレームのあるクラスに関して完全であるとき、論理 $L$ は有限モデル性を持つという。本節では $\mathcal{A}$ の有限モデル性を濾過法を用いて証明する。この結果から $\mathcal{A}$ の決定可能性が導かれる。

式 $\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能でないとする。論理式 $\Gamma_* \supset \Delta^*$ を $A$ とすると、定理 4.7 より、$A$ を偽にするクリプキモデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ が存在し、ある $a \in W$ で $a \not\models A$ となる。ここで、$\Psi(A)$ を、

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= Sub(A)\\ \Psi_2 &= \{[\alpha]\Box C \mid \Box C \in Sub(A)\}\\ \Psi(A) &= \Psi_1 \cup \Psi_2\end{aligned}$$

のように定める。このとき、明らかに $\Psi(A)$ は有限集合である。

$W$ の要素上の二項関係 $\sim$ を次のように定義する。

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{任意の } C \in \Psi(A) \text{ で } a \models C \text{ のときかつそのときに限り } b \models C$$

すると、$\sim$ が同値関係であることを示すことができる。$W$ の任意の要素 $a$ の属する同値類を $[a]$ と表す。つまり、

$$[a] = \{x \in W \mid a \sim x\}$$

以下で同値類全体の集合を $W/\!\sim$ と表す。$W/\!\sim$ 上の二項関係 $S_\alpha$ および $S_\Box$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}[a]S_\alpha[b] &\Leftrightarrow \text{任意の } [\alpha]C \in \Psi(A) \text{ に対し、} a \models [\alpha]C \text{ ならば } b \models C\\ [a]S_\Box[b] &\Leftrightarrow \text{任意の } \Box C \in \Psi(A) \text{ に対し、} a \models \Box C \text{ ならば } b \models \Box C\end{aligned}$$

この定義が矛盾を引き起こさないこと、すなわち $[a]S_\alpha[b], a \sim a', b \sim b'$ ならば $[a']S_\alpha[b']$ が成り立つことを示す。このとき、$S_\alpha$ および $\sim$ の定義より、任意の $[\alpha]C \in \Psi(A)$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} a \models [\alpha]C & \text{かつそのときに限り} & a' \models [\alpha]C \\ b \models C & \text{かつそのときに限り} & b' \models C \\ a' \models [\alpha]C & \text{ならば} & a \models [\alpha]C \\ a \models [\alpha]C & \text{ならば} & b \models C \\ b \models C & \text{ならば} & b' \models C \end{array}$$

以上より、$a' \models [\alpha]C$ ならば $b' \models C$、すなわち $[a']S_\alpha[b']$ がいえる。したがって、任意の $[\alpha]C \in \Psi(A)$ に対し、$a \models [\alpha]C \Rightarrow b \models C$ であるならば、$a' \models [\alpha]C \Rightarrow b' \models C$ となる。次に $S_\Box$ について示す。$[a]S_\Box[b], a \sim a', b \sim b'$ を仮定する。このとき、$S_\Box$ および $\sim$ の定義より、任意の $\Box C \in \Psi(A)$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} a \models \Box C & \text{かつそのときに限り} & a' \models \Box C \\ b \models \Box C & \text{かつそのときに限り} & b' \models \Box C \\ a' \models \Box C & \text{ならば} & a \models \Box C \\ a \models \Box C & \text{ならば} & b \models \Box C \\ b \models \Box C & \text{ならば} & b' \models \Box C \end{array}$$

以上より、$a' \models \Box C$ ならば $b' \models \Box C$、すなわち $[a']S_\Box[b']$ がいえる。したがって、任意の $\Box C \in \Psi(A)$ に対し、$a \models \Box C \Rightarrow b \models \Box C$ であるならば、$a' \models \Box C \Rightarrow b' \models \Box C$ となる。ゆえに、上の定義は矛盾を引き起こさない。

次に、有限フレーム $(W/\sim, S_\alpha, S_\Box)$ 上の付値 $\models^*$ を以下のように定める。

$$[a] \models^* p \Leftrightarrow a \models p \quad (p \text{ は} \Psi(A) \text{ に属する命題変数})$$

ただし、$\Psi(A)$ に属さない命題変数に対してはどのように定めてもよいものとする。

**補助定理 4.9** 以下が成り立つ。

*1.* 任意の $a, b \in W$ で、$aR_\alpha b \Rightarrow [a]S_\alpha[b]$

*2.* 任意の $a, b \in W$ で、$aR_\Box b \Rightarrow [a]S_\Box[b]$

*3.* 任意の $a \in W$ で、$[a]S_\Box[a]$

*4.* 任意の $a, b \in W$ で、$[a]S_\Box[b]$ かつ $[b]S_\Box[c] \Rightarrow [a]S_\Box[b]$

