修 士 論 文

可換な residuated lattice と線形論理の拡張体系

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

木原均

2003 年 3 月

修 士 論 文

可換な residuated lattice と線形論理の拡張体系

指導教官　小野寛晰 教授

審査委員主査　小野寛晰 助教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　大堀淳 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

110036 木原均

提出年月: 2003 年 2 月

目 次

第1章　序章

1.1　はじめに

部分構造論理とは、大雑把にいえば古典論理 **LK** や直観主義論理 **LJ** から、構造規則の一部または全てを取り除いて得られる体系の総称である。Lambek による **FL** の研究に始まり、適切論理、線形論理、contraction を持たない論理 **FLew** など、いろいろな種類の論理がある。これらの論理に対しては、 cut 除去可能なシーケント計算を導入することにより、 disjunction property や decidability などの結果を示すことが出来る。しかしこのようなシンタックティカルな方法では、部分構造論理一般についての議論ができず、意味論的な方法が必要となる。最近部分構造論理の意味論として注目されているのが、代数的モデルによる意味論である。実際に **FLew** 及びその拡張体系に対しては、可換で、integral な residuated lattice を用いた研究で既に多くの結果が得られている。しかし integrality [1] を仮定しない場合には、代数的に扱いが難しくなる面があり、これまであまり研究が行われてこなかった。

本研究では、可換ではあるが integrality を必ずしも仮定しないような residuated lattices を主に取り上げる。これは、論理としては直観主義的線形論理 **FLe** の拡張体系を扱うことに相当する。特に適切論理は、これらの拡張体系のうちの重要なクラスである。

最近の residuated lattice についての成果をもとに、このような代数構造についての研究を展開し、その代数的性質が論理的な性質にどのように反映されるかを明らかにする。

本稿は全部で五つの章からなる。最後の第五章で、可換な residuated lattice の minimal variety がどれくらい存在するのか、またそれが論理的な性質にどのように反映されるのかを明らかにする。途中の二から四章はそのための準備をする章である。

一章では、本研究の背景と目的、さらに本稿で用いられる代数的な表記法についての説明が行われる。

二章では、部分構造論理の一種である直観主義的線形論理 **FLe** を導入し、さらに **FLe** 上の論理についての説明をする。

三章では、**FLe** に対する代数モデルである commutative residuated lattice (CRL) を定義し、 CRL のさまざまな代数的諸概念を見ていく。

四章では、既に明らかにされている **FLe** 上の論理と CRL の関係を説明する。

五章では、特別な CRL ($\mathbf{B}_s$) を構成し、それを用いて **FLe** 上の論理と CRL の関係を明らかにする。この結果が本論文の主定理となっている。

[1] integrality とはモノイドの単位元が最大元と一致することである。

1.2　代数の表記法

対象となる集合上に有限個の関数 (演算)、定数を導入した代数構造を

$$\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle$$

という形の表記法で表す。ここで A は対象となる集合、f_i は関数を表している。特に、定数は０引数関数として表記することにする。ここで A は対象となる集合、$\mathbf{A}$ は代数を表していることに注意しなさい。これ以降しばしば、大文字のアルファベットを対象領域の集合、太い大文字のアルファベットを代数として使う。この表記法を用いて順序集合及び束を定義すると次のようになる。

Definition 1.1 (順序集合) $\mathbf{A} = \langle A, \leq \rangle$ が順序集合であるとは、任意の $x, y, z \in A$ に対して次が成り立つことである。

(P1) $x \leq x$

(P2) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

(P3) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

順序集合 $\mathbf{A} = \langle A, \leq \rangle$ がさらに「**(P4)** $\forall x, y \in A$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$」を満たすとき、$\mathbf{A}$ は全順序集合であるという。

Definition 1.2 (束 (lattice)) $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup \rangle$ が束 *(lattice)* であるとは、任意の $x, y, z \in L$ に対して次が成り立つことである。

(L1) $x \cap x = x,\ x \cup x = x$

(L2) $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z,\ x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$

(L3) $x \cap y = y \cap x,\ x \cup y = y \cup x$

(L4) $x \cap (x \cup y) = x,\ x \cup (x \cap y) = x$

順序集合と束はどちらもとても重要でかつ、基本的な代数である。そのためここで少し補足をしておく。今 $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup \rangle$ を束とする。このとき L 上の二項関係 $\leq$ を

$$x \leq y \iff x \cap y = x \quad (\iff x \cup y = y)$$

と定めると、$\langle L, \leq \rangle$ は順序集合となる。つまり束は常に順序集合となるので、束にはいつも上で定義された順序が与えられているとする。

第2章　部分構造論理 FLe の sequent 計算

部分構造論理 FLe とはおおざっぱに言うと、直観主義論理 LJ から構造に関する推論規則 contraction と weakening を取り除いたものである。本章ではまず体系 FLe を導入し、次に FLe 上の logic について説明する。

2.1　直観主義論理 LJ

体系 FLe を説明する前に、まず直観主義論理 LJ について説明する。LJ の論理結合子として、次のようなものが使われる。$\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction), $\supset$ (implication), $\neg$ (negation)。これらの論理結合子を使って、次のように論理式が定義される。

Definition 2.1 (論理式) 論理式を次のようにして帰納的に定義する。

1. 命題変数と命題定数 $(\top, \bot)$ は論理式である。
2. A, B がともに論理式ならば、$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (\neg A)$ はそれぞれ論理式である。

LJ の sequent 計算における式 (sequent) とは次の形をしたものである。

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \to B \qquad (A_i, B \text{ は論理式})$$

ここで左辺に現れる m は 0 以上であり、また右辺の B は空でもよい。以下では簡略のために、有限個の (0 個でもよい）論理式をコンマで区切った列を表すために、Γ, Δ などの大文字のギリシャ語を使うことにする。

LJ で公理に相当する始式 (initial sequent) は

1. $A \to A$
2. $\Gamma \to \top$
3. $\Gamma, \bot, \Delta \to D$

という形の式である。次に LJ の推論規則について説明する。

LJ の推論規則

構造に関する推論規則

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Delta \to D}{\Gamma, A, \Delta \to D}\,(w \ \to) \qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A}\,(\to \ w)$$

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \to D}{\Gamma, A, \Delta \to D}\ (c\ \to)$$

Exchange rule:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to D}{\Gamma, B, A, \Delta \to D}\ (e \to)$$

Cut rule:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta, A, \Pi \to D}{\Delta, \Gamma, \Pi \to D}\ (cut)$$

各論理結合子に対する推論規則:

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \to D}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \to D}\ (\wedge 1 \to) \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \to D}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \to D}\ (\wedge 2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \to D \quad \Gamma, B, \Delta \to D}{\Gamma, A \vee B, \Delta \to D}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}\ (\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\ (\to \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Pi, B, \Delta \to D}{\Pi, A \supset B, \Gamma, \Delta \to D}\ (\supset \to) \qquad \frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ (\to \supset)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}\ (\neg\ \to) \qquad \frac{\Gamma, A \to}{\Gamma \to \neg A}\ (\to\ \neg)$$

始式から出発し、それに推論規則を次々と適用していく過程をすべて記述したものを LJ の証明図という。そして証明図の一番下にある式をその証明図の終式という。また、式 S を終式とするような証明図が存在するときには、S は LJ で証明可能である (provable) といい、その証明図を S の証明図と呼ぶ。

式 $\to A$ が LJ で証明可能であるとき、論理式 A は LJ で証明可能であるといい、$LJ \vdash \to A$ と書く。また、論理式 $A \supset B$ と $B \supset A$ がともに LJ で証明可能であるとき、A と B は LJ において論理的に同値であるという。linear logic の世界では、この FLe が直観主義的線形論理の multiplicative-additive fragment と呼ばれている。

2.2 形式体系 FLe の sequent 計算

部分構造論理の一つである FLe とはおおざっぱに言うと、直観主義論理 LJ から構造に関する規則の contraction と weakening を取り除いた体系である。ここでは、LJ からこれらの構造規則を取り除くことにより、とのような影響が現れるのかを説明していく。

2.2.1 命題定数と weakening

ここでは命題定数 $(\top, \bot)$ と weakening との関係について説明する。LJ では始式として、$\Gamma \to \top$ が与えられているので次のことが成り立つ。

$$\text{論理式 } A \text{ が証明可能} \iff A \text{ は論理的に} \top \text{と同値}$$

$(\Rightarrow)$

$$\dfrac{A \to \top}{\to A \supset \top}\,(\to\supset) \qquad \dfrac{\dfrac{\to A}{\top \to A}\,(w\ \to)}{\to \top \supset A}\,(\to \supset)$$

$(\Leftarrow)$

$$\dfrac{\to \top \supset A \qquad \dfrac{\to \top \quad A \to A}{\top \supset A \to A}\,(\supset\to)}{\to A}\,(cut)$$

また $\neg A$ が $A \supset \bot$ と LJ で、論理的に同値であることも示すことができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,(\neg \to)}{\neg A, A \to \bot}\,(\to w)}{\neg A \to A \supset \bot}\,(\to\supset) \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A \quad \bot \to}{A \supset \bot, A \to}\,(\supset\to)}{A \supset \bot \to \neg A}\,(\to \neg)$$

上の二つを示すためには、weakening が必要であった。しかし形式体系 FLe では weakening が無いため、これらを示すことができない。よって FLe では $\top, \bot$ の他に命題定数 t, f を導入し、さらに次の始式と推論規則が加えられる。

4. $\to t$
5. $f \to$

$$\dfrac{\Gamma, \Delta \to D}{\Gamma, t, \Delta \to D}\,(tw) \qquad \dfrac{\Gamma \to}{\Gamma \to f}\,(fw)$$

これらの始式と推論規則は証明可能な論理式の中で t が最弱の論理式であり（(tw) において Γ, Δ が空の場合を考えてみよ)、また矛盾が証明可能な論理式、すなわち式 $A \to$ が証明可能となる論理式 A の内で f が最強のものであるという事を意味している。また weakening 規則のある論理では t と $\top$ 及び f と $\bot$ はそれぞれ論理的に同値となるが、weakening 規則のない論理ではそれぞれ別の命題定数となる。

また weakening 規則のない論理では、$\neg A$ は $A \supset f$ と論理的に同値となることを次のようにして示すことができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,(\neg \to)}{\neg A, A \to f}\,(fw)}{\neg A \to A \supset f}\,(\to \neg) \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A \quad f \to}{A \supset f, A \to}\,(\supset\to)}{A \supset f \to \neg A}\,(\to \neg)$$

2.2.2 コンマと構造規則

ここでは、sequent の左辺に現れるコンマと構造規則との関係について説明する。まず LJ では、次が成り立つことを示すことができる。

$$LJ \vdash A_1, A_2, \cdots, A_m \to B \iff LJ \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B$$

しかしこの証明では、右向きを示すために contraction が、左向きを示すために weakening が必要となる。FLe では contraction と weakening がともに使えないため、式の左辺に現れるコンマを $\wedge$ として取り扱うことは出来ない。よって新たに論理結合子として融合積 (fusion) $*$ と融合積に対する推論規則を導入する。

$$\frac{A, B, \Gamma \to C}{A * B, \Gamma \to C}(* \to) \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A * B}(\to *)$$

これより融合積は左辺に現れるコンマと同等の機能を持つものとする。

ここで構造規則 weakening ,contraction について少し補足をしておく。

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \to D}{\Gamma, A, \Sigma \to D}(w \to)$$

このような証明図があった場合、右辺の D を導くために左辺の A が必要であるかどうかということについては、全く注意を払っていないことになる。よって weakening が無い体系において、左辺に現れる全ての論理式は、右辺を導くために少なくとも一回は使われているということになる。

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \to D}{\Gamma, A, \Sigma \to D}$$

このような証明図があった場合、右辺の D を導くために使われた左辺の A の個数には全く注意を払っていないことになる。よって contraction の無い体系おいて、左辺に現れる全ての論理式は、右辺を導くために多くても一回しか使えないということになる。

つまり weakening と contraction を持たない FLe においては、もし

$$FLe \vdash A_1, A_2, \cdots, A_m \to B$$

であるならば、左辺に現れる A_i $(1 \leq i \leq m)$ は右辺の B を導くために丁度一回ずつ使われたということを意味している。よって融合積 $*$ の直感的な意味は、「論理積 $\wedge$ に個数の概念が加わったもの」である。すなわち FLe において $(A \wedge A \wedge B \wedge B)$ は論理的に $A \wedge B$ と同値であるが、$(A * A * B * B)$ は $A * B$ と同値にはならない。

2.3 部分構造論理 FLe 上の Logic

ここでは論理を抽象的、一般的に扱うため、論理 (logic) とは論理式の集合で、代入と三段論法に関して閉じたものであると定義しておく。正確には論理式の集合 L が論理であるとは、次を満たすことである。

1. 命題変数 p を含む論理式 $\phi(p)$ が L の要素ならば、任意の論理式 A に対して $\phi(A)$ もまた L の要素である。ここで $\phi(A)$ は、$\phi(p)$ の中に現われる p を全て A に置き換えた論理式である。

2. $A \in L$, $A \supset B \in L$ ならば $B \in L$

論理式全体の集合 Φ は、明らかに論理である。また、形式体系 **FLe** で証明可能な論理式全体の集合も論理となっている。これからは不都合が生じない限り、**FLe** で証明可能な論理式全体の集合も**FLe** で表すことにする。

論理は集合の包含関係 $\subseteq$ に関して順序をなす。また明らかに最大の論理は Φ である。よって**FLe** 上の論理とは、**FLe** から Φ の間にある論理のことである。$\mathcal{L} := \{L \mid L$ は論理であり、かつ $\mathbf{FLe} \subseteq L\}$ とする。このとき $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ に対し、$L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}$ となることは容易にわかる。しかし和集合 $L_1 \cup L_2$ は必ずしも論理となるとは限らない。そこで、$L_1 \vee L_2 := L_1 \cup L_2$ を含む最小の論理、とする。これにより $\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ は最小元と最大元をそれぞれ**FLe**、Φ とする有界束になる。本論文では FLe 上の論理に注目しているので、以下では $\mathcal{L}$ に属する論理を扱うこととなる。

第3章　Commutative Residuated Lattice

本章では Commutative Residuated Lattice (以下 CRL と略す）と呼ばれる代数を導入する。そして CRL に関する基本的諸性質を universal algebra の観点から論ずる。この代数は **FLe** に対する代数的セマンティクスとして用いられることもあるので、FLe-algebra と呼ばれることもある。

3.1　Commutative Residuated Lattice

Definition 3.1 $M = \langle M, \cap, \cup, \cdot, \to, \top, \bot, 0, 1 \rangle$ が *Commutative Residuated Lattice(CRL)* であるとは、以下を満たすことである。

(R1) $\langle M, \cap, \cup, \top, \bot \rangle$ は最大元を $\top$、最小元を $\bot$ とする有界束である。

(R2) $\langle M, \cdot, 1 \rangle$ は 1 を単位元とする可換モノイドである。すなわち任意の $x, y, z \in M$ に対し

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot y = y \cdot x$
3. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(R3) 任意の $x, y, z \in M$ に対して、$x \cdot y \leq z \iff x \leq y \to z$

この定義の中の (R3) は residuation と呼ばる重要な性質である。またこの公理により、演算 $\to$ は $\cdot$ の逆演算に近い性質を備えることになる。

3.2　CRL に関する諸概念

群や環などの他の代数における論議で重要な役割を果たす、部分代数や準同型写像などの諸概念は、CRL に対しても導入することができる。これからは、CRL に対するこれら諸概念の定め方やその性質を見ていくことにする。

3.2.1　Homomorphisms と Isomorphism

Definition 3.2 (Homomorphism) 次の $\mathbf{A} = \langle A, \cap_A, \cup_A, \cdot_A, \to_A, \top_A, \bot_A, 0_A, 1_A \rangle$　$\mathbf{B} = \langle B, \cap_B, \cup_B, \cdot_B, \to_B, \top_B, \bot_B, 0_B, 1_B \rangle$ をそれぞれ *CRL* とする。写像 $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が *homomorphism* であるとは次を満たすことである。

