

Title	CIP法を用いた管内流れにおける弾性壁面と流体の三次元解析
Author(s)	小西, 徹
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1696
Rights	
Description	Supervisor:松澤 照男, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

CIP法を用いた管内流れにおける
弾性壁面と流体の三次元解析

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

小西 徹

2003年3月

修 士 論 文

CIP法を用いた管内流れにおける
弾性壁面と流体の三次元解析

指導教官 松澤照男 教授

審査委員主査 松澤照男 教授

審査委員 堀口進 教授

審査委員 敷田幹文 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

110045 小西 徹

提出年月: 2003 年 2 月

概要

本研究では、三次元モデルでの流れ場に対して Cubic Interpolated Propagation(CIP 法) を用いて解析することを検討した。本研究での CIP 法の重要な特徴は移流方程式を精度良く解くことである。3 次の補間を行うこの手法はオイラー手法のような固定格子を用い、各格子点で保持している値と勾配という 2 つの情報から各格子間のプロファイルとして 3 次関数を求めることを可能にし、それを利用することによって格子点間の補間をすることで移流方程式を精度良く解くことができる。ここでの値と勾配とは本研究においては速度と速度勾配について意味する。

先行研究では二次元での弾性壁面をもつ管内流れの解析を行ってきたが、これを三次元モデルへと拡張するために必要となる三次元 CIP 法について本研究では検討した。はじめに MAC 法を用いて三次元キャビティ問題の流れ場について解析を行い、そのスキームの速度計算の部分を CIP 法を用いた速度計算の方法に置き換えた。その解法の特徴は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を移流項と非移流項に分けて計算し、移流方程式には CIP 法を用いて計算を行うというものである。この解法により三次元キャビティの流れ場についての解析がなされた。また MAC 法と CIP 法それぞれのキャビティ問題での流れの解析結果の比較を行った。

目次

第1章	はじめに	1
第2章	CIP法概要	2
第3章	数値計算法	4
3.1	MAC法	4
3.2	計算手順	7
3.3	基礎方程式	8
3.4	圧力計算	8
3.5	速度計算	10
3.6	CIP法	14
3.7	境界条件	19
3.7.1	固定壁における境界条件	19
第4章	実験	21
4.1	実験モデル	21
4.2	計算結果	22
4.3	考察	22
第5章	まとめ	27
	謝辞	28

第1章 はじめに

物質同士が相互に干渉する問題や、移動境界を含む流体ではその境界面をどう捉えるかが問題である。このような移動境界問題に対しては、一般にラグランジュ手法が用いられる。ラグランジュ手法ではメッシュを固定せずに運動にしたがってメッシュも移動する。このため移動境界問題に用いられてきたがタイムステップ毎にメッシュの張り替えが必要になる。また流体と個体の大きな変形が生じるとメッシュがくずれ精度が低下するという問題がある。これに対しオイラー手法ではメッシュは空間の格子点に固定され扱いやすいという利点はあるが、移動する流体と固体の境界の座標を精度良く表現することが難しい。これは流体と固体の境界の追跡の計算をする際に移流の計算を行うが、そこで数値拡散による精度の低下が生じるためである。

矢部孝らによって提案された Cubic-Interporated Propagation(CIP 法) [1] は、オイラー手法のような固定格子を用い、非圧縮性流体、圧縮性流体、あるいは気体、液体、固体を統一的に扱うことができ、固体と流体の境界を精度良く捉えることができる。各格子点で保持している値と勾配の二つの情報から 3 次関数として格子点間を補間することで移流方程式を高い精度で解くことが可能であるということが確認されている。古田 [2] は弾性管内流れの解析を行った。これは管壁を移動する固体とみなし、NS 方程式の移流計算に対して CIP 法を適用した。これにより管壁が移動する流れの解析を行った。荒木 [3] は CIP 法を用いた管内流れの解析における並列計算機上で並列アルゴリズムの開発を行い、その計算モデルとして壁面が振動する管内流れの解析、および流入条件に振動するポアズイユ流れを与えて凹部を持つ管内流れの解析をおこなった。松澤 [4] は凹部を持つ管内流れにおいて、二次元座標系から円筒軸座標系での解析に拡張し、中心軸に対する片側の領域を計算領域とした軸対称モデルでの解析を行った。また凹部を弾性体として捉え、流れの解析結果における圧力値から変形量および変形速度を求め、流体の解析と凹部の変形に対して CIP 法を適用し、流体と弾性体の相互作用を考慮した流れ場について解析した。

