Title	自然演繹体系による部分構造論理の形式化とその証明論的研究
Author(s)	二牟禮, 毅
Citation	
Issue Date	2002-09
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1646
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

自然演繹体系による部分構造論理の形式化とその証明論的研究

指導教官　小野寛晰 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

二牟禮 毅

提出年月日：2002 年 8 月 15 日

目 次

第 1 章

はじめに

自然演繹（Natural Deduction）の体系は Gentzen が sequent 計算に先立って導入した体系であり、数学などで行なう推論により近い形で論理を形式化したものである。自然演繹の体系に対する証明論的研究は Prawitz による正規化定理（normal form theorem）の証明により大きく発展した。正規化定理 は sequent 計算におけるカット除去定理（cut elimination theorem) に対応し、自然演繹の体系を用いた証明論的研究において非常に重要な役割を果たしている。この normal form theorem を用いることにより、古典論理や直観主義論理における Craig の 補間定理（interpolation theorem)、また直観主義論理における disjunction property などを導くことができる。

また、自然演繹の体系の証明図とラムダ計算におけるラムダ項との間にはカリー・ハワード対応（Curry-Howard isomorphism）とよばれる対応関係が存在することが知られている。さらに 正規形（normal form） を持つ証明図にはちょうど正規（normal） なラムダ項が対応する。そしてあたえられたラムダ項を正規なラムダ項へ変換する手続きは一般的な計算のプロセスを抽象化したものとみなすことができる。この関係により自然演繹体系は computer science からも注目されるようになってきている。

部分構造論理に対する自然演繹の体系は、文献 [4], [6], [12] などにより試みられてきた。論理結合子として "ならば ($\supset$)" のみを持つ論理に対しては、直観主義論理に対する自然演繹体系 NJ の推論規則の適用に対して制限を設けることにより、自然な形で部分構造論理の自然演繹の体系を導入し 正規化定理などの証明が与えることができる。しかしながら、論理結合子を全て含むような論理の場合には自然演繹の体系を導入するのが困難であったり、または複雑になってしまう。それは、加法的な論理結合子 (たとえば、普通の

論理積 ($\wedge$) や論理和 ($\vee$)) と乗法的な論理結合子 (たとえば、"ならば ($\supset$)" や"フュージョン "($*$)) とでは、推論の仮定の扱いが違ってくるからである。それを克服するために文献 [4], [12] ではラムダ項をその中に組み込んだ自然演繹体系が導入されている。それに対し文献 [6] の体系では、index を用いることによりラムダ項の明示的な使用を避けている。

このような形式化の困難のため、部分構造論理に対する証明論的研究の多くでは sequent 計算が用いられ、自然演繹体系を用いた研究はまだ十分には行なわれていない。しかし、上で述べたようにいくつかの部分体系に対しては normalization theorem などの結果が与えられているので、これらの結果を用いて部分体系に対する証明論的研究を展開することを本研究の目標とした。しかしながら、自然演繹体系に対する証明方法は難しい問題が多くあり、自然演繹体系に関しては最終的には部分的な結果しか得られなかった。

この論文では直観主義論理から weakening を除いて得られる体系 FLec の変数共有性と Craig の補間定理の証明をあたえた。5 章では FLec の"ならば"のみを持つ体系に対する自然演繹体系 Nec および Nec* を導入し、変数共有性の証明をおこなった。その比較のために、sequent 計算を用いた場合の変数共有性の証明を 4 章であたえた。この証明で導入された good sequent の考えと補間定理に対する前原の証明方法を結びつけることにより、定数を含まない場合の FLec の補間定理を証明できることがわかった。この証明を 6 章で示した。

第 2 章

自然演繹と sequent 計算の体系

2.1 直観主義論理に対する自然演繹の体系 NJ

自然演繹体系 (Natural Deduction) は Gentzen が sequent 計算に先立って導入した体系であり、数学などで行なう推論により近い形で論理を形式化したものである。
ここでは、その自然演繹の体系についてふれてみる。まず直観主義論理に対する体系 NJ を定義して、次に古典論理に対する体系 NK を導入する。ここでの推論の型の特徴をとらえるために、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ から B が導かれることを

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

という形で表わすことにする。自然演繹の体系では $\neg A$ を $A \supset \perp$ の省略形として扱う。体系 NJ の推論規則は $\supset, \wedge, \vee$ についての導入 (Introduction) と除去 (Elimination) の規則からなっている。他に矛盾 $\perp$ についての規則がある。導入規則とは、推論規則の上式と下式を比べたときに下式に論理結合子が入った式になっていて、除去規則は逆に上式にある論理結合子が下式で除かれた形になっているものである。このように自然演繹では導入規則と除去規則が 2 つ一体となって体系づけられているところが特徴である。

NJ の体系

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \supset B}\,(\supset I) \qquad\qquad \dfrac{A \quad A \supset B}{B}\,(\supset E)$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge I)$$

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E1) \qquad\qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E2)$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\,(\vee I1) \qquad\qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,(\vee I2)$$

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,(\vee E) \qquad \dfrac{\perp}{A}\,(\perp)$$

『ならば (⊃)』の推論規則

導入規則については、A ということを仮定して、(何ステップかの推論により) B が出てくるならば、$A \supset B$ が導かれる。つまり、

$$\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array} \quad \text{が証明可能ならば} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \supset B}\,(\supset I)$$

も証明可能である。ここで点は A から何ステップ（0 でもよい）かで B が導かれるということを表している。一般には B を導くためには仮定 A が必要なのであるが、この推論により導かれた $A \supset B$ では、A を仮定する必要はない。そこで A を $[A]$ と表してこれは A というものを仮定から取り除いてもよいということを意味する。つまり、$A \supset B$ は A という仮定なしに導かれる。このようにもはや論理式 A を仮定から取り除くことを**仮定 A がキャンセルされる**ということにする。この場合、同じ形の複数個の論理式をキャンセルすることも、存在しない仮定をキャンセルすることも許される。

除去規則については、Hilbert の体系でモーダス・ポーネンスとか三段論法と呼ばれている推論である。

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \ (\supset E)$$

これは A や B がどのような内容を表していても、A と $A \supset B$ が推論されていれば機械的に B を導くことができるというものである。右に書いてある $(\supset E)$ はどの推論規則を用いたかを表す。I は導入の（Introduction）、E は除去の (Elimination) の略である。これらは、どの推論規則かをはっきりさせたい場合には書くことにし、必要がなければ省略してよい。

『かつ $(\wedge)$』の推論規則

A と B が正しいと仮定されれば $A \wedge B$ も正しい事柄となる。そこでそれを

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \ (\wedge I)$$

のように形式的に書く。また $A \wedge B$ が正しければ A は正しいし B も正しいので、それを

$$\frac{A \wedge B}{A} \ (\wedge E1) \qquad \frac{A \wedge B}{B} \ (\wedge E2)$$

のように形式的に書く。

『または $(\vee)$』の推論規則

$\vee$ の導入規則は

$$\frac{A}{A \vee B} \ (\vee I) \qquad \frac{B}{A \vee B} \ (\vee I)$$

A というものが正しければ当然 $A \vee B$ も正しい。同様に B というものが正しければ当然 $A \vee B$ も正しいのでこのように形式的表す。

$\vee$ 除去規則については $A \vee B$ から C が導き出されることを証明するために場合分けの方法を用いる。A の場合、これから C が導き出され、B の場合もこれから C が導き出されるときには、$A \vee B$ からも C が導き出されるわけである。これを図式的に書くことを考えると、

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \text{から} \quad \frac{A \vee B}{C}$$

が導き出されればよいのである。これをまとめて次のように表わす。

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ (\vee E)$$

場合わけのために用いられた A や B は仮定から取り除くことができるのでこのように書く。

『矛盾 (⊥)』、『でない (¬)』の推論規則

矛盾 (contradiction) を導入し、それを $\perp$ と書くことにする。これに関しては除去規則のみで導入規則はない。

$$\dfrac{\perp}{A}\ (\perp E)$$

また $\perp$ は $\neg$ と密接に連動する。$\neg$ の推論規則には次のようなものがある。

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg A}\ (\neg I) \qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\perp}\ (\neg E)$$

ここで $\supset$ の導入規則と除去規則と見比べてみると、$(\neg I)$ と $(\neg E)$ はこれらと非常によく似ている。つまり $\neg A$ を $A \supset \perp$ の省略形だと思うことにすると、$(\neg I)$ と $(\neg E)$ はそれぞれ $(\supset I)$ と $(\supset E)$ の特別な場合と見なせる。したがって以下では $\neg A$ を $A \supset \perp$ の省略形として、$(\neg I)$ と $(\neg E)$ は省いて考えることにする。

以上が NJ の推論規則であるが、$(\supset E), (\wedge I), (\wedge E), (\vee I), (\perp)$ は直前の論理式にのみ依存する局所的なものであるのに対して、$(\supset I), (\vee E)$ は証明全体に関係した大域的な推論規則だという特徴がある。

2.2 NJ の証明図

NJ の証明図とはこれらの推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式である。証明図の一番下の論理式のことをこの証明図の**結論** (conclusion) という。

証明図の途中で使われた $(\supset I)$ や $(\vee E)$ により、この証明図の仮定 (すなわち、証明図の一番上にある論理式) は取り除かれる。取り除かれた論理式には斜線やカッコ、番号のどれかをつけておくことにする。また、どの推論規則の適用で取り除かれたのかを明らかにするために、その推論規則の適用が行われた場所と取り除かれた論理式に同じ番号をつけて区別するとわかりやすい。仮定が全て取り除かれているような NJ の証明図 P の結論が A であるとき、P は A に至る証明図であるという。A に至る証明図が存在するとき、A は **NJ で証明可能**であるといい $\vdash_{\mathrm{NJ}} A$ と表わす。
一般に、論理式 A と論理式の有限集合 S に対し、NJ の証明図 P の取り除かれていない仮定が全て S に属し、さらに P の結論が A のとき、P は仮定 S から A に至る証明図であるという。(S には取り除かれていない仮定以外の論理式が入っていてもかまわない。)
S から A に至る証明図が存在するとき $S \vdash_{\mathrm{NJ}} A$ と表わす。もちろん、$\vdash_{\mathrm{NJ}} A$ と $\emptyset \vdash_{\mathrm{NJ}} A$ は同じことである。また混乱が生じないなら $\vdash_{\mathrm{NJ}}$ の添字の NJ を省略して単に $\vdash$ と書くこともある。

例 2.2.1 (NJ の証明図の例)

1)

$$\frac{[A]^1}{A \supset A}\,1$$

この $A \supset A$ に到る証明図のように $(\supset I)$ の前提である論理式 A と結論である論理式 A が同じものであってもよい。

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{A} \qquad [A \supset \neg B]^1}{\neg B} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{B}}{\bot}}{\neg(A \supset \neg B)}\,1}{(A \wedge B) \supset \neg(A \supset \neg B)}\,2$$

このように、番号 2 がついている $(\supset I)$ において、二つの仮定 $A \wedge B$ が同時にキャンセルされるような場合もある。

3)

$$\dfrac{[\neg A \lor B]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^3 \quad A^1}{\perp}}{B}}{A \supset B}\,1 \qquad \dfrac{[B]^3}{A \supset B}\,2}{\dfrac{A \supset B}{(\neg A \lor B) \supset (A \supset B)}\,4}\,3$$

番号 2 のついた ($\supset I$) では、0 個の仮定 B が取り除かれているとみなす。このようなことも NJ の証明では許される。

2.3 古典論理に対する自然演繹の体系 NK

古典論理に対する自然演繹の体系を得るためには、NJ にさらに次の推論規則 (RAA) を付け加えればよい。

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}\,(RAA)$$

この推論規則は「$\neg A$ を仮定して矛盾が生じるときには A が導かれる」こと、すなわち**背理法** (reductio ad absurdum) を表わす。そのためその頭文字をとって (RAA) と表わされる。このようにして得られた体系を NK という。

NK の体系

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E1) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E2)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\ (\supset I) \qquad \frac{A \quad A \supset B}{B}\ (\supset E)$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee I1) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee I2)$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ (\vee E) \quad \frac{\perp}{A}\ (\perp)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{A}\ (RAA)$$

NK の証明図

NK の証明図および NK での証明可能性は NJ の場合と同様に定義される。
論理式 A と論理式の有限集合 S に対し、NK の証明図 P の取り除かれていない仮定が全て S に属し、さらに P の結論が A のとき、P は仮定 S から A に至る証明図であるという。
(S には取り除かれていない仮定以外の論理式が入っていてもかまわない。)
仮定 S から A に至る NK の証明図が存在するとき $S \vdash_{\mathrm{NK}} A$ と表わす。

例 2.3.1 (NK の証明図の例)

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad [\neg\neg A]^2}{\perp}}{A}\ (\mathrm{RAA})1}{\neg\neg A \supset A}\ 2$$

