Title	ハイブリッドシステムの定性的解析について
Author(s)	野村, 彰典
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1652
Rights	
Description	Supervisor:平石 邦彦, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

ハイブリッドシステムの定性的解析について

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

野村　彰典

2003 年 3 月

修 士 論 文

ハイブリッドシステムの定性的解析について

指導教官　平石邦彦 助教授

審査委員主査　平石邦彦 助教授
審査委員　金子峰雄 教授
審査委員　中野浩嗣 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

110102 野村　彰典

提出年月: 2003 年 2 月

目次

第1章　はじめに

ハイブリッドシステムとは, 連続的，および，離散的状態遷移の両方を持ったシステムである [2], [3], [4]．分散システムや組み込みシステムの解析や設計に有効であり，多くのアプリケーションに対する数学的モデルとして使われている．その例としては，自動運転道路システム (AHS)，航空交通管理システム，生産システム，化学過程，ロボット工学，リアルタイム通信ネットワーク，そして，リアルタイム回路などがあり，制御理論や理論計算機科学の分野において非常に多くの研究がなされている．

ハイブリッドシステムの解析に関する研究の１つとして，与えられた仕様，たとえば，状態空間の安全でない領域を避けるといった仕様をシステムが満たしているか等，の検証がある．

ハイブリッドシステムに対して計算機科学やアルゴリズム理論からのアプローチにより，厳密な解析を行うための手法の研究が行われているが，システムの複雑さを理由として多くの困難な問題を含む．ハイブリッドシステムの解析の困難さに関する理論的解析と，それに対する解決のアプローチとして以下のような研究が行われてきた．一つ目は，無限の連続状態を扱う困難さである．この困難さに対して双模倣性 (bisimulation) による離散化によって解決できる場合もあるが [5]，適用できるクラスに制限がある．次に比較的単純なクラスでも決定不能問題が発生することである [6]．この困難さには離散あるいは連続の状態遷移の制限を与えることにより解決できるがこれも扱えるクラスが限定されている．そしてパラメータの微少な変動により振る舞いが大きく変わるという困難さなどがある．

ハイブリッドシステムの検証において，中心的な問題に到達可能性問題がある．限定されたクラスに対しては到達可能性問題は決定可能であるが一般的には決定不能であることが分かっている．また，一般のハイブリッドシステムの検証ツールとして,KRONOS,COSPAL,UPAAL, そして，HYTECH などがあり，これらのツールは semi-decision algorithm が実装されており，決定不能な場合は，停止性は保証されていない．

ハイブリッドシステムの応用例として，最近，遺伝子ネットワークのような大規模ハイブリッドシステムの表現と解析の研究が行われ始めた．このようなシステムはパラメータの正確な値が分からない一方，そのシステムに対して得たい情報は定性的なもので十分である場合が多い [7], [8]．

また，定性的解析は，定性的なモデル，すなわち，ハイブリッドシステムの変化率などがパラメータであるようなモデルが与えられたとき，パラメータの実際にどのような実数値を入れるとモデルが意図する振る舞いをするか，というパラメータの値を決める問題,

すなわち，パラメータ設計問題への応用に期待できる．

従来研究において，ハイブリッドシステムと同様な対象を扱いながら系の定性的な振る舞いのみを考慮した解析手法として定性シミュレーションがある．定性シミュレーションの代表的なツールとして，Benjamin Kuiper らが開発した QSIM がある．QSIM では, モデルの情報から起こり得るすべての振る舞いを導くことが保証されている．しかし一方で，与えた定性モデルのパラメータにどんな実数値を代入しても起こり得ない振る舞いも導き出してしまう近似的なシミュレーション方法であることも分かっている．また，変数を複数もつモデルにおいては，異なる変数間の大小関係を一切みることなくシミュレーションする．

本研究では，不完全情報を持つハイブリッドシステムの定性シミュレーションの新しい方法としてパラメータの大小関係を導入した記号シミュレーションを提案する．記号シミュレーションは変化率が定数で記述されるような線形ハイブリッドシステムを対象とし，システムの振る舞いを導くことが主な目的である．記号シミュレーションでは，遷移の条件に変数と大小比較するために書かれているパラメータ（境界値という）や変化率のパラメータに大小関係を導入するので，それらの大小関係から境界値同士の差の大小関係や境界値の差と変化率の比の大小関係を推論ことができる．その推論により求められた情報により従来の定性シミュレーションより詳細なシミュレーションが可能になる．

しかしながら，境界値の差と変化率の比の大小関係まで調べても，一般に線形ハイブリッドシステムに対する到達可能性は判定できない．つまり，記号シミュレーションも QSIM のような近似的なシミュレーション方法の一つになる．ただし，ハイブリッドシステムのグラフにループを含まないような場合や，特別なクラスに対しては到達可能性が判定できる．

第2章　ハイブリッドシステム

2.1　ハイブリッドシステムの定義

ハイブリッドシステム $H = (Loc, Var, Lab, Edg, Act, Inv)$ は6つの要素から成っている [2],[6].

- ロケーション (location) と呼ばれる頂点の有限集合 Loc.
- 実数値をとる変数の有限集合 Var．その変数に対する付値 (valuation)v とは，それぞれの変数 $x \in Var$ に実数値 $v(x) \in \mathcal{R}$ を割り当てる関数である．
- 同期ラベル (synchronization label) の有限集合 Lab．足踏ラベル (stutter label) $\tau \in Lab$ が含まれる．
- 遷移 (transition) と呼ばれる辺の有限集合 Edg．それぞれの遷移 $e = (l, a, \mu, l')$ はもとのロケーション $l \in Loc$，目的のロケーション $l' \in Loc$，同期ラベル $a \in Lab$，そして，遷移関係 $\mu \subseteq V^2$ から成っている．また，それぞれのロケーション $l \in Loc$ に対し，$(l, \tau, \mathrm{Id}, l)$ という形の足踏遷移 (stutter transition) が許される．ここで，$\mathrm{Id} = \{(v, v) | v \in V\}$
  状態 (l, v) においてある付値 $v' \in V$ に対して $(v, v') \in \mu$ ならば，遷移 e は，生起可能 (enable) である．状態 (l', v') は，(l, v) の遷移後継 (transition succesor) である．
- それぞれのロケーション $l \in Loc$ にアクティビティ (activity) の集合を割り当てる関数 Act．それぞれのアクティビティは非負実数 $\mathcal{R}^{\geq 0}$ への関数．それぞれのロケーションのアクティビティは時間に対して不変 (time-invariant) であるとする．すなわち，すべてのロケーション $l \in Loc$，アクティビティ $f \in Act(l)$，そして非負実数 $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ に対して，$(f + t)(t') \in Act$. ここで，すべての $t' \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ に対して $(f + t)(t') = f(t + t')$. なお，すべてのロケーション $l \in Loc$，アクティビティ $f \in Act(l)$，そして，変数 $x \in Var$ に対して $f^x(t) = f(t)(x)$ のような $\mathcal{R}^{\geq 0}$ から $\mathcal{R}$ への関数を f^x と書く．
- 関数 Inv は，それぞれのロケーション $l \in Loc$ にインバリアント (invariant)$Inv(l) \subseteq V$ を割り当てる.

ハイブリッドシステム H が時間決定性 (time-deterministic) であるとは，それぞれのロケーション $l \in Loc$ とそれぞれの付値 $v \in V$ に対して，$f(0) = v$ を満たすような高々一つのアクティビティ $f \in Act(l)$ が存在するときである．このような f を $\varphi_l[v]$ と書く．

2.2 ハイブリッドシステムの実行 (run)

ハイブリッドシステムの状態は，任意の時刻において，ロケーションとすべての変数に対する値によって与えられる．そして，状態は次の 2 通りで変化する．

- 離散的かつ瞬間的な遷移によるもの．これは，遷移関係によりロケーションと変数の値の両方が変化するものである．
- 時間遅延によるもの．これは，ロケーションのアクティビティによって変数の値のみが変化するものである．

システムはロケーションのインバリアントが真であればそのロケーションに滞在することができる．すなわち，インバリアントが偽になる前に離散的な遷移が起きなければならない．

ハイブリッドシステム H の実行 (run) は，次のような有限，または，無限列である．

$$\rho : \sigma_0 \mapsto^{t_0}_{f_0} \sigma_1 \mapsto^{t_1}_{f_1} \sigma_2 \mapsto^{t_2}_{f_2} \ldots$$

ここで，状態 $\sigma_i = (l_i, v_i) \in \Sigma$，非負実数 $t_i \in \mathcal{R}^{\geq 0}$，そして，アクティビティ $f_i \in Act(l_i)$ であり，

1. $f_i(0) = v_i$,
2. すべての $0 \leq t \leq t_i$ に対し，$f_i(t) \in Inv(l_i)$,
3. 状態 σ_{i+1} は，状態 $\sigma'_i = (l_i, f_i(t_i))$ の遷移後継 (transition successor) である．

2.3 遷移システムとしてのハイブリッドシステム

ハイブリッドシステム H とラベル付き遷移システム $\mathcal{T}_H = (\Sigma, Lab \cup \mathcal{R}^{\geq 0}, \rightarrow)$ は関連がある．ここで，ステップ関係 (step-relation)$\rightarrow$ は $a \in Lab$ に対して式 (2.1) を満たす遷移ステップ関係 $\rightarrow^a$ と $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ に対して式 (2.2) を満たす時間ステップ関係 $\rightarrow^t$ の和集合である．

$$\frac{(l, a, \mu, l') \in Edg \ (v, v') \in \mu \ v, v' \in Inv(l)}{(l, v) \rightarrow^a (l', v')} \tag{2.1}$$

$$\frac{f \in Act(l) \ f(0) = v \ \forall 0 \leq t' \leq t. f(t') \in Inv(l)}{(l, v) \rightarrow^t (l', v')} \tag{2.2}$$

ハイブリッドシステム H の実行と遷移システム $\mathcal{T}_H$ は自然に一致する．すなわち，すべての $\sigma, \sigma' \in \Sigma$（ただし $\sigma = (l, v)$）とすべての $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ に対して，

$$\exists f \in Act(l), \sigma \rightarrow^t_f \sigma' \text{ iff } \exists \sigma'' \in \Sigma, a \in Lab. \sigma \rightarrow^t \sigma'' \rightarrow^a \sigma'.$$

である．時間決定性のハイブリッドシステムに対して，時間ステップ関係に対する規則は単純化できる．ロケーション l のインバリアントを満たしていれば，状態 (l, v) からの $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ により時間は進むことができる (time can progress)．すなわち，

$$\mathsf{tcp}_l[v](t) \text{ iff } \forall 0 \leq t' \leq t . \varphi_l[v](t') \in Inv(l).$$

である．また，時間決定的なシステムに対しては，タイムステップの規則は次のように書き直すことができる．

$$\frac{\mathsf{tcp}_l[v](t)}{(l, v) \to^t (l, \varphi_[v](t))}$$

2.4 ハイブリッドシステムの例：サーモスタット

室温はサーモスタットにより連続的に温度を計測しヒータのスイッチの on/off を切り替えることにより制御されている．変数 x で書かれている室温は微分方程式に従っている．そこで，室温を m から M 度の間に保つようにヒータのスイッチの on/off を切り替える．

時間決定性のハイブリッドシステムを図 2.1 に示す．システムにはヒータが off であるロケーション 0 と on であるロケーション 1 がある．

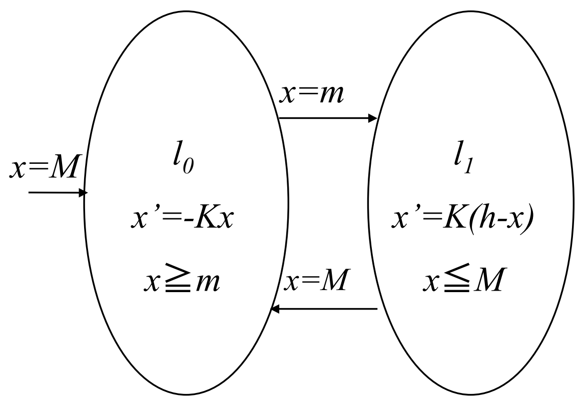

図 2.1: サーモスタット

2.5 ハイブリッドシステムの parallel composition

$H_1 = (Loc_1, Var, Lab_1, Edg_1, Act_1, Inv_1), H_2 = (Loc_2, Var, Lab_2, Edg_2, Act_2, Inv_2)$ を 2 つの共通な変数の集合 Var 上のハイブリッドシステムとする．2 つのハイブリッドシステムは同期ラベルの共通な集合 $Lab_1 \cap Lab_2$ で同期を取る．すなわち，H_1 が同期ラベル $a \in Lab_1 \cap Lab_2$ で離散的な遷移をおこしたときはいつも，H_2 も遷移する．

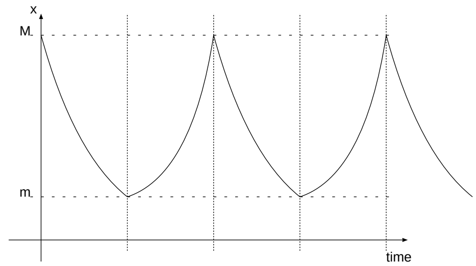

図 2.2: サーモスタットの振る舞い

積 (product)$H_1 \times H_2$ は以下のことをを満たすようなハイブリッドシステム $(Loc_1 \times Loc_2, Var, Lab_1 \cup Lab_2, Edg, Act, Inv)$.