しかし二次元軸対称モデルでは、中心軸を越える流れ場がある場合、または 3 次元ではないとモデルとして扱うのが難しい動きのある壁面の場合などにおいて課題がある。そこで本研究では三次元モデルによって全域的に計算を行うことにより、この課題を解消することを目的とする。これまでの二次元モデルを三次元へと拡張するため、キャビティ流れの計算を三次元モデルで CIP 法を用いて行い、他の差分法スキームと比較することによりその精度を確認する。

第2章 CIP 法概要

本研究での CIP 法の重要な特徴は移流方程式を精度良く解くことである。移流方程式を解く手法としては、1 次の風上差分のように線形に補間する方法と Lax-Wendroff 法のような 2 次の補間を行う方法がある。しかしこれらの方法では、数値拡散が生じたり格子点間の補間が行えるが、不連続な点があると、オーバーシュートするようになり、精度が確保出来ない。これに対して Cubic Interpolated Propagation(CIP 法) は、各格子点上において、格子点で保持している値と勾配の 2 つの情報を利用して、3 次関数として補間する方法である。本研究においては値として速度、勾配としては各軸方向の速度勾配を用いて補間を行うことになる。ここでは CIP 法について 1 次元の移流方程式を用いてその概要について示す。

1 次元の移流方程式に CIP 法を適用した場合の手順を示すと、移流方程式 2.1 は、波が u という速度で移動している様子を表している。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

また、式 2.1 を微分すると式 2.2 となる。

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} g \quad (2.2)$$

f の空間微分を $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ と置いた。ここで、伝搬速度が u である時には、値 f と勾配 g は共に u という速度で移流していることが、式 2.1, 2.2 より理解できる。この値 f と勾配 g の 2 つの情報を利用することによって、値が移動する前のプロファイルと、値が移動した後のプロファイルを少ない誤差で表現出来ると考えられる。

例として、 $i, i-1$ の 2 点間において、格子点 i では f_i と勾配 g_i の 2 つの情報が保持されており、同様に格子点 $i-1$ では f_{i-1}, g_{i-1} が保持されている。従って、この 2 点間では 4 つの情報が保持されていることになる。ここで i と $i-1$ を結ぶ 3 次関数を以下のように定義する。

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.3)$$

$$g(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (2.4)$$

未知数が a, b, c, d の 4 つとなり、この未知数を $f_i, g_i, f_{i-1}, g_{i-1}$ から計算できるはずである。

ここで、 $f(0) = d, g(0) = c$ であるので、式 2.3, 2.4 に代入して、

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + g(0)x + f(0) \quad (2.5)$$

$$g(x) = 3ax^2 + 2bx + g(0) \quad (2.6)$$

すると、次の時間 $n + 1$ でのプロファイルは、 $u \geq 0$ の時は、 $-u\Delta t$ だけ移動すると考えられるので、

$$f_i^{n+1} = a\xi^3 + b\xi^2 + g_i^n \xi + f_i^n \quad (2.7)$$

$$g_i^{n+1} = 3a\xi^2 + 2b\xi + g_i^n \quad (2.8)$$

ただし、 $\xi = -u\Delta t$ とする。また格子間隔を Δx とすると、 a, b は次のように求められる。

$$a = \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{(-\Delta x)^2} + \frac{2(f_i^n - f_{i-1}^n)}{(-\Delta x)^3} \quad (2.9)$$

$$b = \frac{3(f_{i-1}^n - f_i^n)}{(-\Delta x)^2} - \frac{2(g_i^n - g_{i-1}^n)}{-\Delta x} \quad (2.10)$$