2)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A \supset B$}
\AxiomC{$[(A \supset B) \supset A]^3$}
\BinaryInfC{A}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(RAA)2}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$((A \supset B) \supset A) \supset A$}
\end{prooftree}
$$

3)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[A \supset B]^3$}
\BinaryInfC{B}
\UnaryInfC{$\neg A \vee B$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A \vee B)]^2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg I)^1$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\UnaryInfC{$\neg A \vee B$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A \vee B)]^2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(RAA)^2$}
\UnaryInfC{$\neg A \vee B$}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$(A \supset B) \supset (\neg A \vee B)$}
\end{prooftree}
$$

いずれの場合も NJ では証明できないが、(RAA) を使うことによって証明が可能になっている。

2.4　sequent 計算の体系

Gentzen は自然演繹の体系とともに sequent 計算の体系を導入した。sequent 計算の体系は自然演繹の体系と同様に論理の形式化を目的として作られた。では、sequent 計算の体系とはどういうものかを以下で説明していく。ここでは、sequent 計算の体系のうち古典論理に対する体系 LK と直観主義論理に対する体系 LJ を導入する。
まず sequent 計算の基本的な表現はその名が表すように **sequent**（式）とよばれるものである。では、sequent とはどのような表現なのかを次に説明する。
$A_1, \ldots, A_m$ から $B_1, \ldots, B_n$ が導かれるとき

$$A_1, \ldots, A_n \rightarrow B_1, \ldots, B_n$$

というような表し方をする。このような形の表現を sequent というのである。なお、この場合の m や n は 0 であってもよい。

自然演繹の体系 (NJ,NK) では推論の対象を論理式の集合としたが、sequent 計算の体系 (LJ,LK) では論理式の列を対象としているという違いがある。
上の sequent の直感的な意味は、「$A_1, A_2, \ldots, A_m$ が**すべて**成り立てば、$B_1, B_2, \ldots, B_n$ のうち**どれか**が成り立つ」というものである。ただし、
$m = 0$ の場合は仮定なしで $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ が導かれること、
$n = 0$ の場合は $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_m$ を仮定すると矛盾が導かれること、さらに
$m = n = 0$ の場合つまり $\quad\rightarrow\quad$ は無条件に矛盾が導かれることを表わす。
sequent 計算で公理に相当するものは**始式** (initial sequent) であり

$$A \rightarrow A$$

という形の式である。ここで A は任意の論理式とする。
sequent 計算の体系の特徴は、このような公理 (始式) としてはできる限り簡単なものをとり、その代わり式の持つ構造や論理結合子の持つ役割を明確に分離し、それらを一つ一つ推論規則として表現するという点にある。式の持つ構造についての推論規則を、**構造に関する推論規則** (structural rules) といい、個々の論理結合子の役割を示す推論規則を**論理結合子に関する推論規則** (rules for logical connectives) という。sequnet 計算の体系の推論規則は一般に、

$$\frac{S_1}{S}\ (I) \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}\ (I)$$

の形をしている。ここで S_1, S_2 および S は式である。これらの直観的な意味は、式 S_1 が成り立つならば、式 S も成り立つこと、および式 S_1 と式 S_2 がともに成り立つならば式 S も成り立つことを表わしている。上の推論規則を I とするとき、S_1(および S_2) は I の**上式**、S は I の**下式**といわれる。以下では、有限個 (0 個でもよい) の論理式をコンマで区切って並べた列を表わすメタな記号として Γ, Δ などのギリシャ語の大文字を使うことにする。(これらは論理式の列であり、したがって列 A, B は列 B, A や列 A, A, B とは区別される。)
次に直観主義論理に対する体系 LJ の推論規則をあげる。

2.4.1 古典論理に対する体系 LK

古典論理に対する sequent 計算の体系 LK を導入する。

LK の体系

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \to \Delta}\,(w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Lambda, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, A, \Theta}\,(\to w)$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \to \Delta}\,(c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Lambda, A, A, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, A, \Theta}\,(\to c)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \to \Delta}\,(e \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, B, A, \Theta}\,(\to e)$$

$$\frac{\Gamma \to A, \Theta \quad \Sigma, A, \Pi \to \Delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Theta}\,(cut)$$

論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to \Delta}\,(\wedge 1 \to) \qquad \frac{\Gamma, B, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to \Delta}\,(\wedge 2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \to \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, A \wedge B, \Theta}\,(\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to A, \Theta \quad \Pi, B, \Sigma \to \Delta}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}\,(\supset \to) \qquad \frac{\Gamma, A \to B, \Theta}{\Gamma \to A \supset B, \Theta}\,(\to \supset)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \to \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \to \Delta}\,(\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Lambda, A, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, A \vee B, \Theta}\,(\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, A \vee B, \Theta}\,(\to \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma \to A, \Theta}{\neg A, \Gamma \to \Theta}\,(\neg \to) \qquad \frac{\Gamma, A \to \Theta}{\Gamma \to \neg A, \Theta}\,(\to \neg)$$

LK の証明図

始式から出発して、それに推論規則を次々に適用していく過程を全て記述したものを LK

の**証明図** (proof figure) という。推論規則の中には上式が二つあるものがあるから、一般に証明図は高々二つに枝分かれする木の形をしていることになる。証明図の一番下にある式を、その証明図の**終式**という。

定義 2.4.1 (証明図とその終式) 証明図およびその証明図の終式を次のように帰納的に定義する。

1. 始式はそれだけで証明図であり、その証明図の終式はその始式自身である。

2. P_1(および P_2) はそれぞれ S_1 (および S_2) をその終式とする証明図とする。さらに、

$$\frac{S_1}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が、LK の推論規則の一つであれば、

$$\frac{P_1}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は証明図であり、その終式は S である。

2.4.2 直観主義論理に対する体系 LJ

LJ の体系

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, \Sigma \to B}{\Gamma, A, \Sigma \to B}\ (w \to) \qquad\qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A}\ (\to w)$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \to B}{\Gamma, A, \Sigma \to B}\ (c \to)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, B, A, \Sigma \to C}\ (e \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Sigma, A, \Pi \to B}{\Sigma, \Gamma, \Pi \to B}\ (cut)$$

注) LJ において推論規則 $(\to c), (\to e)$ は存在しない。

論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \to C}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to C}\ (\wedge 1 \to) \qquad \frac{\Gamma, B, \Sigma \to C}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to C}\ (\wedge 2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Pi, B, \Sigma \to C}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to C}\ (\supset\to) \qquad \frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ (\to\supset)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \to C \quad \Gamma, B, \Sigma \to C}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \to C}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}\ (\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\ (\to \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}\ (\neg \to) \qquad \frac{\Gamma, A \to}{\Gamma \to \neg A}\ (\to \neg)$$

例 2.4.1 (LJ の証明図の例) 式 $\neg\neg\neg A \to \neg A$ に到る証明図は以下のようになる。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\ (\neg \to)}{A \to \neg\neg A}\ (\to \neg)}{\neg\neg\neg A, A \to}\ (\neg \to)}{A, \neg\neg\neg A \to}\ (e \to)}{\neg\neg\neg A \to \neg A}\ (\to \neg)$$

この例での始式は $A \to A$ であり、終式は $\neg\neg\neg A \to \neg A$ である。この証明図に現われる sequent は全て LJ の sequent になっているという点に注意しててもらいたい。

式 S を終式とするような証明図が存在するときには、S は LJ で**証明可能である** (provable) という。またそのような証明図を S の証明図、または S に至る証明図という。
特に、式 $\to A$ が LJ で証明可能であるとき、論理式 A が LJ で証明可能であるという。

2.4.3 LK と LJ の関係

LJ における sequent とは

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \to B$$

の形に限る。ただし、m は 0 でもよく、また右辺の B はなくてもよい。したがって LJ の式は LK の式の定義の**右辺に現れる論理式の数を高々一つに制限したもの**と考えることができる。上の式の直観的な意味は LK の場合とまったく同様であり、A_1 から A_m までを仮定すると B が導かれるということを表わしている。

LJ の始式と LK の始式は共に $A \to A$ の形をとる。さらに LJ の推論規則は、LK の推論規則とまったく同じものをとるが、その推論規則に現れる式はすべて LJ の式に限るということができる。したがって、例えば LK での $(\wedge 1 \to)$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to \Delta}$$

において、Δ は空またはただ一つの論理式でなければならない。このような制限があるので LJ には $(\to c), (\to e)$ は存在しないことになる。したがって、LJ の証明図はあきらかに LK の証明図でもあるので、LJ で証明可能な式はすべて LK でも証明可能であるということがわかる。しかし、一般にこの逆のことは成り立たない。

2.4.4 cut 除去定理

定理 2.4.1 (LK の cut 除去定理)

式 $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能ならば、$\Gamma \to \Delta$ に到る LK の証明図で cut を一度も用いないものが存在する。(Δは空でもよい)

cut 除去定理はゲンツェンによりはじめて証明されたものである。ここで証明は行なわないが簡単に言うと、LK での cut を含む証明図が与えられたときに、一つ一つの cut に対し、その証明図の変形を繰り返すことにより、全ての cut を有限なステップで取り除くことができるというものである。

また、LJ でも同様のことが知られている。

定理 2.4.2 (LJ の cut 除去定理)

式 $\Gamma \to A$ が LJ で証明可能ならば、$\Gamma \to A$ に到る LJ の証明図で cut を一度も用いないものが存在する。(A は空でもよい)

2.5 自然演繹の体系と sequent 計算の体系の関係

自然演繹の体系の特徴

- 操作の対象は論理式の**集合**である
- 構造規則は持たない
- **除去** (elimination) と**導入** (introduction) の規則からなる

仮定 Γ, A, B から結論 C が導かれることを次のような形で表わす。
仮定 Γ, A, B は論理式の集合である。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & A & B \\ & \vdots & \\ & C & \end{array}$$

sequent 計算の体系

- 操作の対象は**列**である
- 論理結合子に関する推論規則の他に、式の構造についての規則、すなわち**構造規則** (weakening, contraction, exchange) を持つ
- 右入れと左入れの規則からなる

仮定 Γ, A, B から結論 C が導かれることを次のような形で表わす。
仮定 Γ, A, B は論理式列である。

$$\Gamma, A, B \to C$$

体系 NJ と体系 LJ のそれぞれで証明可能な論理式は同じである。このことは次の定理により保証される。

定理 2.5.1

任意の論理式 A に対し、A が NJ で証明可能であるときまたそのときに限り A は LJ で証明可能である。
また、これと同様に LK と NK との間に以下のような関係があることが知られている。

定理 2.5.2

任意の論理式 A に対し、A が NK で証明可能であるときまたそのときに限り A は LK で証明可能である。

第 3 章

自然演繹の体系とラムダ計算

3.1 証明図の正規化

自然演繹の体系での証明図はその結論となる論理式が同じであっても様々な証明図がありうる。実際、推論を無駄に繰り返すことにより同じ結論を持つ無数の証明図を作り出すことができる。

例 3.1.1 $A \supset B$ から$\neg B \supset \neg A$ に到る証明図

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \supset B}{B \cdots (a)}}{A \supset B}\,1(\supset I)}{B \cdots (b)}\,(\supset E) \qquad [\neg B]^3}{\dfrac{\perp}{\neg A}\,2}}{\neg B \supset \neg A}\,3
$$

この例において (a) より上の部分と (b) より上の部分の二つの証明図はともに A と $A \supset B$ から B に到る証明図になっていることがわかる。したがって、(b) より上の部分を (a) より上の部分の証明で置き換えることによって、より簡単な次の証明図が得られる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \supset B}{B} \qquad [\neg B]^2}{\perp}}{\neg A}\,1}{\neg B \supset \neg A}\,2
$$

上の証明図では番号の1のついたところで導入 $(\supset I)$ が行なわれ、それに引き続いて除去 $(\supset E)$ が行なわれている。これを一般的な形で表すとつぎのようになる。

1)

$$
\dfrac{P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}\right. \qquad \dfrac{\left.\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}\right\}P_2}{A \supset B}\ (\supset I)}{B}\ (\supset E)
$$

このような場合には証明図をつぎのように変形することによって、無駄のより少ない証明図を作ることができる。

2)

$$
\begin{array}{c}
P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right.\\
A\\
\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}P_2\\
B
\end{array}
$$

わざわざ導入して除去するならばその部分は簡単にすることができるし、無駄な部分であるとも言える。

同じことは他の論理記号についても行なうことができる。ある論理記号の導入 (P_1) に引き続き除去 (P_2) が行われる場合には、その部分の証明をより簡単な証明に置き換えることができる。これをその論理記号に関する**簡約**という。このようにしてできる無駄のない証明図を**正規な証明図**という。しかし、簡約を繰り返し行うことによりいつか必ずこれ以上簡約できない証明図が得られるということは必ずしも明らかではない。次に簡約の例をあげる。