- $\alpha(\top_A) = \top_B, \alpha(\bot_A) = \bot_B, \alpha(1_A) = 1_B, \alpha(0_A) = 0_B$
- 任意の $x, y \in A$ に対して、
$$\alpha(x \oplus_A y) = \alpha(x) \oplus_B \alpha(y)$$
ここで $\oplus \in \{\cap, \cup, \cdot, \to\}$ である。以下特に断らない限り、$\oplus$ はこの意味で使う。

さらに、この homomorphism α が

1. 単射であるとき、α は monomorphism または、embedding であるという。
2. 全射であるとき、α は epimorphism または、onto homomorphism であるという。
3. 全単射であるとき、α は isomorphism であるといい、このような α が存在するとき、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は同型であるといい、$\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ と書く。

Definition 3.3 (kernel, image) $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への *homomorphism* とする。このとき α の *kernel* ($Ker\ (\alpha)$) と *image* ($Im\ (\alpha)$) をそれぞれ次のように定める。

$$Ker\ (\alpha) = \{\langle a, b\rangle \in A^2 : \alpha(a) = \alpha(b)\} \qquad Im\ (\alpha) = \{\alpha(a) \in B : a \in A\}$$

α が全射であるとき、$Im\ (\alpha)$ は $\mathbf{B}$ 自身となっている。このとき $\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ の homomorphic image であるという。

また $Im\ (\alpha)$ は $\alpha(\mathbf{A})$ と表されることもある。

3.2.2 Subalgebras と Quotient Algebras

Definition 3.4 (Subalgebra) $\mathbf{A}$ を *CRL* とする。A の部分集合 B が次を満たすとき、$\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ の *subalgebra* であるという。

1. $\top_A, \bot_A, 0_A, 1_A \in B$
2. B は演算に関して閉じている。すなわち、

$$\forall x, y \in B \text{ に対して, } x \oplus y \in B$$

定義の 1. から、CRL $\mathbf{A}$ の任意の subalgebra $\mathbf{B}$ は必ず constant $\top_A, \bot_A, 0_A, 1_A$ を持っている。よって $\mathbf{A}$ の最小の subalgebra は、constant とそれらの演算によって得られるものだけからなる algebra であることを注意しておく。

Proposition 3.1 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ をそれぞれ *CRL* とし、$\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ を *embedding* とする。このとき $\alpha(\mathbf{A})$ は $\mathbf{B}$ の *subalgebra* となる。

(証明) Homomorphism の定義より、$\top_B, \bot_B, 1_B, 0_B \in \alpha(A)$。また任意の $x, y \in A$ に対して、

$$\alpha(x) \oplus_B \alpha(y) = \alpha(x \oplus_A y) \in \alpha(A)$$

よって $\alpha(\mathbf{A})$ は $\mathbf{B}$ の subalgebra である。

Definition 3.5 (Congruence) $\mathbf{A}$ を *CRL* とし、θ を $\mathbf{A}$ 上の同値関係とする。このとき θ が $\mathbf{A}$ 上の *congruence* であるとは、次の条件を満たすことである。

- 任意の $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ に対して

$$a_1 \theta b_1 \text{ かつ } a_2 \theta b_2 \qquad \text{ならば} \qquad (a_1 \oplus a_2)\theta(b_1 \oplus b_2)$$

Congruence は $A \times A$ 上の部分集合と見ることが出来る。よってつぎのように、最大の congruence ∇ と最小の congruence Δ が定義される。

$$\nabla := \{\langle a, b\rangle\ ;\ a, b \in A\} \quad \Delta := \{\langle a, a\rangle\ ;\ a \in A\}$$

$\mathbf{A}$ 上の全て congruence の集合を Con $\mathbf{A}$ と表記する。このとき Con $\mathbf{A}$ は最大元 ∇、最小元 Δ を持ち、包含関係に関して有界束をなす。よってこれからは、$\mathbf{A}$ の congruence lattice を **Con A** と表すことにする。ここで注意しておかなければならないことは、**Con A** の演算についてである。二つの congruence の共通部分はまた congruence となるので問題はない。しかし二つの congruence 和集合は必ずしも congruence とは限らない。したがって **Con A** 上の演算を次のように定めておく。

$$\begin{array}{rcl}
\langle a, b\rangle \in \theta_1 \cap \theta_2 & \Longleftrightarrow & \langle a, b\rangle \in \theta_1 \text{ かつ } \langle a, b\rangle \in \theta_2 \\
\langle a, b\rangle \in \theta_1 \vee \theta_2 & \Longleftrightarrow & \exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in A\ s, t \\
 & & \qquad \langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \theta_1 \text{ または } \langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \theta_2 \\
 & & (\text{ここで } a = c_1, b = c_n \text{ である。})
\end{array}$$

$\langle a, b\rangle \in \theta_1 \vee \theta_2$ の直感的な意味は、θ_1, θ_2 を何度か使って a と b の間に橋渡ができるということである。実際に、このように $\vee$ を定めると $\theta_1 \vee \theta_2$ は θ_1 と θ_2 の最小上界となる congruence であることを確かめることができる。

Definition 3.6 $\mathbf{A}$ を *CRL* 、$a_1, \ldots, a_n \in A$ とする。このとき $\Theta(a_1, \ldots, a_n)$ を、$a_1, \ldots, a_n$ が同じ同値類に属し、かつ $\mathbf{A}$ 上で最小となる *congruence* とする。

Proposition 3.2 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ をそれぞれ *CRL* とし、$\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ を *homomorphism* とする。このとき $Ker\ (\alpha)$ は $\mathbf{A}$ 上の *congruence* となる。

(証明) $Ker\ (\alpha)$ は明らかに同値関係である。$\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in Ker\ (\alpha)$ とする。このとき、

$$\begin{array}{rcl}
\alpha(a_1 \oplus_A a_2) & = & \alpha(a_1) \oplus_B \alpha(a_2) \\
 & = & \alpha(b_1) \oplus_B \alpha(b_2) \\
 & = & \alpha(b_1 \oplus_A b_2)
\end{array}$$

よって $\langle a_1 \oplus a_2, b_1 \oplus b_2\rangle \in Ker\ (\alpha)$ であるので、$Ker\ (\alpha)$ は $\mathbf{A}$ 上の congruence である。

$\mathbf{A}$ を CRL とし、θ を $\mathbf{A}$ 上の congruence とする。このとき θ は同値関係でもあるので、$a \in A$ の属する同値類 (a/θ) を次のように定めることができる。

$$a/\theta := \{x \in A;\ x\theta a\}$$

また同様にして、A の θ による商集合 A/θ を次のように定めることができる。

$$A/\theta := \{a/\theta;\ a \in A\}$$

Definition 3.7 (quotient algebra) $\mathbf{A}/\theta = \langle A/\theta, \cap', \cup', \cdot', \to', \top/\theta, \bot/\theta, 0/\theta, 1/\theta\rangle$ が $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, \top, \bot, 0, 1, \rangle$ の θ による *quotient algebra* であるとは、$\oplus'$ が次を満たすことである。

$$\forall a/\theta, b/\theta \in A/\theta \quad \text{に対して} \qquad a/\theta \oplus' b/\theta := (a \oplus b)/\theta$$

$\theta \in$Con $\mathbf{A}$ とする。このとき natural map $\nu_\theta : A \to A/\theta$ を $\nu_\theta(a) = a/\theta$ で定義する。

Proposition 3.3 $\mathbf{A}$ から $\mathbf{A}/\theta$ への *natural map* は *onto homomorphism* である。

(証明) 明らかに natural map は onto である。$\forall a, b \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} \nu_\theta(a \oplus b) &= (a \oplus b)/\theta \\ &= a/\theta \oplus' b/\theta \\ &= \nu_\theta(a) \oplus' \nu_\theta(b) \end{aligned}$$

よって、ν_θ は homomrphism である。

Proposition 3.4 (Homomorphism Theorem) $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ を *onto homomorphism* とする。このとき $\alpha = \beta \circ \nu$ で定義される、$\mathbf{A}/Ker\ (\alpha)$ から $\mathbf{B}$ への *isomorphism* β が存在する。ここで ν は $\mathbf{A}$ から $\mathbf{A}/Ker\ (\alpha)$ への *natural homomorphism* である。

(証明) まず β を $\beta(a/Ker\ (\alpha)) = \alpha(a) \cdots (*)$ により定める。$a/Ker\ (\alpha) = b/Ker\ (\alpha)$ ならば $\alpha(a) = \alpha(b)$ より、β は矛盾なく定義される。また明らかに $\alpha = \beta \circ \nu$ が成り立つ。$a/Ker\ (\alpha), b/Ker\ (\alpha) \in \mathbf{B}$ に対して、$a/Ker\ (\alpha) \neq b/Ker\ (\alpha)$ ならば $\langle a, b \rangle \notin Ker\ (\alpha)$ より、$\alpha(a) \neq \alpha(b)$ である。よって $\beta(a/Ker\ (\alpha)) \neq \beta(b/Ker\ (\alpha))$ となり β は one-to-one となる。また α は onto なので $\forall d \in B$ に対して $\exists a \in A$、すなわち

$$d = \alpha(a) = \beta(a/Ker\ (\alpha))$$

よって β は onto である。

$$\begin{aligned} \beta(a/Ker\ (\alpha) \oplus' b/Ker\ (\alpha)) &= \beta((a \oplus b)/Ker\ (\alpha)) \\ &= \alpha(a \oplus b) && ((*) \text{ より}) \\ &= \alpha(a) \oplus_{\mathbf{B}} \alpha(b) \\ &= \beta(a/Ker\ (\alpha)) \oplus_{\mathbf{B}} \beta(b/Ker\ (\alpha)) && ((*) \text{ より}) \end{aligned}$$

(ここで $\oplus, \oplus', \oplus_{\mathbf{B}}$ はそれぞれ、$\mathbf{A}, \mathbf{A}/Ker\ (\alpha), \mathbf{B}$ 上の演算を表している。) よって β は $\mathbf{A}/Ker\ (\alpha)$ から $\mathbf{B}$ への isomorphism となっている。

$\mathbf{A}$ を CRL とし、また $\phi, \theta \in Con\ \mathbf{A}$ で $\theta \subseteq \phi$ とする。このとき ϕ/θ を次のように定義する。

$$\phi/\theta = \{\langle a/\theta, b/\theta \rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a, b \rangle \in \phi\}$$

このように定義したとき、次の命題が成り立つ。

Proposition 3.5 $\phi, \theta \in Con\ \mathbf{A}$ かつ $\theta \subseteq \phi$ ならば、そのとき ϕ/θ は $\mathbf{A}/\theta$ 上の *congruence* である。

(証明) $\langle a_1/\theta, b_1/\theta \rangle, \langle a_2/\theta, b_2/\theta \rangle \in \phi/\theta$ とする。このとき ϕ/θ の定義より、$\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in \phi$ となるので、

$$\langle a_1 \oplus_{\mathbf{A}} a_2, b_1 \oplus_{\mathbf{A}} b_2 \rangle \in \phi$$

よって

$$\langle (a_1 \oplus_{\mathbf{A}} a_2)/\theta, (b_1 \oplus_{\mathbf{A}} b_2)/\theta \rangle \in \phi/\theta$$

となりこれより

$$\langle a_1/\theta \oplus_{\mathbf{A}/\theta} a_2/\theta, b_1/\theta \oplus_{\mathbf{A}/\theta} b_2/\theta \rangle \in \phi/\theta$$

が成り立つので、ϕ/θ は $\mathbf{A}/\theta$ 上の congruence である。

$\mathbf{A}$ を CRL 、$\theta \in Con\ \mathbf{A}$ としたとき、$[\theta, \nabla]$ を次を満たす $Con\ \mathbf{A}$ の sublattice とする。

$$[\theta, \nabla] = \{\phi \in Con\ \mathbf{A} : \theta \subseteq \phi \subseteq \nabla\}$$

Proposition 3.6 (Correspondence Theorem) **A** を *CRL* 、$\theta \in Con$ **A** とする。このとき

$$\alpha(\phi) = \phi/\theta$$

によって定義される $[\theta, \nabla]$ 上の写像 α は、$[\theta, \nabla]$ から **Con A**$/\theta$ への *isomorphism* となる。

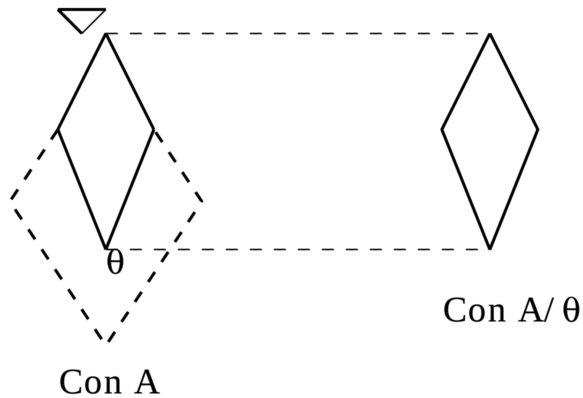

図 3.1:

(証明) まず α が one-to-one であることを示す。$\phi, \psi \in [\theta, \nabla]$ $(\phi \neq \psi)$ とする。このとき $\phi \not\subseteq \psi$ と仮定しても一般性を失わない。すると $\langle a, b\rangle \in \phi - \psi$ となるようなある要素 $a, b \in A$ が存在する。よって、

$$\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (\phi/\theta) - (\psi/\theta) \text{ したがって } \alpha(\phi) \neq \alpha(\psi).$$

これより α は one-to-one である。次に α が onto であることを示す。$\psi \in Con$ **A**$/\theta$ とし、$\phi = Ker\ (\nu_\psi \circ \nu_\theta)$ とする。ここで ν_ψ は natural homomorphism $\mathbf{Con\ A}/\theta \to (\mathbf{Con\ A}/\theta)/\psi$ である。よって任意の $a, b \in A$ に対して

$$\begin{array}{rrcl} & \langle a/\theta, b/\theta\rangle & \in & \phi/\theta \\ \Longleftrightarrow & \langle a, b\rangle & \in & \phi \\ \Longleftrightarrow & \langle a/\theta, b/\theta\rangle & \in & \psi \end{array}$$

よって

$$\psi = \phi/\theta = \alpha(\phi)$$

となり α は onto である。

最後に α が isomorphism であることを示す。

$$
\begin{aligned}
(\phi \cap_{\mathbf{A}} \psi)/\theta &= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a,b\rangle \in \phi \cap_{\mathbf{A}} \psi\} \\
&= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a,b\rangle \in \phi \text{ かつ } \langle a,b\rangle \in \psi\} \\
&= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a,b\rangle \in \phi\} \text{ かつ } \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a,b\rangle \in \psi\} \\
&= \phi/\theta \text{ かつ } \psi/\theta \\
&= \phi/\theta \cap_{Con\ \mathbf{A}/\theta} \psi/\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\phi \vee_{\mathbf{A}} \psi)/\theta &= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \langle a,b\rangle \in \phi \vee_{\mathbf{A}} \psi\} \\
&= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \exists c_0 = a, c_1, c_2, \ldots, c_k = b \in A \\
&\qquad s.t\ \langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \phi \text{ または } \langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \psi\ (0 \leq i \leq k-1)\} \\
&= \{\langle a/\theta, b/\theta\rangle \in (A/\theta)^2 : \exists c_0/\theta = a/\theta, c_1/\theta, c_2/\theta, \ldots, c_k/\theta = b/\theta \in A/\theta \\
&\qquad s.t\ \langle c_i/\theta, c_{i+1}/\theta\rangle \in \phi/\theta \text{ または } \langle c_i/\theta, c_{i+1}/\theta\rangle \in \psi/\theta\ (0 \leq i \leq k-1)\} \\
&= \phi/\theta \vee_{Con\ \mathbf{A}/\theta} \psi/\theta
\end{aligned}
$$