- $((l_1, l_2), a, \mu, (l'_1, l'_2) \in Edg$ iff
    1. $(l_1, a_1\mu_1, l'_1) \in Edg_1$ and $(l_2, a_2, \mu_2, l'_2) \in Edg_2$,
    2. $a_1 = a_2 = a$ または，$a_1 \in Lab_2$ and $a_2 = \tau$ または，$a_1 = \tau$ and $a_2 \in Lab_1$,
    3. $\mu = \mu_1 \cap \mu_2$;
- $Act(l_1, l_2) = Act_1(l_1) \cap Act(l_2)$;
- $Inv(l_1, l_2) = Inv(l_1) \cap Inv(l_2)$.

積のシステムの実行はもとの両方のシステムの実行である．すなわち，

$$[H_1 \times H_2]_{Loc_1} \subseteq [H_1] \text{ and } [H_1 \times H_2]_{Loc_2} \subseteq [H_2].$$

ただし，$[H_1 \times H_2]_{Loc_i}$ は，Loc_i への $[H_1 \times H_2]$ の写像である．

2.6　線形ハイブリッドシステム

変数の集合 Var 上の線形項とは，整数係数をもつ Var の変数の線形結合である．そして，Var 上の線形式とは，Var 上の線形項からなる不等式のブール結合である．

時間決定性のハイブリッドシステム $H = (Loc, Var, Lab, Edg, Act, Inv)$ は，アクティビティ，インバリアント，そして，遷移関係が変数の集合 Var 上の線形表現で定義されている場合，線形である．

1. すべてのロケーション $l \in Loc$ に対し，アクティビティ $Act(l)$ は，$\dot{x} = k_x$ という形の微分方程式の集合で定義されており，それぞれの変数に対して微分方程式が与えられ，$k_x \in \mathcal{R}$ は，定数である．したがって，すべての付値 $v \in V$，変数 $x \in Var$，そして，非負実数 $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ に対して，

$$\varphi_l^x[v](t) = v(t) + k_x t$$

である．k_x を $Act(l, x)$ と書き，ロケーション l における変数 x のレート (rate)，または，変化率という．

2. すべてのロケーション $l \in Loc$ に対しインバリアント $Inv(l)$ は Var 上の線形式 ψ で定義される．すなわち，
$$v \in Inv(l) \text{ iff } v(\psi).$$

3. すべての遷移 $e \in Edg$ に対し，遷移関係 μ は非決定性の割り当てのガード付き集合で定義される．
$$\psi \Rightarrow \{x := [\alpha_x, \beta_x] | x \in Var\}$$
これは，次の条件を意味する．
$$(v, v') \in \mu \text{ iff } v(\psi) \wedge \forall x \in Var.v(\alpha) \leq v'(x) \leq v(\beta).$$
ここで，ψ は線形式であり，ガード (guard) という．α_x, β_x は線形項である．
$\alpha_x = \beta_x$ の時，遷移 e の後の変数 x の更新された値を表すために $\mu(e, x) = \alpha_x$ と書く．

2.7 線形ハイブリッドシステムの特殊な場合

- x は離散変数 (discrete variable) であるとは，それぞれのロケーション $l \in Loc$ に対し，$Act(l, x) = 0$ のときにいう．そして，離散変数はロケーションが変化するときのみ変化する．すべての変数が離散変数であるような線形ハイブリッドシステムを離散システム (discrete system) という．

- 離散変数 x が命題 (proposition) であるとは，すべての遷移 $e \in Edg$ に対して，$\mu(e, x) \in \{0, 1\}$ であるときにいう．そして，変数が命題であるような線形ハイブリッドシステムを有限状態システム (finite-state system) という．

- x がクロック (clock) であるとは，すべてのロケーション l に対して $Act(l, x) = 1$ で，すべての遷移 e に対して $\mu(e, x) \in \{0, x\}$ のときにいう．すなわち，クロックの値は時間とともに一通りに増加し，離散的な遷移はクロックを 0 にリセットするか変化しないままにするかどちらかである．すべての変数が命題またはクロックであり，線形の表現が $x \# c$ または $x - y \# c$ の形の不等式のブール結合であるような線形ハイブリッドシステムを時間オートマトン (timed automaton) という．ここで，c は非負の整数で，$\# \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$.

- x が歪んだクロック (skewed clock) であるとは，それぞれのロケーション l に対して，$Act(l, x) = k$ であるような非零定数 $k \in \mathcal{R}$ が存在し，それぞれの遷移 e に対して $\mu(e, x) \in \{0, x\}$ の時にいう．歪んだクロックは 1 ではないある固定されたレートによって変化することを除いてはクロックと同様である．すべての変数が命題と歪

んだクロックであるような線形ハイブリッドシステムをマルチレート時間システム (multirate timed system) という．また，歪んだクロックが異なる n 個のレートで進むようなマルチレート時間システムを n-レート時間システム (n-rate timed sysytem) という．

- x がインテグレータ (integrator) であるとは，それぞれののロケーション l に対して，$Act(l,x) \in \{0,1\}$ で，かつ，それぞれの遷移 e に対して $\mu(e,x) \in \{0,x\}$ であるような場合にいう．インテグレータは停止または再スタートさせられるクロックで，一般的に蓄積された存続時間を計測するのために使われる．そして，すべての変数が命題とインテグレータのような線形ハイブリッドシステムをインテグレータシステムという．

- 変数 x が 2-スロープ変数 (two-slop variable) であるとは，それぞれのロケーション l に対して，$Act(l,x) \in \{k_1,k_2\}$ であるような非零定数 $k_1,k_2 \in \mathcal{R}$ が存在する場合にいう．

- 変数 x が有限スロープ変数 (finite-slope variable) とは，それぞれのロケーション l に対して，$Act(l,x)$ が非零定数である場合にいう．

- すべての変数 $x \in Var$ とそれぞれの遷移 $e=(l,l')$ に対して，$Act(l,x) \neq Act(l'x)$ であるとき，ある定数 $k \in \mathcal{R}$ が存在して $\mu(e,x)=k$ ならば，線形ハイブリッドオートマトン H が initialized 条件を満たしているという．

- すべての変数 $x \in Var$ とそれぞれの遷移 $e=(l,l')$ に対して，$sign(Act(l,x)) \neq sign(Act(l'x))$ であるとき，ある定数 $k \in \mathcal{R}$ が存在して $\mu(e,x)=k$ ならば，線形ハイブリッドオートマトン H が弱 initialized 条件を満たしているという．

- すべての変数 $x \in Var$ とすべての遷移 $e=(l,l')$ に対して，ある定数 $k \in \mathcal{R}$ が存在して $\mu(e,x)=k$ ならば，線形ハイブリッドオートマトン H が完全 initialized 条件を満たしているという．

2.8 線形ハイブリッドシステムの例：水面モニタ

タンクの水面は，水面を連続的に計測しポンプのスイッチの on/off を切り替えて制御されている．水面は線形な関数によって変化する．ポンプが off の時は，変数 y で書かれた水面は，毎秒２インチの速さで下降する．また，ポンプが on の時には毎秒１インチの速さで上昇する．初期状態として水面は１インチの高さあり，ポンプは on になっていると仮定する．そこで，水面を１から１２インチまでの高さに保ちたい．しかし，モニタがポンプの状態を切り替える命令を出してから実際，ポンプが off になるまでに２秒間の遅れが生じる．したがって，モニタは水面が１インチを下回る前にスイッチが on になるよ

うに命令を出し，１２インチに達する前にスイッチをoffにするように命令を出さなければならない．

図2.3の線形ハイブリッドシステムでは，水面が５と１０インチになったときモニタはポンプにon/offを切り替えるように命令を出す．また，ロケーション０と１では，ポンプはonで，２と３ではoffである．クロックxは遅れの時間を表すために使われている．

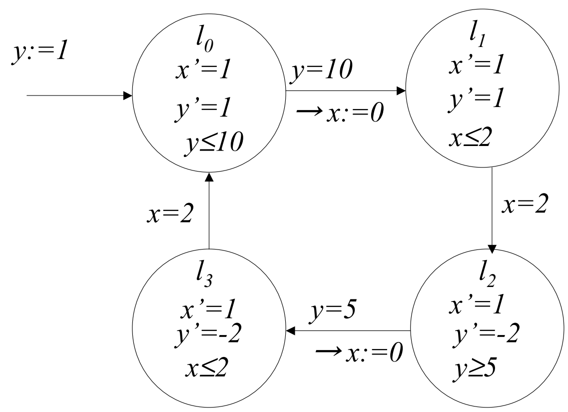

図 2.3: 水面モニタ

2.9　線形ハイブリッドシステムの到達可能性問題

σとσ'をハイブリッドシステムHの２つの状態とする．状態σ'がσから到達可能(reachable)であるとは，$\sigma \mapsto^* \sigma'$と書き，σから始まりσ'で終わるようなHの実行が存在する場合にいう．すなわち，到達可能性の質問(reachability question)はハイブリッドシステムHの与えられた２つの状態σとσ'に対して$\sigma \mapsto^* \sigma'$かどうか尋ねるものである．

2.9.1　決定可能な従来結果

変数xと定数$k \in \mathcal{R}$に対して，インバリアントと遷移のガードが$x \leq k$または，$k \leq x$の形をしている場合，線形ハイブリッドシステムはシンプル(simple)であるという．このようにガードにおいて，変数と比較するための定数を境界値という．また，マルチレート時間システムに対しては，シンプルな条件の下では，異なるレートを持つ歪んだクロックの比較は許さないものとする．

線形ハイブリッドシステムで到達可能性問題が決定可能なクラスは以下のようなものがある[2], [6].

- シンプルなマルチレート時間システム．

- initialized 条件を満たす有限スロープ変数を持つマルチレート時間システム．

2.9.2 決定不能な従来結果

線形ハイブリッドシステムで到達可能性問題が決定不能なクラスは以下のようなものがある [2], [5], [6].