例 3.1.2

($\wedge$に関する簡約)

$$
\dfrac{\dfrac{P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}\right\}P_2}{A \wedge B}\ (\wedge I)}{A}\ (\wedge E)
\quad \Longrightarrow \quad P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}\right.
$$

同様に $(\wedge E)$ で B が導かれる場合には、簡約により得られる証明図としてつぎのものをとる。

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}\right\}P_2$$

このように $\wedge$ の簡約の場合は簡約後の証明図は簡約前の証明図と比べ簡約できる個所の数は必ず一つ以上少なくなる。ところが、次の例のように必ずしもそうならない場合もある。

例 3.1.3

($\supset$ に関する簡約)

1)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}A\quad [A]\quad A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\supset B}\,(\supset I)}{B}\,(\supset E) \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \vdots & \\ A & A & A\\ & \vdots & \\ & B & \end{array}$$

2)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\quad [A]\quad [A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\supset B}\,(\supset I)}{B}\,(\supset E) \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma & \Gamma & \Gamma\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A & A & A\\ & \vdots & \\ & B & \end{array}$$

明らかに、1) の簡約の場合には簡約後の証明図は簡約前の証明図と比べ簡約できる箇所 (ある論理記号の導入に引き続き、除去が行われている箇所) の数は一つ以上少なくなっている。それに対し 2) のように Γ から A に至る証明図に簡約できる箇所がたくさんある場合には、このような簡約後の証明図の方が簡約できる箇所の数が多くなりうる。したがって簡約を次々に繰り返せば、いずれ正規な証明図が得られるかどうかは明らかではない。特に $\vee$ や $\exists$ を含む場合については簡約できない証明図が正規な証明図とは言えないことがわかっている。ここでは $\supset$ についてのみの正規な証明図というものを定義し、$\supset$ に関するものだけで議論していくこととする。

3.2 正規化定理 (normalization theorem)

定義 3.2.1 (正規な証明図 (normal proof figure))

$\supset$ の推論規則に制限した NJ または NK の証明図 P に $\supset$ に関する簡約が適用することができないとき、P は**正規な (normal)** 証明図であるという。

ここでは証明は行なわないが、Prawitz により次のような結果が示されている。

定理 3.2.1 (正規化定理 (normalization theorem))

与えられた証明図 (NJ または NK) に対し、それと同じ仮定と結論を持ちしかも正規であるような証明図を作る有限の手続きが存在する。

正規化定理は、うまく簡約を行えば正規な正規な証明図が得られることを主張している。しかし、実際には**どのような順序で簡約を行っても**正規な証明図が得られることが証明できることがわかっている。そこで次のようなことを言うことができる。

定理 3.2.2 (強い正規化定理 (strong normalization theorem))

与えられた証明図 (NJ または NK) に対し、どのような順序で簡約を行っても有限ステップで、同じ仮定と結論を持つ正規な証明図が得られる。

正規な証明図と cut のない証明図

　自然演繹の体系における無駄のない証明図は正規な証明図である。他方、sequent 計算の体系における無駄のない証明図とは cut を一つも含まない証明図である。よってこれら二つのタイプの証明図の間には密接な関係があることが予想される。LJ, LK の cut 定理は自然演繹の証明図と sequent 計算の証明図との間の関係を明らかにしている。その証明では sequent 計算の証明図 P から対応する自然演繹の証明図 Q を作る方法が具体的に与えられている。それを詳しく検討してみると、もし P が cut を含まないならば Q は正規であることがわかる。また P が cut を含む場合には、もし cut が次の形

$$\frac{\Gamma \to A \quad A, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta \to C}$$

とすると自然演繹体系は帰納法の仮定から $\tilde{\Gamma}(\subset \Gamma)$ から A に至る証明図 Q_1 と $\{A\} \cup \tilde{\Delta}$ から C に至る証明図 Q_2 が存在する。そこで

$$
\begin{array}{cccc}
 & \tilde{\Gamma} & & \\
Q_1\left\{\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \\ \end{array}\right. & & & \\
 & A & \tilde{\Delta} & \\
 & \multicolumn{2}{c}{\vdots} & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\}Q_2 \\
 & \multicolumn{2}{c}{C} &
\end{array}
$$

とすれば $\tilde{\Gamma} \cup \Delta$ から C に至る証明図ができる。しかし Q_1 の最後の推論規則がある論理記号の導入で、Q_2 の仮定 A に対して適用される推論規則が同じ論理記号の除去になっている場合にはこの証明図は正規にならない。しかし、上に述べた対応では P が cut を含む場合でも Q が正規になることもあるので、cut のない証明図と正規な証明図との間に完全な対応が成り立つわけではない。

3.3 ラムダ計算

ラムダ計算は関数の計算を一般的、抽象的にとりあつかう理論であり、帰納的関数の理論と深く結びついている。本研究で取り扱う直観主義論理の自然演繹体系 LJ とも深い関係がある。まず、ラムダ項とは次のように帰納的に定義される。

定義 3.3.1 ラムダ項 $(\lambda - term)$

1) 変数はラムダ項である

2) x が変数で M がラムダ項ならば、(λx,M) はラムダ項である

3) M および N がラムダ項ならば MN はラムダ項である

ラムダ項において括弧を省略することがあるがそこで注意しなければならない点がある。例えば、$MN_1N_2\cdots N_n$ というのがあった場合、これは括弧を左側から補って考える。つまり、実際は $((\cdots((MN_1)N_2)\cdots)N_n)$ の意味である。また、$\lambda x_1\lambda x_2\cdots\lambda x_n.M$ という場合には、括弧を右側から補い $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\cdots(\lambda x_n.M)\cdots)))$ というような解釈をする。それから与えられたラムダ項 M の部分項とは、M を構成する途中で現われるラムダ項のこととする。

3.3.1 ラムダ項に対する代入

ラムダ項に対して自由変数と束縛変数が定義される。いまラムダ項 P の中で変数 x が $(\lambda x.M)$ の形の P の部分項の中に出現するとき、この x の出現は P において束縛されている (bound) という。そうではない変数 x の出現は P において自由である (free) という。ラムダ項 P において変数 x のある出現が束縛されているとき、x は P の**束縛変数**であるといい、また変数 x のある出現が自由であるとき、x は P の**自由変数**であるという。ラムダ項の束縛変数は見かけ上の変数であるから、これを他の変数でおきかえてもそれが表している内容は変わらない。このような束縛変数の置き換えを繰り返し行なうことを**アルファ変換** $(\alpha - conversion)$ という。ラムダ項 P から束縛変数のおきかえを何回か（0 回でもよい）繰り返すことによりラムダ項 Q がえられるとき、$P =_\alpha Q$ と表し、Q は P からアルファ変換によりえられるという。次にラムダ項に対する代入を定義する。

定義 3.3.2 ラムダ項に対する代入

与えられたラムダ項 M, N と変数 x に対し、ラムダ項 $M[N/x]$ を次のように定義する。

1) $x[N/x] = N$

2) $y[N/x] = y$　(y は x と異なる変数)

3) $(PQ)[N/x] = (P[N/x])(Q[N/x])$

4) $(\lambda x.P)[N/x] = \lambda x.P$

5) $(\lambda y.P)[N/x] = \lambda y.(P[N/x])$　(y は x と異なる変数で、しかも y が N の中に自由な出現を持たないか､x が P の中に自由な出現を持たないとき——すなわち変数の衝突がおこらないとき)

6) $(\lambda y.P)[N/x] = \lambda z.((P[z/y])[N/x])$　(y は x と異なる変数で､5) 以外のとき——すなわち変数の衝突がおこるとき、ただし z は P にも N にも現われないような変数とする。)

例 3.3.1

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.yx)[yu/x] &= \lambda z.(((yx)[z/y])[yu/x]) \\
&= \lambda z.((zx)[yu/x]) \\
&= \lambda z.(z(yu))
\end{aligned}
$$

次にベータ簡約とベータ変換を定義する。

定義 3.3.3 ベータ簡約 *($\beta - contraction$)* とベータ変換 *($\beta - reduction$)*

ラムダ項 P に対するベータ簡約とは、P から P の中の $(\lambda x.M)N$ の形部分項を $M[N/x]$ でおきかえたラムダ項 P' をつくることを意味する。このとき、$P \Longrightarrow_{1\beta} P'$ と表わす。ラムダ項 P からベータ簡約とアルファ変換を何回か（0 回でもよい）繰り返すことによってラムダ項 Q がえられるとき、$P =_\beta Q$ と表し、Q は P からベータ変換により得られるという。

例 3.3.2

$$
\begin{array}{llll}
1) & (\lambda y.yuw)(\lambda x\lambda z.z(xx)) & \Longrightarrow_{1\beta} & (\lambda x\lambda z.z(xx))uw \\
 & & & (= ((\lambda x.(\lambda z.z(xx)))u)w) \\
 & & \Longrightarrow_{1\beta} & (\lambda z.z(uu))w \\
 & & \Longrightarrow_{1\beta} & w(uu)
\end{array}
$$

$$
2) \qquad (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \Longrightarrow_{1\beta} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)
$$

3.3.2 正規なラムダ項

例 3.3.2 の 1）より $(\lambda y.yuw)(\lambda x\lambda z.z(xx)) \Longrightarrow_{1\beta} w(uu)$ となるが、$w(uu)$ に対してはこれ以上ベータ簡約を行なえない。このようにベータ簡約を行なうことのできないラムダ項を**正規な (normal)** ラムダ項という。また、$M \Longrightarrow_{1\beta} N$ で N が正規であるとき、N を M の（一つの）**正規形 (normal form)** という。また、例 3.3.2 の 2）のように正規形を持たないラムダ項というのも存在する。
次に証明は行なわないがチャーチ・ローサーの定理というのを紹介する。

定理 3.3.1 チャーチ・ローサー *(A.Church, B.Rosser)* の定理
$M \Longrightarrow_\beta K_1, M \Longrightarrow_\beta K_2$($K_1, K_2$は正規形でなくともよい) があるとすると、必ずあるラムダ項 N が存在して
$K_1 \Longrightarrow_\beta N$ および $K_2 \Longrightarrow_\beta N$ がなりたつ。

3.3.3 型付きラムダ計算

次に型と型付きラムダ項を定義する。

定義 3.3.4 型 *(type)*
型は次のように帰納的に定義される。

1) 変数は $a, b, c, \cdots$ は型である。

2) A と B が型のとき、$A \to B$ は型である。

混乱を生じない限り括弧を省略してもよいことにする。例えば、$(A_1 \to (A_2 \cdots (A_n \to B) \cdots))$ を $A_1 \to A_2 \to \cdots A_n \to B$ と略す。次に型付きラムダ項とその項の持つ型を定義する。

定義 3.3.5 型付きラムダ項 *(typed λ-term)*
型付きラムダ項とその型は次のように帰納的に定義される。

1) 型 A を持つ変数はすべて型付きラムダ項であり、その型は A である。

2) x が型を持つ変数で M が型 B を持つ型付きラムダ項ならば、$(\lambda x.M)$ は型 $A \to B$ を持つ型付きラムダ項である。

3) M および N がそれぞれ型 $A \to B$ と型 A を持つ型付きラムダ項ならば、(MN) は型 B を持つ型付きラムダ項である。

例 3.3.3

x と y をそれぞれ型 $A \to B$ と型 A を持つ型変数とする。このとき (xy) は型 B を持つので、$\lambda x.(xy)$ は型 $(A \to B) \to B$ を持つ。さらに$\lambda y \lambda x.(xy)$ は型 $A \to (A \to B) \to B$ を持つ。ところが、M を型 C を持つ型付きラムダ項とした時に、(MM) という表現は型付きラムダ項の定義の型に関する条件を満たしていないので、型付きラムダ項ではない。
上で述べた型付きラムダ項とその型との関係を明らかにするために、型付きラムダ項を図で表現することを考える。その図のことを**ラムダ項の図表示**とよぶことにする。

$(\supset I)$

NJ の証明図	型付きラムダ項の図表示
$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}$$	$$\dfrac{\begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots \\ M : B\end{array}}{\lambda x.M : A \to B}$$

$(\supset E)$

NJ の証明図	型付きラムダ項の図表示
$\dfrac{A \supset B \quad A}{B}$	$\dfrac{M : A \to B \quad N : A}{(MN : B)}$

ここで、ラムダ項の図表示内の $\to$ を $\supset$ でおきかえて、型付きラムダ項を全部消すと同じ形になるのである。任意の型付きラムダ項と NJ の証明図との間には以下のような定理が成り立つ。