5. 任意の $a, b \in W$ で、$[a]S_\alpha[b] \Rightarrow [a]S_\Box[b]$

証明

1. $aR_\alpha b$ を仮定する。このとき明らかに任意の $[\alpha]C \in \Psi(A)$ に対し、$a \models [\alpha]C$ ならば $b \models C$。

2. $aR_\Box b$ を仮定する。$R_\Box$ は推移的であるので、任意の $\Box C \in \Psi(A)$ に対し、$a \models \Box C$ ならば $b \models \Box C$。

3. $a \models \Box C$ ならば $a \models \Box C$ より $[a]S_\Box[a]$。

4. 任意の $\Box C \in \Psi(A)$ で $a \models \Box C, [a]S_\Box[b]$ および $[b]S_\Box[c]$ を仮定する。$a \models \Box C$ 及び $[a]S_\Box[b]$ より、$b \models \Box C$。このことと $[b]S_\Box[c]$ より、$c \models \Box C$。ゆえに $[a]S_\Box[c]$。

5. 任意の $\Box C \in \Psi(A)$ で $a \models \Box C, [a]S_\alpha[b]$ を仮定する。$a \models \Box C$ のとき、$R_\Box$ は推移的であので $a \models \Box\Box C$。$\Box\Box C \supset [\alpha]\Box C$ は証明可能だから $a \models \Box\Box C \supset [\alpha]\Box C$。したがって $a \models [\alpha]\Box C$。$\Box C \in \Psi(A)$ ならば $\Box C \in \Psi = Sub(A)$、したがって $[\alpha]\Box C \in \Psi_2$。$[a]S_\alpha[b]$ より $b \models \Box C$。ゆえに $[a]S_\Box[b]$。

以上より、フレーム $(W/\!\sim, S_\alpha, S_\Box)$ は $\mathcal{A}$ フレームである。

**補助定理 4.10** 任意の論理式 $B \in \Psi(A)$ で 、$[a] \models^* B \Leftrightarrow a \models B$。

証明

$B$ の構成に関する帰納法により証明する。

1. $B$ が命題変数のとき、$\models^*$ の定義より明らか。

2. $B$ が $C \wedge D, C \vee D, C \supset D, \neg C$ の形のときは簡単に示すことができる。

3. $B$ が $[\alpha]C$ の形のとき。すなわち $[a] \models^* [\alpha]C \Leftrightarrow a \models [\alpha]C$ を示す。
   [$\Rightarrow$] $[a] \models^* [\alpha]C, aR_\alpha b$ を仮定する。補助定理 4.8 の 1 より、$aR_\alpha b$ ならば $[a]S_\alpha[b]$。$[a] \models^* [\alpha]C, [a]S_\alpha[b]$ より、$[b] \models^* C$。帰納法の仮定より $b \models C$。よって、$aR_\alpha b$ ならば $b \models C$ であるので、$a \models [\alpha]C$。
   [$\Leftarrow$] $a \models [\alpha]C, [a]S_\alpha[b]$ を仮定する。$S_\alpha$ の定義より $b \models C$。帰納法の仮定より $[b] \models^* C$。よって、$[a]S_\alpha[b]$ ならば $[b] \models^* C$ なので $[a] \models^* [\alpha]C$。

4. $B$ が $\Box C$ の形のとき。すなわち $[a] \models^* \Box C \Leftrightarrow a \models \Box C$ を示す。
   $[\Rightarrow]$ $[a] \models^* \Box C, aR_\Box b$ を仮定する。補助定理 4.8 の 2 より $aR_\Box b$ ならば $[a]S_\Box[b]$。$[a] \models^* \Box C, [a]S_\Box[b]$ より、$[b] \models^* C$。帰納法の仮定より $b \models C$。よって $aR_\Box b$ ならば $b \models C$ なので、$a \models \Box C$。
   $[\Leftarrow]$ $a \models \Box C, [a]S_\Box[b]$ を仮定する。$S_\Box$ の定義より $b \models \Box C$。ここで、$b \models \Box C \supset C$ より $b \models C$ であるので、帰納法の仮定より $[b] \models^* C$。よって、$[a]S_\Box[b]$ ならば $[b] \models^* C$ であるので、$[a] \models^* \Box C$。