よって $\alpha(\phi \oplus_{\mathbf{A}} \psi) = (\phi \oplus_{\mathbf{A}} \psi)/\theta = \phi/\theta \oplus_{Con\ \mathbf{A}/\theta} \psi/\theta$ が成り立つ。

3.2.3 Direct product と Subdirect product

Definition 3.8 (direct product) $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ をそれぞれ *CRL* とする。このとき *direct product* $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \langle A_1 \times A_2,\ \cap_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ \cup_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ \cdot_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ \to_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ \top_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ \bot_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ 1_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}},\ 0_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}}\rangle$ の演算は次のように定義される。$a_1, b_1 \in A_1, a_2, b_2 \in A_2$ に対して、

$$\langle a_1, a_2\rangle \oplus_{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}} \langle b_1, b_2\rangle = \langle (a_1 \oplus_{\mathbf{A}_1} b_1), (a_2 \oplus_{\mathbf{A_2}} b_2)\rangle$$

また同様にして、二つ以上の direct product は以下のようにして定義される。$(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ を CRL の族とする。また $a, b \in \Pi_{i\in I} A_i$ とすると、$\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ の演算は次のように定義される。

$$(a \oplus_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i} b)(j) = a(j) \oplus_{\mathbf{A}_j} b(j)$$

ここで $x(j)$ は x の j 番目の要素を表している。

Proposition 3.7 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ をそれぞれ *CRL* とする。このとき

1. $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \simeq \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1$
2. $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) \simeq \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$

(証明) 1.,2. の homomorphism をそれぞれ $\alpha_1(\langle a_1, a_2\rangle) = \langle a_2, a_1\rangle,\ \alpha_2(\langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ とする。このとき明らかに α_1, α_2 は isomorphism となっている。

写像 $\pi_i : A_1 \times A_2 \to A_i \quad (i \in \{1,2\})$ を $\pi_i(\langle a_1, a_2\rangle) = a_i$ で定義する。このとき π_i は $A_1 \times A_2$ 上の i 番目の projection と呼ばれる。この写像が onto homomorphism となることを簡単に示すことができる。

Definition 3.9 (subdirect product) *CRL* $\mathbf{A}$ が *CRL* の族 $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ の *subdirect product* であるとは、以下を満たすことである。

1. $\mathbf{A}$ は $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ の部分代数である。

2. 任意の $i \in I$ に対して、$\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$ （ここで π_i は i 番目の *projection* である。）

つまり $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ の subdirect product とは、$\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ の subalgebra であって、かつ 2. を満たす algebra のことである。また $\mathbf{A}$ が 2. を満たす subalgebra であるからといって、$\mathbf{A}$ と $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ が同型となるとは限らない。なぜなら $A_1 = \{a,b\}, A_2 = \{c,d,e\}, A = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,e)\}$ としたとき、2. は満たされるが $\Pi_{i\in\{1,2\}}A_i = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$ となり、明らかに同型とはならないからである。直感的に Subdirect product とは、「direct product の subalgebra の中で十分大きなものである」と考えることができる。

Definition 3.10 $\alpha : \mathbf{A} \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ が *subdirect embedding* であるとは、α が *embedding* であり、かつ $\alpha(\mathbf{A})$ が $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ の *subdirect product* となることである。

Proposition 3.8 $\theta_i \in Con\ \mathbf{A}\ (i \in I)$ かつ $\bigcap_{i\in I}\theta_i = \Delta$ とする。このとき

$$\nu(a)(i) = a/\theta_i$$

で定義される *homomorphism*

$$\nu : \mathbf{A} \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i$$

は *subdirect embedding* である。

(証明) 任意の $i \in I$ に対して、$\nu_i = \pi_i \circ \nu$ により ν_i を定めると ν_i は $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta_i$ の natural homomorphism となる。まず $\nu(\mathbf{A})$ が $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i$ の subalgebra であることを示す。

$\forall \nu(a), \nu(b) \in \nu(\mathbf{A})(a, b \in \mathbf{A})$ に対して、

$$\nu(a) \oplus_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i} \nu(b) \quad = \quad \nu(a \oplus_{\mathbf{A}} b) \in \nu(\mathbf{A})$$

また

$$\{\top_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i}, \bot_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i}, 1_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i}, 0_{\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i}\} = \{\nu(\top_{\mathbf{A}}), \nu(\bot_{\mathbf{A}}), \nu(1_{\mathbf{A}}), \nu(0_{\mathbf{A}})\} \subseteq \nu(\mathbf{A})$$

よって $\nu(\mathbf{A})$ は $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i$ の subalgebra である。

さらに任意の $i \in I$ に対して、

$$\nu_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}/\theta_i$$

より、$\nu(\mathbf{A})$ は $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i$ の subdirect product となっている。

次に ν が embedding であることを示す。$\forall a, b \in A\ (a \neq b)$ に対して、$\bigcap_{i\in I}\theta_i = \Delta$ より

$$\langle a, b\rangle \notin \bigcap_{i\in I}\theta_i$$

よって、ある $j \in I$ が存在して、すなわち

$$\langle a, b\rangle \notin \theta_j$$

となっている。これより $\nu_j(a) \neq \nu_j(b)$ となり、結果として $\nu(a) \neq \nu(b)$ となるので、ν は embedding である。

Definition 3.11 (subdirectly irreducible algebra) *CRL* $\mathbf{A}$ が *subdirectly irreducible* であるとは、任意の *subdirect embedding*

$$\alpha : \mathbf{A} \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$$

に対して、ある $i \in I$ が存在して、

$$\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$$

が *isomorphism* となることである。

subdirectly irreducible の概念は、自然数と素数の関係を用いて言い換えると理解しやすい。つまり algebra が subdirectly irreducible であるとは、自然数 p が素数であるということに対応している。さらに直感的に砕いていえば、「$\mathbf{A}$ が任意の $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ に対して、ある $\mathbf{A}_i$ と同型になる」ということは、「素数 p をどのように $p = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times \cdots$ と書き表したとしても、ある i に対して $p = n_i$ となる」ことに相当している。

自然数を考えるときに素数が重要になることと同様、これから先で subdirectly irreducible (si と略すこともある) algebras が重要な概念であることが明らかになる。

次は subdirectly irreducible algebras を特徴付ける最も有用な命題である。

Proposition 3.9 *CRL* $\mathbf{A}$ が *subdirectly irreducible* であるための必要十分条件は、$\mathbf{A}$ が自明な代数であるか、または、$Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}$ 内に最小の *congruence* が存在することである。

(証明) $(\Rightarrow)\mathbf{A}$ が自明な代数ではなくて、さらに $Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}$ 内に最小の *congruence* が存在しないと仮定する。このとき明らかに $\bigcap(Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}) = \Delta$ となっている。なぜならもし $\cap(Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}) \supsetneq \Delta$ ならば $\cap(Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\})$ が $Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}$ 内の最小の *congruence* になるからである。今、$I = Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}$ とすると、命題 *3.8* より *natural homomorphism* $\alpha : \mathbf{A} \to \Pi_{\theta\in I}\mathbf{A}/\theta$ は *subdirect embedding* となる。任意の $\theta \in I$ に対して *natural homomorphism* $\alpha_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ は明らかに *one-to-one* ではない。よって、どの $\theta \in I$ に対しても $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}/\theta$ が *isomorphic* とはならないので、$\mathbf{A}$ は *subdirectly irreducible* ではない。

$(\Leftarrow)\mathbf{A}$ を自明な代数とし、かつ $\alpha : \mathbf{A} \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ を *subdirect embedding* とする。このとき *subdirect product* の定義より、全ての $\mathbf{A}_i$ は自明な代数となっている。よって全ての $\pi_i \circ \alpha$ は *isomorphism* であるので、明らかに $\mathbf{A}$ は *subdirectly irreducible algebra* である。次に、$\mathbf{A}$ が自明な代数ではないと仮定する。さらに θ を $Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}$ 内の最小の *congruence* とする。すなわち $\theta = \bigcap(Con\ \mathbf{A} - \{\Delta\}) \neq \Delta$。$\langle a, b\rangle \in \theta\ (a \neq b)$ とする。$\alpha : \mathbf{A} \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ が *subdirect embedding* のとき、ある i が存在して、$(\alpha a)(i) \neq (\alpha b)(i)$ となっている。よって $(\pi_i \circ \alpha)(a) \neq (\pi_i \circ \alpha)(b)$ である。これより

$$\langle a, b\rangle \notin Ker\ (\pi_i \circ \alpha)$$

となるので、

$$\theta \not\subseteq Ker\ (\pi_i \circ \alpha)$$

となっている。これは $Ker\ (\pi_i \circ \alpha) = \Delta$ を意味している。なぜなら、θ は $\bigcap\{Con\mathbf{A} - \{\Delta\}\}$ であるので、任意の Δ 以外の $\mathbf{A}$ 上の *congruence* ϕ に対して、$\theta \subseteq \phi$ の関係が成り立つからである。よってその関係が成り立たない $\mathbf{A}$ 上の *congruence* は Δ のみである。よって $\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ は *isomorphism* となるので、その結果 $\mathbf{A}$ は *subdirectly irreducible algebra* である。

後者の場合その *congruence* を *principal congruence* といい、$Con\ \mathbf{A}$ は次のような形をしている。

Proposition 3.10 (Birkhoff's theorem) 全ての *CRL* $\mathbf{A}$ はある *subdirectly irreducible algebras* の *subdirect product* と *isomorphic* となる。

(証明) 自明な代数は subdirectly irreducible なので明らか。よって $\mathbf{A}$ が自明ではないと仮定しておく。今 $\mathbf{A}$ は自明ではないので、$a \neq b$ となる $a, b \in A$ が存在する。ここでツォルンの補題[1]を用いると、順序集合

$$\Sigma = \{\theta \in Con\ \mathbf{A}; \langle a, b\rangle \notin \theta\}$$

[1] **(ツォルンの補題)** 「順序集合 A の任意の鎖に対しその上界が存在ならば、A の極大元が存在する。」この補題は非常に強力な方法として数学のさまざまな分野で応用されている。

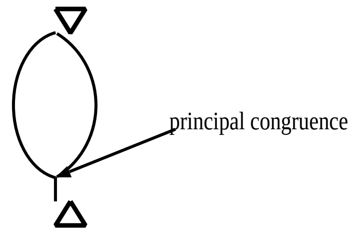

図 3.2:

の中に極大元が存在することがわかる。この極大元を $\theta_{a,b}$ とする。そして **Con A** の sublattice $[\theta_{a,b},\nabla]$ を考える。$\theta_{a,b}$ は $\langle a,b\rangle$ を含んでいない極大元であるとしたので、任意の $\phi\in[\theta_{a,b},\nabla]-\{\theta_{a,b}\}$ に対して $\langle a,b\rangle\in\phi$ が成り立っている。よって明らかに $[\theta_{a,b},\nabla]$ 内の二番目に大きな congruence は $\Theta(a,b)\vee\theta_{a,b}$ であることがわかる。よって命題 3.6, 3.9 より、$\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ は subdirectly irreducible algebra となる。次に任意の $x,y\in A$ $(x\neq y)$ に対して congruence $\bigcap\{\theta_{x,y}:x\neq y\}$ を考える。この congruence は明らかに Δ である。なぜならもしある x_0,y_0 $(x_0\neq y_0)$ が存在して、$\langle x_0,y_0\rangle\in\bigcap\{\theta_{x,y}:x\neq y\}$ であるならば、全ての $\theta_{x,y}$ に対して $\langle x_0,y_0\rangle\in\theta_{x,y}$ となり、特に $\langle x_0,y_0\rangle\in\theta_{x_0,y_0}$ が成り立ち矛盾が生じる。よって $\bigcap\{\theta_{x,y}:x_0\neq y_0\}=\Delta$ である。命題 3.8 よ $\nu(a)(x,y)=a/\theta_{x,y}$ で定義される natural homomorphism

$$\nu:\mathbf{A}\to\Pi_{\{x,y\}\in A}\mathbf{A}/\theta_{x,y}$$

は subdirect embedding となる。したがって **A** は **A** の quotient algebras である $\mathbf{A}/\theta_{x,y}$ の形の subdirectly irreducible algebras の subdirect product と isomorphic となる。

Definition 3.12 (simple algebras, maximal congruence) *CRL* **A** が *simple* であるとは、$Con\ \mathbf{A}=\{\Delta,\nabla\}$ を満たすことである。また **A** 上の *congruence* θ が *maximal* であるとは $Con\ \mathbf{A}$ の区間 $[\theta,\nabla]$ が丁度二つの要素 θ,∇ のみからなることである。

3.3 CRL のクラスに関する諸概念

前の節では代数に関する諸概念を紹介してきた。この節では、代数のクラスに関する諸概念を見ていく。

3.3.1 Variety

Definition 3.13 (class operators) 代数のクラス $\mathcal{K}$ から代数のクラス $I(\mathcal{K}),S(\mathcal{K}),H(\mathcal{K}),P(\mathcal{K}),Ps(\mathcal{K})$ への写像を次のように定める。

- $\mathbf{A}\in I(\mathcal{K})\iff\mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ のある要素と *isomorphic* である。
- $\mathbf{A}\in S(\mathcal{K})\iff\mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ のある要素の *subalgebra* である。
- $\mathbf{A}\in H(\mathcal{K})\iff\mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ のある要素の *homomorphic image* である。
- $\mathbf{A}\in P(K)\iff\mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ 内の空でない代数の族の *direct product* である。
- $\mathbf{A}\in Ps(\mathcal{K})\iff\mathbf{A}$ は $\mathcal{K}$ 内の空でない代数の族の *subdirect product* である。

O_1, O_2 を代数のクラス上の *operators* とする。このとき O_1O_2 は二つの *operators* の合成を表している。すなわち $(O_1\ O_2)(\mathcal{K}) = O_1(O_2(\mathcal{K}))$。また任意の代数のクラス $\mathcal{K}$ に対して、常に $O_1(\mathcal{K}) \subseteq O_2(\mathcal{K})$ が成り立つとき、しばしば $O_1 \leq O_2$ と書くことがある。

Definition 3.14 (idempotent operator, closed class) $\mathcal{K}$ を *CRL* のクラスとし、O を *CRL* のクラス上の *operator* とする。このとき O が *idempotent* であるとは $O^2 = O$ となることである。また $\mathcal{K}$ が O の下で閉じている *(closed)* であるとは、$O(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ を満たしていることである。

Proposition 3.11 次の不等式が成り立つ。

$$SH \leq HS$$
$$PS \leq SP$$
$$PH \leq HP$$

また *operators* H, S, IP は *idempotent* である。[2]

(証明) $\mathbf{A} \in SH(\mathcal{K})$ とする。このときある $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ と onto homomorphism $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ が存在して、すなわち $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}$ が成り立っている。このとき $\mathbf{A} = \alpha(\alpha^{-1}(\mathbf{A}))$ かつ $\alpha^{-1}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{B}$ となり $\mathbf{A} \in HS(\mathcal{K})$ である。

$\mathbf{A} \in PS(\mathcal{K})$ とする。このとき $\mathbf{B}_i \in \mathcal{K}$ $(i \in I)$ が存在して、$\mathbf{A} = \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ かつ $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$ である。$\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i \leq \Pi_{i\in I}\mathbf{B}_i$ であるので $\mathbf{A} \in SP(\mathcal{K})$ である。

$\mathbf{A} \in PH(\mathcal{K})$ とする。このときある $\mathbf{B}_i \in \mathcal{K}$ と onto homomorphism $\alpha_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}_i$ が存在して、$\mathbf{A} = \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ となっている。$b \in \Pi_{i\in I}\mathbf{B}_i$ に対し $\alpha(b)(i) = \alpha_i(b(i))$ によって定義される写像 $\alpha : \Pi_{i\in I}\mathbf{B}_i \to \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ は onto homomorphism となるので、$\mathbf{A} \in HP(\mathcal{K})$ である。

$H^2 = H$ を示す。$H \subseteq H^2$ は明らかであるので $H^2 \subseteq H$ を示す。$\mathbf{A} \in H^2(\mathcal{K})$ とする。このとき onto homomorphism $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{C},\ \beta : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ と $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ が存在している。$\beta \circ \alpha$ はまた onto homomorphism であるので、$\mathbf{A} \in H(\mathcal{K})$ である。