- 2-レートの時間システム．
- シンプルなインテグレータシステム．
- $(n-1)$ 個の変数はクロックであり，一つだけ 2-スロープ変数を持つようなシンプルなマルチレート時間システム．

2.10 従来の解析手法

到達可能性問題はハイブリッドシステムの検証の中心的な問題であり，次のようなさまざまな，解析手法が考えられている．前向きな解析 (forward analysis) や，それと同様な後ろ向きな解析 (backward analysis)，近似的な解析 (approximate analysis)，最小化 (minimization)，そして，モデルチェッキング (model cheking) などの方法がある．これらの方法は，与えられた状態集合のステップ先行 (step predecessor) とステップ後継 (step successor) を計算するための述語変換 (predicate transformer) を基礎とした方法である．

本節では，$H = (Loc, Var, Lab, Edg, Act, Inv)$ は線形ハイブリッドシステムとする．

2.10.1 前向きな解析

ロケーション $l \in Loc$ と付値の集合 $P \subseteq V$ が与えられたとき，l における P の forward time closure$\langle P \rangle_l^{\nearrow}$ とはある付値 $v \in P$ から時間の進行による到達可能な付値な集合である．すなわち，

$$v' \in \langle P \rangle_l^{\nearrow} \text{ iff } \exists v' \in V, t \in \mathcal{R}^{\geq 0}.v \in P \wedge \mathsf{tcp}_l[v](t) \wedge v' = \varphi_l[v](t).$$

そして，すべての付値 $v' \in \langle P \rangle_l^{\nearrow}$ に対して，$(l, v) \rightarrow^t (l, v')$ をみたす付値 $v \in P$ と非負実数 $t \in \mathcal{R}^{\geq 0}$ が存在する．

遷移 $e = (l, a, \mu, l')$ と付値の集合 $P \subseteq V$ が与えられたとき，e に関する P の事後条件 (postcondition)$\mathsf{post}_e[P]$ とは，ある付値 $v \in P$ から遷移 e の実行による到達可能な付値の集合である．すなわち，

$$v' \in \mathsf{post}_e[P] \text{ iff } \exists v \in V.v \in P \wedge (v, v')\mu.$$

そして，すべての付値 $v' \in \mathsf{post}_e[P]$ に対して，$(l,v) \to^a (l,v')$ をみたす付値 $v \in P$ が存在する．

状態の集合をリージョン (region) という．付値の集合 $P \subseteq V$ が与えられたとき，リージョン $\{(l,v)|v \in P\}$ を (l,P) で記す．そして，$(l,v) \in (l,P)$ iff $v \in P$. Forward time closure と事後条件はリージョンに自然に拡張することができる．すなわち，$R = \bigcup_{l \in Loc}(l, \langle R_l \rangle_l)$,

$$\langle R \rangle^{\nearrow} = \bigcup_{l \in Loc} (l, \langle R_l \rangle_l^{\nearrow})$$

$$\mathsf{post}[R] = \bigcup_{e=(l,l') \in Edg} (l', \mathsf{post}_e[R_l])$$

ハイブリッドシステム H の記号的実行 (symbolic run) とは，次のようなものである．すべての $i \geq 0$ に対して，l_i から l_{i+1} への遷移 e と

$$P_{i+1} = \mathsf{post}_{e_i}[\langle P_i \rangle_{l_i}^{\nearrow}]$$

が存在するようなリージョンの有限または無限列

$$\varrho : (l_0, P_0)(l_1, P_1) \ldots (l_i, P_i) \ldots.$$

つまり，リージョン (l_{i+1}, P_{i+1}) は遷移の列 $e_0, \ldots, e_i$ の実行の後状態 $(l_0, v_0) \in (l_0, P_0)$ から到達可能な状態の集合である．そして，線形ハイブリッドシステム H の実行と記号的実行は自然に一致する．記号的実行 ϱ は，すべての $i \geq 0$ に対して，$(l_i, v_i) \in (l_i, P_i)$ を満たすような

$$(l_0, v_0) \mapsto^{t_0} (l_1, v_1) \mapsto^{t_1} \ldots$$

のかたちをしたすべての実行の集合を表す．さらに，H のそれぞれの実行は H のある記号的実行により表される．

リージョン $I \subseteq \Sigma$ が与えられたとき，I の到達可能リージョン (reachable region) $(I \mapsto^*)$ は I の状態から到達可能なすべての状態のことという．また，$I \subseteq (I \mapsto^*)$. 次の命題は I の到達可能リージョン $(I \mapsto^*)$ 計算する方法を意味している．

命題　$I = \bigcup_{l \in Loc}(l, I_l)$ を線形ハイブリッドシステム H のリージョンとする．到達可能リージョン $(I \mapsto^*) = \bigcup_{l \in Loc}(l, R_l)$ は，等式

$$X = \langle I \cup \mathsf{post}[X] \rangle^{\nearrow}$$

の最小不動点である．また同様に，すべてのロケーション $l \in Loc$ に対して, 付値の集合 R_l は，等式の集合

$$X_l = \left\langle I_l \cup \bigcup_{e=(l,l') \in Edg} \mathsf{post}_e[X_{l'}] \right\rangle_l^{\nearrow}$$

の最小不動点である．

2.10.2 近似的な解析

繰り返しの手続きが収束しないようなシステムを扱う近似的な手法がある．集合 $(I \mapsto^*)$ の上の近似 (upper approximations) を計算する．
それぞれのロケーション l，そして，l から到達可能な状態の集合 X_l ，すなわち，

$$X_l = \left\langle I_l \cup \bigcup_{e=(l,l')\in Edg} \mathsf{post}_e[X_{l'}] \right\rangle_l^{\nearrow}$$

に対して，最小の解を与える不動点方程式のシステムを考える．
このようなシステムを実際にを解くと，次のような二つの問題が発生する．

- 線形不等式のシステムの論理和を扱うこと．すなわち，多角形の和集合がほかの多角形に含まれるかどうかを判定する簡単な手段は無いということ．
- 不動点計算は無限の反復計算を含むということ．

これらの問題の近似的な解は abstract interpretation technique により与えられる．
まず，多角形の和集合は凸包で近似される．凸包の演算子を $\sqcup$ で書く．すなわち，

$$P \sqcup P' = \{\lambda x + (1-\lambda)x' | x \in P, x' \in P', \lambda \in [0,1]\}.$$

そして，システムの式は以下のようになる．

$$X_l = \left\langle I_l \sqcup \bigsqcup_{e=(l,l')\in Edg} \mathsf{post}_e[X_{l'}] \right\rangle_l^{\nearrow}$$

強制的に反復を収束させるために，Cousot“widening technique” を適用する．そして，凸多角形上の “widening operator” を ∇ で書き，以下のことを満たすように定義する．

- 凸多角形の対に対して，$P \sqcup P' \ \subseteq \ P \nabla P'$
- 凸多角形の無限増加列 $(P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots)$ に対して，$Q_0 = P_0, Q_{n+1} = Q \nabla P_{n+1}$ で定義される列は狭義増加列ではない．

そこで，次のようにこの演算子を使う．
ハイブリッドシステムのグラフのそれぞれのループの中の少なくとも一つ，ロケーションを選ぶ．それを “widening locations” という．そして，$X_l^{(n)} = F(X^{(n-1)})$ をロケーション l における，n 回目の計算ステップとする．すなわち，$F(X^{(n-1)}) = \left\langle I_l \sqcup \bigsqcup_{e=(l,l')\in Edg} \mathsf{post}_e[X_{l'}^{(n-1)}] \right\rangle_l^{\nearrow}$ である．．そして，それぞれの widening location l とステップ $n \geq 1$ に対して，$X_l^{(n)} = X_l^{(n-1)} \nabla F(X^{(n-1)})$ を計算する．よって，新しい反復計算はある有限ステップのあと，もとのシステムの最小の解の上の近似に収束する．

第3章　定性的な演算

3.1　符号に関する諸定義

不完全情報を持つシステムの振る舞いを定性的に推論する際には，しばしば，符号に用いる．つまり，実際の特定の値を用いるのではなく，符号を用いるのである．そこで，符号に関する形式的な定義を与える．

定義 (Domain of Signs)　符号 (sign) はつぎの４つの $\mathcal{R}$ の部分集合の一つである．．

$$
\begin{aligned}
[+] &\stackrel{def}{=} (0, +\infty) \\
[-] &\stackrel{def}{=} (-\infty, 0) \\
[?] &\stackrel{def}{=} (-\infty, +\infty) \\
[0] &\stackrel{def}{=} \{0\}.
\end{aligned}
$$

そして，$\mathcal{S} = \{[-], [0], [+]\}$ を domain of signs といい，$\mathcal{S}' = \{[-], [0], [+], [?]\}$ を extended domain of signs という．

定義 (Sign-Valued Operators)　つぎの演算子は $\mathcal{R}$ の値に適用すると，その値に対する符号を返すものであり，sign-valued operator という．

$$
[x] = \begin{cases} [+] & \text{if } x > 0 \\ [0] & \text{if } x = 0 \\ [-] & \text{if } x < 0. \end{cases}
$$

ここで，$x \in \mathcal{R}$ である．

定義 (定性的な加法・乗法)　$\mathcal{S}'$ 上の関数として，加法と乗法を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
+ :& \mathcal{S}' \times \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' \\
\times :& \mathcal{S}' \times \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'
\end{aligned}
$$

$+$	$[+]$	$[0]$	$[-]$	$[?]$
$[+]$	$[+]$	$[+]$	$[?]$	$[?]$
$[0]$	$[+]$	$[0]$	$[-]$	$[?]$
$[-]$	$[?]$	$[-]$	$[-]$	$[?]$
$[?]$	$[?]$	$[?]$	$[?]$	$[?]$

$\times$	$[+]$	$[0]$	$[-]$	$[?]$
$[+]$	$[+]$	$[0]$	$[-]$	$[?]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[-]$	$[-]$	$[0]$	$[+]$	$[?]$
$[?]$	$[?]$	$[0]$	$[?]$	$[?]$

3.2 符号推論

符号推論とは，$[b-c],[c-a]$ が与えられたとき，$[b-a]$ を定性的な加法 $[b-c]+[c-a]$ により推論するものである．

ただし，$a,b,c \in \mathcal{R}$ とする．

ここで，以下の命題を示すことにより，符号推論によって決定した符号は必ず，正しい符号を含んでいることを示す．

命題　$[b-c],[c-a]$ が与えられているとする．そこで，

$$[b-a] \subseteq [b-c]+[c-a] \tag{3.1}$$

である．

（証明）

$[b-c]=[+]$ のとき，次の a,b,c の場合分けを考えれば十分である．($[b-c]=[0]$ のときは，明らか．そして，$[b-c]=[-]$ のときは，同様に示せる．）そして，つぎの５通りの a,b,c の大小関係について $[b-a],[b-c]+[c-a]$ を計算する．

1. $a<c<b$ の場合

$$[b-a]=[+],[b-c]+[c-a]=[+]+[+]=[+]$$

よって，

$$[b-a]=[b-c]+[c-a]$$

2. $a=c<b$ の場合

$$[b-a]=[+],[b-c]+[c-a]=[+]+[0]=[+]$$

よって，

$$[b-a]=[b-c]+[c-a]$$

3. $c < a < b$ の場合

$$[b-a] = [+], [b-c] + [c-a] = [+] + [-] = [?]$$

よって,

$$[b-a] \subseteq [b-c] + [c-a]$$

4. $c < a = b$ の場合

$$[b-a] = [0], [b-c] + [c-a] = [+] + [-] = [?]$$

よって,

$$[b-a] \subseteq [b-c] + [c-a]$$

5. $c < b < a$ の場合

$$[b-a] = [-], [b-c] + [c-a] = [+] + [-] = [?]$$

よって,

$$[b-a] \subseteq [b-c] + [c-a]$$

したがって，$[b-c] = [+]$ のとき，すべての a に対して

$$[b-a] \subseteq [b-c] + [c-a]$$

が成り立つ.

(証明終わり)

上の証明から分かるように，符号推論 $[b-a] = [b-c] + [c-a]$ は，a, b, c が推移律を満たすときには符号が $[+], [0], [-]$ のいずれかに決まり，満たさないときには $[?]$ になっている.

3.3 不等式推論

不等式推論とは，式 (3.2) の α_i や $\beta_i (i = 1, 2)$ から項を一つ選び，その項と γ の大小関係により以下のように不等式，または，符号の式を推論することである.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} \# A \tag{3.2}$$

ここで，$\alpha_1 > \alpha_2, \beta_1 > \beta_2$.
また，$\# \in \{< . \leq, =, \geq, >\}$.