**定理 4.11 ($\mathcal{A}$ の有限モデル性)** $\mathcal{A}$ は有限モデル性を持つ。

証明
式 $\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能でないとする。このとき定理 4.6 より $\Gamma_* \supset \Delta^*$ を偽にするクリプキモデル $(W, R_\alpha, R_\Box, \models)$ が存在し、ある $a \models W$ で $a \not\models \Gamma_* \supset \Delta^*$ となる。ここで補助定理 4.8 より、$[a] \not\models^* \Gamma_* \supset \Delta^*$ が得られる。したがって、$\Gamma_* \supset \Delta^*$ は $(W/\!\sim, S_\alpha, S_\Box, \models^*)$ で偽になる。つまり、$\Gamma \to \Delta$ は有限フレームで偽となる。このことは任意の式について成り立つので、$\mathcal{A}$ は有限フレーム性を持つ。

**系 4.12 ($\mathcal{A}$ の決定可能性)** $\mathcal{A}$ は決定可能である。

証明
$\mathcal{A}$ は有限公理化可能で有限モデル性を持つので決定可能である。

# 第 5 章

# 体系 $MA$ の cut 除去定理とその応用

3 章において tableau system の完全性が成り立つことを示した。このことから $MA$ の cut 除去定理が成り立つことが予想される。本章では cut 除去定理の証明を行い、さらにこれの応用である補間定理を示す。

## 5.1 cut 除去定理の証明のための準備

本節では $MA$ の cut 除去定理、及びそれの証明を行うために必要なものについて述べる。$MA$ の cut 除去定理とは以下のものである。

**定理 5.1** **($MA$ の cut 除去定理)** $\Gamma \to \Delta$ を終式とする $MA$ の証明図に対し、これと同じ終式を持つ *cut* を含まない証明図をつくることができる。

証明は次節で示す。この定理の証明のため必要となる幾つかの概念を定義をする。

**定義 5.1 (mixture の導入)** *cut* を拡張した推論規則 *mixture*（以下 *mix*）を以下のように定義する。

$$\frac{\Gamma \to \Pi \quad \Delta \to \Sigma}{\Gamma, \Delta^* \to \Pi^*, \Sigma}\ (A)$$

ただし、$A \in \Delta, \Pi$ であり、$\Delta^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Delta, \Pi$ から $A$ をすべて取り去ってできたものである。また、論理式 $A$ を $m$-論理式という。

**補助定理 5.2** *cut* と *mix* は同等である。

証明

1. mix は cut を用いて次のように表せる

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Pi}{\overline{\Gamma \to \Pi^*, A}} \quad \dfrac{\Delta \to \Sigma}{\overline{A, \Delta^* \to \Sigma}}}{\Gamma, \Delta^* \to \Pi^*, \Sigma}\ (cut)$$

2. cut は mix を用いて次のように表せる

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Pi, A \quad A, \Delta \to \Sigma}{\Gamma, \Delta^* \to \Pi^*, \Sigma}\ (A)}{\overline{\Gamma, \Delta \to \Pi, \Sigma}}$$

ただし、証明図中の $=$ は、$(\to e), (e \to), (\to w), (w \to)$ を必要ならば数回適用することを表す。

以下の証明図では、cut があればそれをすべて mix に置き換えたものとする。よって $MA$ の cut 除去定理を示すには、mix を含まない証明図が作れることを示せば良い。

**定義 5.2 (次数)** 論理式 $A$ に含まれる論理記号の個数を $A$ の次数といい、$deg(A)$ と記す。

**定義 5.3 (階数)** 証明図の左(右)階数とは、$mix$ の左(右)上式から上方へ式を辿るときに、右(左)辺に $m$-論理式が現れる式の個数の最大数をいい、$\rho_l(\rho_r)$ で表す。このとき $\rho = \rho_l + \rho_r$ を証明図の階数という。$\rho_l \geq 1, \rho_r \geq 1$ より $\rho \geq 2$ である。

## 5.2 $MA$ の cut 除去定理の証明

本節では定理 5.1 の証明を行うが、それは次の補助定理を示せば十分である。

**補助定理 5.3** 最下の推論規則が $mix$ で、それ以外には $mix$ を含まない証明図は、同じ終式を持ちかつ $mix$ をまったく含まない証明図に変形することができる。

証明

証明は m-論理式の次数と証明図の階数による二重帰納法により行う。特に、本証明では $\Box, [\alpha]$ に関する推論規則の場合のみを行う。

1. $\rho = 2$(したがって $\rho_l = \rho_r = 1$) のとき

   1.1 m-論理式の一番外側が $\Box$ のとき、証明図の mix 部は以下のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Lambda \to A}{\Box\Lambda \to \Box A}\,(\pi^{\Box}) \quad \dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})}{\Box\Lambda, \Gamma \to \Delta}\,(\Box A)$$