定理 3.3.2

任意の型付きラムダ項は一つの ($\supset$ のみを論理記号として持つ)NJ の証明図を定める。特に、与えられた型付きラムダ項の型が A であるときにはそれに対応する NJ の証明図の結論は論理式 A である。一般に、M が自由変数 $x_1, \ldots, x_n$ を含む型付きラムダ項でその型が A であり、さらに $x_1, \ldots, x_n$ はそれぞれ型 $B_1, \ldots, B_n$ と持つとするならば、M に対応する NJ の証明図は仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A に至る証明図である。

型付きラムダ項 M に対して定理 3.3.2 により定められる NJ の証明図を $\Phi(M)$ と表わしておく。

定理 3.3.3

論理式 A に至る NJ の証明図 P が型付きラムダ項 M により表現されていると仮定する。これを $\Psi(P) = M$ とする。このとき $\Phi(M) = P$ が成り立つ。したがって、型付きラムダ項に対し NJ の証明図を与える対応 Φ と、NJ の証明図に対し型付きラムダ項を与える対応 Ψ とは逆対応の関係にある。正確には $\Phi(\Psi(P)) = P$ および $\Psi(\Phi(M)) = M$ が成り立つ。

定理 3.3.2 と定理 3.3.3 により得られた型付きラムダ項と NJ の証明図の間の対応関係は**カリー・ハワードの同型対応 (Curry-Howard isomorphism)** とよばれる。

3.4 正規な証明図と正規なラムダ項

今 x および N が型 A を持ち M が型 B を持つとする。このとき、型付きラムダ項 $(\lambda x.M)N$ の図表示は次のように与えられる。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[x:A]\\ \vdots\\ M:B\end{matrix}}{\lambda x.M : A \to B} \quad \begin{matrix}\vdots\\ N:A\end{matrix}}{(\lambda x.M)N : B}$$

これに対し、$(\lambda x.M)N$ からベータ簡約で得られる型付きラムダ項 $M[N/x]$ の図表示は

$$\begin{matrix}\vdots\\ N:A\\ \vdots\\ M[N/x]:B\end{matrix}$$

のようになる。

ここで上の二つの図表示に対応する NJ の証明図について考えてみると、これは証明図における $\supset$ の簡約にほかならない。逆に、NJ の証明図に対する $\supset$ の簡約は、それを型付きラムダ項で表現するとちょうどベータ簡約になっている。

したがって、カリー・ハワードの対応においてさらに、正規な型付きラムダ項に対し正規な証明図を与える対応 Φ' と、正規な証明図に対し正規な型付きラムダ項を与える対応 Ψ' とは逆対応の関係にある。

よって定理 3.2.1 と定理 3.2.2 より型付きラムダ項に関する次の定理が得られる。

定理 3.4.1 (型付きラムダ計算における正規化定理 (Normalization theorem)) 与えられた型付きラムダ項からベータ変換により正規な型付きラムダ項を得る有限の手続きが存在する。

定理 3.4.2 (型付きラムダ計算における強い形の正規化定理 (Strong normalization theorem)) 与えられた型付きラムダ項に対し、どのようにベータ変換を行っても有限ステップで必ず正規な型付きラムダ項が得られる。

第 4 章

部分構造論理 FLec の変数共有性

4.1 部分構造論理 FLec の体系

部分構造論理とは、ある体系から構造に関する規則の一部または全部を取り除いたものである。部分構造論理 FLec の体系というのは LJ(FLecw) の体系から w （weakening）の構造規則を取り除いた体系である。ただし、weakening か contraction を許さない体系での式の左辺のコンマを論理結合子として扱う場合がある。その場合には論理結合子として融合積 (fusion) の $*$ などを用いる。$*$ についての推論規則は

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, A * B, \Sigma \to C}\ (* \to) \quad \frac{\Gamma \to A \quad \Sigma \to B}{\Gamma, \Sigma \to A * B}\ (\to *)$$

とする。weakening があれば $A * B \to A \wedge B$ が証明可能になり、contraction があれば $A \wedge B \to A * B$ が証明可能になる。したがって LJ では $A * B$ と $A \wedge B$ とは論理的同値になり、$*$ は普通の $\wedge$ に一致することになる。

また、部分構造論理 FLec において cut 除去定理が成り立つということが知られているので、FLec の証明図において cut のない証明図というものを考えることができる。

論理体系 **L** が変数共有性（variable sharing property）を持つとは、任意の仮定の集合 Γ(ただし、$\Gamma \neq \emptyset$) および論理式 A に対し、$\Gamma \vdash A$ が **L** で証明可能なとき、必ず Γ と A に共通に現われる変数が存在することをいう。これは $V(\Gamma) \cap V(\{A\}) \neq \emptyset$ と表される。ただし、$V(\Delta)$ は Δ に含まれる論理式に現われる命題変数全体の集合である。

例えば古典論理や直観主義論理は変数共有性を持たない。実際

$$p \wedge \neg p \to q$$

は古典論理のシーケント計算 LK において証明可能であるが、明らかに両辺に共通な変数は存在しない。実際このシーケント計算に対する証明は次のように与えられる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{p, \neg p \to}}{p \wedge \neg p, p \wedge \neg p \to}\ (contraction)}{p \wedge \neg p \to}\ (weakening)}{p \wedge \neg p \to q}$$

この証明からわかるように、最後に適用された $weakening$ 規則が変数共有性のなりたたない原因になっていると考えられる。

4.2 FLec の変数共有性

以下では FLec に対する sequent 計算と、その cut 除去定理を用いて FLec の変数共有性を示そう。この結果はまず成瀬により 1996 年に得られた。（文献 [7] 参照。）この結果と証明方法は 5 章、6 章の内容に深く関わっているのでその証明の詳細を以下に与えておく。

定理 4.2.1 定理（FLec の変数共有性）

$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であり、さらに $\Gamma \to A$ が命題定数を含まないならば、$V(\Gamma) \cap V(A)$ は空でない。(ただし、$\Gamma \neq \emptyset$)

系 4.2.1

$weakening$ を持たない部分構造論理 FL,FLe,FLec では変数共有性が成り立つ。

このことを示すには、FLec が変数共有性を持つことのみを示せばよい。なぜなら、例えば FLec の変数共有性は、つぎのようにして導くことができる。$\Gamma \neq \emptyset$ に対し、FLe で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であれば、FLec でも $\Gamma \vdash A$ は証明可能になる。ここで FLec の変数共有性を用いれば $V(\Gamma) \cap V(A) \neq \emptyset$ が得られる。したがって、FLe の変数共有性が導かれる。

FLec の変数共有性の証明を以下に与える。$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であるとする。FLec

のカット除去定理より $\Gamma \to A$ はカットのない証明図 $\mathbf{P}$ をもつ。すると、明らかに $\mathbf{P}$ は命題定数の始式も規則も含んでいない。ここで***good*** な sequent という概念を次のように定義する。

定義 4.2.1 (good sequent) $\mathbf{P}$ の中の *sequent* $\Pi \to \Lambda$ が***good*** とは、$\Pi \to \Lambda$ の中には二つ以上の論理式が現われることとする。
（つまり、 ΠとΛがともに空でない、もしくは Λ が空なら Π は少なくとも二つ以上の論理式が現われることとする。）

仮定より $\Gamma \to A$ は ***good***であり、また始式は全て***good*** であることを注意しておく。

さらに、$\mathbf{P}$ の中の sequent のなす枝が***good*** とは、この枝に属すすべての sequent が***good*** であることをいう
この時以下のことを示すことができる。

補助定理 1. $\mathbf{P}$ の中のどの***good*** sequent も始式に到る***good*** な枝が存在する

これは FLec の各推論規則のそれぞれに対し、下式が***good*** なときに、上式が***good*** になることを示せばよい。($\supset$ 左) と（$*$右）の規則については、上式の一方の sequent が***good*** にならない場合もあるが、少なくとも一方は必ず***good*** な sequent になる。weakening 規則がある場合はこのことは一般的に成り立たなくなる。
ここで**分割 (partition)** を以下のように定義する。

定義 4.2.2 (分割 (partition))

sequent $\Pi \to \Lambda$ の分割とは、
・Λ が一つの論理式からなるとき

$$\langle \Pi_1; \Pi_2 \cup \Lambda \rangle \qquad (\text{ただし、}\Pi_1 \neq \emptyset)$$

・$\Lambda = \emptyset$ がのとき

$$\langle \Pi_1; \Pi_2 \rangle \qquad (\text{ただし、}\Pi_1 \neq \emptyset, \Pi_2 \neq \emptyset,)$$

これらをまとめて、

$$\langle \Pi_1; \Pi_2 \cup \Lambda \rangle \qquad (\text{ただし、}\Pi_1 \neq \emptyset \text{かつ} \Pi_2 \cup \Lambda \neq \emptyset)$$

とする。
また、$\Pi \to \Lambda$ の分割 $\langle \Pi_1; \Pi_2 \cup \Lambda \rangle$ が変数を共有するということを以下のように定義する。

定義 4.2.3

$\Pi \to \Lambda$ の分割 $\langle \Pi_1; \Pi_2 \cup \Lambda \rangle$ が変数を共有するとは、

$$V(\Pi_1) \cap V(\Pi_2 \cup \Lambda) \neq \emptyset$$

であることとする。

4.3 変数共有性の証明

次に以下の補助定理の証明を与える。
補助定理 2. $\mathbf{P}$ の中のどんな***good***な sequent $\Pi \to \Lambda$ において $\Pi \to \Lambda$ の全ての分割は変数を共有する。
$\mathbf{P}$ の中の一つの***good*** sequent $\Pi \to \Lambda$ の出現の深さが m であるとは、その $\Pi \to \Lambda$ に到る***good***な枝の長さのなかで最大なものが m であることとする。補助定理 2 は与えられた***good*** sequent の深さ m に関する帰納法による。したがって、深さが m 未満の全ての***good*** sequent およびその全ての分割に対し、変数共有性が成り立つと仮定する。

1. m が 1 の時、すなわち始式のときは変数共有性はあきらかである。
以下では $m > 1$ とする。
2. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{A, A, \Gamma \to B}{A, \Gamma \to B}\ (c \to)$$

の下式の形をしている場合。
まず、$A, \Gamma \to B$ が***good*** だとすると、$A, A, \Gamma \to B$ は A がついただけなので、明らかに***good*** である。

$\Pi \to \Lambda$ の分割として
まず

$$(1) \qquad \langle \Gamma_1, ; \Gamma_2 \cup \{A, B\} \rangle$$

をとる。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。
この時 Γ_1 は空でないので、上式の

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A, A, B\} \rangle$$

という分割を考える。すると帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, A, B\}) \neq \emptyset$$

であるが、 これは当然

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, B\}) \neq \emptyset$$

とも言える。
次に $\Pi \to \Lambda$ の分割として

$$(2) \qquad \langle \{A\} \cup \Gamma_1, ; \Gamma_2 \cup \{B\} \rangle$$

をとる。この時上式の分割として

$$\langle \{A, A\} \cup \Gamma_1, ; \Gamma_2 \cup \{B\} \rangle$$

をとる。
すると、帰納法の仮定より

$$V(\{A, A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{B\}) \neq \emptyset$$

が言え、よって当然

$$V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{B\}) \neq \emptyset$$

も言える。よって、この場合の変数共有性が言えた。

3. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, B, A, \Sigma \to C} \ (e \to)$$

の下式の形をしている場合。
この場合は A と B が入れ替わるだけなので、下式が***good***なら明らかに上式も***good***である。
また、変数共有性についても明らかなのでここでは省略する。

4. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, A, \to C}{\Gamma, A \wedge B, \to C}\ (\wedge 1 \to)$$

の下式の形をしている場合。この時上式が***good***になるのは明らかである。

4a. $\Pi \to \Lambda$ の分割として

$$(1) \qquad \langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A \wedge B, C\} \rangle$$

をとる。ただし、Γ は Γ_1とΓ_2 の多重集合の和であり、また $\Gamma_1 \neq \emptyset$ であるとする。
このとき上式の分割として、

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A, C\} \rangle$$

を考える。すると帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, C\}) \neq \emptyset$$

がいえる。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, C\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B, C\})$$

であるから

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B, C\}) \neq \emptyset$$

が言える。

4b. $\Pi \to \Lambda$ の分割として

$$(2) \qquad \langle \{A \wedge B\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

を考えるとき
このとき上式の分割として

$$\langle \{A\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

をとる。すると帰納法の仮定より

$$V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \neq \emptyset$$

が言える。すると

$$V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \subseteq V(\{A \wedge B\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}$$

より

$$V(\{A \wedge B\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\} \neq \emptyset$$

が言える。よって、この場合の変数共有性が言えた。

5.　$\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, B, \Sigma \to C}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \to C}\ (\wedge 2 \to)$$