1.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

(a) α_1 について,

i. $\gamma > \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

よって,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

ii. $\gamma = \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

よって,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

iii. $\gamma < \alpha_1$ に対して,

$$\left[\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

(b) α_2 について,

i. $\gamma > \alpha_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \alpha_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

よって,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

iii. $\gamma < \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

よって,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

(c) β_1 について,

i. $\gamma > \beta_1$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} > A$$

iii. $\gamma < \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} > A$$

(d) β_2 について,

i. $\gamma > \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} > A$$

ii. $\gamma = \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} > A$$

iii. $\gamma < \beta_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} - A\right] = [?]$$

2.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} = A$$

(a) α_1 について

i. $\gamma > \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

ii. $\gamma = \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} = A$$

iii. $\gamma < \alpha_1$ に対して,

$$\left[\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

(b) α_2 について

i. $\gamma > \alpha_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \alpha_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} = A$$

iii. $\gamma < \alpha_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

(c) β_1 について

i. $\gamma > \beta_1$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} = A$$

iii. $\gamma < \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} < A$$

(d) β_2 について

i. $\gamma > \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} < A$$

ii. $\gamma = \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} = A$$

iii. $\gamma < \beta_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} - A\right] = [?]$$

3.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

(a) α_1 について

i. $\gamma > \alpha_1$ に対して,

$$\left[\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

iii. $\gamma < \alpha_1$ に対して,

$$\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

(b) α_2 について

i. $\gamma > \alpha_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

ii. $\gamma = \alpha_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} < A$$

iii. $\gamma < \alpha_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [?]$$

(c) β_1 について

i. $\gamma > \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} < A$$

ii. $\gamma = \beta_1$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} < A$$

iii. $\gamma < \beta_1$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma - \beta_2} - A\right] = [?]$$

(d) β_2 について

i. $\gamma > \beta_2$ に対して,

$$\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} - A\right] = [?]$$

ii. $\gamma = \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} < A$$

iii. $\gamma < \beta_2$ に対して,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \gamma} < A$$

不等式推論で得られた不等式や符号に関する式は，すべて符号推論と同値変形を用いて計算されている．したがって，不等式推論で得られて結果には，必ず正しい結果を含んでいることは容易に分かる．

また，符号推論の規則を適用して求められることは以下のように分かる．

- (1(a)i) の場合

$$\gamma > \alpha_1, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} > A$$

すなわち，

$$[\gamma - \alpha_1] = [+], \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - A\right] = [+].$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} \\
=&\frac{\gamma - \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} > 0.
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\left[\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}\right]=[+].$$

そして，符号推論を適用すると，次のことがが求まる．

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-A\right]\\=&\left[\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}\right]+\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-A\right]\\=&[+]+[+]\\=&[+].\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}>A.$$

- (1(d)iii) の場合

$$\gamma<\beta_2,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}>A.$$

すなわち，

$$[\gamma-\beta_2]=[-],\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-A\right]=[+].$$

$$\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}-\frac{\beta_1-\gamma}{\alpha_1-\alpha_2}\right]=\left[\frac{\beta_1-\gamma}{\alpha_1-\alpha_2}\right]=[-].$$

すなわち，

$$\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\gamma}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}\right]=[-].$$

そして，符号推論を適用すると，次のことが求まる．

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\gamma}-A\right]\\=&\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\gamma}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}\right]+\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2}-A\right]\\=&[-]+[+]\\=&[?].\end{aligned}$$

第4章　記号シミュレーション

4.1　記号シミュレーションの目的

定性シミュレーションの目的は，不完全情報を持ったモデルから可能な振る舞いを導くことにある．このことを，ハイブリッドシステムに対して言い換えると，不完全情報しか与えられていないモデルに対して，起こりうるすべての振る舞い，すなわち，初期状態から，どこのロケーションを通り，変数がどのように変化するかを導くことが目的である．

従来の定性シミュレーションを用いてハイブリッドシステムのように変数を複数持つ対象を解析すると，変数，パラメータ間の大小関係を無視していることを一つの理由として導き出す振る舞いの数が非常に多くなったり，起こりえない振る舞いが多く混じってしまうことがある．したがって，ハイブリッドシステムのシミュレーションをするのに不向きであるといえる．そこで，記号シミュレーションでは変数，パラメータ間の大小関係を与えてシミュレーションを行う．そのことにより，パラメータの大小関係から境界値同士の差の大小関係や境界値の差と変化率の比の大小関係を推論ことができる．その推論により求められた情報により従来の定性シミュレーションより詳細なシミュレーションを可能にするものである．

このシミュレーションは次のようなシステムに対して有効と考える．たとえば，生体システムの実験データは実験環境により誤差が生じたり，実験におけるノイズなどによりデータにばらつきがみられる．しかし，システムがどのように振る舞うか微分方程式の形が既知で，変化率の大小関係が明らかであるものもあり，そのようなシステムの解析をするのに記号シミュレーションは有効と考える．

さらに，記号シミュレーションではシステムの振る舞いを導き出すとともにその振る舞いを導き出すパラメータに関する大小関係も推論している．したがって，どのような実数値をパラメータに代入すれは希望する振る舞いが実現できるか推測できるのでモデルのパラメータ設計をする際に，役に立つと考える．

ただし，記号シミュレーションで導き出される振る舞いは，従来の定性シミュレーション同様，モデルのパラメータにどんな実数値を入れても実現不可能な振る舞いも含まれている．しかし，記号シミュレーションも定性シミュレーションと同様，モデルから起こりうるすべての振る舞いを含んでいる．また，特定のクラスのハイブリッドシステムに対しては，ロケーションへの到達可能性の判定が可能になる．また，ロケーションと変数の値の組に対する到達可能性を判定することもできる．なぜならば，調べたい変数の値をガード条件にするロケーションを追加すればよいからである．

4.2 記号シミュレーションの対象とするモデル

記号シミュレーションの対象とするハイブリッドシステムのクラスは次のものである.

> 有限スロープ変数を持つ，シンプルなマルチレート時間システム．ただし，リセットはある実数定数へのリセットを許すものとする.

記号シミュレーションでは，マルチレート時間システムの境界値や変化率はパラメータとして扱い，シミュレーションの対象とするモデルには次のような情報を与えるものとする．そこで，変数の集合を Var，境界値の集合を B，変化率の集合を D とする．また，$\# \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$

- 境界値の間の大小関係．$k_1, k_2 \in B$ に対して $k_1 \# k_2$.
- 変数の変化率，および，その絶対値の大小関係．$a, a' \in D$ に対して，$a \# a'$，および，$|a| \# |a'|$.

4.3 記号シミュレーションの方法の種類

記号シミュレーションには以下の３種類の方法がある.

タイプ１ パラメータの大小関係のみを記憶する方法.

タイプ２ タイプ１の大小関係に加えて，境界値の差の大小を記憶する方法

タイプ３ タイプ２の大小関係に加えて，境界値の差と変化率の比の大小を記憶する方法

以上のそれぞれの方法に対して，次節以降で，大小関係の推論方法と遷移可能性の判定方法を説明する.

4.4 記号シミュレーションが導くもの

記号シミュレーションでは，初期ロケーションと与えられた大小関係から起こりうるすべての振る舞いを生成する．つまり，遷移可能なロケーションとそのロケーションでの変数やパラメータの大小関係を推論していき遷移可能なすべてのパスとそれを実現するための変数やパラメータに関する大小関係を推論する．すなわち，次のような有限で記述できる列をすべてのパスに対して生成する.

$$(l_1, P_1, P'_1)(l_2, P_2, P'_2)(l_3, P_3, P'_3)(l_4, P_4, P'_4)\ldots$$

ここで，P_i, P'_i はそれぞれ，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数やパラメータに関する大小関係である．ここで，

$$P_i = P_{iA} \wedge P_{iB}$$

であり，P_{iA} には，変数と境界値の大小関係の集合，すなわち，$x \in Var, k \in B$ に対して，

$$x \# k.$$

また，P_{iB} には，境界値の大小関係や境界値の差の大小関係，および，境界値と変化率の比の大小関係が導かれる．すなわち，$k_1, k_2, k_3, k_4 \in B, a, a' \in D$ に対して，タイプ１，２，３では,

$$k_1 \# k_2.$$

タイプ２，３では,

$$k_1 - k_2 \# k_3 - k_4.$$

そして，タイプ３では,

$$\frac{k_1 - k_2}{a} \# \frac{k_3 - k_4}{a'}$$

が導かれる.

4.5　記号シミュレーションの手順

タイプ１から３のそれぞれの手順を示す．詳細な計算方法（推論方法）は，4.6, 4.7, 4.8 に記す.

4.5.1　タイプ１の手順

境界値や変化率の間に大小関係が定義されたモデルが与えられもとで次の手順でシミュレーションする.

1. 初期ロケーションにおいて，モデルに与えられてパラメータの大小関係より，変数同士の大小関係と変数と境界値の大小関係，および，境界値同士の大小関係を符号推論を用いて求める.
2. ロケーションの制約（変化率の大小関係）により，変数同士の大小関係と変数と境界値の大小関係が変化するので，符号推論を用いて求める．境界値同士の大小関係はそのままである.
3. ロケーションからすべての遷移に対して遷移可能性の判定をする．すなわち，2 で求められた大小関係が, それぞれの遷移のガードを満たしているか調べる．満たしていなければ，遷移不可能と判定する．満たしている場合は，遷移可能なパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める.
4. リセットによる次のロケーションに入るパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める.

5. さらに，3 で遷移可能と判定されたものには，次のロケーションでも 3,4 の操作を次の停止条件を満たすまで繰り返す．

   停止条件：それぞれの遷移 $e = (l, l')$ に対して，ロケーション l に入るときの変数同士の大小関係，変数と境界値の大小関係，および，境界値同士の大小関係が，過去に調べたものとすべて一致しているとき．

4.5.2 タイプ 2 の手順

1. 初期ロケーションにおいて，モデルに与えられてパラメータの大小関係より，変数同士の大小関係と変数と境界値の大小関係，および，境界値同士の大小関係を符号推論を用いて求める．

2. ロケーションの制約（変化率の大小関係）により，変数同士の大小関係と変数と境界値の間の大小関係が変化するので，符号推論を用いて求める．境界値同士の大小関係はそのままにする．

3. ロケーションからのすべての遷移に対して遷移可能性の判定をする．すなわち，2 で求められた大小関係が, それぞれの遷移のガードを満たしているか調べる．満たしていなければ，遷移不可能と判定する．満たしている場合は，遷移可能なパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．

4. リセットによる次のロケーションに入るパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．さらに，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数と境界値の大小関係と変化率の大小関係から，不等式推論を用いて境界値の差の大小関係を求める．

5. 次のロケーションにおいて，2, 3 の操作を行う．

6. リセットによる次のロケーションに入るパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．さらに，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数と境界値の大小関係と変化率の大小関係から，不等式推論を用いて境界値の差の大小関係を求め，ロケーションに入ってきたときの境界値の差の大小関係と矛盾しないか調べ，到達可能性の判定を行う．

7. さらに，6 で遷移可能と判定されたものには，次のロケーションでも 5, 6 の操作を次の停止条件を満たすまで繰り返す．

   停止条件：それぞれの遷移 $e = (l, l')$ に対して，ロケーション l に入るときの変数同士の大小関係，変数と境界値の大小関係，境界値同士の大小関係, および，境界値同士の差の大小関係が，過去に調べたものとすべて一致しているとき．

4.5.3 タイプ３の手順

1. 初期ロケーションにおいて，モデルに与えられてパラメータの大小関係より，変数同士の大小関係と変数と境界値の大小関係，および，境界値同士の大小関係を符号推論を用いて求める．

2. ロケーションの制約（変化率の大小関係）により，変数同士の大小関係と変数と境界値の大小関係が変化するので，符号推論を用いて求める．境界値同士の大小関係はそのままにする．

3. ロケーションからのすべての遷移に対して遷移可能性の判定をする．すなわち，2 で求められた大小関係が, それぞれの遷移のガードを満たしているか調べる．満たしていなければ，遷移不可能と判定する．満たしている場合は，遷移可能なパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．