ただし、$\Box A \notin \Gamma$ である。これを次のように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Lambda \to A \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Box\Lambda, \Gamma^* \to \Delta}\,(A)}{\Box\Lambda, \Gamma \to \Delta}$$

ただし、$\Gamma^*$ は $\Gamma$ から $A$ をすべて取り去ったものである。すると deg(A)<deg(□A) であるので、帰納法の仮定より変形した方の証明図の mix は取り去ることができる。

1.2　m-論理式の一番外側が $[\alpha]$ のとき、証明図の mix 部は以下のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma, \Sigma \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]A}\,(\pi^{\alpha}) \quad \dfrac{\Box\Pi, A \to B}{\Box\Pi, [\alpha]A \to [\alpha]B}\,(\pi^{\alpha})}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma, \Box\Pi \to [\alpha]B}\,([\alpha]A)$$

ただし、$[\alpha]A \notin \Box\Pi$ である。これをつぎのように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma, \Sigma \to A \quad \Box\Pi, A \to B}{\Box\Gamma, \Sigma, (\Box\Pi)^* \to B}\,(A)}{\Box\Gamma, \Box\Pi, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]B}\,(\pi^{\alpha})$$

ただし、$(\Box\Pi)^*$ は $\Box\Pi$ から $A$ をすべて取り去ったものである。すると、deg(A)<deg([$\alpha$]A) であるので、帰納法の仮定より変形した方の証明図の mix は取り去ることができる。

2. $\rho > 2$ のとき

2.1 $\rho_r > 1, \rho_l = 1$ の場合を考える。mix の右上式が $\Box, [\alpha]$ についての推論規則 I の下式であるとき、以下のように場合分けされる。

2.1.1　推論規則 I が $(\mathcal{V}^{\Box})$ のとき、証明図の mix 部は以下のようになる。

$$\dfrac{\Sigma \to \Pi \qquad \dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})}{\Sigma, (\Box A)^*, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}\,(m)$$

ただし、$m \notin \Gamma$ であり、$(\Box A)^*, \Gamma^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Box A, \Gamma, \Pi$ から $m$ をすべて取り去ったものである。これを以下のように変形する。

(a) $m \in \Sigma$ のとき

$m = \Box A$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})}{\Box A, \Gamma^* \to \Delta}}{\Sigma, \Gamma^* \to \Pi^* \Delta}$$

$m \neq \Box A$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})}{\Box A, m, \Gamma^* \to \Delta}}{\Sigma, \Box A, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}$$

ただし、$\Gamma^*$ は $\Gamma$ から $A$ をすべて取り去ったものである。すると、これらは mix を含まない証明図である。

(b) $m \notin \Sigma$ のとき

$m = \Box A$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma \to \Pi \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma \to \Pi \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Sigma, A, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}\,(\Box A)}{\Sigma, \Box A, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})}{\Sigma, \Sigma, \Gamma^* \to \Pi^*, \Pi^*, \Delta}\,(\Box A)}{\Sigma, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}$$

ただし、$\Gamma^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Gamma, \Pi$ から $\Box A$ をすべて取り除いたものである。このとき双方の mix とも、もとの mix より階数が 1 下がるので、帰納法の仮定よりこれら mix は取り去ることができる。

$m \neq \Box A$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \to \Pi \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Sigma, A^*, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}\,(m)}{\Sigma, A, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}}{\Sigma, \Box A, \Gamma^* \to \Pi^*, \Delta}\,(\mathcal{V}^{\Box})$$

ただし、$A^*, \Gamma^*, \Pi^*$ はそれぞれ $A, \Gamma, \Pi$ から $m$ をすべて取り除いたものである。このときこの証明図の mix はもとの証明図の mix より階数が 1 下がるので、帰納法の仮定よりこの mix は取り去ることができる。

2.1.2 推論規則 I が $(\pi^{\Box})$ のとき、証明図の mix 部は以下のようになる。

$$\dfrac{\Sigma \to \Pi \quad \dfrac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\,(\pi^{\Box})}{\Sigma, (\Box\Gamma)^* \to \Pi^*, \Box A}\,(m)$$

ただし、$m \in \Box\Gamma$ であり、$(\Box\Gamma)^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Box\Gamma, \Pi$ から $m$ をすべて取り除いたものである。これを以下のように変形する。

(a) $m \in \Sigma$ のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\,(\pi^{\Box})}{m, (\Box\Gamma)^* \to \Box A}}{\Sigma, (\Box\Gamma)^* \to \Pi^*, \Box A}$$