の下式の形をしている場合。

これは、$(\wedge 1 \to)$ と同様に考えることができる。上式の B を A に置き換えるだけなので省略する。

6.　$\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ (\to \wedge)$$

の下式の形をしている場合。

Γ は空でないので、$\Gamma \to A$ および$\Gamma \to B$ はともに***good***になる。

$\Pi \to \Lambda$ の分割は

$$\langle \Gamma_1 ; \Gamma_2 \cup \{A \wedge B\} \rangle$$

の形に限られる。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。

このとき Γ_1 は空ではない。この時の左上式 $\Gamma \to A$ の分割として

$$\langle \Gamma_1 ; \Gamma_2 \cup \{A\} \rangle$$

をとる。すると、この分割は帰納法の仮定から

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B\})$$

であることより

$$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B\}) \neq \emptyset$$

が言える。$\Gamma \to B$ の分割については、$\Gamma \to A$ のときと同様な分割を考えることができるのでこの場合の変数共有性が言える。

次に $\Pi \to \Lambda$ の分割として

7. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma \to A \quad B, \Sigma \to C}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to C}\ (\supset\to)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式について次のような分割を考える。ただし、Γ および Σ はそれぞれ Γ_1 と Γ_2、Σ_1 と Σ_2 の多重集合の和であるとする。

7a. 下式の分割として

$$(1) \qquad \langle \{A \supset B\} \cup \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \Gamma_2 \cup \Sigma_2 \rangle$$

を考える

Γ が空の場合には、左上式の $\Gamma \to A$ は***good***にならないが、右上式 $B, \Sigma \to C$ はいつも***good***になるので

右上式の分割として

$$\langle \{B\} \cup \Sigma_1; \Sigma_2 \rangle$$

をとると、これは帰納法の仮定より

$$V(\{B\} \cup \Sigma_1) \cap V(\Sigma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると

$$V(\{B\} \cup \Sigma_1) \cap V(\Sigma_2) \subseteq V(\{A \supset B\} \cup \Sigma_1) \cap V(\Sigma_2)$$

であるから

$$V(\{A \supset B\} \cup \Sigma_1) \cap V(\Sigma_2) \neq \emptyset$$

が言える。

7b. 下式の分割として

$$(2) \qquad \langle \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2 \rangle$$

をとるとき

１）Σ_1 が空でないならば、右上式の分割

$$\langle \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \{B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2 \rangle$$

は帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\{B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると

$$V(\Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\{B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2)$$

であるから、

$$V(\Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2) \neq \emptyset$$

が言える。

2)Σ_1 が空なら Γ_1 が空でないので、左上式が***good***でなければならない。

このときの左上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma) \neq \emptyset$$

がいえる。$\Sigma_1 = \emptyset$より$\Sigma_2 = \Sigma$ だから

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2)$$

であるから

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2) \neq \emptyset$$

が言える。よって、この場合の変数共有性が言える。したがって、以上のことより ($\supset\rightarrow$) の場合の変数共有性が言えた。

8. $\Pi \rightarrow \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}\ (\rightarrow\supset)$$

の下式の形をしている場合。

このとき上式が***good***になるのは明らかである。$\Pi \rightarrow \Lambda$ の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とする。ただし、Γ は Γ_1とΓ_2 の多重集合の和であるとする。また、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ である。

このとき上式の分割として

$$\langle \Gamma_1; \{A, B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

をとると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A, B\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

がいえる。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A, B\} \cup \Gamma_2) = V(\Gamma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2)$$

であるから

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言える。よって、この場合の変数共有性が言えた。

9.　$\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{A, \Gamma \to C \quad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C} \ (\vee \to)$$

の下式の形をしている場合。
このとき下式が ***good***なら、両上式が ***good*** になるのは明らかである。
このとき下式の分割を考える。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。
9a.　下式の分割を

$$(1) \qquad \langle \Gamma_1; \{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

としたとき。ただし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。
このときまず左上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\}) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\})$$

なので、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\}) \neq \emptyset$$

も言える。よって変数共有性が言える。

9b.　下式の分割を

$$(2) \qquad \langle \{A \vee B\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

としたとき。

このときは左上式の分割を

$$\langle \{A\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \subseteq V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\})$$

なので、

$$V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \neq \emptyset$$

も言える。よって変数共有性が言える。したがって、以上のことより $(\vee \rightarrow)$ の場合の変数共有性が示された。

10.　$\Pi \rightarrow \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \ (\rightarrow \vee 1)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good*** なら、上式が ***good*** になるのは明らかである。

このとき下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_2)$$

なので、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A \vee B\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

も言える。よって $(\to \vee 1)$ の場合の変数共有性が言えた。

11. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\ (\to \vee 2)$$

の下式の形をしている場合。
これは 10. の場合の A を B に変えると全く同じことが言えるので省略する。

12. $\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}\ (\neg \to)$$

の下式の形をしている場合。
このとき下式が ***good***なら、上式が ***good*** になるのは明らかである。
下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。このとき下式の分割を

$$(1) \qquad \langle \Gamma_1; \{\neg A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とする。このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\{\neg A\} \cup \Gamma_2)$$

なので、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{\neg A\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

も言える。
次に下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_2 \neq \emptyset$ とする。

$$(2) \qquad \langle \Gamma_1 \cup \{\neg A\}; \Gamma_2 \rangle$$

このときの上式の分割を

$$\langle \Gamma_2; \Gamma_1 \cup \{A\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{A\}) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{A\}) \subseteq V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{\neg A\})$$

なので、

$$V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{\neg A\}) \neq \emptyset$$

も言える。よって $(\neg \rightarrow)$ の場合の変数共有性が言えた。

13.　$\Pi \rightarrow \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A}\ (\rightarrow \neg)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good***なら、上式が ***good*** になるのは明らかである。

下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ はΓ_1とΓ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

このとき下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{\neg A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

のとする。このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A\} \cup \Gamma_2) = V(\Gamma_1) \cap V(\{\neg A\} \cup \Gamma_2)$$

なので、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{\neg A\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

も言える。

よって $(\to \neg)$ の場合の変数共有性が言えた。

14.　$\Pi \to \Lambda$ が

$$\frac{\Gamma, A, B \to C}{\Gamma, A * B \to C}\ (* \to)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good***なら、上式が ***good*** になるのは明らかである。

下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

14a.　下式の分割を

$$(1) \qquad \langle \Gamma_1; \{A * B, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

としたとき。

このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A, B, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A, B, C\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

である。すると、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A, B, C\} \cup \Gamma_2) = V(\Gamma_1) \cap V(\{A * B, C\} \cup \Gamma_2)$$

であるから、

$$V(\Gamma_1) \cap V(\{A * B, C\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言えるのでこの場合の変数共有性が言える。

14b.　下式の分割を

$$(2) \qquad \langle \{A * B\} \cup \Gamma_1; \{C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

としたとき。

このとき上式の分割を

$$\langle \{A, B\} \cup \Gamma_1; \{C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$V(\{A, B\} \cup \Gamma_1) \cap V(\{C\} \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$$

が言える。すると

$$V(\{A,B\}\cup\Gamma_1)\cap V(\{C\}\cup\Gamma_2)=V(\{A*B\}\cup\Gamma_1)\cap V(\{C\}\cup\Gamma_2)$$

であるから、

$$V(\{A*B\}\cup\Gamma_1)\cap V(\{C\}\cup\Gamma_2)\neq\emptyset$$

が言える。以上のことより $(*\rightarrow)$ の場合の変数共有性が示された。

15.　$\Pi\rightarrow\Lambda$ が

$$\Gamma,\Sigma\rightarrow A*B$$

の形をしている場合つまり、 $(\rightarrow *)$ の場合。

$$\frac{\Gamma\rightarrow A \quad \Sigma\rightarrow B}{\Gamma,\Sigma\rightarrow A*B}\ (\rightarrow *)$$

$\Gamma,\Sigma\rightarrow A*B$ の分割として、

$$\langle\Gamma_1,\Sigma_1;\Gamma_2,\Sigma_2,A*B\rangle$$

をとる。ただし、Γ および Σ はそれぞれ Γ_1 と Γ_2、Σ_1 と Σ_2 の多重集合の和であるとする。このとき以下のように場合わけをして考える。

15a.　Σ_1 が空、したがって Γ_1 が空でないとき。

このとき左上式は***good***である。このとき $\Gamma\rightarrow A$ の分割として $\langle\Gamma_1;\Gamma_2,\{A\}\rangle$ をとる。すると帰納法の仮定より

$$V(\Gamma_1)\cap V(\Gamma_2,\{A\})\neq\emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Gamma_1)\cap V(\Gamma_2\cup\{A\})\subseteq V(\Gamma_1\cup\Sigma_1)\cap V(\Gamma_2\cup\Sigma_2\cup\{A*B\})$$

であるから、

$$V(\Gamma_1\cup\Sigma_1)\cap V(\Gamma_2\cup\Sigma_2\cup\{A*B\})\neq\emptyset$$

が言える。よって、この場合は変数を共有することが言える。

15b.　Σ_1 が空でないとき

この場合は右上式 $\Sigma\rightarrow B$ は***good***である。このとき $\Sigma\rightarrow B$ の分割として $\langle\Sigma_1;\Sigma_2,\{B\}\rangle$ をとる。すると、帰納法の仮定より

$$V(\Sigma_1)\cap V(\Sigma_2\cup\{B\})\neq\emptyset$$

が言える。すると、

$$V(\Sigma_1)\cap V(\Sigma_2\cup\{B\})\subseteq V(\Gamma_1\cup\Sigma_1)\cap V(\Gamma_2\cup\Sigma_2\cup\{A*B\})$$

であるから

$$V(\Gamma_1\cup\Sigma_1)\cap V(\Gamma_2\cup\Sigma_2\cup\{A*B\})\neq\emptyset$$

が言える。よって、この場合の変数共有性が言える。両上式が ***good*** の場合はどちらかと同様に考えれば変数共有性が言える。
以上のように全ての推論規則の場合でも変数共有性が言えた。したがって、補助定理２が言えたので FLec の変数共有性が導かれた。

第 5 章

自然演繹を用いた変数共有性の証明

シーケント計算 FLec を用いた場合には変数共有性を示すことができたが、これと同じように自然演繹を用いてこれを示すことを試みた。 weakening ルールを許さない FLec に対応する自然演繹体系である Nec の体系を考えた。ところが、Nec の normal な証明図を用いて証明図の長さに関する帰納法で証明を行なおうとすると困難が生ずる。そこで、Nec の証明図に制限を加えた体系である Nec^* を導入した。さらに帰納法をうまく適用するめにはシーケント計算の証明の場合と同様に分割 (partition) の概念を用いる必要がある。しかし、以下の証明は Nec^* の証明図の形に大きく依存するため、証明が成功したのは現在のところ ⊃(ならば) のみを含む論理式の場合に限られている。

5.1 自然演繹体系 Nec とそれに対するラムダ項

ここでは、部分構造論理に対応するようなラムダ項を考えて定義し、ラムダ項の正規形（normal form）も強い形で定義する。そして、それに対応する自然演繹の体系を導入し議論していく。

5.1.1 自然演繹体系 Nec

weakening を持たない部分構造論理の自然演繹演繹体系 Nec を導入する。基本的に推論規則は NJ と同じである。ただし、⊃(ならば) の導入についてのみ制限がある。

Nec の推論規則 (⊃ の導入)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \supset B}\ (\supset I)$$

ただし、少なくとも一つ以上の仮定 A をキャンセルする。
また、Nec と FLec においては⊃（ならば）の部分において、同等になることが言える。
このことは定理 2.5.1 と同様に証明できる。
NJ とラムダ項の間にはカ リー･ハワードの同型対応が成り立ったが、次のように $ec-term$ を定義することにより、Nec の証明図と $ec-term$ の間にも対応が成立する。

5.1.2 $ec-term$ の定義

自然演繹 Nec の証明に対応するラムダ項（$ec-term$）を次のように定 義する。

定義 5.1.1 ($ec-term$)

1) 変数は $ec-term$ である。

2) M、N が $ec-term$ ならば、(MN) は $ec-term$ である。

3) x が変数 M が x の自由出現を持つ $ec-term$ ならば、$\lambda x.M$ は $ec-term$ である。

例えば、$\lambda x.x$ は $ec-term$ だが､$\lambda x.y$ は $ec-term$ ではない。
Nec でも定理 3.2.1、定理 3.2.2 のような正規化定理が成り立つ。ところが、Nec の正規な証明図 を用いたのでは変数共有性を証明することができない。そこでラムダ項について知られているそこでラムダ項について知られている strong β -normal form の考え方を用いる。

5.1.3 strong β -normal form の定義

strong β -normal form を次のように定義する。 尚、strong β -normal form を略して s.β -n.f. と表記することにする。

定義 5.1.2 (strong β -normal form)

