Title	可換な residuated lattice と線形論理の拡張体系
Author(s)	木原，均
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1657
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

可換な residuated lattice と線形論理の拡張体系

木原 均 (110036)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2003 年 2 月 14 日

キーワード: 部分構造論理, 線形論理 **FLe**, 可換な residuated lattice, variety.

1 はじめに

部分構造論理とは、大雑把にいえば古典論理 **LK** や直観主義論理 **LJ** から、構造規則の一部または全てを取り除いて得られる体系の総称である。Lambek による **FL** の研究に始まり、適切論理、線形論理、contraction を持たない論理 **FLew** など、いろいろな種類の論理がある。これらの論理に対しては、 cut 除去可能なシーケント計算を導入することにより、 disjunction property や decidability などの結果を示すことが出来る。しかしこのようなシンタックティカルな方法では、部分構造論理一般についての議論ができず、意味論的な方法が必要となる。最近部分構造論理の意味論として注目されているのが、代数的モデルによる意味論である。実際に **FLew** 及びその拡張体系に対しては、可換で、integral な residuated lattice を用いた研究で既に多くの結果が得られている。しかし integrality [2] を仮定しない場合には、代数的に扱いが難しくなる面があり、これまであまり研究が行われてこなかった。

本研究では、可換ではあるが integrality を必ずしも仮定しないような residuated lattices を主に取り上げる。これは、論理としては直観主義的線形論理 **FLe** の拡張体系を扱うことに相当する。特に適切論理は、これらの拡張体系のうちの重要なクラスである。

最近の residuated lattice についての成果をもとに、このような代数構造についての研究を展開し、その代数的性質が論理的な性質にどのように反映されるかを明らかにする。

本研究では、可換な residuated lattice の minimal variety が非可算個存在することを示している。これは極大無矛盾論理が非可算個 **FLe** 上に存在していることを意味している。

2 線形論理 FLe とその拡張体系

部分構造論理の一つである線形論理 **FLe** とは、直観主義論理 (LJ) から contraction, weakening ルールを取り除いたものである。

[2] integrality とはモノイドの単位元が最大元と一致することである。

論理を抽象的、一般的に扱うために、論理 (logic) とは論理式の集合で、代入と三段論法に関して閉じた集合であると定義しておく。このとき論理式全体の集合 Φ は明らかに最大の論理であり、また **FLe** で証明可能な論理式全体の集合も論理となっている。論理は集合の包含関係 $\subseteq$ に関して順序をなすことが知られている。よって $\mathcal{L} := \{L|\ L$ は論理であり、かつ $\mathbf{FLe} \subseteq L\}$ とし、また $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ に対して $L_1 \vee L_2 :=$「$L_1 \cup L_2$ を含む最小の論理」と定義すれば、$\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ は最小元 **FLe**、最大元 Φ の有界束となる。ここで $\cap, \cup$ はそれぞれ集合における通常の共通部分、和集合を表している。

3 可換な residuated lattice

一般に論理は代数構造である「束」によってその意味付けを与えることができるが、論理 **FLe** に対する代数構造となるのは、可換な residuated lattice という束構造である。

代数 $\mathbf{M} = \langle M, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, \top, \bot, 1, 0 \rangle$ が可換な residuated lattice (CRL) であるとは、以下を満たすことである。

(R1) $\langle M, \cap, \cup, \top, \bot \rangle$ は最大元を $\top$、最小元を $\bot$ とする有界束である。

(R2) $\langle M, \cdot, 1 \rangle$ は 1 を単位元とする可換モノイドである。すなわち任意の $x, y, z \in M$ に対して以下が成り立つ。

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot y = y \cdot x$
3. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(R3) 任意の $x, y, z \in M$ に対して、$x \cdot y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z$。

4 Variety

これからは、可換な residuated lattice のクラスについて考えていく。そのため与えられた代数のクラス $\mathcal{K}$ に対し、代数のクラス $S(\mathcal{K}), H(\mathcal{K}), P(\mathcal{K})$ を以下のように定義する。

Definition 1

- $\mathbf{A} \in S(\mathcal{K}) \iff \mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ のある元の *subalgebra* である。
- $\mathbf{A} \in H(\mathcal{K}) \iff \mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ のある元の *homomorphic image* である。
- $\mathbf{A} \in P(\mathcal{K}) \iff \mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ の空でない代数の族の *direct product* である。

代数の空でないクラス $\mathcal{K}$ が variety であるとは、クラス $\mathcal{K}$ が subalgebras, homomorphic images, direct products の下で閉じていることである。

$\mathcal{K}$ を代数のクラスとしたとき、$\mathrm{V}(\mathcal{K})$ を $\mathcal{K}$ を含む最小の variety とする。このとき $\mathrm{V}(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ によって生成された variety であるという。

Birkhoff により次の二つの事が示されている。

Proposition 1 任意のクラス$\mathcal{K}$に対し、

$$V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K}).$$

Proposition 2 もし代数のクラス $\mathcal{K}$ が variety であるならば、そのとき$\mathcal{K}$のすべての要素は$\mathcal{K}$の subdirectly irreducible member の subdirect product と isomorphic となる。

したがって、Proposition 1,2 より任意の variety は、その中の subdirectly irreducible な元によって生成されることがわかる。

5 極小な variety

variety V が minimal であるとは、V は自分自身と自明な variety 以外には subvariety を持たないことである。ここで自明な variety とは、自明な代数、つまり一点からなる代数のみからなる variety のことである。

これまでの研究で次の定理を得た。

Theorem 1 可換な *residuated lattice* の *minimal variety* は非可算個存在する。

6 おわりに

すべての可換な residuated lattice がなす variety を **CRL** とし、自明な variety を TV とする。このとき $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, TV, \mathbf{CRL} \rangle$ を次のよう定義する。

1. $\mathcal{V} := \{V \mid V$ は可換な residuated lattice の variety $\}$
2. 任意の $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に対して、
   $V_1 \vee V_2$ は $V_1 \cup V_2$ を含む最小の variety

このとき $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, TV, \mathbf{CRL} \rangle$ は最小元 TV、最大元 **CRL** の有界束となる。

この $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, TV, \mathbf{CRL} \rangle$ は $\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ を丁度引っくり返した束構造をなしていることが知られている。

よって得られた定理から、 **FLe** を含む論理式の集合で、論理式全体の集合 Φ の次に大きなものは、非可算個存在することがわかった。