S, IP が idempotent であることも同様に示すことができる。

次に定義される代数のクラス (variety) は特に重要なクラスである。

Definition 3.15 (variety) $\mathcal{K}$ を空でない *CRL* のクラスとする。このとき $\mathcal{K}$ が *variety* であるとは、$\mathcal{K}$ が S, H, P の *operators* の下で閉じていることである。

通常、$\mathcal{K}$ を含む最小の variety を $V(\mathcal{K})$ と表す。また一つの代数 $\mathbf{A}$ から生成される variety を $V(\mathbf{A})$ と表す。よってこれからは V を代数のクラス上の operator として使用する。

Proposition 3.12 (Tarski's theorem)

$$V = HSP$$

(証明) $(HSP \leq V)$ $HV = SV = IPV = V$ かつ $I \leq V$ より $HSP \leq HSPV = V$

[2]実は P も idempotent となっている。しかしここで P ではなく IP について考えたのは、後々の証明で IP が idempotent であるということを使うからである。

$(V \leq HSP)$ 命題 3.11 より $H(HSP) = HSP,\ S(HSP) \leq HSSP = HSP$ である。また

$$
\begin{aligned}
P(HSP) &\leq HPSP \\
&\leq HSPP \\
&\leq HSIPP \\
&= HSIP \\
&\leq HSHP \\
&\leq HHSP \\
&= HSP
\end{aligned}
$$

よって任意のクラス $\mathcal{K}$ に対して $HPS(\mathcal{K})$ は $H,\ S,\ P$ の下で閉じている。$V(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ を含み、$H,\ S,\ P$ の下で閉じているクラスの中で最小のクラスであるので $V \leq HSP$ である。

Proposition 3.13 $\mathcal{K}$ を *variety* とする。このとき $\mathcal{K}$ の全ての元は $\mathcal{K}$ の *subdirectly irreducible algebras* の *subdirect product* と *isomorphic* になる。

(注意) 命題 3.10 より、任意の algebra $\mathbf{A}$ はある si の subdirect product と isomorphic になることは示されていた。よってこの命題は、その si が全て $V(\mathbf{A})$ の中にあるということを意味している。

(証明) 命題 3.10 より、任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ に対して、$\mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ の si quotient algebras の subdirect product と isomorphic となる。今 $\mathcal{K}$ は variety なので $\mathbf{A}$ の si quotient algebras は $\mathcal{K}$ の要素である。

3.3.2 Mal'cev Condition

Definition 3.16 (term) X を *variables* と呼ばれる集合とする。このとき X 上の *term* の集合 $T(X)$ とは、次を満たす最小の集合である。

1. $X \cup \{\top, \bot, 0, 1\} \subseteq T(X)$
2. $p, q \in T(X)$ ならば $p \oplus q \in T(X)$

(例) $X = \{a, b, c\}$ とする。このとき X 上の term の例は、

$$a,\ b,\ c,\ a \cup c,\ b \cdot c,\ a \to (a \cap c), \cdots$$

などがある。つまり X の要素と CRL の演算を使って表現できる全てのものが term となる。

またp $p \in T(X)$ に対して、p の中に現われる variables が $x_1, \ldots, x_n$ のとき、p を $p(x_1, \ldots, x_n)$ と表すことがある。

Definition 3.17 $\mathbf{A}$ を *CRL* とし、$p, q \in T(X)$ とする。このとき $\mathbf{A}$ が *equation* $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ を満たす、または $\mathbf{A}$ において *equation* $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ が真であるとは、任意の $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対して

$$p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n)$$

となることである。ここで $p(a_1, \ldots, a_n), q(a_1, \ldots, a_n)$ は p, q 内にある $x_1, \ldots, x_n$ を全て $a_1, \ldots, a_n$ で置き換えたものである。

このとき

$$\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

または単に

$$\mathbf{A} \models p \approx q$$

と書く。さらに代数のクラス $\mathcal{K}$ が $p \approx q$ を満たすとは、任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ に対して

$$\mathbf{A} \models p \approx q$$

が成り立つことである。またこのとき同様に

$$\mathcal{K} \models p \approx q$$

と表す。

Proposition 3.14 $\mathbf{A}$ を CRL 、$p \in T(X),\ \theta \in Con\ \mathbf{A}$ とする。また $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta\ (1 \leq i \leq n)$ とする。このとき

$$p(a_1, \ldots, a_n)\ \theta\ p(b_1, \ldots, b_n)$$

が成り立つ。

(証明) p に含まれる演算の個数 $(l(p))$ に関する帰納法を使う。

($l(p) = 0$ のとき) このとき p は X のある一つの要素であるかまたは $\top, \bot, 0, 1$ のいずれかである。p が $\top, \bot, 0, 1$ のいずれかの要素であった場合、

$$\top \theta \top \ \mathit{or}\ \bot \theta \bot \ \mathit{or}\ 1 \theta 1 \ \mathit{or}\ 0 \theta 0$$

となり成り立つ。また $p = x$ のときも明らかに成り立つ。

($l(p) = n$ のとき) いま $p = p_1 \oplus p_2$ という形をしていると仮定する。$l(p_1), l(p_2) \leq n-1$ なので、帰納法の仮定より

$$p_1(a_1, \ldots, a_n) \theta p_1(b_1, \ldots, b_n) \text{ かつ } p_2(a_1, \ldots, a_n) \theta p_2(b_1, \ldots, b_n)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{array}{cc} & p_1(a_1, \ldots, a_n) \oplus p_2(a_1, \ldots, a_n) \theta p_1(b_1, \ldots, b_n) \oplus p_2(b_1, \ldots, b_n) \\ \Rightarrow & p(a_1, \ldots, a_n) \theta p(b_1, \ldots, b_n) \end{array}$$

Definition 3.18 (congruence-distributive algebra) $\mathbf{A}$ を CRL とする。このとき $\mathbf{A}$ が *congruence-distributive* であるとは、任意の $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in Con\ \mathbf{A}$ に対して

$$\theta_1 \cap (\theta_2 \vee \theta_3) = (\theta_1 \cap \theta_2) \vee (\theta_1 \cap \theta_3)$$

が成り立つことである。また CRL のクラス $\mathcal{K}$ が *congruence-distributive* であるとは、$\mathcal{K}$ の任意の要素 $\mathbf{A}$ が *congruence-distributive* となることである。

Proposition 3.15 (Mal'cev) $\mathcal{V}$ を *variety* とする。もしある三変数の *term* $M(x, y, z)$ が存在して、すなわち

$$\mathcal{V} \models M(x, x, y) \approx M(x, y, x) \approx M(y, x, x) \approx x$$

が成り立つならば、$\mathcal{V}$ は *congruence-distributive variety* である。

(証明) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ に対して、$\phi, \psi, \chi \in Con\ \mathbf{A}$ とする。もし

$$\langle a, b \rangle \in \phi \cap (\psi \vee \chi)$$

ならば、$\langle a, b \rangle \in \phi$ であり、かつある $c_1, \ldots, c_n \in A$ が存在して、すなわち

$$a \psi c_1 \chi c_2 \cdots \psi c_n \chi b$$

となる。$\langle a, b \rangle \in \phi$ より、$M(x, y, z)$ の仮定と命題 3.14 を用いると、任意の $1 \leq i \leq n$ に対して

$$M(a, c_i, b) \phi M(a, c_i, a) = a$$

が成り立つ。よって任意の i に対して $M(a, c_i, b)\phi a$、したがって

$$M(a, c_i, b) \phi M(a, c_j, b) \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

となる。以上より

$$a = M(a, a, b)(\phi \cap \psi) M(a, c_1, b)(\phi \cap \chi) M(a, c_2, b) \cdots M(a, c_n, b)(\phi \cap \chi) M(a, b, b) = b$$

よって

$$\langle a, b \rangle \in (\phi \cap \psi) \vee (\phi \cap \chi)$$

となるので

$$\phi \cap (\psi \vee \chi) \subseteq (\phi \cap \psi) \vee (\phi \cap \chi)$$

が成り立つ。他方、$(\phi \cap \psi) \vee (\phi \cap \chi) \subseteq \phi \cap (\psi \vee \chi)$ はいつも成り立つ。よって $\mathcal{V}$ は congruence-distributive variety である。

(例) Lattice は congruence-distributive である。なぜなら

$$M(x, y, z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z)$$

は命題 3.15 を満たすからである。ところが CRL は lattice であるので、CRL も同じ term $M(x, y, z)$ を使うことにより congruence-distributive となっていることがわかる。

3.4 特別な CRL

この節では CRL の族 $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ の ultraproducts によって生成される特別な algebra を紹介する。この algebra は最後の章で証明する定理の中で使われる重要な algebra となる。

Definition 3.19 (Filter) $\mathbf{B} := \langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ を *Boolean algebra* とする。このとき B の部分集合 F が $\mathbf{B}$ の *filter* であるとは、以下を満たすことである。

1. $1 \in F$
2. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$
3. $a \in F$ かつ $b \geq a \ \Rightarrow b \in F$

Definition 3.20 (Ultrafilter) F を *Boolean algebra* $\mathbf{B}$ の *filter* とする。$0 \notin F$ でかつ任意の $a \in B$ に対して丁度 a, a' のどちらか一つが F に属しているとき、F は *ultrafilter* であるという。

(注意) I を任意の集合とする。このとき $\langle \mathcal{P}(I), \wedge, \vee, \emptyset, I\rangle$ は Boolean algebra となる。またこの代数上の ultrafilter を I 上の ultrafilter という。U を I 上の ultrafilter とする。このとき $\bigcap U = \emptyset$ または $\neq \emptyset$ となるものが存在している。$\bigcap U = \emptyset$ となる ultrafilter を free ultrafilter 、$\neq \emptyset$ となる ultrafilter を principal ultrafilter と呼ぶ。free, principal の二つの ultrafilter には次の関係が成り立っている。

1. U は I 上の free ultrafilter である。 $\Longleftrightarrow$ I は無限集合でかつ、I の全ての cofinite subsets は U に属している。
2. U は I 上の principal ultrafilter である。 $\Longleftrightarrow$ ある $i \in I$ が存在して、$U = \{J \subseteq I : i \in J\}$ である。

Definition 3.21 (Ultraproducts) $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ を *CRL* の族とし、U を I 上の *ultrafilter* とする。また $\mathbf{A} = \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ としたとき、$\equiv_U \subseteq A \times A$ を次のように定義する。

$$a \equiv_U b \iff \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in U$$

このとき $\equiv_U$ は $\mathbf{A}$ 上の *congruence* となっている。よって $\equiv_U$ による $\mathbf{A}$ の *quotient algebra* $\mathbf{A}/\equiv_U$ が得られる。これを U 上の *ultraproduct* と呼び $\mathbf{A}/U$ または $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i/U$ と表す。

($\equiv_U$ が congruence であることの証明)

(反射律 $a \equiv_U a$) $\{i \in I : a(i) = a(i)\} = I \in U$ より明らかに反射律は成り立つ。

(対称律 $a \equiv_U b \Rightarrow b \equiv_U a$) $J = \{i \in I : a(i) = b(i)\}$ とすると、仮定より $J \in U$ となっている。また $\{i \in I : b(i) = a(i)\} = J$ より $b \equiv_U a$ が成り立つ。

(推移律 $a \equiv_U b$ *and* $b \equiv_c \Rightarrow a \equiv_U c$) $J_1 = \{i \in I : a(i) = b(i)\}, J_2 = \{i \in I : b(i) = c(i)\}$ とする。このとき仮定より $J_1, J_2 \in U$ である。$J_3 = \{i \in I : a(i) = c(i)\}$ とすると、$J_1 \cap J_2 \subseteq J_3$ が成り立つ。今 U は ulterfilter であるので定義より $J_1 \cap J_2 \in U$ であり、よって $J_3 \in U$ となる。

(congruence) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ とし、$a_1 \equiv_U b_1,\ a_2 \equiv_U b_2$ とする。このとき定義より

$$\{i \in I : a_1(i) = b_1(i)\},\ \{i \in I : a_2(i) = b_2(i)\} \in U$$

が成り立っている。次に二つの集合 J, J_0 を考える。

$$\begin{aligned} J &= \{i \in I : (a_1 \oplus a_2)(i) = (b_1 \oplus b_2)(i)\} \\ &= \{i \in I : a_1(i) \oplus a_2(i) = b_1(i) \oplus b_2(i)\} \end{aligned}$$

$$J_0 = \{i \in I : a_1(i) = b_1(i)\} \cap \{i \in I : a_2(i) = b_2(i)\}$$

このとき $J_0 \in U$ であり、また $J_0 \subseteq J$ より $J \in U$ となる。よって $a_1 \oplus a_2 \equiv_U b_1 \oplus b_2$ が成り立つ。

$a \equiv_U b$ の直感的な意味は、大多数の $i \in I$ で a と b は同じ要素であることを表している。よって $a/U \in \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i/U$ は a と大体同じである要素を一つの同値類にしたことを意味する。例えば、

$$a = (1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \cdots, 5, \cdots) \qquad b = (4, 3, 2, 1, 5, 5, 5, 5, \cdots, 5, \cdots)$$

という元があったとき $a \neq b$ である。しかし最初の四つの要素以外は同じであるので、このような二つの元をひとつにまとめる congruence が $\equiv_U$ である。

(Jónsson's Lemma) $\mathcal{K}$ を代数のクラスとし、$V(\mathcal{K})$ が *congruence-distributive variety* であるとする。もし $\mathbf{A}$ が $V(\mathcal{K})$ 内の *si algebra* であるならば、そのとき

$$\mathbf{A} \in HSPu(\mathcal{K})$$

である。ここで $Pu(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ の要素の *ultraproducts* 全体からなるクラスを表している。

この補題は variety 内にある si algebras を調べる際に、とても有用な補題となる。この証明は今回のテーマの範囲をこえるためここでは行わない。しかしあといくつかの ultrafilter と ultraproducts に関する命題を用いれば、証明することができる。また Jónsson's Lemma から次のことが導かれる。

Corollary 1 $\mathcal{K}$ を有限代数の有限なクラスとし、$V(\mathcal{K})$ が *congruence-distributive variety* であるとする。このとき $\mathbf{A}$ が $V(\mathcal{K})$ 内の *si algebra* であるならば、そのとき

$$\mathbf{A} \in HS(\mathcal{K})$$

である。

第4章　FLe 上の論理と Commutative Residuated Lattice

この章では、代数 CRL と FLe 上の論理との関係について論じる。つまり FLe や FLe 上の論理が持つ性質と CRL の性質が、どのような関係があるのかを見ていく。

4.1　FLe と CRL の関係

Definition 4.1 (付値) $\mathbf{M} = \langle M, \cap, \cup, \cdot, \to, \top, \bot, 0, 1\rangle$ を *CRL* とし、v を命題変数全体から M への関数とする。この v は付値と呼ばれる。さらにこの v を次のようにして論理式全体の集合 Φ から M への関数に拡張する。

1. $v(\top) = \top, v(\bot) = \bot, v(t) = 1, v(f) = 0$
2. $v(A \wedge B) = v(A) \cap v(B)$
3. $v(A \vee B) = v(A) \cup v(B)$
4. $v(A * B) = v(A) \cdot v(B)$
5. $v(A \supset B) = v(A) \to v(B)$
6. $v(\neg A) = v(A) \to 0$

Proposition 4.1 ある *CRL* $\mathbf{M}$ 上の任意の付値 v に対して、$v(A) \geq 1$ となる論理式全体を $L(\mathbf{M})$ で表す。このとき $L(\mathbf{M})$ は論理となる。この論理 $L(\mathbf{M})$ を $\mathbf{M}$ で特徴付けられる論理という。