1) 変数は s.β -n.f. である。

2) $M_1, \cdots, M_n$ が s.β -n.f. で y が変数ならば、$yM_1, \cdots M_n$ は s.β -n.f. である。

3) M が s.β -n.f. で、x が変数ならば、$\lambda x.M$ は s.β -n.f. である。

また、次の結果が知られている。（例えば文献 [2] を参照）

定理 5.1.1 任意の *s.β -n.f.* は β *-n.f.* である。逆に任意の β *-n.f.* は *s.β -n.f.* として表される。

5.1.4 strong $ec - term$ の定義

定義 5.1.1 と定義 5.1.2 をあわせると次の strong $ec - term$ の定義が得られる。

定義 5.1.3 (strong $ec - term$)

1) 変数は strong $ec - term$ である。

2) $M_1, \cdots, M_n$ が strong $ec - term$ で y が変数ならば、$yM_1, \cdots M_n$ は strong $ec - term$ である。

3) x が変数で M が x の自由出現を少なくとも一つ持つ strong $ec - term$ であるならば、$\lambda x.M$ は strong $ec - term$ である。

例 5.1.1

1) $\lambda x.y(xz)$ は strong $ec - term$ である。

2) $\lambda x.y(wz)$ は s.β -n.f. であるが、strong $ec - term$ ではない。

strong $ec - term$ にちょうど対応するような証明を持つ 自然演繹 の体系 Nec* を次に導入する。

5.2 自然演繹体系 Nec*

$(\supset)$ のみを論理結合子として持つ自然演繹の体系 Nec* は次の二つの規則からなる。

($\supset$ の導入)

($\supset$ の除去)

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\ (\supset I) \qquad \dfrac{A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset C \qquad \begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A_1 & \cdots\cdots & A_n\end{matrix}}{C}\ (\supset E^*)$$

ただし、$(\supset I)$ において少なくとも一つの A をキャンセルしなければならない。

例) Nec および Nec* のそれぞれにおける $(p \supset p \supset q) \supset (p \supset q)$ の証明は次のようになる。

(Nec) (Nec*)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \supset p \supset q]^2 \qquad [p]^1}{p \supset q} \qquad [p]^1}{q}}{p \supset q}\ 1}{(p \supset p \supset q) \supset (p \supset q)}\ 2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \supset p \supset q]^2 \qquad [p]^1 \qquad [p]^1}{q}}{p \supset q}\ 1}{(p \supset p \supset q) \supset (p \supset q)}\ 2$$

また、ここでは証明は行なわないが、次のような定理が得られる。

定理 5.2.1

任意の論理式 A に対し、Nec* で証明可能であるときまたそのときに限り A は Nec で証明可能である。

定理 5.2.2

Nec で $\Gamma \vdash A$ が証明可能ならば、$\Gamma \vdash A$ に対する次の形の Nec* の証明図が存在する。

$$
\dfrac{\begin{array}{c} D_2 \supset \cdots \supset D_{m-1} \supset D_m \supset B \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset B \qquad \begin{array}{c}\Theta_1[\Delta_1] \\ \vdots\ \mathbf{P_1} \\ C_1\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\Theta_n[\Delta_n] \\ \vdots\ \mathbf{P_n} \\ C_n\end{array}}{B}\,(\supset E^*)}{D_m \supset B}\,(\supset I)\cdots(*)}{D_{m-1} \supset D_m \supset B}\,(\supset I) \end{array}}{D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_{m-1} \supset D_m \supset B}\,(\supset I)
$$

ただし、各 i に対し $\Theta_i[\Delta_i]$ は仮定 Θ_i, Δ_i から C_i への正規な証明図 $\mathbf{P}_i$ で、Θ_i, Δ_i は C_i に到る証明でキャンセルされない仮定全体、さらに仮定 Θ_i, Δ_i のうち Δ_i は $(*)$ 以下の $(\supset I)$ によりキャンセルされるもの全体とする。また、$m, n \geq 0$ である。
したがって、$\Gamma = \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_m (\cup \{C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B\}), A = D_1 \supset \cdots D_n \supset B$ となる。ここで、$C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B$ は $(*)$ 以下の $(\supset I)$ によりキャンセルされている場合もありうるため括弧をつけてある。

5.3 Nec* を用いた変数共有性の証明

ここで分割 (partiton) を定義する。

定義 5.3.1 分割 *(partiton)*
仮定の有限集合 Π の分割とは $\langle \Pi_1; \Pi_2 \rangle$ の形の表現である。ただし、Π_1 は Π の多重集合としての空でない部分集合であり、Π_2 は Π から Π_1 を除いて得られる多重集合とする。以下で Γ,Δ を論理式の多重集合（*multiset union*）としたとき、$\Gamma \cup \Delta$ および $\Gamma \cap \Delta$ は Γ と Δ の多重集合としての和および共通部分を表す。

定理 5.3.1 (Nec* の変数共有性（variable sharing property）)

Nec* で、$\Gamma \vdash A$ が証明可能であるとする。Γ の 任意の分割 $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ に対し、$V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \neq \emptyset$ が成り立つ。したがって、とくに $V(\Gamma) \cap V(\{A\}) = \emptyset$ が成り立つ。(た

だし、$V(\Delta)$ は Δ に含まれる論理式に現われる命題変数全体の集合を表す)

[証明]

定理 5.3.1 を証明の長さに関する帰納法を用いて示す。定理 5.2.2 の図を使って考える。
まず、$n=0$ の場合について考える。このとき証明図は B のみからなる。つまりこの証明図は $B \vdash B$ の証明となっている。Γ すなわち $\{B\}$ の分割は $\langle \{B\}, \emptyset \rangle$ のみである。したがって、この場合 $V(\{B\}) \cap V(\{B\}) \neq \emptyset$ は明らかである。
そこで以下では $n>0$ と考えてよい。いま Γ の分割として $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ をとる。($\Gamma_1 \neq \emptyset$)
$\Gamma = \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_m (\cup \{C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B\})$ であるが、Γ_1 の選び方に応じて以下のような場合分けをして考える。

I. case A : $\Gamma_1 \subseteq \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_m$ のとき
このとき明らかに $\Gamma_1 \cap \Theta_i \neq \emptyset$ となる i が存在する。この i に対し、Θ_iとΔ_iから C_i を導く証明について考える。
いま $\Theta_i \cup \Delta_i$ の分割として $\langle \Gamma_1 \cap \Theta_i, \Sigma_i \rangle$ をとる。ただし、Σ_iは$\Theta_i \cup \Delta_i$から$\Gamma_1 \cap \Theta_i$ を除いて得られる多重集合とする。
Θ_i, Δ_i から C_i に到る証明図 $\mathbf{P}_i$ は Γから A に到る証明図 $\mathbf{Q}$ より明らかに短い。したがって、Θ_i, Δ_i から C_i に到る証明図 $\mathbf{P}_i$ に対し帰納法の仮定を用いることができる。
帰納法の仮定より

$$q \in V(\Gamma_1 \cap \Theta_i) \cap V(\Sigma_i \cup \{C_i\}) \neq \emptyset$$

となるような q が存在する。このとき

$$q \in V(\Gamma_1 \cap \Theta_i) \subseteq V(\Gamma_1)$$

である。また、$q \in V(\Sigma \cup \{C_i\})$ であり Σ_i は $\Gamma_2 \cap \Theta_i$ と Δ_i からなっている。そこで q がどの論理式に属するかにより次のように場合分けして考える。

1) $q \in V(\Gamma_2 \cap \Theta_i)$ のとき

$$q \in V(\Gamma_2) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A\})$$

ゆえに、

$$q \in V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \tag{5.1}$$

2)　$q \in V(\Delta_i)$ のとき

$$\Delta_i \subseteq \{D_1, \ldots, D_n\}$$

であるから、ある k に対して、

$$q \in V(\{D_k\})$$

となる。ところが

$$A \equiv D_1 \supset \cdots \supset D_n \supset B$$

だから

$$V(\{D_k\}) \subseteq V(\{A\})$$

したがって

$$q \in V(\{A\})$$

ゆえに

$$q \in V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \tag{5.2}$$

3)　$q \in V(\{C_i\})$ のとき
さらに $C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B$ がキャンセルされていない場合とそうでない時に分けて考える。
(1)　$C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B$ がキャンセルされていないとき

$$C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B \in \Gamma_2$$

より

$$q \in V(\Gamma_2) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A\})$$

ゆえに

$$q \in V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \tag{2.3.1}$$

(2) $C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B$ がキャンセルされているとき
ある j に対し、$D_j \equiv C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B$ となっている。よって、

$$q \in V(\{C_i\}) \subseteq V(\{D_j\}) \subseteq V(\{A\}) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A\})$$

ゆえに

$$q \in V(\Gamma_2 \cup A) \tag{2.3.2}$$

したがって、1),2),3) のいずれの場合も

$$q \in V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup A)$$

がいえた。

II. case B: $C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B \in \Gamma_1$ のとき

$$V(\{B\}) \subseteq V(\{C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset B\}) \subseteq V(\Gamma_1) \text{ であり、また}$$

$$V(\{B\}) \subseteq V(\{A\}) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A\})$$

である。したがって、

$$V(\{B\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \qquad (V(\{B\}) \neq \emptyset)$$

である。以上のことによりこの定理は証明された。

第 6 章

FLecの補間定理

この章では***good*** sequent のアイデアを用いて FLec の補間定理の証明を与える。Craig の補間定理の証明には、通常カット除去定理を利用した証明論的方法が用いられる。これは前原の方法とよばれる。(例えば、文献 [7],[11] を参照のこと。)
しかし、文献 [7] で指摘されているように weakening を持たない体系では定数の消去がうまくいかないために、定数を持たない言語の場合の証明には困難が生ずる。この困難を解消するために、関 [10] は前原の方法を修正した方法を用いて定数の導入を利用しないで補間定理の証明を与えることに成功した。この章で述べる方法は***good*** sequent と前章で証明した変数共有性を用いており、FLec の場合については関による方法をより簡単化したものになっている。

6.1 FLecの補間定理 (interpolation theorem)

定理 6.1.1 *FLec* の***good*** *sequent* に関する補間定理

FLec において、つぎの補間定理が成立する。
$\Gamma \to A$ が FLec で証明可能であり Γ が空でないならば、$V(\{D\}) \subseteq V(\Gamma) \cap V(\{A\})$ となる論理式 D で

$$\begin{array}{ll} 1) & \vdash \Gamma \to D \\ 2) & \vdash D \to A \end{array}$$

が成り立つものが存在する。この定理はつぎの補助定理から導かれる。

補助定理

$\Gamma \to A$ が***good***、P を $\Gamma \to A$ に到るカットのない証明図とする。このとき P の中の任意の***good***な sequent $\Pi \to E$ および任意の分割 $\langle \Pi_1, \Pi_2 \cup \{E\} \rangle$ ($\Pi_1 \neq \emptyset$, ただし、E が空ならば$\Pi_2 \neq \emptyset$とする) に対し、ある論理式 D が存在して以下を満たす。

1) $\vdash \Pi_1 \to D$

2) $\vdash D, \Pi_2 \to E$

3) $V(\{D\}) \subseteq V(\Pi_1) \cap V(\Pi_2 \cup \{E\})$

このような D を分割 $\langle \Pi_1, \Pi_2 \cup \{E\} \rangle$ に関する補間論理式 (interpolant) という。

証明)

まず、4 章の変数共有性に関する結果より

$$V(\Pi_1) \cap V(\Pi_2 \cup \{E\}) \neq \emptyset$$

であることを注意しておく。***good*** sequent $\Pi \to E$ の深さに関する帰納法で証明する。

帰納法の仮定:

P の中の***good*** sequent $\Pi \to E$ から始式までの高さを m としたとき、m 以下の全ての ***good*** sequent およびその全ての分割において補間定理が成り立つ。

I. $\Pi \to E$ が $A \to A$ の形をしているとき

この場合の分割は

$$\langle \{A\}; \{A\} \rangle$$

だけである。

1), 2) はともに

$$\vdash A \to A$$

となるので明らか。

3) について

$$V(A) \subseteq V(\{A\}) \cap V(\{A\})$$

も明らかである。したがって、この場合は補間定理が成り立つ。

II. 各推論規則について調べる。

1. $\Pi \to E$ が

$$\frac{A, A, \Gamma \to C}{A, \Gamma \to C} \ (c \to)$$

の下式の形をしている場合。
この時下式が***good***なら上式も***good***になるのは明らかである。
1a. 下式の分割が

$$\langle \{A\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

であるとしたとき
この時の上式の分割を

$$\langle \{A, A\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} &\vdash A, A, \Gamma_1 \to D \\ &\vdash D, \Gamma_2 \to C \\ &V(D) \subseteq V(\{A, A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \end{aligned}$$

を満たすようなDが存在する。

すると、この D は

$$\begin{aligned} &\vdash A, \Gamma \to D \\ &V(D) \subseteq V(\{A\} \cup \Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \end{aligned}$$