4. リセットによる次のロケーションに入るパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．さらに，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数と境界値の大小関係と変化率の大小関係から，不等式推論を用いて境界値の差の大小関係を求める．また，式 (4.1) と変数と境界値の大小関係から不等式推論を用いて境界値の差と変化率の比の大小関係を求める．

$$\frac{|a_i|}{|b_i|} = \frac{|x_{i-1} - x_i|}{|y_{i-1} - y_1|} \tag{4.1}$$

5. 次のロケーションにおいて，2, 3 の操作を行う．

6. リセットによる次のロケーションに入るパラメータの大小関係を符号推論を用いて求める．さらに，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数と境界値の大小関係と変化率の大小関係から，不等式推論を用いて境界値の差の大小関係を求める．また，式 (4.1) と変数と境界値の大小関係から不等式推論を用いて境界値の差と変化率の比の大小関係を求める．そして，それらの大小関係が，ロケーションに入ってきたときの大小関係と矛盾しないか調べ，遷移可能性の判定を行う．

7. さらに，6 で遷移可能と判定されたものには，次のロケーションでも 5, 6 の操作を次の停止条件を満たすまで繰り返す．

   停止条件：それぞれの遷移 $e = (l, l')$ に対して，ロケーション l に入るときの変数同士の大小関係，変数と境界値の大小関係，境界値同士の大小関係, 境界値同士の差の大小関係，および，境界値の差と変化率の比の大小関係が，過去に調べたものとすべて一致しているとき．

4.6　タイプ１の遷移可能性を判定する方法

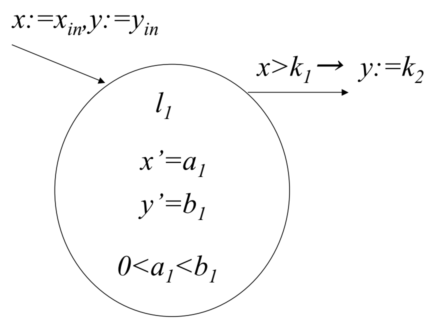

図 4.1: タイプ１で遷移可能性判定をする例

図 4.1 のモデルには変数 x, y があり，ロケーション l_1 に入るときの値を x_0, y_0 とし，出るときの値を x_1, y_1 とする．ロケーション l_1 における x, y の変化率はそれぞれ，a_1, b_1 である．このモデルに書かれている境界値は x_{in}, y_{in}, k_1, k_2 である．図 4.1 を例に方法を説明する．

ロケーションに入るときのパラメータ等の大小関係の推論

初期ロケーションにおいて，変数間の大小関係，および，境界値同士の大小関係はモデルにより与えられている．

- 変数間の大小関係

$$[y_0 - x_0] = [y_{in} - x_{in}]$$

- 境界値同士の大小関係

$$\begin{gathered} [x_{in} - y_{in}] \\ [x_{in} - k_1] \\ [x_{in} - k_2] \\ [y_{in} - k_1] \\ [y_{in} - k_2] \\ [k_1 - k_2] \end{gathered}$$

- 変数と各境界値との大小関係

これは，変数間の大小関係と境界値同士の大小関係から求めることができる．

$$
\begin{aligned}
[x_0 - x_{in}] &= [0] \\
[x_0 - y_{in}] &= [x_0 - x_{in}] + [x_{in} - y_{in}] \\
[x_0 - k_1] &= [x_0 - x_{in}] + [x_{in} - k_1] \\
[x_0 - k_2] &= [x_0 - x_{in}] + [x_{in} - k_2] \\
[y_0 - x_{in}] &= [y_0 - y_{in}] + [y_{in} - x_{in}] \\
[y_0 - y_{in}] &= [0] \\
[y_0 - k_1] &= [y_0 - y_{in}] + [y_{in} - k_1] \\
[y_0 - k_2] &= [y_0 - y_{in}] + [y_{in} - k_2]
\end{aligned}
$$

l_1 の制約（変化率）において変化した大小関係の推論

- 変数間の大小関係
  以下の式で推論できる．

  $$[y_1 - x_1] = [(b_1 - a_1)t_1] + [y_0 - x_0]$$

  なぜならば,

  $$
  \begin{aligned}
  x_1 &= a_1 t_1 + x_0 \\
  y_1 &= b_1 t_1 + y_0
  \end{aligned}
  $$

  より,

  $$y_1 - x_1 = (b_1 - a_1)t_1 + (y_0 - x_0)$$

  が導けるからである．

- 境界値同士の大小関係
  変化しない．

- 変数と各境界値との大小関係

  $$
  \begin{aligned}
  [x_1 - x_{in}] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - x_{in}] \\
  [x_1 - y_{in}] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - y_{in}] \\
  [x_1 - k_1] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - k_1] \\
  [x_1 - k_2] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - k_2] \\
  [y_1 - x_{in}] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - x_{in}] \\
  [y_1 - y_{in}] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - y_{in}] \\
  [y_1 - k_1] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - k_1] \\
  [y_1 - k_2] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - k_2]
  \end{aligned}
  $$

遷移可能性の判定と遷移可能な変数や境界値の大小関係の推論

- l_1 を出るときのガードには $x > k_1$，すなわち，$[x_1 - k_1] = [+]$ と書かれている．そこで，l_1 の制約により変化した変数と境界値との大小関係の $[x_1 - k_1]$ がガードに書かれている条件に一致，または，含まれているか調べる．

  1. 一致しない，または，含まれない場合，すなわち，$[x_1 - k_1] = [-]$ または，$[x_1 - k_1] = [-], [0]$ のような場合 $\rightarrow$ 終了．
  2. 一致する，または，含まれる場合，すなわち，$[x_1 - k_1] = [+]$ または，$[x_1 - k_1] = [?]$ のような場合 $\rightarrow$ 以下の推論をする．

  まず，ここで，$[x_1 - k_1]$ が与えられるので k_1 に関係ある境界値の大小関係について以下の式で調べることができる．

$$
\begin{aligned}
[x_{in} - k_1] &= [x_{in} - x_1] + [x_1 - k_1] \\
[y_{in} - k_1] &= [y_{in} - x_1] + [x_1 - k_1] \\
[k_1 - k_2] &= [k_1 - x_1] + [x_1 - k_2]
\end{aligned}
$$

  また，l_1 を出る変数と各境界値との大小関係が，以下のように x_1 に関係あるものが定まる．

$$
\begin{aligned}
[x_1 - x_{in}] &= [x_1 - k_1] + [k_1 - x_{in}] \\
[x_1 - y_{in}] &= [x_1 - k_1] + [k_1 - y_{in}] \\
[x_1 - k_1] &= [x_1 - k_1] + [k_1 - k_1] \\
[x_1 - k_2] &= [x_1 - k_1] + [k_1 - k_2]
\end{aligned}
$$

  また，その決まった変数と各境界値との大小関係から変数間の大小関係に矛盾しないか確かめる．

  つまり，$[x_1 - k_1]$ と $[y_1 - k_1]$ より，

$$
[y_1 - x_1] = [y_1 - k_1] + [k_1 - x_1]
$$

  について調べる．

  ただし,「大小関係 $[A]$ が $[B]$ に矛盾してないか確かめる」とは，次のような意味である．

  - $[A] \cap [B] = \phi$ ならば,「矛盾している」判定する．
  - $[A] \subseteq [B]$ ならば,「矛盾していない」と判定し，$[A]$ はそのままにする．
  - $[A] \supseteq [B]$ ならば,「矛盾していない」と判定し，$[A]$ を $[B]$ で置き換える．

次に y_1 と境界値に関する大小関係を推論する．

$$[y_1 - x_{in}] = [y_1 - x_1] + [x_1 - x_{in}]$$
$$[y_1 - y_{in}] = [y_1 - x_1] + [x_1 - y_{in}]$$
$$[y_1 - k_1] = [y_1 - x_1] + [x_1 - k_1]$$
$$[y_1 - k_2] = [y_1 - x_1] + [x_1 - k_2]$$

リセットによる次のロケーションに入る変数や境界値の大小関係

$y := k_2$ すなわち，$[y_1 - k_2] = [0]$ が与えられているので，y_1 と各境界値との大小関係が次のように更新される．

$$[y_1 - x_{in}] = [y_1 - k_2] + [k_2 - x_{in}]$$
$$[y_1 - y_{in}] = [y_1 - k_2] + [k_2 - y_{in}]$$
$$[y_1 - k_1] = [y_1 - k_2] + [k_2 - k_1]$$

4.7　タイプ２の遷移可能性を判定する方法

4.7.1　大小関係の推論

モデルに $|b_i| < |a_i|$ という記述があったとする．すなわち，

$$\left[\frac{|a_i|}{|b_i|} - 1\right] = [+].$$

すると，

$$\frac{|a_i|}{|b_i|} = \frac{|x_{i-1} - x_i|}{|y_{i-1} - y_1|}$$

より，

$$\left[\frac{|x_{i-1} - x_i|}{|y_{i-1} - y_1|} - 1\right] = [+]$$

である．そこで，不等式推論において，$A = 1$ として，次の式 (4.2) について計算をする．

$$\frac{|x_{i-1} - x_i|}{|y_{i-1} - y_1|} > 1 \tag{4.2}$$

1. 式 (4.2) の x_{i-1} に各境界値を代入しそれぞれ不等式，または，符号に関する式を不等式推論に基づいて作る．

2. 1 のそれぞれの式に，y_{i-1} に各境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

3. 2 のそれぞれの式の x_i に各境界値を代入していき不等式，または，符号に関する式を作る．

4. 2 のそれぞれの式の y_i に各境界値を代入していき不等式，または，符号に関する式を作る．

5. 3 で作られた式に対して，y_i に境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

6. 4 で作られた式に対して，x_i に境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

7. 5 と 6 で作られた式に矛盾がないかチェックする．

4.7.2　遷移可能性判定の方法

境界値同士の差の大小関係を調べて遷移可能性を判定するとは，境界値の大小関係のみを調べる判定に加えて，次のことを行う．3, 4, 7 の式が，l_{i-1} で計算されたものと矛盾するものがないか，すべての式について調べて，符号が決定するものについては更新する．

4.8　タイプ 3 の遷移可能性を判定する方法

4.8.1　大小関係の推論

変数と各境界値との大小関係から変化率の絶対値の比と，境界値・変数の差の比の大小関係が計算できる．

$$\frac{|a_i|}{|b_i|} = \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \tag{4.3}$$

A. 式 (4.3) の x_{i-1} に各境界値を代入しそれぞれ不等式，または，符号に関する式を不等式推論に基づいて作る．

B. A のそれぞれの式に，y_{i-1} に各境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

C. B のそれぞれの式の x_i に各境界値を代入していき不等式，または，符号に関する式を作る．

D. B のそれぞれの式の y_i に各境界値を代入していき不等式，または，符号に関する式を作る．

E. C で作られた式に対して，y_i に境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

F. D で作られた式に対して，x_i に境界値を代入し不等式，または，符号に関する式を作る．

G. E と F で作られた式に矛盾がないかチェックする．

各ロケーションでは上の，C, D, G の式を記憶する．

4.8.2　遷移可能性判定の方法

そして，遷移可能性判定は以下の例のように行う．

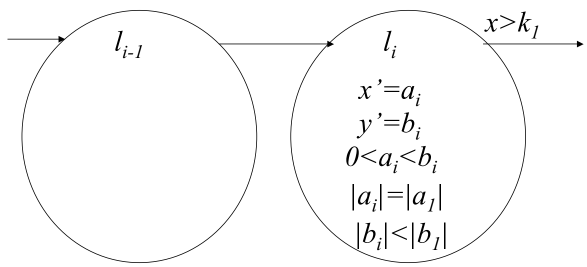

図 4.2: タイプ３で遷移可能性判定をする例

モデルに次のような記述があるとする．

$$|a_i| = |a_1|, |b_i| < |b_1|$$

すなわち，

$$\frac{|a_i|}{|b_i|} < \frac{|a_1|}{|b_1|} \tag{4.4}$$

また，ロケーション１とロケーション i ではそれぞれ，次のことが分かっている．

$$\left[\frac{|a_1|}{|b_1|} - \frac{k_{*_1} - k_{*_2}}{k_{*_3} - k_{*_4}}\right]$$

$$\left[\frac{|a_i|}{|b_i|} - \frac{k_{*_1} - k_{*_2}}{k_{*_3} - k_{*_4}}\right]$$

すると，以下の式 (4.5) が計算できる．

$$\left[\left(\frac{|a_i|}{|b_i|} - \frac{k_{*_1} - k_{*_2}}{k_{*_3} - k_{*_4}}\right) + \left(\frac{k_{*_1} - k_{*_2}}{k_{*_3} - k_{*_4}} - \frac{|a_1|}{|b_1|}\right)\right] \tag{4.5}$$