(証明) 命題変数 p を含む論理式 $\phi(p)$ が $L(\mathbf{M})$ の要素であるとする。このとき任意の付値 v に対して、$v(\phi(p)) \geq 1$ となっている。これより $v(p)$ が M のどの点に対応したとしても、$v(\phi(p)) \geq 1$ が成り立っていることを意味している。よって p に任意の論理式 A を代入した論理式 $\phi(A)$ についても $v(\phi(A)) \geq 1$ となる。よって $\phi(A) \in L(\mathbf{M})$ となり、$L(\mathbf{M})$ は代入に関して閉じている。

次に $A, A \supset B \in L(\mathbf{M})$ であるとする。このとき任意の付値 v に対して、$v(A) \geq 1, v(A \supset B) \geq 1$ が成り立っていることを意味している。$1 \leq v(A \subset B) = v(A) \to v(B)$ と CRL の定義 $x \cdot y \leq z \iff x \leq y \to z$ より $v(A) \leq v(B)$ が成り立つ。よって $v(B) \geq 1$ であるので $v(B) \in L(\mathbf{M})$ が成り立つ。これより $L(\mathbf{M})$ は三段論法についても閉じている。以上より $L(\mathbf{M})$ は論理である。

Proposition 4.2 任意の *FLe* 上の論理 $L \in \mathcal{L}$ に対して、ある *CRL* $\mathbf{M}$ が存在してすなわち

$$L = L(\mathbf{M})$$

が成り立つ。

(証明の outline) L に対するリンデンバウム代数を構成することにより証明する。

まず最初に、論理式 A, B に対して二項関係 $\equiv$ を

$$A \equiv B \iff A \supset B \in L \text{ かつ } B \supset A \in L$$

と定める。つまり $A \equiv B$ は A と B が論理 L 上で論理的に同値であることを意味する。この $\equiv$ が Φ 上の合同関係になっていることを示す。すなわち $A \equiv B, A' \equiv B'$ ならば任意の論理結合子に対して $A \oplus A' \equiv B \oplus B'$ となることを示せばよい。

次にこの合同関係 $\equiv$ を使って、Φ の同値分割 $\Phi/\equiv$ を作り、論理式 A の属する同値類を $[A]$ で表すこととする。さらに以下のように定めたとき $\mathbf{M} = \langle \Phi/\equiv, \cap, \cup, \cdot, \to, [\top], [\bot], [0], [1] \rangle$ は CRL となることを示す。

$$[A] \cup [B] := [A \wedge B]$$
$$[A] \cap [B] := [A \vee B]$$
$$[A] \cdot [B] := [A * B]$$
$$[A] \to [B] := [A \supset B]$$

最後に L と $L(\mathbf{M})$ が一致していることを確かめる。すなわち

$$A \in L \iff \mathbf{M} \text{ 上の任意の付値 } v \text{ に対して } v(A) \geq [1]$$

を示す。

このようにして得られた $\mathbf{M}$ を、論理 L に対するリンデンバウム代数という。

Proposition 4.3 (健全性と完全性) 論理式 A は *FLe* で証明可能である。$\iff$ 任意の *CRL* $\mathbf{M}$ 上の任意の付値 v に対して $v(A) \geq 1$ となる。

(証明の outline) ($\Rightarrow$) FLe の sequent $A_1, A_2, \ldots, A_m \to B$ に対して付値 v を

$$v(A_1, A_2, \ldots, A_m \to B) = v(A_1 * A_2 \cdots * A_m) \to v(B)$$

と定める。特に sequent の左辺が空の場合は $1 \to v(B)$ とし、右辺が空の場合は $v(A_1 * A_2 * \cdots A_k) \to 0$ と定めておく。まず FLe の始式が

1. $v(A \to A) \geq 1$
2. $v(\Gamma \to \top) \geq 1$
3. $v(\Gamma, \bot, \Delta \to D) \geq 1$

が成り立つことを示す。さらに FLe の各推論規則について、上式が任意の RL $\mathbf{M}$ 上の任意の付値 v に対して ≥ 1 であるならば、下式もそうなることを示す。

($\Leftarrow$) 対偶により証明する。ある論理式 A が存在して、すなわち A が FLe で証明可能ではないと仮定する。このとき命題 4.2 よりある CRL $\mathbf{M}$ が存在して、すなわち $A \notin FLe$ ならば $A \notin L(\mathbf{M})$ となっている。つまりこの CRL $\mathbf{M}$ とある付値 v に対して $v(A) \not\geq 1$ となっている。

命題 4.3 より命題 4.1 は次の形に書き換えることができる。

Proposition 4.4 *CRL* $\mathbf{M}$ により特徴づけられる論理 $L(\mathbf{M})$ は *FLe* 上の論理である。

(証明) 命題 4.3 より明らかに、任意の CRL $\mathbf{M}$ に対して $FLe \subseteq L(\mathbf{M})$ である。

4.2 CRL の諸性質と FLe 上の論理との関係

前の節では、ある CRL $\mathbf{M}$ に対して FLe 上の論理 $L(\mathbf{M})$ が存在し、またある FLe 上の論理 L に対して $L = L(\mathbf{M})$ となる CRL $\mathbf{M}$ が存在することがわかった。この節では CRL の諸性質が FLe 上の論理とどのような関係になっているのかを論じていく。

Proposition 4.5 (部分代数との関係) $\mathbf{N}, \mathbf{M}$ を *CRL* とし、さらに $\mathbf{N}$ を $\mathbf{M}$ の部分代数とする。このとき

$$L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{N})$$

が成り立つ。

(証明) $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ をそれぞれ $\mathbf{N}, \mathbf{M}$ 上の付値全体とする。このとき、$N \subseteq M$ であることと、$\mathbf{N}$ が $\mathbf{M}$ と同一の演算で CRL をなすことから、$\mathbf{N}$ の任意の付値は、$\mathbf{M}$ の付値と見なすことができる。したがって $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ となっている。いま、ある論理式 A が $L(\mathbf{M})$ の要素であるとする。すなわち任意の $v \in \mathcal{V}$ に対して $v(A) \geq 1$ が成り立っている。よって任意の $u \in \mathcal{U}$ に対しても $u(A) \geq 1$ となる。これより $A \in L(\mathbf{N})$ であるので、$L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{N})$ が成り立つ。

Proposition 4.6 (商代数との関係) $\mathbf{M}$ を *CRL* とし、θ を $\mathbf{M}$ 上の *congruence* とする。このとき

$$L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{M}/\theta)$$

が成り立つ。

(証明) 論理式を、その中に含まれる命題変数を全て明示した $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ という形で表すことにする。ある論理式 $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ に対し、これの各 p_i を x_i で、論理結合子 $\wedge, \vee, *, \supset$ をそれぞれ $\cap, \cup, \cdot, \rightarrow$ で置き換えたものを $f_\phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ で表すことにする。このときこれは CRL 上の多項式となっている。

今ある論理式 $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ が $L(\mathbf{M})$ の要素であるとする。すなわち $\mathbf{M}$ 上の任意の付値 v に対して、

$$v(\phi) = f_\phi(v(p_1), v(p_2), \ldots, v(p_k)) \geq 1_{\mathbf{M}}$$

となっている。これらの両辺の、congruence θ による同値類をとると、

$$\begin{aligned} f_\phi^{\mathbf{M}}(x_1, x_2, \ldots, x_k)/\theta &= f_\phi^{\mathbf{M}/\theta}(x_1/\theta, x_2/\theta, \ldots, x_k/\theta) \\ &\geq 1_{\mathbf{M}/\theta} \end{aligned}$$

これは任意の $\mathbf{M}/\theta$ の元 $x_1/\theta, \ldots, x_k/\theta$ に対して $\geq 1_{\mathbf{M}/\theta}$ が成り立っていることを示しているので、$\phi \in L(\mathbf{M}/\theta)$ となり、$L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{M}/\theta)$ が成立する。

Proposition 4.7 (Homomorphism との関係) $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ を *CRL* とし、$\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ を $\mathbf{M}$ から $\mathbf{N}$ への *homomorphism* とする。このとき次が成り立つ。

1. α が全射ならば、$L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{N})$ である。
2. α が単射ならば、$L(\mathbf{N}) \subseteq L(\mathbf{M})$ である。
3. α が全単射であるならば、$L(\mathbf{M}) = L(\mathbf{N})$ である。

(証明) 命題 4.5,4.6 よりほとんど明らかである。なぜならば α が全射のときは、$\mathbf{M}/Ker\ \alpha \simeq \mathbf{N}$ であり、また α が単射のときは、$\mathbf{M} \simeq Im\ \alpha \leq \mathbf{N}$ であるからである。また 3. は 1.,2. より明らかである。

Proposition 4.8 (Direct product との関係)

$$L(\Pi_{i\in I}\mathbf{M}_i) = \cap_{i\in I}L(\mathbf{M}_i)$$

(証明) ($I = \{1,2\}$) の場合について証明する。

($\subseteq$) $p_1 : \mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \to \mathbf{M_1}, \mathbf{p_2} : \mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \to \mathbf{M_2}$ はいずれも onto homomorphism であるので、命題 4.7 より $L(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) \subseteq L(\mathbf{M}_1), L(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) \subseteq L(\mathbf{M}_2)$ となる。よって、$L(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) \subseteq L(\mathbf{M}_1) \cap L(\mathbf{M}_2)$ となる。

($\supseteq$) $A \in L(\mathbf{M}_1)$ かつ $A \in L(\mathbf{M}_2)$ とする。すなわち $\mathbf{M}_1$ および $\mathbf{M}_2$ 上の全ての付値 u_1, u_2 に対し、$u_1(A) \geq 1_{\mathbf{M}_1}, u_2(A) \geq 1_{\mathbf{M}_2}$ となっているとする。今、$\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ 上の任意の付値 $v(A) = (v_1(A), v_2(A))$ を考える。このとき v_1, v_2 はともに $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ 上への付値になっているので、仮定より

$$\begin{aligned} v(A) &= (v_1(A), v_2(A)) \\ &\geq (1_{\mathbf{M}_1}, 1_{\mathbf{M}_2}) \\ &= 1_{\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $A \in L(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)$ となる。

以上の命題の直感的な意味は、「代数が大きいとき、それに対応する論理は小さくなりまた、代数が小さいときには、それに対応する論理は大きくなる。」ということである。

4.3 FLe 上の論理と CRL のクラスとの関係

節 4.1,4.2 では、論理と代数との関係を論じてきた。この節では代数のクラスが論理とどのような関係をなしているのかを論じていく。

4.3.1 論理から variety へ

L を FLe 上の論理とする。このとき $L = L(\mathbf{P})$ となるような CRL $\mathbf{P}$ を考える代わりに、次のように定義される CRL のクラス $\mathcal{V}_L$ を考える。

$$\mathcal{V}_L = \{\mathbf{Q} : L \subseteq L(\mathbf{Q})\}$$

このとき次の命題が成り立つ。

Proposition 4.9 任意の *FLe* 上の論理 L に対して、*CRL* のクラス $\mathcal{V}_L$ は *variety* となる。

(証明) $\mathcal{V}_L$ が homomorphic images, subalgebras, direct products の下で閉じていることを示せばよい。

(homomorphic images) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_L$ とする。このとき $L \subseteq L(\mathbf{A})$ が成り立っている。今、$\mathbf{A}$ の homomorphic images を $\alpha(\mathbf{A})$ とすると、命題 4.7 より $L(\mathbf{A}) \subseteq L(\alpha(\mathbf{A}))$ となるので、$L \subseteq L(\alpha(\mathbf{A}))$ が成り立ち、$\alpha(\mathbf{A}) \in \mathcal{V}_L$ となる。

(subalgebras) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_L,\ \mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ とする。このとき命題 4.5 より

$$L \subseteq L(\mathbf{A}) \subseteq L(\mathbf{B})$$

となり、$\mathbf{B} \in \mathcal{V}_L$ となる。

(direct products) $\mathbf{A}_i \in \mathcal{V}_L$ $(i \in I)$ とする。このとき命題 4.8 より $L(\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i) = \cap_{i\in I} L(\mathbf{A}_i)$ が成り立ち、また任意の $i \in I$ に対して $L \subseteq L(\mathbf{A}_i)$ より

$$L \subseteq \cap_{i\in I} L(\mathbf{A}_i) = L(\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i)$$

となり、$\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i \in \mathcal{V}_L$ となる。

4.3.2 Variety から論理へ

Definition 4.2 $\mathcal{K}$ を *CRL* のクラスとする。このとき $\mathcal{K}$ が *equational class* であるとは、ある *equation* の集合 Σ が存在して、すなわち

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{A} : \text{ すべての } s \approx t \in \Sigma \text{に対し、} \mathbf{A} \models s \approx t\}$$

となることである。

(注意) 任意の equation は $r \geq 1$ という形に表すことができる。なぜなら equation $s \approx t$ に対して、

$$\begin{aligned} s \approx t \quad &\Longleftrightarrow \quad s \leq t \text{ かつ } t \leq s \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \leq s \to t \text{ かつ } 1 \leq t \to s \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \leq (s \to t) \cap (t \to s) \end{aligned}$$

となるからである。

Equational class と variety の関係は次の Birkhoff の定理により与えられる。

Proposition 4.10 (Birkhoff' theorem)

$$\mathcal{K} \text{ は } \textit{equational class} \iff \mathcal{K} \text{ は } \textit{variety}$$

今 $\mathcal{V}$ を CRL の variety とする。このとき Birkhoff の結果から $\mathcal{V}$ はある equation の集合 Σ によって定められている。ここで次のように $L_{\mathcal{V}}$ を定義する。

$$L_{\mathcal{V}} = \{\psi(t) : t \geq 1 \in \Sigma\}$$

ここで写像 ψ は定義 4.1 で定義された付値 v の逆写像である。すなわち $\psi(x \cap (y \cup z)) \equiv p \wedge (q \vee r)$ となるような写像である。

$L_{\mathcal{V}}$ の直感的なイメージは、$\mathcal{V} \models t \geq 1$ となるような t に対して、それに対応する論理式 $\psi(t)$ を全て集めた集合ということである。

このとき次の命題が成り立つ。

Proposition 4.11 任意の *CRL* の *variety* $\mathcal{V}$ に対して、$L_{\mathcal{V}}$ は *FLe* 上の論理である。

(証明) $L_{\mathcal{V}}$ が代入と三段論法に関して閉じており、さらに $FLe \subseteq L_{\mathcal{V}}$ となっていることを示せばよい。

(代入) 命題 4.6 の証明と同様に、論理式を $\phi(p_1,\ldots,p_n)$ とし、それに対応する CRL の要素を $f_\phi(x_1,\ldots,x_n)$ とする。今、$\phi(p_1,\ldots,p_n) \in L_{\mathcal{V}}$ と仮定する。このとき $\phi(p_1,\ldots,p_n) \equiv \psi(f_\phi(x_1,\ldots,x_n))$ かつ $f_\phi(x_1,\ldots,x_n) \geq 1$ となっている。$f_\phi(x_1,\ldots,x_n) \geq 1$ という意味は、すべての $\mathbf{M} \in \mathcal{V}$ と、すべての $a_1,\ldots,a_n \in M$ に対して、

$$f_\phi(a_1,\ldots,a_n) \geq 1_{\mathbf{M}}$$

ということであるので、ϕ の任意の代入 $\phi(A_1,\ldots,A_n)$ に対して、

$$\phi(A_1,\ldots,A_n) = \psi(f_\phi(v(A_1),\ldots,v(A_n))) \qquad (v \text{ は } CRL \text{ への付値})$$