も満たしている。したがって、この場合はDが補間論理式になる。
1b. 下式の分割が

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A, C\} \rangle$$

であるとしたとき
このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A, A, C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} &\vdash \Gamma_1 \to D \\ &\vdash D, \Gamma_2 A, A \to C \\ &V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, A, C\}) \end{aligned}$$

を満たすようなDが存在する。
するとこの D は

$$\vdash D, \Gamma_2, A \to C$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, C\})$$

も満たしている。したがって、この場合も成り立つ。
以上のことから $(c \to)$ の場合補間定理が成り立つ。

2. $\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, B, A, \Sigma \to C}\ (e \to)$$

の下式の形をしている場合。
この場合は A と B が入れ替わるだけなので、下式が***good***なら明らかに上式も***good***である。 また、補間定理が成り立つことも明らかなので省略する。

3. $\Pi \to E$ が

$$\Gamma, A \wedge B, \to C$$

の形をしている場合。
この時上式は $\Gamma, A \to C$ と $\Gamma, B \to C$ である。下式の分割を以下のように場合わけして考える。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。また、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ である。

3a. 下式の分割が $\langle \Gamma_1; \{A \wedge B, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$ の時
この時上式の分割として

$$\langle \Gamma_1; \{A, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

をとると、帰納法の仮定よりある D が存在して

1) $\vdash \Gamma_1 \to D$
2) $\vdash D, \Gamma_2, A \to C$
3) $V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, C\})$

が言える。すると、

$$\vdash D, \Gamma_2, A \wedge B \to C \text{ および}$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B, C\})$$

も言えるので D が補間論理式である。
3b. $\langle \Gamma_1 \cup \{A \wedge B\}, \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$ の時
この時上式の分割として

$$\langle \Gamma_1 \cup \{A\}, \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

をとると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}&\vdash \Gamma_1, A \to D\\&\vdash D, \Gamma_2, \to C\\&V(D) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{A\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\})\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\begin{aligned}&\vdash \Gamma_1, A \wedge B \to D \text{ および}\\&V(D) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{A\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\})\end{aligned}$$

も言えるので D が補間論理式である。この場合、$\Gamma, B \to C$ について考えなくてもよいことがわかる。
以上のことより、$(\wedge \to)$ の時の補間定理が成り立つことが言える。

4. $\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ (\to \wedge)$$

の下式の形をしている場合。
まず、Γ は空でないので、$\Gamma \to A$ および$\Gamma \to B$ はともに***good***になる。
ここで下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A \wedge B\} \rangle$$

とする。ただし、Γ は Γ_1とΓ_2 の多重集合の和であるとする。また、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ である。
このとき左上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{A\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}&1)\quad \vdash \Gamma_1 \to D\\&2)\quad \vdash D, \Gamma_2, \to A\\&3)\quad V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\})\end{aligned}$$

が言える。さらに

$$\begin{aligned}&4)\quad \vdash \Gamma_1 \to E\\&5)\quad \vdash E, \Gamma_2, \to B\\&6)\quad V(E) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{B\})\end{aligned}$$

が成り立つ。すると、1) と 4) より

$$\vdash \Gamma_1 \to D \wedge E$$

2) と 5) を使うと次のようにして

$$\dfrac{\dfrac{D, \Gamma_2 \to A}{D \wedge E, \Gamma_2 \to A} \quad \dfrac{E, \Gamma_2 \to B}{D \wedge E, \Gamma_2 \to B}}{D \wedge E, \Gamma_2 \to A \wedge B}$$

より

$$\vdash D \wedge E, \Gamma_2 \to A \wedge B$$

が得られる。そこで $D \wedge E$ をとると

$$V(\{D \wedge E\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B\})$$

が成り立つ。実際に変数 q に対し、$q \in V(\{D \wedge E\})$ なら $q \in V(D) \cup V(E)$ となりいずれの場合も $q \in V(\Gamma_1)$ となる。また、$q \in V(D)$ なら $q \in V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B\})$ が成り立ち、同様に $q \in V(E)$ ならやはり $q \in V(\Gamma_2 \cup \{A \wedge B\})$ である。したがって、$D \wedge E$ が補間論理式になる。
したがって、$(\to \wedge)$ の場合に補間定理が成り立つことが言えた。

5.　$\Pi \to E$ が

$$\dfrac{\Gamma \to A \quad B, \Sigma \to C}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to C}\ (\supset\to)$$

の下式の形をしている場合。
このとき下式について次のような分割を考える。ただし、Γ および Σ はそれぞれ Γ_1 と Γ_2、Σ_1 と Σ_2 の多重集合の和であるとする。
5a.　下式の分割として

$$(1) \quad \langle \{A \supset B\} \cup \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \Gamma_2, \Sigma_2 \cup \{C\} \rangle$$

を考える。
右上式の分割として

$$\langle \{B\} \cup \Sigma_1; \Sigma_2 \cup \{C\} \rangle$$

をとると、これは帰納法の仮定よりある D が存在して

$$
\begin{array}{ll}
1) & \vdash \Sigma_1, B \to D \\
2) & \vdash D, \Sigma_2 \to C \\
3) & V(D) \subseteq V(\Sigma_1 \cup \{B\}) \cap V(\Sigma_2 \cup \{C\})
\end{array}
$$

が言える。

i)$\Gamma_2 \neq \emptyset$ のとき

さらに左上式の分割を $\langle \Gamma_2; \Gamma_1 \cup \{A\} \rangle$ とすると

$$
\begin{array}{ll}
4) & \vdash \Gamma_2 \to E \\
5) & \vdash E, \Gamma_1 \to A \\
6) & V(E) \subseteq V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{A\})
\end{array}
$$

を満たすような E が存在する。1) と 5) より次のようにして

$$
\cfrac{\cfrac{E, \Gamma_1 \to A \quad B, \Sigma_1 \to D}{E, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1 \to D}}{A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1 \to E \supset D}
$$

から

$$
\vdash A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1 \to E \supset D
$$

が得られる。また、2) と 4) より次のようにして

$$
\frac{\Gamma_2 \to E \quad D, \Sigma_2 \to C}{E \supset D, \Gamma_2, \Sigma_2 \to C}
$$

から

$$
\vdash E \supset D, \Gamma_2, \Sigma_2 \to C
$$

が得られる。よって

$$
V(\{E \supset D\}) = V(\{E\}) \cup V(\{D\}) \subseteq V(\{A \supset B\} \cup \Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \Sigma_2 \cup \{C\})
$$

が言える。したがって、この場合 $E \supset D$ が補間論理式になる。

ii)$\Gamma_2 = \emptyset$ のとき

このとき、$\Gamma = \Gamma_1$ であるから左上式は $\Gamma_1 \to A$ と表せる。これと 1) から次のようにして

$$
\frac{\Gamma_1 \to A \quad \Sigma_1, B \to D}{A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1 \to D}
$$

から

$$
\vdash A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1 \to D
$$

が得られる。また、これと 2) の$\vdash D, \Sigma_2 \to C$ と 3) の $V(D) \subseteq V(\Sigma_1 \cup \{B\}) \cap V(\Sigma_2 \cup \{C\})$ より

$$V(D) \subseteq V(\Sigma_1 \cup \Gamma_1 \cup \{A \supset B\}) \cap V(\Sigma_2 \cup \{C\})$$

が得られる。したがって、この場合 D が補間論理式となっている。

5b.　下式の分割として

$$(2) \quad \langle \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \cup \Sigma_2 \cup \{C\} \rangle$$

をとるとき。$\Gamma_1 \cup \Sigma_1$ は空ではないので、Γ_1, Σ_1 の少なくとも一方は空ではない。

i) $\Gamma_1 \neq \emptyset$かつ$\Sigma_1 \neq \emptyset$ のとき

右上式の分割

$$\langle \Sigma_1; \{B\} \cup \Sigma_2 \cup \{C\} \rangle$$

は帰納法の仮定よりある J が存在して

$$\begin{aligned} &7) \quad \vdash \Sigma_1 \to J \\ &8) \quad \vdash J, \Sigma_2, B \to C \\ &9) \quad V(J) \subseteq V(\Sigma_1) \cap V(\Sigma_2 \cup \{B\} \cup \{C\}) \end{aligned}$$

が言える。さらに左上式の分割

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

は帰納法の仮定よりある H が存在して

$$\begin{aligned} &10) \quad \vdash \Gamma_1 \to H \\ &11) \quad \vdash H, \Gamma_2 \to A \\ &12) \quad V(H) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \end{aligned}$$

が言える。

このとき 7) と 10) よりつぎのようにして

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1 \to H}{\Gamma_1, \Sigma_1 \to H} \quad \dfrac{\Gamma_1 \to J}{\Gamma_1, \Sigma_1 \to J}}{\Gamma_1, \Sigma_1 \to H \wedge J}$$

から

$$\vdash \Gamma_1, \Sigma_1 \to H \wedge J$$

が得られる。また、8) と 11) から

$$\dfrac{\dfrac{H, \Sigma_2 \to A}{H \wedge J, \Sigma_2 \to A} \quad \dfrac{B, J, \Gamma_2 \to C}{H \wedge J, B, \Gamma_2 \to C}}{H \wedge J, A \supset B, \Gamma_2, \Sigma_2 \to C}$$

より

$$\vdash H \wedge J, A \supset B, \Gamma_2, \Sigma_2 \to C$$

が得られる。よって

$$V(\{H \wedge J\}) = V(\{H\}) \cup V(\{J\}) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \Sigma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \Sigma_2 \cup \{A \supset B\}\{C\})$$

が言える。したがって、この場合 $H \wedge J$ が補間論理式になる。

ii) $\Gamma_1 = \emptyset$ のとき。このとき、$\Sigma_1 \neq \emptyset, \Gamma_2 = \Gamma$ である。このとき 8) と左上式から次のようにして

$$\dfrac{\Gamma \to A \quad J, \Sigma_2, B \to C}{J, A \supset B, \Gamma, \Sigma_2, \to C}$$

より

$$\vdash J, A \supset B, \Gamma, \Sigma_2, \to C$$

が得られる。またこれと 7) と 9) より

$$V(J) \subseteq V(\Sigma_1) \cap V(\Sigma_2 \cup \{A \supset B\} \cup \{C\})$$

が成り立つ。よって、この場合は J が補間論理式である。

iii) $\Sigma_1 = \emptyset$ のとき。このときは $\Gamma_1 \neq \emptyset, \Sigma_2 = \Sigma$ である。
このとき 11) と右上式からつぎのようにして

$$\dfrac{\Gamma_2, H \to A \quad B, \Sigma \to C}{H, A \supset B, \Gamma_2, \Sigma \to C}$$

から

$$\vdash H, A \supset B, \Gamma_2, \Sigma \to C$$

が得られる。これと 10) と 12) より

$$V(H) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \supset B\} \cup \Sigma)$$

が言えるので、この場合は H が補間論理式である。

したがって、以上のことより $(\supset\to)$ の場合の補間定理が成り立つことが言えた。

6.　$\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ (\to\supset)$$

の下式の形をしている場合。

このとき上式が***good***になるのは明らかである。下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A \supset B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。また、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ である。

このとき上式の分割として

$$\langle \Gamma_1; \{A, B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

をとると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}
&\vdash \Gamma_1 \to D \\
&\vdash D, \Gamma_2, A \to B \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, B\})
\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\begin{aligned}
&\vdash D, \Gamma_2, \to A \supset B \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \supset B\})
\end{aligned}$$

も言えるのでこの場合 D が補間論理式になる。

7.　$\Pi \to E$ が

$$\frac{A, \Gamma \to C \quad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C}\ (\vee \to)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good***なら、両上式が ***good*** になるのは明らかである。

このとき下式の分割を考える。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとする。また、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ である。

7a. 下式の分割を

$$(1) \quad \langle \Gamma_1; \{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

としたとき。
このときまず左上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{array}{ll} 1) & \vdash \Gamma_1 \to D \\ 2) & \vdash D, \Gamma_2, A \to C \\ 3) & V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\} \cup \{C\}) \end{array}$$

が言える。さらに右上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{B\} \cup \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

すると、帰納法の仮定よりある E が存在して

$$\begin{array}{ll} 4) & \vdash \Gamma_1 \to E \\ 5) & \vdash E, \Gamma_2, B \to C \\ 6) & V(E) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{B\} \cup \{C\}) \end{array}$$

成り立つ。すると 1) と 4) より

$$\vdash \Gamma_1 \to D \wedge E$$

さらに 2) と 5) を使うとつぎのようにして

$$\dfrac{\dfrac{D, \Gamma_2, A \to C}{D \wedge E, \Gamma_2, A \to C} \quad \dfrac{E, \Gamma_2, B \to C}{D \wedge E, \Gamma_2, B \to C}}{D \wedge E, \Gamma_2, A \vee B \to C}$$