そして，式 (4.4) と式 (4.5) が矛盾がないかチェックする．ここで，$k_{*_i}(i = 1, 2, 3, 4)$ には各境界値が入る．したがって，式 (4.4) と式 (4.5) のチェックは各境界値を $\frac{k_{*_1} - k_{*_2}}{k_{*_3} - k_{*_4}}$ の k_{*_i} に代入してできる組み合わせの式すべてに対してチェックする．

4.9　停止性について

タイプ１，２，３いずれも停止条件の大小関係の組み合わせの数は，パラメータの組み合わせの数によって決まるので，パラメータが有限個しか存在しないことから，大小関係の数は有限である．よって，シミュレーションは必ず停止することが保証される．

4.10　例題

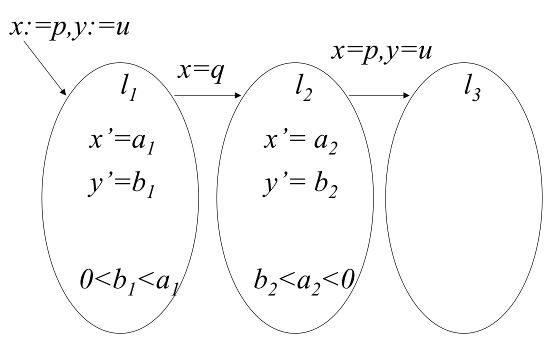

図 4.3: 例題のモデル

図 4.3 を例にタイプ２でシミュレーションする．また，$u < p < q$ と仮定する．
ロケーションに入るときのパラメータ等の大小関係の推論

初期ロケーションにおいて，変数間の大小関係，および，境界値同士の大小関係はモデルにより与えられている．

- 変数間の大小関係

$$[y_0 - x_0] = [u - p] = [-]$$

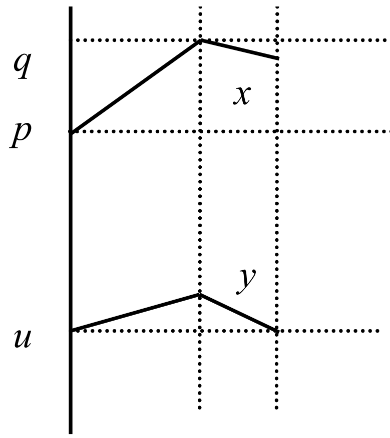

図 4.4: 例題のモデルのプロット

- 境界値同士の大小関係

$$[u - p] = [-]$$
$$[p - q] = [-]$$
$$[u - q] = [-]$$

- 変数と各境界値との大小関係

  これは，変数間の大小関係と境界値同士の大小関係から求めることができる.

$$[x_0 - p] = [0]$$
$$[x_0 - u] = [x_0 - p] + [p - u] = [+]$$
$$[x_0 - q] = [x_0 - p] + [p - q] = [-]$$
$$[y_0 - u] = [0]$$
$$[y_0 - p] = [y_0 - u] + [u - p] = [-]$$
$$[y_0 - q] = [y_0 - u] + [u - q] = [-]$$

l_1 の制約（変化率）において変化した大小関係の推論

- 変数間の大小関係

$$[y_1 - x_1] = [(b_1 - a_1)t_1] + [y_0 - x_0] = [-]$$

- 境界値同士の大小関係

  変化しない.

- 変数と各境界値との大小関係

$$
\begin{aligned}
[x_1 - u] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - u] = [+] \\
[x_1 - p] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - p] = [+] \\
[x_1 - q] &= [x_1 - x_0] + [x_0 - q] = [?] \\
[y_1 - u] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - u] = [+] \\
[y_1 - p] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - p] = [?] \\
[y_1 - q] &= [y_1 - y_0] + [y_0 - q] = [?]
\end{aligned}
$$

遷移可能性の判定と遷移可能な変数や境界値の大小関係の推論

l_1 を出るときのガードは $x = q$，すなわち，$[x_1 - q] = [0]$．$[x_1 - q] = [?]$ であったので遷移可能であり，$[x_1 - q] = [0]$ と更新する．

また，l_1 を出る変数と各境界値との大小関係が，以下のように x_1 に関係あるものが定まる．

$$
\begin{aligned}
[x_1 - p] &= [x_1 - q] + [q - p] = [+] \\
[x_1 - q] &= [x_1 - q] + [q - q] = [0] \\
[x_1 - u] &= [x_1 - q] + [q - u] = [+]
\end{aligned}
$$

また，その決まった変数と各境界値との大小関係から変数間の大小関係に矛盾しないか確かめる．

つまり，$[x_1 - q]$ と $[y_1 - q]$ より，

$$[y_1 - x_1] = [y_1 - q] + [q - x_1] = [?]$$

しかし，もとの符号が $[-]$ なので変更しない．

次に y_1 と境界値に関する大小関係を推論する．

$$
\begin{aligned}
[y_1 - u] &= [+] \\
[y_1 - p] &= [?] \\
[y_1 - q] &= [-]
\end{aligned}
$$

リセットによる次のロケーションに入る変数や境界値の大小関係

リセットはないのでそのままである．

モデルに $|b_1| < |a_1|$ という記述がある．すなわち，

$$\left[\frac{|a_1|}{|b_1|} - 1\right] = [+].$$

この関係から次の境界値の差の大小関係が推論される．

$$\frac{q - p}{u - p} > 1 \tag{4.6}$$

$$\frac{q-p}{u-q} > 1 \tag{4.7}$$

l_2 について推論する．

l_2 の制約（変化率）において変化した大小関係の推論

- 変数間の大小関係

$$[y_2 - x_2] = [(b_2 - a_2)t_2] + [y_1 - x_1] = [-]$$

- 境界値同士の大小関係
  変化しない．

- 変数と各境界値との大小関係

$$[x_2 - u] = [x_2 - x_1] + [x_1 - u] = [?]$$
$$[x_2 - p] = [x_2 - x_1] + [x_1 - p] = [?]$$
$$[x_2 - q] = [x_2 - x_1] + [x_1 - q] = [-]$$
$$[y_2 - u] = [y_2 - y_1] + [y_1 - u] = [?]$$
$$[y_2 - p] = [y_2 - y_1] + [y_1 - p] = [?]$$
$$[y_2 - q] = [y_2 - y_1] + [y_1 - q] = [?]$$

遷移可能性の判定と遷移可能な変数や境界値の大小関係の推論

l_2 を出るときのガードは $x = p, u = u$ である．. 遷移可能であるので $[x_2 - p] = 0, [y_2 - u] = 0$ と更新する．

また，l_2 を出る変数と各境界値との大小関係が，以下のように x_2, y_2 に関係あるものが定まる．

$$[x_2 - u] = [x_2 - p] + [p - u] = [+]$$
$$[x_2 - p] = [0]$$
$$[x_2 - q] = [x_2 - p] + [p - q] = [-]$$
$$[y_2 - u] = [0]$$
$$[y_2 - p] = [y_2 - u] + [u - p] = [-]$$
$$[y_2 - q] = [y_2 - u]^{[}u - q] = [-]$$

リセットによる次のロケーションに入る変数や境界値の大小関係リセットはないのでそのままである．

モデルに $|b_2| > |a_2|$ という記述がある．すなわち，

$$\frac{|a_2|}{|b_2|} < 1$$

この関係から次の境界値の差の大小関係が推論される．

$$\frac{u-p}{q-u} < 1 \tag{4.8}$$

$$\frac{p-q}{q-u} < 1 \tag{4.9}$$

ここで，式 (4.7) と式 (4.9) は $q-p > u-q, u-q < q-p$ であり，矛盾するので境界値の差の大小関係より l_3 へは，遷移不可能である．

第5章　記号シミュレーションの理論的意味

5.1　記号シミュレーションで到達可能性が決定可能なクラス

本章では，記号シミュレーションの以下のそれぞれの種類に対して到達可能性の判定が決定可能なクラスを示す.

タイプ１ パラメータの大小関係のみを記憶して遷移可能性を判定.

タイプ２ タイプ１の大小関係に加えて，境界値の差の大小を記憶して遷移可能性を判定する.

タイプ３ タイプ２の大小関係に加えて，境界値の差と変化率の比の大小を記憶して遷移可能性を判定する.

5.1.1　タイプ１で決定可能なクラス

パラメータの大小関係のみを記憶する方法では，次のクラスのハイブリッドシステムに対して，到達可能性の判定が可能である.

> 有限スロープ変数を１つだけ持つシンプルな（１変数の）マルチレート時間システム.（図 5.1)

また，このクラスのモデルの parallel commposition も決定可能である.

ここで，$p < q < x_1^{out} < r, t_i > 0$ と仮定する.

$$
\begin{aligned}
F_1 = [&p < q < x_1^{out} < r \\
&\wedge x_1^{in} = p \wedge x_1^{out} > q \\
&\wedge a_1 > 0 \wedge t_1 > 0 \\
&\wedge x_1^{out} = a_1 t_1 + x_1^{in}]
\end{aligned}
$$

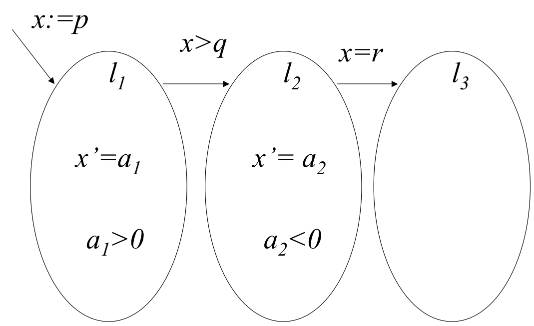

図 5.1: タイプ１で決定可能な例

$$
\begin{aligned}
F_2 = [&p < q < x_2^{in} < r \\
&\wedge x_2^{in} > q \wedge x_2^{out} = r \\
&\wedge a_2 < 0 \wedge t_2 > 0 \\
&\wedge x_2^{out} = a_2 t_2 + x_2^{out}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\exists a_1, a_2, p, q, r, x_1^{in}, x_1^{out}, x_2^{in}, x_2^{out}.[F_1 \wedge F_2 \wedge x_1^{out} = x_2^{in}] \\
\equiv &\exists a_1, a_2, p, q, r.[p < q < x_1^{out} < r \wedge a_1 > 0 \wedge r = a_1 t_1 + a_2 t_2 + p \wedge t_1, t_2 > 0] \\
\equiv &\exists a_1, a_2, p, q, r.[p < q < r \wedge a_1 > 0 \wedge a_2 < 0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\exists a_1, a_2, p, q, r.[\exists x_1^{in}, x_1^{out}.F_1 \wedge \exists x_2^{in}, x_2^{out}.F_2] \\
\equiv &\exists a_1, a_2, p, q, r.[p < q < r \wedge a_1 > 0 \wedge a_2 < 0]
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
&\exists a_1, a_2, p, q, r, x_1^{in}, x_1^{out}, x_2^{in}, x_2^{out}.[F_1 \wedge F_2 \wedge x_1^{out} = x_2^{in}] && (5.1) \\
\equiv &\exists a_1, a_2, p, q, r.[\exists x_1^{in}, x_1^{out}.F_1 \wedge \exists x_2^{in}, x_2^{out}.F_2] && (5.2) \\
\equiv &\exists a_1, a_2, p, q, r.[p < q < r \wedge a_1 > 0, a_2 < 0]. && (5.3)
\end{aligned}
$$

式 (5.1) は連続したロケーションの遷移可能性を調べる論理式であり，l_1 を出るときの値，すなわち，x_1^{out} と，l_2 に入るときの値，すなわち，x_2^{in} が等しいという条件を含んでいる．また，式 (5.2) は，ロケーション一つずつに対して遷移可能性を調べる論理式である．すなわち，ロケーションを出るときの値と次のロケーションに入る値には等しいとい