となる。ここで各 i に対し、$v(A_i) = b_i$ とすれば

$$f_\phi(v(A_1),\ldots,v(A_n)) = f_\phi(b_1,\ldots,b_n) \geq 1_{\mathbf{M}}$$

が成り立つ。よって代入に関して閉じている。

(三段論法) $A, A \supset B \in L_{\mathcal{V}}$ とする。このときある s,t が存在して、すなわち

$$\psi(s) = A,\ \psi(t) = B \quad \text{かつ} \quad s \geq 1,\ s \to t \geq 1$$

となっている。よって

$$1 \leq s \to t \quad \Longleftrightarrow \quad s \leq t$$

より $1 \leq t$ となり、$B \in L_{\mathcal{V}}$ となる。

($FLe \subseteq L_{\mathcal{V}}$) $A \in FLe$ とする。このとき命題 4.3 より任意の CRL 上の任意の付値 v に対して $v(A) \geq 1$ が成り立っている。よって特に variety $\mathcal{V}$ の任意の CRL $\mathbf{M}$ に対しても

$$v(A) \geq 1_{\mathbf{M}}$$

が成り立つ。$L_{\mathcal{V}}$ は $\mathcal{V} \models v(B)$ となるような論理式 B を全て集めた論理であるので、

$$A \in L_{\mathcal{V}}$$

であり、これより

$$FLe \subseteq L_{\mathcal{V}}$$

が成り立つ。

4.3.3 FLe 上の論理と CRL の subvariety

節 2.3 より FLe 上の論理は有界束 $\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ をなしていることがわかっている。ここで CRL 全体がなす variety の subvariety がどのような構造を形成しているのかを見ていくこととする。

Proposition 4.12 **CRL** を *CRL* 全体のなす *variety* とし、$\mathbf{V}_0$ を自明な *CRL* [1]のみからなる *variety* とする。また $\mathcal{V} := \{V : V \text{ は } CRL \text{ の } variety\}$ としておく。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に対して、

$$V_1 \vee V_2 := V_1 \cup V_2 \text{を含む最小の } variety$$

と定めると、$\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V}_0, \mathbf{CRL} \rangle$ は最大元 **CRL**、最小元 $\mathbf{V}_0$ の有界束となる。

[1] 自明な CRL とは、要素が一点からなる CRL のことである。

(証明) 明らかに $\mathbf{CRL}$ は最大元となり、$\mathbf{V}_0$ は最小元となっている。次に $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に対して、$V_1 \cap V_2$ が variety となることを示す。$\mathbf{A} \in V_1 \cap V_2$ とする。このとき $\mathbf{A} \in V_1$かつ $\in V_2$ より $H(\mathbf{A}), S(\mathbf{A}), P(\mathbf{A}) \in V_1$ かつ $\in V_2$ となり、よって $H(\mathbf{A}), S(\mathbf{A}), P(\mathbf{A}) \in V_1 \cap V_2$ となる。これより $V_1 \cap V_2$ は variety である。また $V \subseteq V_1, \subseteq V_2$、かつ $V_1 \cap V_2 \subseteq V$ であると仮定する。このとき $\mathbf{A} \in V$ に対して $\mathbf{A} \in V_1$ かつ $\mathbf{A} \in V_2$ より $\mathbf{A} \in V_1 \cap V_2$ となり $V = V_1 \cap V_2$ が成り立つので、$V_1 \cap V_2$ は $\{V_1, V_2\}$ の下限となっている。また $\vee$ の定義より明らかに $V_1 \vee V_2$ は $\{V_1, V_2\}$ の上限である。

これまでの結果から、$\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ と $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V_0}, \mathbf{CRL} \rangle$ の間には次の図のような関係が成り立っている。

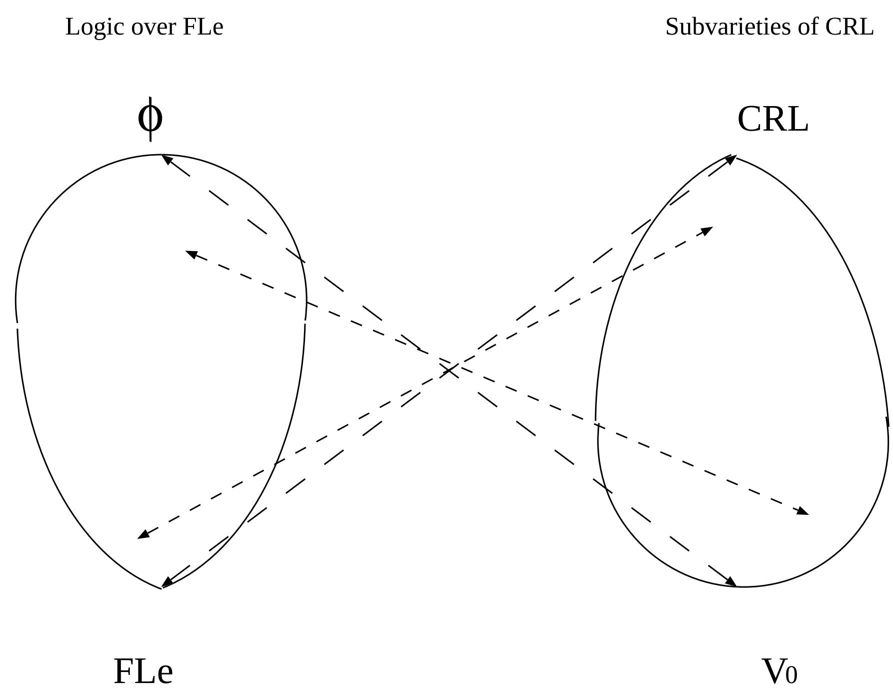

図 4.1:

つまり $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V_0}, \mathbf{CRL} \rangle$ は $\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ の上下を、丁度引っくり返した束構造をなしている。

第5章　CRL の 極小な variety

前章で、 FLe 上の論理がなす束は、 CRL 全体がなす variety の subvariety がなす束と同じ構造を持っていることがわかった。この章では、$\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V}_0, \mathbf{CRL} \rangle$ の性質を用いて、$\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ がどのような構造をしているのか、特に Φ の次に大きな要素はどのようなものが、どれだけあるのかを明らかにしていく。

5.1　Minimal variety

Definition 5.1 (Minimal variety) $\mathbf{V}$ を *CRL* の *variety* とする。このとき $\mathbf{V}$ が *minimal* であるとは任意の $\mathbf{V}$ の *subvariety* $\mathbf{W}$ に対して、

$$\mathbf{W} \subsetneq \mathbf{V} \text{ ならば } \mathbf{W} = \mathbf{V}_0 \quad (\mathbf{V}_0 \text{ は自明な } \textit{variety})$$

となることである。すなわち $\mathbf{V}$ の *subvariety* が $\mathbf{V}$ 自身と $\mathbf{V}_0$ のみであるとき、$\mathbf{V}$ は *minimal variety* と呼ばれる。

5.2　Algebra $\mathbf{B}_k$

これから次のような演算と構造を持つ代数 $\mathbf{B}_k := \langle B_k, \cap, \cup, \cdot, \to, \top, \bot, 0, 1 \rangle$ を構成する。そしてこの代数を用いて、CRL の minimal variety がどれくらい存在するのかを明らかにしていく。

任意の $k \in \omega$ に対して、

$$B_k = \{\top, \bot\} \cup \{0^{2i};\ 0 \le i \le k\} \cup \{0^{2i+1};\ 0 \le i \le k\}$$

ここで $0^0, 0^1$ はそれぞれ constant $1, 0$ である。

$\cdot$	$\top$	1	0	0^2	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\cdots$	$\top$	$\top$	$\bot$
1	$\top$	1	0	0^2	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
0	$\top$	0	0^2	0^3	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
0^2	$\top$	0^2	0^3	0^4	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0^{2k}	$\top$	0^{2k}	0^{2k+1}	0^{2k}	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
0^{2k+1}	$\top$	0^{2k+1}	0^{2k}	0^{2k+1}	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$$x \to \top = \top \qquad \top \to x = \begin{cases} \top & if\ x = \top \\ \bot & otherwise \end{cases}$$

$$x \to \bot = \begin{cases} \top & if\ x = \bot \\ \bot & otherwise \end{cases} \qquad \bot \to x = \top$$

$$1 \to x = x \qquad x \to 1 = \begin{cases} \top & if\ x = \bot \\ 1 & if\ x = 1 \\ \bot & otherwise \end{cases}$$

$$0^{2i} \to 0^{2l} = \begin{cases} 0^{2k} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases} \qquad 0^{2i} \to 0^{2l+1} = \begin{cases} 0^{2k+1} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)+1} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases}$$

$$0^{2i+1} \to 0^{2l+1} = \begin{cases} 0^{2k} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases} \qquad 0^{2i+1} \to 0^{2l} = \begin{cases} 0^{2k+1} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)-1} & if\ i < l < k \\ \bot & if\ l \leq i \end{cases}$$

$\mathbf{B}_k$ のハッセの図は次のような形をしている。

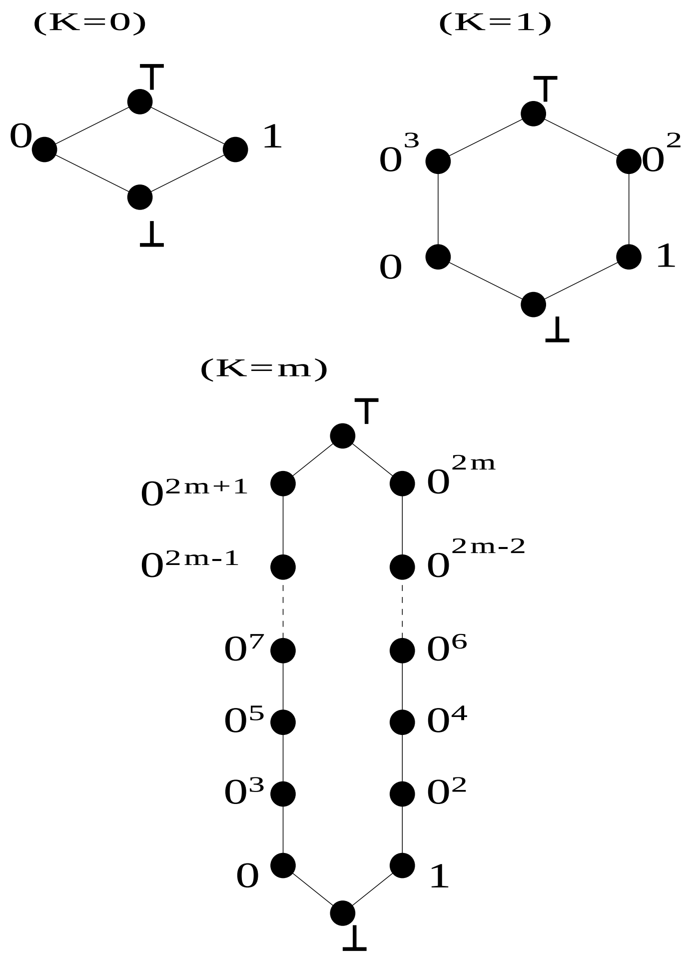

図 5.1:

Lemma 1 $\mathbf{B}_k$ は *simple* な *CRL* である。

(証明) $\mathbf{B}_k$ が CRL であることはハッセの図や $\cdot$ の演算表、また $\to$ の定義より確かめることができる。

今ある $x, y \in \mathbf{B}_k$ $(x \neq y)$ に対して、$\langle x, y\rangle \in \theta$ となるような $\theta \in Con\mathbf{B}_k$ が存在したと仮定する。このとき一般性を失うことなく、$x < y$ であるかまたは、$x \not< y$ かつ $x \not> y$ であるかのどちらかであるとすることができる。

($x < y$ のとき) このとき $y \to x = \perp$ であり、また $y \to y = \top, 1, 2k$ のいづれかとなっている。

1. （$y \to y = \top$ のとき）

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ y \to x\ \theta\ y \to y \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ \top \\ &\Rightarrow\ \perp \cap 1\ \theta\ \top \cap 1 \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ 1 \end{aligned}$$

2. ($y \to y = 1$ のとき)

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ y \to x\ \theta\ y \to y \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ 1 \end{aligned}$$

3. ($y \to y = 2k$ のとき)

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ y \to x\ \theta\ y \to y \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ 2k \\ &\Rightarrow\ \perp \cap 1\ \theta\ 2k \cap 1 \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ 1 \end{aligned}$$

($x \not< y$ かつ $x \not> y$ のとき) このとき一般性を失うことなく、$x \in \{0^{2i}\}$, $y \in \{0^{2i+1}\}$ とすることができる。よって

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ x \cap 1\ \theta\ y \cap 1 \\ &\Rightarrow\ 1\ \theta\ \perp \end{aligned}$$

以上から、どの場合に対しても $\langle 1, \perp\rangle \in \theta$ となる。これより任意の $z_1, z_2 \in B_S$ に対して、

$$\begin{aligned} \perp\ \theta\ 1 &\Rightarrow\ \perp \cdot z_i\ \theta\ 1 \cdot z_i \\ &\Rightarrow\ \perp\ \theta\ z_i \end{aligned} \qquad (i = 1 \text{ および } 2)$$

が成り立つ。このことから $\langle z_1, z_2\rangle \in \theta$ が導かれるので、$\theta = \nabla$ となる。

Lemma 2 $V(\mathbf{B}_k)$ は *minimal variety* である。

(証明) 補題 1 と命題 3.9 より $\mathbf{B}_k$ は si である。また 任意の $\mathbf{A} \in V(\mathbf{B}_k)$ に対して、$\mathbf{B}_k$ は CRL より $\mathbf{A}$ も CRL である。よって

$$M(x, y, z) = (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x)$$

とすると、$\mathbf{A}$ は lattice であるので

$$\mathbf{A} \models M(x, x, y) \approx M(x, y, x) \approx M(y, x, x) \approx x$$

が成り立つ。よって命題 3.15 より $V(\mathbf{B}_k)$ は congruence-distributive variety である。これと系 1 より、任意の $V(\mathbf{B}_k)$ 内の si である $\mathbf{C}$ に対して、

$$\mathbf{C} \in HS(\mathbf{B}_k)$$

が成り立っている。今 $\mathbf{B}_k$ は constant から生成される algebra となっている。なぜなら任意の 0^l に対して、

$$0^l = \overbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}^{l\,個}$$

となっているからである。よって $\mathbf{B}_k$ の部分代数は $\mathbf{B}_k$ のみである。また補題 1 より、任意の onto homomorphism $\alpha : \mathbf{B}_k \to \mathbf{C}$ に対して、$\mathbf{C}$ は自明な代数であるかまたは $\mathbf{B}_k$ であるかのどちらかである。よって命題 3.13 より、$V(\mathbf{B}_k)$ は minimal variety となる。

Theorem 1 *CRL* の *minimal variety* が少なくとも可算個存在する。

(証明) 補題 2 より、任意の $k_1, k_2 \in \omega$ $(k_1 \neq k_2)$ に対して、$V(\mathbf{B}_{k_1}) \neq V(\mathbf{B}_{k_2})$ となることを示せばよい。今 $V(\mathbf{B}_{k_1}) = V(\mathbf{B}_{k_2})$ であると仮定する。このとき補題 2 の証明より、$\mathbf{B}_{k_1} = \mathbf{B}_{k_2}$ となる。しかし $k_1 \neq k_2$ より矛盾。よって $V(\mathbf{B}_{k_1}) \neq V(\mathbf{B}_{k_2})$ である。

5.3 Algebras $\mathbf{B}_k^S$ と $\mathbf{B}_S$

前節では CRL $\mathbf{B}_k$ を用いて、CRL の minimal variety が少なくとも可算個存在することを示した。しかしこの方法では CRL の minimal variety が非可算個存在するのかどうかを議論することができない。よって $\mathbf{B}_k$ を拡張した代数 $\mathbf{B}_k^S$ を構成し、CRL の minimal variety をさらに詳しく調べていく。

$\mathbf{B}_k^S := \langle B_k^S, \cap, \cup, \cdot, \to, \top, \bot, 0, 1 \rangle$ は次のような構造と演算を持つ代数である。

任意の $S \subseteq \omega,\ k \in \omega$ に対して、

$$B_k^S = \{\top, \bot\} \cup \{0^{2i};\ 0 \leq i \leq k\} \cup \{0^{2i+1};\ 0 \leq i \leq k\} \cup \{\star_i;\ 0 < i < k, i \in S\}$$

ここで $0^0, 0^1$ はそれぞれ constant $1, 0$ である。

$$\bot < 1 < 0^2 < 0^4 < \cdots < 0^{2k} < \top$$
$$\bot < 0 < \star_1 < 0^3 < \star_2 < \cdots < 0^{2i-1} < \star_i < 0^{2i+1} < \cdots < 0^{2k+1} < \top$$