より

$$\vdash D \wedge E, \Gamma_2, A \vee B \to C$$

が得られる。したがって、$V(D \wedge E)$ をとると

$$V(\{D \wedge E\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \vee B\} \cup \{C\})$$

が成り立つ。
実際に変数 q に対し、$q \in V(\{D \vee E\})$ なら $q \in V(D) \cup V(E)$ となりいずれの場合も $q \in V(\Gamma_1)$ となる。また、$q \in V(D)$ なら $q \in V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \subseteq V(\Gamma_2 \cup \{A \vee B\})$ が成り立ち、同様に $q \in V(E)$ ならやはり $q \in V(\Gamma_2 \cup \{A \vee B\})$ である。したがって、$D \vee E$ が補間論理式になる。

7b. 下式の分割を

$$(2) \quad \langle \{A \vee B\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

としたとき。
まず左上式の分割を

$$\langle \{A\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{array}{ll} 7) & \vdash \Gamma_1, A \to D \\ 8) & \vdash D, \Gamma_2 \to C \\ 9) & V(D) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{A\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \end{array}$$

が言える。さらに右上式の分割を

$$\langle \{B\} \cup \Gamma_1; \Gamma_2 \cup \{C\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある E が存在して

$$\begin{array}{ll} 10) & \vdash \Gamma_1, B \to E \\ 11) & \vdash E, \Gamma_2 \to C \\ 12) & V(E) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{B\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\}) \end{array}$$

が成り立つ。すると 7) と 10) より

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, A \to D}{\Gamma_1, A \to D \vee E} \quad \dfrac{\Gamma_1, B \to E}{\Gamma_1, B \to D \vee E}}{A \vee B, \Gamma_1 \to D \vee E}$$

だから

$$\vdash A \vee B, \Gamma_1 \to D \vee E$$

が言える。さらに 8) と 11) より

$$\vdash D \vee E, \Gamma_2 \to C$$

が成り立つ。したがって、$V(D \vee E)$ をとると

$$V(\{D \vee E\}) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \vee B\} \cup \{C\})$$

が成り立つ。よって、$D \vee E$ が補間論理式になる。
以上のことより $(\vee \to)$ の場合の補間定理が言えた。

$8.\Pi \rightarrow A$ が

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \ (\rightarrow \vee 1)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が $\boldsymbol{good}$なら、上式が $\boldsymbol{good}$ になるのは明らかである。

このとき下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A \vee B\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とする。ただし、Γ はΓ_1とΓ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

この時の上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}
&\vdash \Gamma_1 \rightarrow D \\
&\vdash D, \Gamma_2 \rightarrow A \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\})
\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\vdash D, \Gamma_2 \rightarrow A \vee B$$

$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A \vee B\})$$

も言えるので D が補間論理式である。よって、$(\rightarrow \vee 1)$ についての補間定理が示された。

また、$\Pi \rightarrow E$ が

$$\frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \ (\rightarrow \vee 2)$$

の下式の形をしている場合 A を B に変えると全く同じことが言えるので省略する。

9. $\Pi \rightarrow E$ が

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow} \ (\neg \rightarrow)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が $\boldsymbol{good}$なら、両上式が $\boldsymbol{good}$ になるのは明らかである。

下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ はΓ_1とΓ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。このときまず下式の分割として

$$(1) \quad \langle \Gamma_1; \{\neg A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

を考える。このときの上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}
&\vdash \Gamma_1 \to D \\
&\vdash D, \Gamma_2 \to A \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\})
\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg A, D, \Gamma_2 \to \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{\neg A\})
\end{aligned}$$

も言えるのでこの場合 D が補間論理式である。次に下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_2 \neq \emptyset$ とする。

$$(2) \quad \langle \Gamma_1 \cup \{\neg A\}; \Gamma_2 \rangle$$

このときの上式の分割を

$$\langle \Gamma_2; \Gamma_1 \cup \{A\} \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}
&\vdash \Gamma_2 \to D \\
&\vdash D, \Gamma_1 \to A \\
&V(D) \subseteq V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{A\})
\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg D, \Gamma_2 \to \\
&\vdash \neg A, \Gamma_1 \to \neg D \\
&V(\neg D) \subseteq V(\Gamma_2) \cap V(\Gamma_1 \cup \{\neg A\})
\end{aligned}$$

が言えるので $\neg D$ が補間論理式である。したがって、以上のことより $(\neg \to)$ の場合の補間定理が言えた。

10. $\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma, A \to}{\Gamma \to \neg A} \ (\to \neg)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good***なら、上式が ***good*** になるのは明らかである。

下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

このとき下式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{\neg A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

のとする。このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned}&\vdash \Gamma_1 \to D\\ &\vdash D, \Gamma_2, A \to\\ &V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\})\end{aligned}$$

が言える。すると、

$$\begin{aligned}&\vdash D, \Gamma_2 \to \neg A\\ &V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{\neg A\})\end{aligned}$$

も言えるのでこの場合 D が補間論理式である。よって、補間定理が言えた。

11.　$\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma, A, B \to C}{\Gamma, A * B \to C}\ (* \to)$$

の下式の形をしている場合。

このとき下式が ***good***なら、両上式が ***good*** になるのは明らかである。

下式の分割を以下のようにする。ただし、Γ は Γ_1 と Γ_2 の多重集合の和であるとし、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ とする。

11a.　下式の分割を

$$(1) \quad \langle \Gamma_1; \{A * B, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

としたとき。

このとき上式の分割を

$$\langle \Gamma_1; \{A, B, C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\vdash \Gamma_1 \to D$$
$$\vdash D, \Gamma_2, A, B \to C$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A, B, C\})$$

が言える。すると、

$$\vdash D, \Gamma_2, A * B \to C$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A * B, C\})$$

が言えるのでこの場合 D が補間論理式である。次に下式の分割を

$$(2) \quad \langle \{A * B\} \cup \Gamma_1; \{C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

としたとき。
このとき上式の分割を

$$\langle \{A, B\} \cup \Gamma_1; \{C\} \cup \Gamma_2 \rangle$$

とすると、帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\vdash \Gamma_1, A, B \to D$$
$$\vdash D, \Gamma_2 \to C$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{A, B\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\})$$

が言える。すると、

$$\vdash \Gamma_1, A * B \to D$$
$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1 \cup \{A * B\}) \cap V(\Gamma_2 \cup \{C\})$$

が言える。よって、この場合 D が補間論理式である。以上のことより、$(* \to)$ の場合の補間定理が言えた。

12. $\Pi \to E$ が

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Sigma \to B}{\Gamma, \Sigma \to A * B} \ (\to *)$$

の下式の形をしている場合。
$\Gamma, \Sigma \to A * B$ の分割として、

$$\langle \Gamma_1 \cup \Sigma_1; \Gamma_2, \Sigma_2 \cup \{A * B\} \rangle$$

をとる。ただし、Γ および Σ はそれぞれ Γ_1 と Γ_2、Σ_1 と Σ_2 の多重集合の和であるとする。このとき以下のように場合わけをして考える。

12a. Σ_1 が空、 したがって Γ_1 が空でないとき。（このとき $\Sigma_2 = \Sigma$ である。）
このとき少なくとも左上式は***good***である。このとき $\Gamma \to A$ の分割として $\langle \Gamma_1; \Gamma_2, \{A\} \rangle$ をとる。すると帰納法の仮定よりある D が存在して

$$\begin{aligned} &\vdash \Gamma_1 \to D \\ &\vdash D, \Gamma_2 \to A \\ &V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\}) \end{aligned}$$

が言える。すると、$\vdash D, \Gamma_2 \to A$ より次のようにして

$$\frac{D, \Gamma_2 \to A \quad \Sigma \to B}{D, \Gamma_2, \Sigma \to A * B}$$

となるから

$$\vdash D, \Gamma_2, \Sigma \to A * B$$

と

$$V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \Sigma \cup \{A * B\})$$

が得られるのでこの場合 D が補間論理式である。

12b. Γ_1 が空のとき、したがって Σ_1 が空でないとき 12a と同様である。
12c. Γ_1 も Σ_1 も空でないとき。このときは、$\Gamma \to A, \Sigma \to B$ はともに***good***である。$\Gamma \to A$ および $\Sigma \to B$ の分割として $\langle \Gamma_1; \Gamma_2, \cup\{A\} \rangle$ および $\langle \Sigma_1; \Sigma_2, \cup\{B\} \rangle$ をとる。ただし、Γ および Σ はそれぞれ Γ_1 と Γ_2、Σ_1 と Σ_2 の多重集合の和であり、Γ_1 および Σ_1 は空でないとする。すると、帰納法の仮定より

1) $\vdash \Gamma_1 \to D$
2) $\vdash D, \Gamma_2 \to A$
3) $V(D) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A\})$ 4) $\vdash \Sigma_1 \to E$
5) $\vdash E, \Sigma_2 \to B$
6) $V(E) \subseteq V(\Sigma_1) \cap V(\Sigma_2 \cup \{B\})$

を満たす D と E が存在する。1) と 4) より

$$\vdash \Gamma_1, \Sigma_1 \to D * E$$

2) と 5) から

$$\cfrac{\cfrac{D, \Gamma_2 \to A \quad E, \Sigma_2 \to B}{D, E, \Gamma_2, \Sigma_2 \to A * B}}{D * E, \Gamma_2, \Sigma_2 \to A * B}$$

より

$$\vdash D * E, \Gamma_2, \Sigma_2 \to A * B$$

が得られる。

3) と 6) より

$$V(D * E) = V(D) \cup V(E) \subseteq V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2 \cup \{A * B\})$$

が成り立つ。したがって、$D * E$ が補間論理式になる。

よって、$(\to *)$ の場合の補間定理が成り立つことが言えた。したがって、以上のように全ての推論規則について補間定理が成り立つということが示された。

第 7章

まとめ

7.1　結論

good sequent という概念を導入したことにより、FLec の変数共有性や補間定理の複雑な証明をわかりやすくすることができた。
自然演繹の体系において変数共有性を証明するにあたって、Nec の体系ではうまくできないのであらたに Nec* の体系をを導入して証明を行なった。その結果自然演繹の体系でも変数共有性が成り立つことがわかった。

7.2　今後の課題

「ならば」のみを含む論理式の場合には自然演繹の体系でも変数共有性を示すことができたが、「∗」を含む場合には証明を試みたがうまくいかなかった。この証明をうまい方法を見つけておこないたい。 また、他の論理結合子を含む場合も複雑になるが証明を行なっていきたい。

7.3　謝辞

本研究を行うにあたりご丁寧にご指導いただき、また個人ゼミをして下さった小野寛晰教授に深く感謝します。また有益なご助言やご討論いただいた石原哉助教授、Tomasz Kowalski 助手、浜野正浩助手ならびに小野研究室の皆様に感謝いたします。

参考文献

[1] J.-Y.Girard, P.Taylor and Y.Lafont, *Proofs and types*, Cambrige Tracts in Thoretical Computer Science, Cambridge University Press, 1989.

[2] J.Roger Hindley and Jonathan P.Seldin, *Introduction to combinators and λ-calculus*, Cambridge University Press, 1986.

[3] Y.Komori, *Natural deduction for classical logic, in which there exists a proof with the subformula property*, in Proceedings of the 33rd MLG Meeting at Echigo-Yuzawa, Japan 2000, pp. 3-6.

[4] G.Mints, *Linear lambda-terms and natural deduction*, Studia Logica 60, 1998, pp.209-231.

[5] G.Mints, *A short introduction to intuitionistic logic*, Kluwer academic/plenum Publishers,2000, pp.9-22.

[6] M.Mouri, *Natural deduction systems for substructural logics and their strong normalization*, in Proceedings of Second Workshop on Non-Standard Logics and Logical Aspects of Computer Science, Irkutsk, Russia 1995, pp.53-54.

[7] H.Ono, *Proof-theoretic methods in nonclassical logic —an introduction*, in Theories of Types and Proofs, MSJ-Memoir 2, edited by M.Takahashi, M.Okada and M.Dezani, Mathematical Society of Japan, 1998.

[8] D.Prawitz, *Natural deduction, a proof-theoretical study*, Almqvist & Wiksell, 1965.

[9] D.Prawitz and P.-E. Malmnäs, *A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic*, in A. Schmidt and K. Schütte, Contributions to Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 215-229.

[10] T.Seki, *Some remarks on Maehara's method*, Bulletin of the Section of Logic 30, No.3(2001), pp.147-154.

[11] G.Takeuti,*Proof theory* 2nd edition, North-Holland,1987.

[12] A.S.Troelstra, *Natural deduction for intuitionistic linear logic*, Annals of Pure and Applied logic 73, 1995, pp.79-108.

[13] 小野寛晰, 情報代数, 共立出版, 1994.

[14] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[15] 高橋正子, 計算論-計算可能性とラムダ計算, 近代科学社, 1991.