う条件はない．この二つの論理式は同値であり，その論理式はパラメータの大小関係のみで記述できる．すなわち，連続したロケーションの遷移可能性は，各ロケーションごとに遷移可能性を調べれば十分である．また，パラメータの数は有限であるので，そのパラメータの間の大小関係も有限の種類しか存在しない．つまり，１変数のハイブリッドオートマトンに対して，一つ一つのロケーションの遷移可能性を調べることにより，目的のロケーションへの到達可能性の判定ができる．

5.1.2　タイプ１で判定できない例

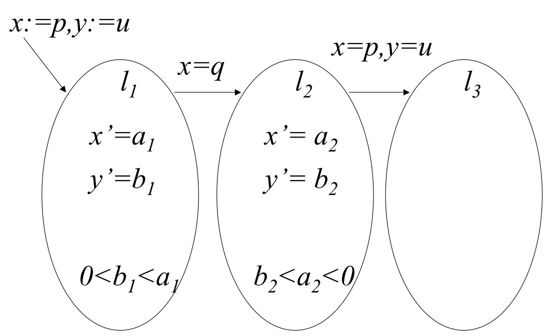

図 5.2: タイプ１で判定できないモデル

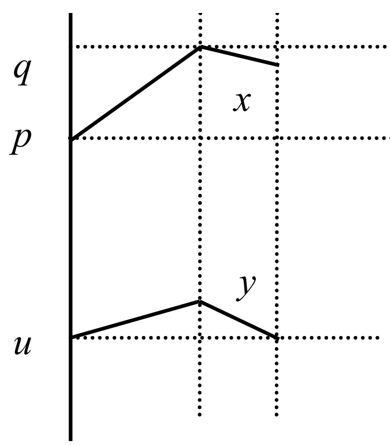

図 5.3:

図 5.2 のような例を考える．この例では，境界値の大小関係のみを調べて遷移可能を判

断すると，l_1 から l_3 まで到達可能と導く．しかし，実際は，l_1 の変化率の絶対値の大小関係から $|q-p| > |y_1^{out} - u|$ という関係がある．また，l_2 の変化率の絶対値の大小関係から $|q-p| < |y_1^{out} - u|$ という関係がある.（ただし，l_1 を出るときの y の値, すなわち，l_2 に入るときの y の値を y_1^{out} をする.）つまり，これらの関係は矛盾しているので l_2 から l_3 へは遷移できない.

5.1.3　タイプ２で決定可能なクラス

パラメータの大小関係および，パラメータ同士の差の大小関係を記憶する方法では，次のクラスのハイブリッドシステムに対して，到達可能性の判定が可能である．

> 弱 initialized 条件と以下の条件を満たすを満たすシンプルなハイブリッドシステム．ただし，各ロケーション l では，変化率の間には大小関係と，変化率の絶対値の間の大小関係のみ定義できるとする．(図 5.4)
>
> しかも，線形ハイブリッドシステムに限定しなくてもよい．なぜならば，各ロケーションで記述できるのは $\dot{x} < 0 < \dot{y} \wedge |\dot{x}| < |\dot{y}|$ などであり，この記述は次のよう条件を満たす任意の関数 f, g を使って書き換えることができるからである．
>
> また，タイプ１で決定可能なクラスもタイプ２で決定可能である．

$$\dot{x} = f(t), \dot{y} = g(t), \forall t \geq 0[f(t) < 0 < g(t) \wedge |f(t)| < |g(t)|]$$

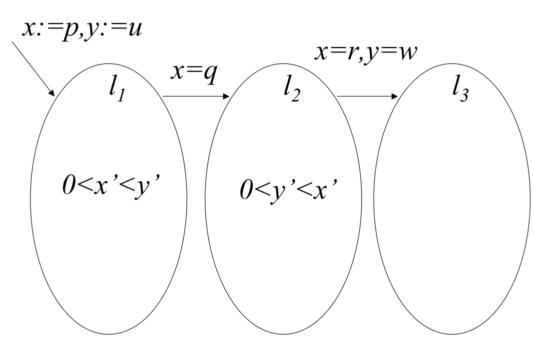

図 5.4: タイプ２で決定可能なモデル

ここで，$u < p < q = x_1^{out} < y_1^{out} < r < w, t_i > 0$ と仮定する．そして，l_1 での滞在時間を t_0 から t_1，l_2 での滞在時間を t_1 から t_2 とする．

$$\begin{aligned}F_1 \equiv &[u < p < q = x_1^{out} < y_1^{out} < r < w \\ &\wedge \forall t > 0.[0 < f(t) < g(t)] \\ &\wedge x_1^{in} = p \wedge x_1^{out} > q \\ &\wedge y_1^{in} = u \\ &\wedge x_1^{out} = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt + x_1^{in} \\ &\wedge y_1^{out} = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt + y_1^{in}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2 \equiv &[u < p < q = x_2^{in} < y_2^{in} < r < w \\ &\wedge \forall t > 0.[0 < g(t) < f(t)] \\ &\wedge x_2^{in} > p \wedge x_2^{out} = r \\ &\wedge y_2^{out} = w \\ &\wedge x_2^{out} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + x_2^{in} \\ &\wedge y_2^{out} = \int_{t_2}^{t_2} g(t)dt + y_2^{in}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\exists p, q, r, u, w, x_1^{in}, x_1^{out}, x_2^{in}, x_2^{out}, y_1^{in}, y_1^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.[F_1 \wedge F_2 \wedge x_1^{out} = x_2^{in} \wedge y_1^{out} = y_2^{in}] \\ \equiv &\exists p, q, r, u, w.[u < p < q < r < w \wedge w - r < r - q].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\exists p, q, r, u, w[\exists x_1^{in}, x_1^{out}, y_1^{in}, y_1^{out}.F_1 \wedge \exists x_2^{in}, x_2^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.F_2] \\ \equiv &\exists p, q, r, u, w.[u < p < q < r < w \wedge w - r < r - q].\end{aligned}$$

よって，

$$\exists p, q, r, u, w, x_1^{in}, x_1^{out}, x_2^{in}, x_2^{out}, y_1^{in}, y_1^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.[F_1 \wedge F_2 \wedge x_1^{out} = x_2^{in} \wedge y_1^{out} = y_2^{in}] \tag{5.4}$$

$$\equiv \exists p, q, r, u, w[\exists x_1^{in}, x_1^{out}, y_1^{in}, y_1^{out}.F_1 \wedge \exists x_2^{in}, x_2^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.F_2] \tag{5.5}$$

$$\equiv \exists p, q, r, u, w.[u < p < q < r < w \wedge w - r < r - q] \tag{5.6}$$

式 (5.4) は連続したロケーションの遷移可能性を調べる論理式であり，l_1 を出るときの値，すなわち，x_1^{out}, y_1^{out} と，l_2 に入るときの値，すなわち，x_2^{in}, y_2^{in} が等しいという条件

を含んでいる．また，式 (5.5) は，ロケーション一つずつに対して遷移可能性を調べる論理式である．すなわち，ロケーションを出るときの値と次のロケーションに入る値には等しいという条件はない．この二つの論理式は同値であり，その論理式はパラメータの大小関係とパラメータ同士の差の大小関係のみで記述できる．すなわち，連続したロケーションの遷移可能性は，各ロケーションごとに遷移可能性を調べれば十分である．また，パラメータの数は有限であるので，そのパラメータの間の大小関係とパラメータ同士の差の大小関係は有限の種類しか存在しない．つまり，一つ一つのロケーションの遷移可能性を調べることにより，目的のロケーションへの到達可能性の判定ができる．

5.1.4　タイプ２で判定できない例

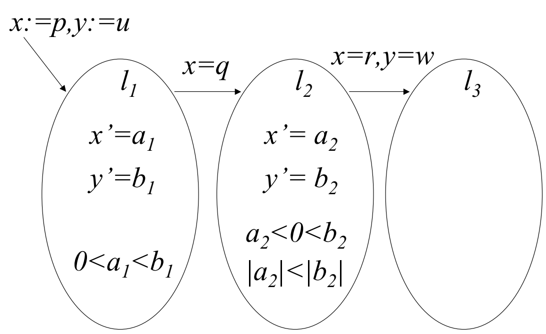

図 5.5: タイプ２で判定できないモデル

$$|q - p| < |w - u| \wedge |q - r| < |w - u| \tag{5.7}$$

図 5.5 に対して，タイプ２の方法でシミュレーションしたときに，l_3 に到達可能なパラメータの大小関係と境界値の差の大小関係は式 (5.7) である．

しかし，l_1 を出るときの y の値 (y_1^{out} とする) と l_2 に入るときの y の値 (y_2^{in} とする) が等しいという条件と各ロケーションの変化率の大小関係から以下の条件 (式 (5.8)）を導くことができる．

$$
\begin{aligned}
&|a_1| < |b_1| \wedge |a_2| < |b_2| \\
&\wedge \frac{|q-p|}{|a_i|} = \frac{|y_1^{out} - u|}{|b_1|} \\
&\wedge \frac{|r-q|}{|a_2|} = \frac{|w - y_2^{in}|}{|b_2|} \\
&\wedge y_1^{out} = y_2^{in}
\end{aligned}
$$

より，

$$|q-p| + |q-r| < |w-u| \tag{5.8}$$

「式 (5.8) ならば，式 (5.7)」であるが，その逆は一般には成り立たない．すなわち，この例に対して記号シミュレーションのタイプ２の方法で導かれた，境界値の差の大小関係は到達可能性を判定するための必要条件になっていることを意味している．

5.1.5　タイプ３で決定可能なクラス

パラメータの大小関係，パラメータ同士の差の大小関係，および，パラメータの差と変化率の比の大小関係を記憶する方法では，次のクラスのハイブリッドシステムに対して，到達可能性の判定が可能である．(図 5.6)

> 完全 initialized 条件を満たす，有限スロープ変数を持つシンプルなマルチレート時間システム．(図 5.6) および，タイプ２で決定可能なクラス

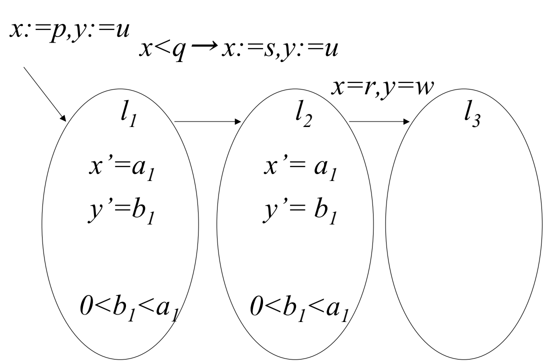

図 5.6: タイプ３で決定可能なモデル

5.1.6　タイプ３で判定できない例

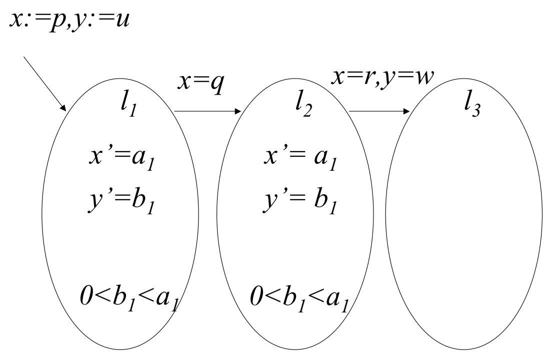

図 5.7: タイプ３で判定できないモデル

$$
\begin{aligned}
F_1 \equiv [&u < p < y_1^{out} < w < q < r \\
&\wedge x_1^{in} = p \wedge x_1^{out} = q \\
&\wedge y_1^{in} = u \\
&\wedge x_1^{out} = a_1 t_1 + x_1^{in} \\
&\wedge y_1^{out} = b_1 t_1 + y_1^{in}].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2 \equiv [&u < p < y_2^{in} < w < q < r \\
&\wedge x_2^{in} = q \wedge x_2^{out} = p \\
&\wedge y_2^{out} = u \\
&\wedge x_2^{out} = a_2 t_2 + x_2^{in} \\
&\wedge y_2^{out} = b_2 t_2 + y_2^{in}].
\end{aligned}
$$

$$
\exists a_1, a_2, b_1, b_2, p, q, r, u, w.[\exists x_1^{in}, x_1^{out}, y_1^{in}, y_1^{out}.F_1 \wedge \exists x_2^{in}, x_2^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.F_2] \tag{5.9}
$$

$$
\equiv \exists p, q, r, u, w.[u < p < w < q < r \wedge p - u < q - p] \tag{5.10}
$$

$$\exists a_1, a_2, b_1, b_2, p, q, r, u, w, x_1^{in}, x_1^{out}, y_1^{in}, y_1^{out} x_2^{in}, x_2^{out}, y_2^{in}, y_2^{out}.[F_1 \wedge F_2 \wedge y_1^{out} = y_2^{in}] \tag{5.11}$$

$$\equiv \exists p, q, r, u, w.[u < p < w < q < r \wedge w - u < r - p \wedge p - u < q - p] \tag{5.12}$$

$$\equiv \exists p, q, r, u, w.[u < p < w < q < r \wedge p - u < r - w \wedge p - u < q - p] \tag{5.13}$$