ただし、$(\Box\Gamma)^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Box\Gamma, \Pi$ から $m$ をすべて取り除いたものである。これは mix を含まない証明図である。

(b) $m \notin \Sigma$ のとき、実際の証明図は以下の場合のときのみである（ただし、$m = \Box B$）。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma \to B}{\Box\Sigma \to \Box B}\,(\pi^{\Box}) \quad \dfrac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\,(\pi^{\Box})}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^* \to \Box A}\,(\Box B)$$

ただし、$(\Box\Gamma)^*$ は $\Box\Gamma$ から $\Box B$ をすべて取り除いたものである。これをつぎのように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma \to B}{\Box\Sigma \to \Box B}\,(\pi^{\Box}) \qquad \Box\Gamma \to A}{\dfrac{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^* \to A}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^* \to \Box A}\,(\pi^{\Box})}\,(\Box B)$$

ただし、$(\Box\Gamma)^*$ は $\Box\Gamma$ から $\Box B$ をすべて取り除いたものである。すると、この証明図の階数はもとの証明図より 1 下がるので、帰納法の仮定より mix を取り去ることができる。

2.1.3 推論規則 I が $\pi^\alpha$ のとき、証明図の mix 部は以下のようになる。

$$\dfrac{\Sigma \to \Pi \qquad \dfrac{\Box\Gamma, \Delta \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Delta \to [\alpha]A}\,(\pi^\alpha)}{\Sigma, (\Box\Gamma)^*, ([\alpha]\Delta)^* \to \Pi^*, [\alpha]A}\,(m)$$

ただし、$m \in \Box\Gamma$ または $m \in [\alpha]\Delta$ であるが、$\rho_r > 1$ より $m \in [\alpha]\Delta$ のときは $m \in \Delta$ でもある。また、$(\Box\Gamma)^*, ([\alpha]\Delta)^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Box\Gamma, [\alpha]\Delta, \Pi$ から $m$ すべてを取り去ったものである。これを以下のように変形する。

(a) $m \in \Box\Gamma$ のとき

$m \in \Sigma$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma, \Delta \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Delta \to [\alpha]A}\,(\pi^\alpha)}{m, (\Box\Gamma)^*, [\alpha]\Delta \to [\alpha]A}}{\Sigma, (\Box\Gamma)^*, [\alpha]\Delta \to \Pi^*, [\alpha]A}$$

ただし $(\Box\Gamma)^*, \Pi^*$ はそれぞれ $\Box\Gamma, \Pi$ から $\Box A$ すべてを取り去ったものである。これは mix を含まない証明図である。

$m \notin \Sigma$ ならば、実際の証明図は以下の場合のときのみである（ただし $m = \Box A$)。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma \to A}{\Box\Sigma \to \Box A}\,(\pi^{\Box}) \qquad \dfrac{\Box\Gamma, \Delta \to B}{\Box\Gamma, [\alpha]\Delta \to [\alpha]B}\,(\pi^\alpha)}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^*, [\alpha]\Delta \to [\alpha]B}\,(\Box A)$$

ただし $(\Box\Gamma)^*$ は $\Box\Gamma$ から $m$ をすべて取り除いたものである。これをつぎのように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma \to A}{\Box\Sigma \to \Box A}\,(\pi^{\Box}) \qquad \Box\Gamma, \Delta \to B}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^*, \Delta^* \to B}\,(\Box A)}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^*, \Delta \to B}}{\Box\Sigma, (\Box\Gamma)^*, [\alpha]\Delta \to [\alpha]B}\,(\pi^{\alpha})$$

ただし $(\Box\Gamma)^*, \Delta^*$ はそれぞれ $\Box\Gamma, \Delta$ から $m$ をすべて取り除いたものである。すると、この証明図の階数はもとの証明図より 1 下がるので、帰納法の仮定より mix を取り去ることができる。

(b) $m \in \Delta, [\alpha]\Delta$ のとき

$m \in \Sigma$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma, \Delta \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Delta \to [\alpha]A}\,(\pi^{\alpha})}{m, \Box\Gamma, ([\alpha]\Delta)^* \to [\alpha]A}}{\Sigma, \Box\Gamma, ([\alpha]\Delta)^* \to \Pi^*, [\alpha]A}$$

ただし $([\alpha]\Delta)^*$ は $[\alpha]\Delta$ から $m$ をすべて取り除いたものである。これは mix を含まない証明図である。