以上のように各格子点上で、格子点の持つ値 f と勾配 g の 2 つの情報を保持していれば、格子点間を 3 次関数で補間することが出来、これを繰り返す事により移流方程式の解を求めることができる。

第3章 数値計算法

3.1 MAC法

本研究でははじめにMAC法を用いて3次元キャビティ問題の流れ場について解析を行い, そのスキームの速度計算の部分をCIP法を用いた速度計算の方法に置き換えた. その解法の特徴は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を移流項と非移流項に分けて計算し, 移流方程式にはCIP法を用いて計算を行うというものである. ここではそのMAC法を用いたキャビティ問題の流れ場の解析の概要について述べる.

MAC法では

$$\Delta p = -\nabla \cdot ((u \cdot \nabla)u) - \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (3.2)$$

の2式を基礎方程式にとる. まず圧力を求め, ナビエ・ストークス方程式に圧力を代入することにより, u を時間発展させることができる. この方法をMAC(Maker And Cell)法と呼ぶ.

格子に関してはスタッガード格子を用いる. その利点として1つの格子セルで連続の式が自然に表現できること, また各方向の圧力勾配がその方向の速度を決めるというナビエ・ストークス方程式の性質が自然に表現されるという点がある. この格子を利用すると3次元ナビエ・ストークス方程式は次のように近似される.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}}{\Delta t} = & -\frac{v_{i-1,j,k} + v_{i,j,k} + v_{i-1,j+1,k} + v_{i,j+1,k}}{4} \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\ & -u_{i,j,k} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\ & -\frac{w_{i-1,j,k} + w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k+1} + w_{i,j,k+1}}{4} \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ & -\frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{\Delta x} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} \right\} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}}{\Delta t} = & - \frac{u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k}}{4} \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\ & - v_{i,j,k} \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\ & - \frac{w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k+1} + w_{i,j,k+1}}{4} \frac{v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ & - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}}{\Delta y} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}}{\Delta t} = & - \frac{u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k-1} + u_{i+1,j,k}}{4} \frac{w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\ & - \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i,j,k} + w_{i,j+1,k-1} + w_{i,j,k+1}}{4} \frac{w_{i,j+1,k} - w_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\ & - w_{i,j,k} \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\ & - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1}}{\Delta z} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. + \frac{w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2} \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

また、ポアソン方程式の右辺を計算する際、
圧力の定義点における $\frac{\partial u}{\partial y}$ 等は

$$u_y = \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{u_{i,j+1,k} + u_{i+1,j+1,k}}{2} - \frac{u_{i,j-1,k} + u_{i+1,j-1,k}}{2} \right) \quad (3.6)$$

で近似することにする。

このとき、ポアソン方程式の右辺を Q とおくと次のように近似される。

$$\begin{aligned}
Q_{i,j,k} = & -\left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x}\right)^2 - \left(\frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{\Delta y}\right)^2 - \left(\frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta z}\right)^2 \\
& - \frac{1}{8\Delta x\Delta y} (v_{i+1,j,k} + v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j,k} - v_{i-1,j+1,k}) \\
& \quad \times (u_{i,j+1,k} + u_{i+1,j+1,k} - u_{i,j-1,k} - v_{i+1,j-1,k}) \\
& - \frac{1}{8\Delta y\Delta z} (w_{i,j+1,k} + w_{i,j+1,k+1} - w_{i,j-1,k} - w_{i,j-1,k+1}) \\
& \quad \times (v_{i,j,k+1} + v_{i,j+1,k+1} - v_{i,j,k-1} - v_{i,j+1,k-1}) \\
& - \frac{1}{8\Delta z\Delta x} (u_{i,j,k+1} + u_{i+1,j,k+1} - u_{i,j,k-1} - u_{i+1,j,k-1}) \\
& \quad \times (w_{i+1,j,k} + w_{i+1,j,k+1} - w_{i-1,j,k} - w_{i-1,j,k+1}) \\
& - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta z} \right) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

