Title	自然演繹体系による部分構造論理の形式化とその証明論的研究
Author(s)	二牟禮, 毅
Citation	
Issue Date	2002-09
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1646
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

自然演繹体系による部分構造論理の形式化と
その証明論的研究

二牟禮 毅 (010082)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2002 年 8 月 15 日

キーワード: 自然演繹, cut 除去定理, 部分構造論理, 正規化定理, ラムダ計算, 変数共有性, 含意断片, 補間定理.

1 はじめに

自然演繹（Natural Deduction）の体系は Gentzen が sequent 計算に先立って導入した体系であり、数学などで行なう推論により近い形で論理を形式化したものである。自然演繹の体系に対する証明論的研究は Prawitz による normal form theorem の証明により大きく発展した。normal form theorem は sequent 計算におけるカット除去定理（cut elimination theorem) に対応し、自然演繹の体系を用いた証明論的研究において非常に重要な役割を果たしている。この normal form theorem を用いることにより、古典論理や直観主義論理における Craig の 補間定理（interpolation theorem)、また直観主義論理における disjunction property などを導くことができる。

自然演繹の体系の証明図とラムダ計算におけるラムダ項との間にはカリー・ハワード対応（Curry-Howard isomorphism）とよばれる対応関係が存在することが知られている。さらに 正規形（normal form） を持つ証明図にはちょうど正規（normal） なラムダ項が対応する。そしてあたえられたラムダ項を正規なラムダ項へ変換する手続きは一般的な計算のプロセスを抽象化したものとみなすことができる。この関係により自然演繹体系は computer science からも注目されるようになってきている。

部分構造論理に対する証明論的研究の多くでは sequent 計算が用いられ、自然演繹体系を用いた研究はまだ十分には行なわれてきていない。そこで、自然演繹の体系を用いて部分体系に対する証明論的研究を展開することを本研究の目標とした。

2 good sequent を用いた FLec の変数共有性の証明

論理体系 **L** が変数共有性（variable sharing property）を持つとは、任意の仮定の集合 Γ(ただし、$\Gamma \neq \emptyset$) および論理式 A に対し、$\Gamma \vdash A$ が **L** で証明可能なとき、必ず Γ と A に共通に現われる変数が存在することをいう。これは $V(\Gamma) \cap V(\{A\}) \neq \emptyset$ と表される。ただし、$V(\Delta)$ は Δ に含まれる論理式に現われる命題変数全体の集合である。
weakening 規則のない部分構造論理では変数共有性 (variable sharing property) が言える。このことを good な sequent という概念を用いて証明をおこなった。証明のアウトラインは以下のようになる。$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であるとする。FLec のカット除去定理より $\Gamma \to A$ はカットのない証明図 **P** をもつ。ここで **P** の中の sequent $\Pi \to \Lambda$ が good とは、$\Pi \to \Lambda$ の中には二つ以上の論理式が現われることとする。
すなわち、 ΠとΛ がともに空でない、もしくは Λ が空なら Π は少なくとも二つ以上の論理式が現われることとする。

仮定より $\Gamma \to A$ は good であり、また始式は全て good である。さらに weakening 規則がないことから、P の中に現われるどの good sequent もそれとある始式とを結ぶ good sequent 証明図の枝で good sequent のみからなるもの (good branch) が存在することが証明できる。この good branch の最大の長さに関する帰納法を用いて次の結果を示すことができる。

定理 1： good sequent はいつも variable sharing property を持つ
この定理からただちに FLec の variable sharing property が導かれる。

3 自然演繹体系の含意断片における変数共有性

シーケント計算を用いた場合には変数共有性を示すことができたが、これと同じように自然演繹を用いてこれを示すことを試みた。FLec に対応する自然演繹体系 Nec を導入することができるが、Nec の 正規な証明図を用いて証明図の長さに関する帰納法で証明を行なおうとすると困難が生ずる。そこで、Nec の証明図に制限を加えた体系である Nec* を用いる。さらにこの場合もシーケント計算 FLec をを用いた証明の場合と同様に分割 (partition) の概念を用いる必要があった。また、ここでの証明は Nec* の証明図の形に大きく依存するため、今回証明に成功したのは「ならば（$\supset$）」のみを含む論理式の場合だけである。この場合は FLec の時と同様に変数共有性を得られた。他の論理結合子を導入した体系ではうまく証明を得ることができなかった。

4 good sequent を用いた FLec の補間定理の証明

good sequent のアイデアを用いて FLec の補間定理の証明を与えてみた。Craig の補間定理の証明には、通常カット除去定理を利用した証明論的方法が用いられる。

しかし、文献 [2] で指摘されているように weakening を持たない体系では定数の消去がうまくいかないために、定数を持たない言語の場合の証明には困難が生ずる。この問題を解決するために他の方法での証明も得られてきたが、本研究では***good*** sequent のアイデアと変数共有性を用いることで、より簡単な証明を与えることに成功した。

5　結論、まとめ

good sequent という概念を導入したことにより、FLec の変数共有性や補間定理の複雑な証明をより簡単にすることができた。
以下のような結果が得られた。
定理 4.2.1（FLec の変数共有性)
$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であり、さらに $\Gamma \to A$ が命題定数を含まないならば、$V(\Gamma) \cap V(A)$ は空でない。(ただし、$\Gamma \neq \emptyset$)

自然演繹の体系において変数共有性を証明するにあたって、Nec の体系ではうまくできないのであらたに Nec* の体系をを導入して証明を行なった。その結果自然演繹の体系でも変数共有性が成り立つことがわかり次の定理が得られた。
定理 5.3.1Nec* の変数共有性
Nec* で、$\Gamma \vdash A$ が証明可能であるとする。Γ の 任意の分割 $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ に対し、$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \neq \emptyset$ が成り立つ。したがって、とくに $V(\Gamma) \cap V(\{A\}) = \emptyset$ が成り立つ。(ただし、$V(\Delta)$ は Δ に含まれる論理式に現われる命題変数全体の集合を表す)

また、FLec の補間定理については次の結果が得られた。
定理 6.1.1 FLec の*good* sequent に関する補間定理
$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であり Γ が空でないならば、$V(\{D\}) \subseteq V(\Gamma) \cap V(\{A\})$ となる論理式 D で

$$\begin{array}{ll} 1) & \vdash \Gamma \to D \\ 2) & \vdash D \to A \end{array}$$

が成り立つものが存在する。

参考文献

[1] Y.Komori, *Natural deduction for classical logic, in which there exists a proof with the subformula property*, in Proceedings of the 33rd MLG Meeting at Echigo-Yuzawa, Japan 2000, pp. 3-6.

[2] H.Ono, *Proof-theoretic methods in nonclassical logic —an introduction*, in Theories of Types and Proofs, MSJ-Memoir 2, edited by M.Takahashi, M.Okada and M.Dezani, Mathematical Society of Japan, 1998.

[3] G.Mints, *A short introduction to intuitionistic logic*, Kluwer academic/plenum Publishers,2000, pp.9-22.

[4] A.S.Troelstra, *Natural deduction for intuitionistic linear logic*, Annals of Pure and Applied logic 73, 1995, pp.79-108.

[5] D.Prawitz, *Natural deduction, a proof-theoretical study*, Almqvist & Wiksell, 1965.

[6] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.