$m \notin \Sigma$ ならば、実際の証明図は以下の場合のときのみである（ただし、$m = [\alpha]A$）。

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma, \Pi \to A}{\Box\Sigma, [\alpha]\Pi \to [\alpha]A}\,(\pi^{\alpha}) \qquad \dfrac{\Box\Gamma, \Delta \to B}{\Box\Gamma, [\alpha]\Delta \to [\alpha]B}\,(\pi^{\alpha})}{\Box\Sigma, [\alpha]\Pi, \Box\Gamma, ([\alpha]\Delta)^* \to [\alpha]B}\,([\alpha]A)$$

ただし $([\alpha]\Delta)^*$ は $[\alpha]\Delta$ から $[\alpha]A$ をすべて取り除いたものである。これをつぎのように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Sigma, \Pi \to A \qquad \Box\Gamma, \Delta \to B}{\Box\Sigma, \Pi, (\Box\Gamma)^{\circ}, \Delta^{\circ} \to B}\,(A)}{\Box\Sigma, \Pi, \Box\Gamma, \Delta^{\circ} \to B}}{\Box\Sigma, [\alpha]\Pi, \Box\Gamma, ([\alpha]\Delta)^* \to [\alpha]B}\,(\pi^{\alpha})$$

ただし $(\Box\Gamma)^{\circ}, \Delta^{\circ}$ はそれぞれ $\Box\Gamma, \Delta$ から $A$ をすべて取り除いたものであり、$([\alpha]\Delta)^*$ は $[\alpha]\Delta$ から $[\alpha]A$ をすべて取り除いたものである。$\Delta^{\circ}$ に現れるすべての論理式に $[\alpha]$

を付け加えたものは、$([\alpha]\Delta)^*$ と等しくなる。このとき、deg(A)<deg([α]A) であるので、帰納法の仮定より変形した方の証明図の mix は取り去ることができる。

2.2　$\rho_l > 1, \rho_r = 1$ の場合を考える。mix の左上式が $\Box, [\alpha]$ についての推論規則 I の下式であるとき、I は $\mathcal{V}^\Box$ の場合のみである。

$$\cfrac{\cfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathcal{V}^\Box) \qquad \Sigma \to \Pi}{\Box A, \Gamma, \Sigma^* \to \Delta^*, \Pi}\,(m)$$

ただし $\Sigma^*, \Delta^*$ はそれぞれ $\Sigma, \Delta$ から $m$ をすべて取り除いたものである。これを次のように変形する。

$$\cfrac{\cfrac{A, \Gamma \to \Delta \quad \Sigma \to \Pi}{A, \Gamma, \Sigma^* \to \Delta^*, \Pi}\,(m)}{\Box A, \Gamma, \Sigma^* \to \Delta^*, \Pi}\,(\mathcal{V}^\Box)$$

すると、この証明図の階数はもとの証明図より 1 下がるので、帰納法の仮定より mix を取り去ることができる。

定理 4.1 の証明
有限個の mix を含む cut のない証明図が与えられたとする。このとき、この証明図において、最も上にある mix の下式を終式とするする証明図を考えると、補助定理 4.3 よりこの mix を取り去ることができる。そこで、もとの証明図の最も上にある mix の下式をそのままにしておくことにより、mix の数が 1 つ少ない証明図が得られる。ゆえに帰納法の仮定より終式を変えることなく、mix を含まない証明図を得ることができる。

## 5.3　補間定理

本節では、前節で示した $MA$ の cut 除去定理の応用として前原の方法による $MA$ の Craig の補間定理の証明を行う。

**定義 5.4 (分割)** 以下を満たすとき $\langle\{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_2; \Delta_2\}\rangle$ を $\Gamma \to \Delta$ の分割という。

*1.* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$

*2.* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

*3.* $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$

*4.* $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$

また、$A$ に現れる全ての命題変数の集合を $V(A)$ と記す。

**定理 5.4** (**$MA$ の補間定理**) $A \supset B$ が $MA$ で証明可能であるとする。このとき以下を満たす論理式 $C$ が存在する。

*1.* $A \supset C$ および $C \supset B$ が $MA$ で証明可能

*2.* $V(C) \subseteq V(A) \cap V(B)$

この定理を証明するため、以下の補助定理を示す。

**補助定理 5.5** $\Gamma \to \Delta$ が $MA$ で証明可能とする。また、$\langle \{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_2; \Delta_2\} \rangle$ を $\Gamma \to \Delta$ の任意の分割とする。このとき、以下を満たす補間論理式と呼ばれる論理式 $C$ が存在する。

*1.* $\Gamma_1 \to \Delta_1, C$ 及び $C, \Delta_2 \to \Gamma_2$ が $MA$ で証明可能

*2.* $V(C) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \Delta_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \Delta_2)$