$\cdot$	$\top$	1	0	$\star_1$	0^2	0^3	$\star_2$	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\cdots$	$\top$	$\top$	$\bot$
1	$\top$	1	0	$\star_1$	0^2	0^3	$\star_2$	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
0	$\top$	0	0^2	0^2	0^3	0^4	0^4	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
$\star_1$	$\top$	$\star_1$	0^2	0^2	0^3	0^4	0^4	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
0^2	$\top$	0^2	0^3	0^3	0^4	0^5	0^5	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
0^3	$\top$	0^3	0^4	0^4	0^5	0^6	0^6	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
$\star_2$	$\top$	0^3	0^4	0^4	0^5	0^6	0^6	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
0^4	$\top$	0^4	0^5	0^5	0^6	0^7	0^7	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0^{2k}	$\top$	0^{2k}	0^{2k+1}	0^{2k+1}	0^{2k}	0^{2k+1}	0^{2k+1}	$\cdots$	0^{2k}	0^{2k+1}	$\bot$
0^{2k+1}	$\top$	0^{2k+1}	0^{2k}	0^{2k}	0^{2k+1}	0^{2k}	0^{2k}	$\cdots$	0^{2k+1}	0^{2k}	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$$x \to \top = \top \qquad \top \to x = \begin{cases} \top & if\ x = \top \\ \bot & otherwise \end{cases}$$

$$x \to \bot = \begin{cases} \top & if\ x = \bot \\ \bot & otherwise \end{cases} \qquad \bot \to x = \top$$

$$1 \to x = x \qquad x \to 1 = \begin{cases} \top & if\ x = \bot \\ 1 & if\ x = 1 \\ \bot & otherwise \end{cases}$$

$$0^{2i} \to 0^{2l} = \begin{cases} 0^{2k} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases} \qquad 0^{2i} \to \star_l = \begin{cases} 0^{2(l-i)-1} & if\ i < l\ and\ l-i \notin S \\ \star_{l-i} & if\ i < l\ and\ l-i \in S \\ \bot & if\ l \leq i \end{cases}$$

$$0^{2i} \to 0^{2l+1} = \begin{cases} 0^{2k+1} & if\ l = k \\ 0^{2(l-1)+1} & if\ i \leq l < k\ and\ l-i+1 \notin S \\ \star_{l-i+1} & if\ i \leq l < k\ and\ l-i+1 \in S \\ \bot & if\ l < i \end{cases}$$

$$0^{2i+1} \to \star_l = \begin{cases} 0^{2(l-i-1)} & if\ i < l \\ \bot & if\ l \leq i \end{cases} \qquad 0^{2i+1} \to 0^{2l+1} = \begin{cases} 0^{2k} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases}$$

$$0^{2i+1} \to 0^{2l} = \begin{cases} 0^{2k+1} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)-1} & if\ i < l < k\ and\ l-i \notin S \\ \star_{l-i} & if\ i < l < k\ and\ l-i \in S \\ \bot & if\ l \leq i \end{cases}$$

$$\star_i \to \star_l = \begin{cases} 0^{2(l-i)} & if\ i \leq l \\ \bot & if\ l < i \end{cases} \qquad \star_i \to 0^{2l+1} = \begin{cases} 0^{2k} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i+1)} & if\ i \leq l < k \\ \bot & if\ l < i \end{cases}$$

$$\star_i \to 0^{2l} = \begin{cases} 0^{2k+1} & if\ l = k \\ 0^{2(l-i)+1} & if\ i \leq l < k\ and\ l-i+1 \notin S \\ \star_{l-i+1} & if\ i \leq l < k\ and\ l-i+1 \in S \\ \bot & if\ l < i \end{cases}$$

例えば $S = \{1, 3, 4, 5\}$ としたとき、$\mathbf{B}_k^S$ のハッセの図はそれぞれ次のような形をしている。

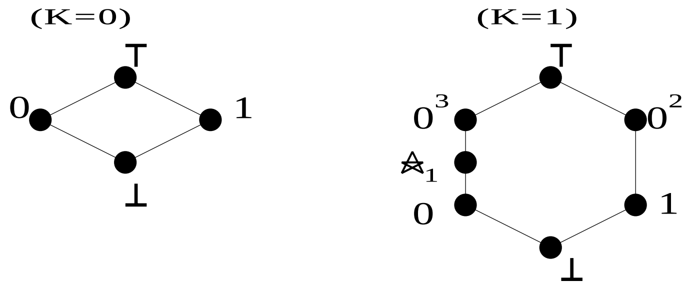

図 5.2:

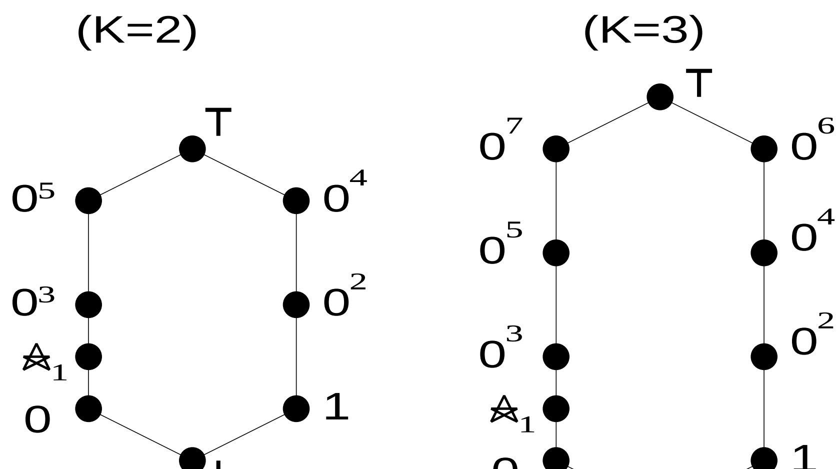

図 5.3:

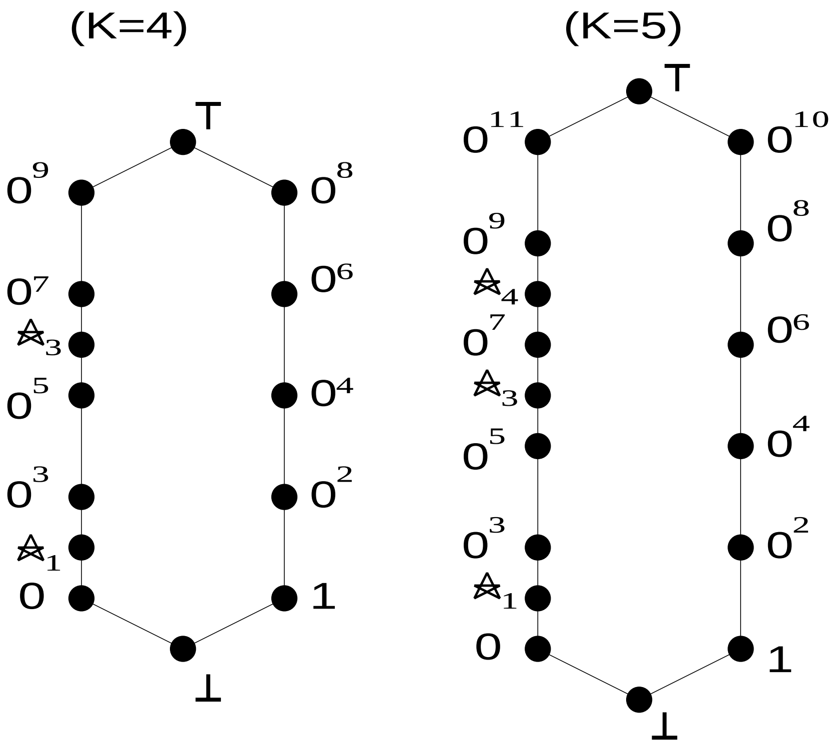

図 5.4:

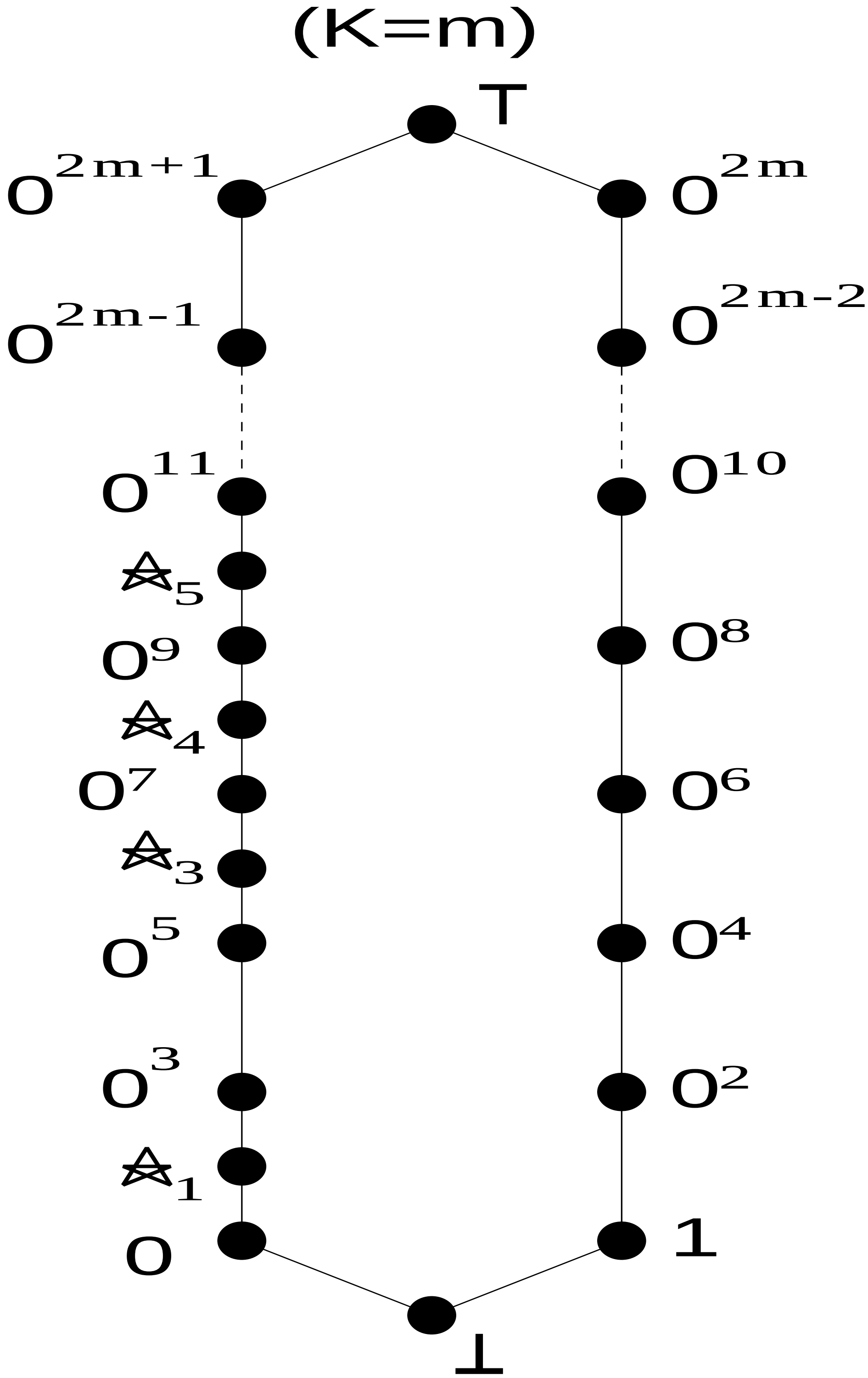

図 5.5:

ここで少し代数 $\mathbf{B}_k^S$ の構成法について補足しておく。例として $S :=$ 偶数, $k = 3$ のときを考える。このときまず $\mathbf{B}_k^S$ は $\{\top, \bot\} \cup \{0^{2i};\ 0 \leq i \leq 3\} \cup \{0^{2i+1};\ 0 \leq i \leq 3\}$ を要素として持つので、

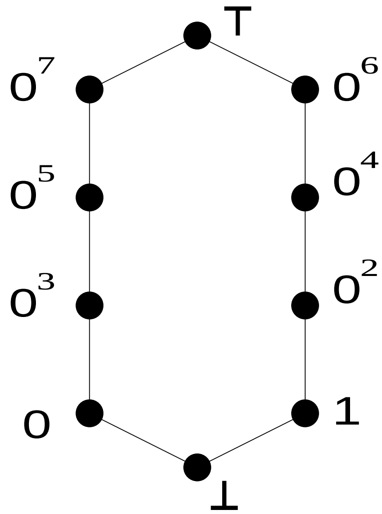

図 5.6:

が得られる。次に k $(= 3)$ より小さい偶数には 2 があるので、$\star_2$ も要素となり、$\mathbf{B}_k^S$ は

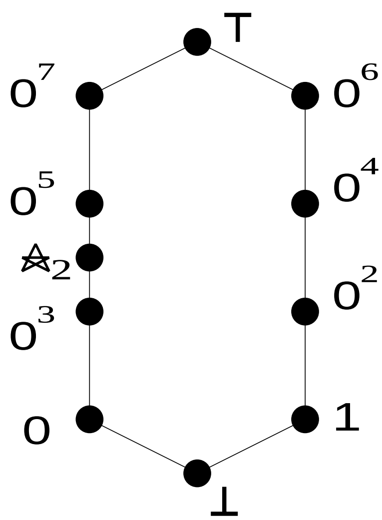

図 5.7:

という構造になる。

Lemma 3 任意の $S \subseteq \omega,\ k \in \omega$ に対して、$\mathbf{B}_k^S$ は CRL である。

(証明)

($\langle B_k^S, \cap, \cup, \top, \bot, 0, 1\rangle$ **が有界束であること)** $\mathbf{B}_k^S$ の構造から明らかに、最大元 $\top$、最小元 $\bot$ の有界束となっている。

($\langle B_k^S, \cdot, 1\rangle$ は単位元 1 の可換モノイドであること) $\cdot$ の演算表より、1 は単位元であり、また可換であることは明らかである。よって任意の $x, y, z \in B_k^S$ に対して、$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ が成り立つことを示す。もし x, y, z のどれか一つが $\bot$ (または$\top$) のとき

$$x \cdot (y \cdot z) = \bot(\text{または}\top) = (x \cdot y) \cdot z$$

となり成り立つ。また同様に 1 のときも成り立つ。

よって x, y, z は 0^l または $\star_m$ であるとしておく。今一例として、$x = \star_m,\ y = 0^l,\ z = 0^m$ のときを考える。[1]このとき

$$\star_m \cdot (0^l \cdot 0^n) = \star_m \cdot 0^{l+n} = 0^{2m-1} \cdot 0^{l+n} = 0^{2m+l+n-1}$$
$$(\star_m \cdot 0^l) \cdot 0^n = (0^{2m-1} \cdot 0^l) \cdot 0^n = 0^{2m+l-1} \cdot 0^n = 0^{2m+l+n-1}$$

よって

$$\star_m \cdot (0^l \cdot 0^n) = (\star_m \cdot 0^l) \cdot 0^n$$

が成り立つ。また他の場合も同様にして成り立つことが確かめられる。

($x \cdot y \leq z \iff x \leq y \to z$) $\to$ の定義より $a \to b = max\ \{c;\ c \cdot a \leq b\}$ であることがわかる。ここで少し集合 $\{c;\ c \cdot a \leq b\}$ について、図 5.4 の $k = 5$ を使って説明しておく。例えば $a = 0^2,\ b = 0^5$ のとき、$\{c;\ c \cdot 0^2 \leq 0^5\} = \{\bot, 0, \star_1, 0^3\}$ となる。また $a = 0^5,\ b = 0^{11}$ のときは、$\{c;\ c \cdot 0^5 \leq 0^{11}\} = \{\bot, 1, 0^2, 0^4, 0^6, 0^8, 0^{10}\}$ となっている。このように任意の a, b に対して、集合 $\{c;\ c \cdot a \leq b\}$ は全順序集合[2]となっていて、また必ず最大元が存在している。これより $0^2 \to 0^5 = 0^3,\ 0^5 \to 0^{11} = 0^{10}$ となることがわかる。