(5.9) はロケーション l_1, l_2 それぞれに対して遷移可能性を調べる論理式である．一方，(5.11) は l_1 から l_3 への連続したロケーションの遷移可能性を判定する論理式，すなわち，l_1 を出るときの y の値 (y_1^{out} とする) と l_2 に入るときの y の値 (y_2^{in} とする) が等しいという条件が含まれている．そこで,「式 (5.11) ならば，式 (5.9)」であるが，その逆は一般には成り立たない．すなわち，この例に対して記号シミュレーションのタイプ 3 の方法で導かれた大小関係は到達可能性を判定するための必要条件になっていることを意味している．

5.2 記号シミュレーションにおける振る舞いの近似方法

記号シミュレーションで導かれるものは，4.4 で述べたように起こりうるすべての振る舞い，つまり，遷移可能なロケーションとそのロケーションでの変数やパラメータの大小関係が推論され，遷移可能なすべてのパスとそれを実現するための変数やパラメータに関する大小関係が推論される．すなわち，次のような有限で記述できる列をすべてのパスに対して生成する．

$$(l_1, P_1, P_1')(l_2, P_2, P_2')(l_3, P_3, P_3')(l_4, P_4, P_4') \ldots (l_m, P_m, P_m') \tag{5.14}$$

式 (5.14) を記号シミュレーションが導くある一つの振る舞いという．ここで，P_i, P_i' はそれぞれ，ロケーションに入るとき，および，出るときの変数やパラメータに関する大小関係である．ここで，

$$P_i = P_{iA} \wedge P_{iB}$$

であり，P_{iA} には，変数と境界値の大小関係，すなわち，$x \in Var, k \in B$ に対して，

$$x \# k.$$

ただし，$\# \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$ また，P_{iB} には，境界値の大小関係や境界値の差の大小関係，および，境界値と変化率の比の大小関係が導かれる．すなわち，$k_1, k_2, k_3, k_4 \in B, a, a' \in D$ に対して，タイプ１，２，３では，

$$k_1 \# k_2$$

タイプ２，３では，

$$k_1 - k_2 \# k_3 - k_4$$

そして，タイプ３では，

$$\frac{k_1 - k_2}{a} \# \frac{k_3 - k_4}{a'}$$

が導かれる．

一般のハイブリッドシステムを H とする．H の振る舞いを

$$Beh = (l_1, (x, y), (x, y)')(l_2, (x, y), (x, y)') \dots$$

とする．ここで，(x, y) はロケーションに入るときの変数の値，$(x, y)'$ はロケーションを出るときの値である．

Beh を定性化，つまり，モデルの定性化と同様に，モデルに現れる実数値をパラメータとすることにより大小関係で表現して得られる振る舞いを $\widetilde{Beh}$ とする．これを真の振る舞いという．

また，H の定性モデルを QH とする．$QBeh$ は以下のような，QH から記号シミュレーションで導かれる振る舞いの集合であり，式 (5.14) のような各振る舞いを要素とする．

$$QBeh = \{QBeh_1, QBeh_2, \dots, QBeh_n\}.$$

記号シミュレーションでは次のことがいえる．

定理　記号シミュレーションでは起こりうるすべての振る舞いを導き出し，必ず，真の振る舞いをすべて含んでいる．すなわち，

$$\widetilde{Beh} \subseteq QBeh$$

(証明) 記号シミュレーションの計算方法が符号推論，および，不等式推論のみを使っており，それぞれの推論が導く結果には必ず正しい結果を含んでいる．すなわち，符号推論で含む結果には必ず正しい符号を含んでおり，不等式推論でも符号推論を使っているので導かれた不等式や符号に関する式は必ず正しい符号を含んでいる．このことから，必ずシミュレーションの導く結果が真の振る舞いをすべて含むことが分かる．

また，P'_{mB} に矛盾しない実数をパラメータに代入し，さらに，$P_{iA}, P'_{iA} (i = 1, 2, 3, 4, m)$ を満たすように変数に値を代入したもののなかで真の振る舞いと一致するようなパラメータ設定を真のパラメータ設定という．P'_{mB} のようなパラメータ設定の集合は必ず真のパラメータ設定が含んでいることも同様に言える．

これからパラメータ設定の近似方法について述べる．

定義 (閉半空間)　$\boldsymbol{n} \in \mathcal{R}^n$ で $\alpha \in \mathcal{R}$ とする．このとき，

$$\{\boldsymbol{x} | \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle \geq \alpha\}$$

を閉半空間 (closed halfspace) という．ここで，$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle$ は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積を表す．

定義 (凸多面集合)　有限個の閉半空間の共通部分として表せる集合を凸多面集合 (polyhedral set) という．

そこで，記号シミュレーションの近似の方法について以下のことがいえる．

> 記号シミュレーションでは，パラメータ設定の集合は真のパラメータ設定を凸多面集合で近似している．

たとえば，タイプ 1 の場合に，パラメータ設定の集合が $\{(x_1, x_2, x_3)|x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$ であるとき，以下のような半閉空間 A, B, C の有限個の共通部分で表すことができる．

$$\begin{aligned} A =& \{(x_1, x_2, x_3)|\, \langle(-1, 1, 0), (x_1, x_2, x_3)\rangle \geq 0\} \\ B =& \{(x_1, x_2, x_3)|\, \langle(0, -1, 1), (x_1, x_2, x_3)\rangle \geq 0\} \\ C =& \{(x_1, x_2, x_3)|\, \langle(-1, 0, 1), (x_1, x_2, x_3)\rangle \geq 0\} \end{aligned}$$

一般の場合を考える．境界値の集合を $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, 境界値の数を k, 変化率の集合を D とし，変化率の数を m とする．

タイプ 1 では

$$\{\boldsymbol{x}|\, \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0, \boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{k}, x_i \in B\}$$

の有限個の共通部分でパラメータ設定の集合が表すことができる．ここで，

$$\boldsymbol{n} = \sigma(\boldsymbol{n}_0), \boldsymbol{n}_0 = (1, -1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k-2}),$$

σ は k 文字のある置換である．
パラメータの数が有限で，$\boldsymbol{n}$ は有限通りしか存在しないので集合の数は有限通りであり，半閉空間の有限個の共通部分で表せるので，凸多面集合であることが一般の場合でもいえる．

タイプ 2 では，

$$\{\boldsymbol{x}|\, \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0, \boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{{}_kC_2}, x_i = x_i^1 - x_i^2, x_i^1, x_i^2 \in B, x_i^1 \neq x_i^2\}$$

の有限個の共通部分でタイプ 2 のパラメータ設定の集合が表すことができる．ここで，

$$\boldsymbol{n} = \sigma'(\boldsymbol{n}_0), \boldsymbol{n}_0 = (1, -1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{{}_kC_2-2}),$$

σ' は ${}_kC_2$ 文字のある置換である．

タイプ 3 では，

$$\{\boldsymbol{x}|\, \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0, \boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{m_kC_2}, x_i = \frac{x_i^1 - x_i^2}{a}, x_i^1, x_i^2 \in B, a \in D, x_i^1 \neq x_i^2\}$$

の有限個の共通部分でタイプ3のパラメータ設定の集合が表すことができる．ここで，

$$\boldsymbol{n} = \sigma''(\boldsymbol{n}_0), \boldsymbol{n}_0 = (1, -1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m_k C_2 - 2}),$$

σ'' は，$m_k C_2$ 文字のある置換である．

第6章　まとめ

本研究では，ハイブリッドシステムに対する定性シミュレーションの新しい方法としてパラメータに大小関係を導入した記号シミュレーションを提案し，従来の方法よりも詳細なシミュレーションが可能になった．

記号シミュレーションは起こりうるすべての振る舞いをすべて導き，その中には必ず真の振る舞いを含むが，起こりえない振る舞いも含まれる可能性があるということ，および，一般の線形ハイブリッドシステムに対して到達可能性が判定できないことから，記号シミュレーションは近似的なシミュレーション方法となる．

しかし，ロケーションへの到達可能性問題が以下のそれぞれの方法に対して決定可能になるクラスが分かった．

タイプ１ パラメータの大小関係のみを記憶して遷移可能性を判定．

> 有限スロープ変数を１つだけ持つシンプルな（１変数の）マルチレート時間システム．また，このクラスのモデルの parallel composition.

タイプ２ タイプ１の大小関係に加えて，境界値の差の大小を記憶して遷移可能性を判定する．

> タイプ１で決定可能なクラス，および，弱 initialized 条件を満たす有限スロープ変数を持つシンプルなマルチレート時間システム．
>
> ただし，各ロケーション l では，変化率の間には大小関係と，変化率の絶対値の間の大小関係のみ定義できるとする．

タイプ３ タイプ２の大小関係に加えて，境界値の差と変化率の比の大小を記憶して遷移可能性を判定する．

> タイプ２で決定可能なクラス，および，完全 initialized 条件を満たす，有限スロープ変数を持つシンプルなマルチレート時間システム．

記号シミュレーションは導いた振る舞いに対してその振る舞いを実現するためのパラメータ設定の集合も導く．その集合は，真のパラメータ設定を凸多面集合で近似している．また，一般の線形ハイブリッドシステムの従来の解析手法に 2.10.2 で紹介した近似的な解析では，変数がとりうる値の集合をとりうる値を含む最小の凸集合である凸包で近似

している．記号シミュレーションは，近似精度に関して，ほとんど考慮されていないのでどのような近似手法によって，より近似精度の高いパラメータ設定の集合が求まるか検討することが今後の課題のひとつとなる．

また，記号シミュレーションを実装する際の効率的な方法を検討することがもう一つの課題である．

謝辞

本研究を進めるにあたり，始終熱心に御指導を頂いた平石邦彦助教授に感謝の意を表し，心より御礼申し上げます．本研究をついて様々な助言をして頂きました宋少秋助手，高島康裕助手に厚く感謝致します．また，大学院生活でいろいろな面で支えていただいた安倍秀明氏をはじめとする，システム基礎講座の皆様に感謝します．

発表論文リスト

野村彰典, 平石邦彦: ハイブリッドシステムの定性的解析について.
信学技報, CAS-2002-37, No.102, pp.29-34(2002-11).

参考文献

[1] B.Kuipers:Qualitative Reasening - Modeling and Simulation wiht Incomplete Knowledge, The MIT Press(1994).

[2] R. Alur et al.:The Algorithmic Analysis of Hybrid Systems. Theoretical Computer Science, 138, pp.3-34(1995).

[3] B. David and H. Allar: On Hybrid Petri Nets, Discrete Event Dynamic Systems, Theory and Applications, 11, pp.9-40(2001).

[4] Anuj Puri: Theory of Hybrid Systems and Discrete Event Systems.

[5] R. Alur et al. : Discrete Abstruction of Hybrid Systems, Proc.IEEE, vol,88, No.7, pp.971-983(2000).

[6] T. A. Henzinger et al. : What's Decidable about Hybrid Automata?, J. Computer and System Sciences 57, pp.94-124(1998).

[7] 北野宏明：システムバイオロジー生命をシステムとして理解する，秀潤社 (2001).

[8] 藤田祥恵，土井淳，松野浩嗣，宮野悟：ハイブリッド関数ペトリネットによる大腸菌の lac オペロンと解糖系の遺伝子ネットワークのモデル化とシミュレーション，第１５回軽井沢ワークショップ資料 (2002,4) セッション, AD2-4.