証明

証明は証明図の長さに関する帰納法による。ここでは特に $MA$ 独自の推論規則である $(\mathcal{V}^{\Box})$, $(\pi^{\Box})$, 及び $(\pi^{\alpha})$ についてのみ行う。

1. 最後の推論規則が $(\mathcal{V}^{\Box})$ のとき
   証明図の最後は次のような形をしている。

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta} \ (\mathcal{V}^{\Box})$$

   このとき、分割の形によって以下の 2 つの場合がある。

(a) 分割が $\langle\{\Box A, \Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_1; \Delta_2\}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より $A, \Gamma_1 \to \Delta_1, C$ 及び $C, \Gamma_2 \to \Delta_2$ が証明可能となる $C$ が存在する。

このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{A, \Gamma_1 \to \Delta_1, C}}{\Box A, \Gamma_1 \to \Delta_1, C}\ (\mathcal{V}^{\Box}) \qquad \dfrac{\vdots}{C, \Gamma_2 \to \Delta_2}$$

よって $\Box A, \Gamma_1 \to \Delta_1, C$ 及び $C, \Gamma_2 \to \Delta_2$ が証明可能となり、$C$ 自身が補間論理式となる。

(b) 分割が $\langle\{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Box A, \Gamma_1; \Delta_2\}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \to \Delta_1, C$ 及び $C, A, \Gamma_2 \to \Delta_2$ が証明可能となる $C$ が存在する。このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \to \Delta_1, C} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{C, A, \Gamma_2 \to \Delta_2}}{C, \Box A, \Gamma_2 \to \Delta_2}\ (\mathcal{V}^{\Box})$$

よって $\Gamma_1 \to \Delta_1, C$ 及び $C, \Box A, \Gamma_2 \to \Delta_2$ が証明可能となり、$C$ 自身が補間論理式となる。

2. 最後の推論規則が $(\pi^{\Box})$ のとき

証明図の最後の部分は次の形をしている。

$$\dfrac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\pi^{\Box})$$

このとき、分割の形によって以下の 2 つの場合がある。

(a) 分割が $\langle\{\Box\Gamma_1;\}, \{\Box\Gamma_2; \Box A\}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より、$\Box\Gamma_1 \to C$ 及び $C, \Box\Gamma_2 \to A$ が証明可能となる $C$ が存在する。このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box\Gamma_1 \to C}}{\Box\Gamma_1 \to \Box C}\ (\pi^{\Box}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C, \Box\Gamma_2 \to A}}{\Box C, \Box\Gamma_2 \to A}\ (\mathcal{V}^{\Box})}{\Box C, \Box\Gamma_2 \to \Box A}\ (\pi^{\Box})
$$

よって、$\Box\Gamma_1 \to \Box C$ 及び $\Box C, \Box\Gamma_2 \to \Box A$ も証明可能となり、$\Box C$ が補間論理式となる。

(b) 分割が $\langle\{\Box\Gamma_1; \Box A\}, \{\Box\Gamma_2; \}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より、$\Box\Gamma_1 \to A, C$ 及び $C, \Box\Gamma_2 \to$ が証明可能となる $C$ が存在する。このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box\Gamma_1 \to A, C}}{\neg C, \Box\Gamma_1 \to A}\ (\to \neg)}{\Box\neg C, \Box\Gamma_1 \to A}\ (\mathcal{V}^{\Box})}{\Box\neg C, \Box\Gamma_1 \to \Box A}\ (\pi^{\Box})}{\Box\Gamma_1 \to \Box A, \neg\Box\neg C}\ (\neg \to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C, \Box\Gamma_2 \to}}{\Box\Gamma_2 \to \neg C}\ (\neg \to)}{\Box\Gamma_2 \to \Box\neg C}\ (\pi^{\Box})}{\neg\Box\neg C, \Box\Gamma_2 \to}\ (\to \neg)
$$

よって $\Box\Gamma_1 \to \Box A, \neg\Box\neg C$ 及び $\neg\Box\neg C, \Box\Gamma_2 \to$ が証明可能となり、$\neg\Box\neg C$ が補間論理式になる。

3. 最後の推論規則が $(\pi^{\alpha})$ の場合

証明図の最後の部分は次の形をしている。

$$
\dfrac{\Box\Gamma, \Sigma \to A}{\Box\Gamma, [\alpha]\Sigma \to [\alpha]A}\ (\pi^{\alpha})
$$