($\Rightarrow$) $x \cdot y \leq z$ と仮定する。このとき $x \in \{s;\ s \cdot y \leq z\}$ より

$$x \leq max\{s;\ s \cdot y \leq z\} = y \to z。$$

($\Leftarrow$) $x \leq y \to z$ と仮定する。このとき $x \cdot y \leq (y \to z) \cdot y$ が成り立つ[3]。$y \to z = max\ \{s;\ s \cdot y \leq z\}$ より

$$x \cdot y \leq (y \to z) \cdot y \leq z$$

が成り立つ。

以上より、代数 $\mathbf{B}_k^S$ は CRL であることがわかった。

次にこの $\mathbf{B}_k^S$ の ultraproduct $\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U$ を考える。ここで U は ω 上の ultrafilter である。そして、$\mathbf{B}_S$ を $\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U$ の constant $\{\top_{\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U}, \bot_{\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U}, 0_{\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U}, 1_{\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U}\}$ から生成される subalgebra とする。すなわち $\mathbf{B}_S$ は $\Pi_{k\in\omega}\mathbf{B}_k^S/U$ の最小の subalgebra である。

例えば $S =:$ 奇数 としたとき、$\mathbf{B}_S$ は次のような構造を持っている。

---

[1] $\star_m \cdot 0^l = 0^{2m-1} \cdot 0^l,\ \star_m \cdot \star_n = 0^{2m-1} \cdot 0^{2n-1}$ であることに注意せよ。すなわち $\star_m$ は $\cdot$ の演算において、自分の次に大きな要素、つまり 0^{2m-1} を用いた場合と同じになる。

[2] X が全順序集合とは、すべての $s, t \in X$ に対して、$s \leq t$ または $t \leq s$ のどちらかが必ず成り立つ集合のことである。

[3] $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ が成り立つことは $\cdot$ の演算表からわかる。

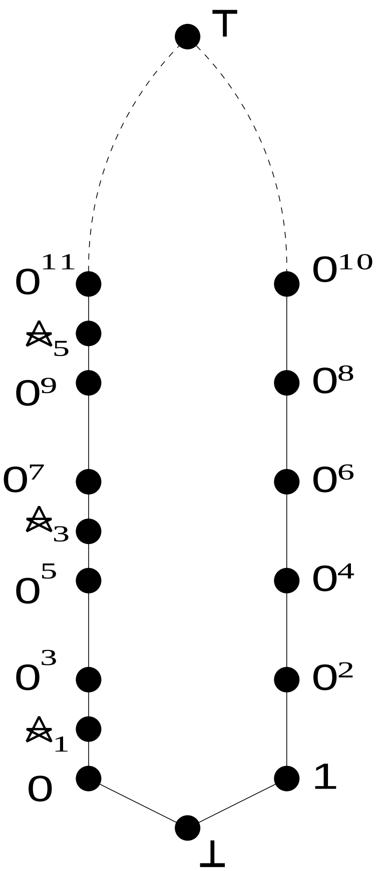

図 5.8:

直感的に $\mathbf{B}_S$ とは、k を ∞ に近づけたときの $\mathbf{B}_k^S$ の構造を持つ代数である。

Lemma 4 $\mathbf{B}_S$ は *simple* である。

(証明) もしある $x, y \in B_S$ $(x \neq y)$ に対して $\langle x, y\rangle \in \theta$ となるような $\theta \in Con\ \mathbf{B}_S$ が存在したと仮定する。このとき一般性を失うことなく、$x < y$ であるかまたは、$x \not< y$ かつ $x \not> y$ であるかのどちらかであるとすることができる。

($x < y$ のとき) このとき $y \to x = \perp$ であり、また $y \to y = \top$ または 1 となっている。

1. ($y \to y = \top$ のとき)

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ y \to x\ \theta\ y \to y \\ &\Rightarrow\ \perp \theta \top \\ &\Rightarrow\ \perp \cap 1\ \theta\ \top \cap 1 \\ &\Rightarrow\ \perp \theta\ 1 \end{aligned}$$

2. ($y \to y = 1$ のとき)

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow\ y \to x\ \theta\ y \to y \\ &\Rightarrow\ \perp \theta\ 1 \end{aligned}$$

($x \not< y$ かつ $x \not> y$ のとき) このとき一般性を失うことなく、$x \in \{0^{2i}\}$, $y \in \{0^{2i+1}, \star_l\}$ とすることができる。よって

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y &\Rightarrow x \cap 1\ \theta\ y \cap 1 \\ &\Rightarrow 1\ \theta\ \bot \end{aligned}$$

以上から、どの場合に対しても $\langle 1, \bot \rangle \in \theta$ となる。これより任意の $z_1, z_2 \in B_S$ に対して、

$$\begin{aligned} \bot\ \theta\ 1 &\Rightarrow \bot \cdot z_i\ \theta\ 1 \cdot z_i \\ &\Rightarrow \bot\ \theta\ z_i \end{aligned} \qquad (i = 1 \text{ および } 2)$$

が成り立つ。このことから $\langle z_1, z_2 \rangle \in \theta$ が導かれるので、$\theta = \nabla$ となる。

また補題 4 と命題 3.9 から $\mathbf{B}_S$ が subdirectly irreducible であることがわかる。

5.4 主定理とその証明

これまでの結果で、simple な si CRL $\mathbf{B}_S$ を構成することができた。以下ではこの $\mathbf{B}_S$ を使って、本論文の主定理とその証明を行う。

Theorem 2 $V(\mathbf{B}_S)$ は *minimal variety* である。

(証明)

第一段階 $V(\mathbf{B}_S)$ が congruence-distributive variety であることを示す。

任意の $\mathbf{A} \in V(\mathbf{B}_S)$ に対して、$\mathbf{B}_S$ は CRL より $\mathbf{A}$ も CRL である。よって

$$M(x, y, z) = (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x)$$

とすると、$\mathbf{A}$ は lattice であるので

$$\mathbf{A} \models M(x, x, y) \approx M(x, y, x) \approx M(y, x, x) \approx x$$

が成り立つ。よって命題 3.15 より $V(\mathbf{B}_S)$ は congruence-distributive variety である。

第二段階 任意の $\mathbf{A} \in V(\mathbf{B}_S)$ に対して、$\mathbf{A}$ が si でかつ自明な代数でないならば、$\mathbf{B}_S \leq \mathbf{A}$ となることを示す。

$V(\mathbf{B}_S)$ は congruence-distributive variety であるので、Jónsson's Lemma から

$$\mathbf{A} \in HSPu(\mathbf{B}_S)$$

となっている。すなわち ${\mathbf{B}_S}^I/U$ のある subalgebra $\mathbf{C}$ とある onto homomorphism $\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ が存在している。

$\mathbf{B}_S$ は constant $\{\top, \bot, 0, 1\}$ から生成される代数である。よって $\mathbf{B}_S$ は ${\mathbf{B}_S}^I/U$ の最小の subalgebra である。これより ${\mathbf{B}_S}^I/U$ の任意の subalgebra $\mathbf{C}$ に対して、

$$\mathbf{B}_S \leq \mathbf{C}$$

が成り立つ。

次に onto homomorphism $\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ に対して、$\mathbf{B}_S$ の homomorphic image $\alpha(\mathbf{B}_S)$ を考える。もし $\alpha(a) = \alpha(b)$ となるような $a, b \in B_S$ $(a \neq b)$ が存在したとする。補題 4 より $\mathbf{B}_S$ は simple なので、$Ker\ (\alpha)$ は $\mathbf{B}_S$ 上の $\nabla_{\mathbf{B}_S}$ となっている。よって $\alpha(\mathbf{B}_S)$ は自明な代数となっている。これより

$$\top_{\mathbf{A}} = \alpha(\top_{\mathbf{B}_S}) = \alpha(\bot_{\mathbf{B}_S}) = \bot_{\mathbf{A}}$$

となる。この式の意味は $\mathbf{A}$ が自明な代数であることに他ならない。今 $\mathbf{A}$ は自明な代数ではないと仮定していたので、$Ker\ (\alpha)$ は $\mathbf{B}_S$ 上の $\Delta_{\mathbf{B}_S}$ でなければならない。よって

$$\mathbf{B}_S = \alpha(\mathbf{B}_S) \leq \alpha(\mathbf{C}) = \mathbf{A}$$

が成り立つ。

第三段階 $V(\mathbf{B}_S)$ が minimal であることを示す。

$\mathcal{K}$ を代数のクラスとしたとき、

$$\mathcal{K}_{(si)} := \mathcal{K} \text{ に含まれる } si \text{ 全ての集合}$$

と定義する。今 W を $V(\mathbf{B}_S)$ の任意の subvariety でかつ、自明な variety (すなわち $\mathbf{V_0}$) ではないとする。このとき命題 3.13 より、$W = IPs(W_{(si)})$ となっている。また W は自明な variety ではないと仮定したので、ある $\mathbf{A} \in W_{(si)}$ が存在して、$\mathbf{A}$ は自明な代数ではない。$\mathbf{A} \in V(\mathbf{B}_S)$ より $\mathbf{B}_S \leq \mathbf{A}$ であるので、

$$\begin{array}{rcll} V(\mathbf{B}_S) & \subseteq & V(\mathbf{A}) & \\ & \subseteq & V(W_{(si)}) & \\ & \subseteq & V(IPs(W_{(si)})) & \\ & = & V(W) & \\ & = & W & (W \text{ は } variety \text{ より}) \end{array}$$

したがって $W = V(\mathbf{B}_S)$。これより $V(\mathbf{B}_S)$ の subvariety は $\mathbf{V}_0$ と $V(\mathbf{B}_S)$ 自身となるので、$V(\mathbf{B}_S)$ は minimal variety である。

Theorem 3 *CRL の minimal variety* は非可算個存在する。

(証明) $S_i \subseteq \omega$ $(i \in I)$ に対して、定理 2 より $V(\mathbf{B}_{S_i})$ は minimal variety である。よって任意の $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対して、$V(\mathbf{B}_{S_i}) \neq V(\mathbf{B}_{S_j})$ が成り立てば、CRL の minimal variety が非可算個存在することを示すことができる。

今ある $S_1, S_2 \subseteq \omega$ $(S_1 \neq S_2)$ に対して、$V(\mathbf{B}_{S_1}) = V(\mathbf{B}_{S_2})$ であると仮定する。ここで一般性を失うことなく $S_2 \not\subseteq S_1$ であるとしておく。今

$$V(\mathbf{B}_{S_1}) = V(\mathbf{B}_{S_2}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_{S_1}, \mathbf{B}_{S_2} \in V(\mathbf{B}_{S_1}) \text{ かつ } \mathbf{B}_{S_1}, \mathbf{B}_{S_2} \in V(\mathbf{B}_{S_2})$$

であるので、定理 2 の証明の第二段階より、$\mathbf{B}_{S_1} \leq \mathbf{B}_{S_2}$ かつ $\mathbf{B}_{S_1} \geq \mathbf{B}_{S_2}$ が成り立つ。よって $\mathbf{B}_{S_1} \simeq \mathbf{B}_{S_2}$ である。この isomorphism を $\alpha : \mathbf{B}_{S_1} \to \mathbf{B}_{S_2}$ とする。このとき $\alpha(0_{\mathbf{B}_{S_1}}) = 0_{\mathbf{B}_{S_2}}$ より、$\alpha({0^m}_{\mathbf{B}_{S_1}}) = {0^m}_{\mathbf{B}_{S_2}}$ が成り立っている。

今 $S_2 \not\subseteq S_1$ と仮定していたので、ある $\star_l \in B_{S_2}$ かつ $\star_l \notin B_{S_1}$ が存在している。これより、

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha(0_{\mathbf{B}_{S_1}} \to_{\mathbf{B}_{S_1}} {0^{2l}}_{\mathbf{B}_{S_1}}) & = & \alpha(0_{\mathbf{B}_{S_1}}) \to_{\mathbf{B}_{S_2}} \alpha({0^{2l}}_{\mathbf{B}_{S_1}}) \\ \Rightarrow & \alpha({0^{2l-1}}_{\mathbf{B}_{S_1}}) & = & 0_{\mathbf{B}_{S_2}} \to_{\mathbf{B}_{S_2}} {0^{2l}}_{\mathbf{B}_{S_2}} \\ \Rightarrow & {0^{2l-1}}_{\mathbf{B}_{S_2}} & = & {\star_l}_{\mathbf{B}_{S_2}} \end{array}$$

となり矛盾が生じる。よって任意の $S_i, S_j \subseteq \omega$ $(S_i \neq S_j)$ に対して、$V(\mathbf{B}_{S_i}) \neq V(\mathbf{B}_{S_j})$ である。

5.5 まとめ

定理 2,3 より $\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V}_0, \mathbf{CRL} \rangle$ は非可算個の minimal variety を要素として持つ束構造であることがわかった。つまり次の図のような束構造をしている。

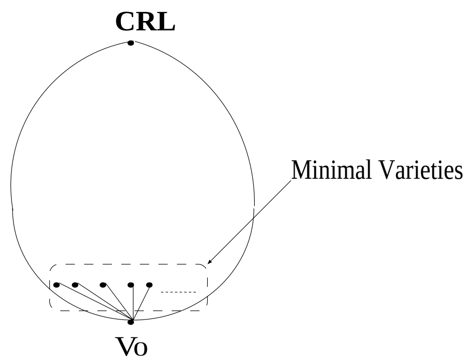

図 5.9:

$\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ は丁度、$\langle \mathcal{V}, \cap, \vee, \mathbf{V}_0, \mathbf{CRL} \rangle$ を引っくり返した構造を持っている。また Φ の次に大きな論理には、古典論理 CL があることが知られている。よって $\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FLe}, \Phi \rangle$ は次の図に示すように極大で無矛盾な論理を非可算個持つ。

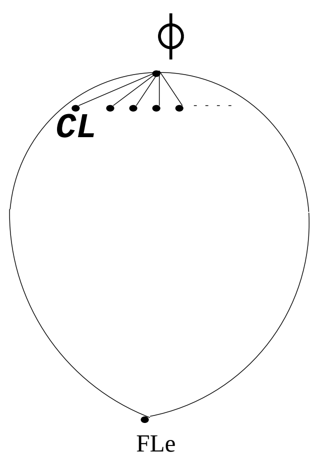

図 5.10:

謝辞

本研究を行うにあたり熱心に御指導下さいました小野寛晰教授に深く感謝致します。また、貴重なご意見を下さいました石原哉助教授、浜野正浩助手、小野研究室、石原研究室の皆様に感謝致します。特に数多くののセミナーや定理の証明のアイディアを与えてくださった Tomasz Kowalski 助手に深く感謝します。

関連図書

[1] A.R. Anderson and N.D. Belnap,Jr, Entailment: The Logic of Relevance and Necessity 1, Princeton University Press, 1975

[2] S. Burris and H.P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, 2000

[3] N. Galatos, Minimal varieties of residuated lattices, draft, 2002

[4] P. Jipsen and C. Tsinakis, A Survey of Residuated Lattice, in: ordered Algebraic Structures, ed by J,Martinez, Kluwer Academic Publishers, (2002), 19-56

[5] 加藤洋介、 代数的モデルによる部分構造論理の研究、北陸先端科学技術大学院大学修士論文、2002

[6] T. Kowalski and H. Ono, Residuated Lattices: An algebraic glimpse at logics without contraction (monograph), 2001

[7] 松田真由美、 証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究、 北陸先端科学技術大学院大学修士論文、 2002

[8] 小野寛晰、情報代数、共立出版、1994

[9] H. Ono, Logics without contraction rule and residuated lattices 1, 2001

[10] A.S. Troelstra, Lectures on Linear Logic, CSLI Lecture Notes 29, 1992