このとき、分割の形によって以下の 2 つの場合がある。

(a) 分割が $\langle\{\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1; [\alpha]A\}, \{\Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2; \}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より、$\Box\Gamma_1, \Sigma_1 \to A, C$ 及び $C, \Box\Gamma_2, \Sigma_2 \to$ が証明可能となる $C$ が存在する。このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box\Gamma_1, \Sigma_1 \to A, C}}{\neg C, \Box\Gamma_1, \Sigma_1 \to A}\,(\neg\to)}{[\alpha]\neg C, \Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1 \to [\alpha]A}\,(\pi^\alpha)}{\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1 \to [\alpha]A, \neg[\alpha]\neg C}\,(\to\neg)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C, \Box\Gamma_2, \Sigma_2 \to}}{\Box\Gamma_2, \Sigma_2 \to \neg C}\,(\to\neg)}{\Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2 \to [\alpha]\neg C}\,(\pi^\alpha)}{\neg[\alpha]\neg C, \Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2 \to}\,(\neg\to)
$$

よって $\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1 \to [\alpha]A, \neg[\alpha]\neg C$ 及び $\neg[\alpha]\neg C, \Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2 \to$ が証明可能となり、$\neg[\alpha]\neg C$ が補間論理式となる。

(b) 分割が $\langle\{\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1;\}, \{\Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2; [\alpha]A\}\rangle$ の場合

帰納法の仮定より、$\Box\Gamma_1, \Sigma_1 \to C$ 及び $C, \Box\Gamma_2, \Sigma_2 \to A$ が証明可能となる $C$ が存在する。このとき、以下の 2 つの証明図を得ることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box\Gamma_1, \Sigma_1 \to C}}{\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1 \to [\alpha]C}\,(\pi^\alpha)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\vdots}{C, \Box\Gamma_2, \Sigma_2 \to A}}{[\alpha]C, \Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2 \to [\alpha]A}\,(\pi^\alpha)
$$

よって $\Box\Gamma_1, [\alpha]\Sigma_1 \to [\alpha]C$ 及び $[\alpha]C, \Box\Gamma_2, [\alpha]\Sigma_2 \to [\alpha]A$ が証明可能となり、$[\alpha]C$ が補間論理式となる。

定理 5.4 の証明

$A \supset B$ が $MA$ で証明可能であるとする。すると、$A \to B$ も証明可能である。補助定理 5.6 において、$\Gamma_1$ として $A$、$\Delta_2$ として $B$ をとると、定理 5.4 の 1 および 2 を満たす論理式 $C$ が存在する。ゆえに $MA$ において補間定理が成り立つ。

# 第 6 章

# 結論

以上に述べてきたように、本研究では動的論理において繰り返し演算子 $^*$ を様相演算 S4 の $\Box$ に置き換えた論理 $\mathcal{A}$ を中心に考察を進め、その体系におけるフレームに関する完全性定理を示した。また、$\mathcal{A}$ の sequent 計算の体系 $MA$ を定義し、同体系における cut 除去定理、Craig の補間定理などの構文論的証明を行った。

今後の課題としては、動的論理に対する代数的アプローチや不動点という概念を導入した Mu-calculus の動的論理への応用等の考察を行いたい。

# 謝辞

本研究を行うにあたり、日頃丁寧にご指導してくださいました小野 寛晰教授に深く感謝致します。また、貴重なご意見やご討論を頂いた石原 哉助教授、浜野 正浩助手、Tomasz Kowalski 助手、更に本論文の多岐にわたる部分について詳しく教えて頂いた関 隆宏さん、丸山 晃生さん、tableau に関して詳しく教えて頂いた松本 利雅さん、そして学生生活全般においてお世話になりました研究室の皆様ににお礼申し上げます。

# 参考文献


[1] M. Castilho and A. Herzig, An alternative to the iteration operator of propositional dynamic logic, Technical report, IRIT - Universite Paul Sabatier, 1996.

[2] M. Fitting. Proof methods for modal and intuitionistic logics, Reidel Publishing Company, 1983

[3] R. Goldblatt, Logics of Time and Computation, Center for the study of language and information, 1992.

[4] D. Harel, D. Kozen and J. Tiuryn, Dynamic Logic, The MIT Press, 2000.

[5] T. Kowalski, Propositional Dynamic Logic has interpolation, to appear in Bulletin of the Section of Logic 30 (2001).

[6] J. C. Meyer and R. J. Wieringa, Deontic logic in computer science, Wiley Professional Computing, 1993.

[7] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 情報科学セミナー, 日本評論社, 1994.

[8] V. Pratt, Dynamic Algebras: Examples, Constructions, Applications, Studia Logica 50 (1991), 571-605.