よって圧力計算を行う場合はポアソン方程式の近似式を $p_{i,j,k}$ について解いたうえで各格子点での反復計算を行う。

境界条件としては壁面上で粘着条件を設定する。例えば、yz 平面に平行な面においては u が壁面上にくる。このとき粘着条件より

$$u_{wall} = 0 \quad (3.9)$$

となる。また、v,w,p に関してはそれぞれの定義点は壁面上にはなく、壁面内に半メッシュずれた点が仮想点として定義される。壁面から最も近い立法体の内部にある v, w, p の定義点を v_Q, w_Q, p_Q として壁面内に半メッシュずれた仮想点 v_P, w_P は

$$v_p = -v_Q \quad , \quad w_p = -w_Q \quad (3.10)$$

となる。

ここまで MAC 法での解法について述べてきたが、本研究ではこのスキームの速度計算の部分について CIP を用いた解法への置き換えを行った。その解法について次項から述べる。

3.2 計算手順

計算手順を図 3.1 に示す。

1. 初期条件の設定
2. 境界条件の設定
3. SOR 法による圧力値の計算
4. 反復計算の残差が収束判定値以下になるまで計算を繰り返す
5. 速度の計算
6. 値の交換
7. 境界位置の計算
8. 計算領域の設定
9. step2 に戻る

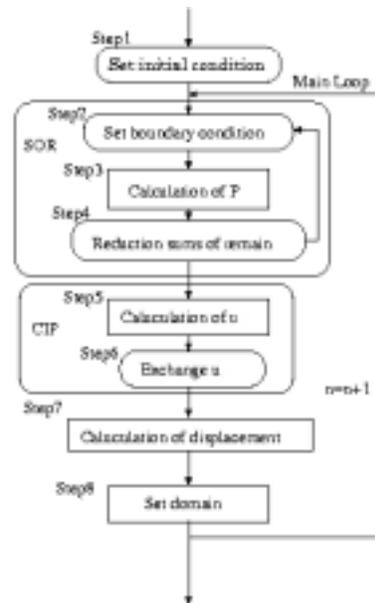


図 3.1: 計算手順

本研究における計算法は MAC 法をもとにした分離解法であるので、圧力を陰的に速度を陽的に計算を行う。

始めに圧力に関するポアソン方程式は SOR 法を用いて計算する。次に得られた圧力の値と前のタイムステップでの速度を用いてナビエ・ストークス方程式の非移流項の計算を行う。この時に得られた中間的な速度と中間的な速度勾配を利用し、次に移流項に CIP 法を適用して速度の計算を行う。この速度計算の過程が本研究で用いる CIP 法の特徴である。

3.3 基礎方程式

3次元モデルとしてデカルト座標系 (x,y,z) を用いる。基礎方程式となる非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と連続の式を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

3.4 圧力計算

ナビエ・ストークス方程式を連続の式を考慮して表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

左辺の第2項, 第3項, 第4項について連続の式を考慮すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.16)$$

整理すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで前進差分で時間微分を近似すると,

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} \quad (3.18)$$

となる. この時

$$D^{n+1} = 0 \quad (3.19)$$

とおくことで常に次の時間ステップで連続の式が満たされるように圧力が決まることになる.

また, 時間が経過して数値誤差が累積しても, D を常に小さな値にとどめておくことができる.

$$\begin{aligned} \Delta p^n = & -\left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w^n}{\partial z}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial v^n}{\partial x} \frac{\partial u^n}{\partial y}\right) \\ & - 2\left(\frac{\partial w^n}{\partial x} \frac{\partial u^n}{\partial z}\right) - 2\left(\frac{\partial w^n}{\partial y} \frac{\partial v^n}{\partial z}\right) + \frac{D^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.20)$$

これは圧力に関するポアソン方程式である. D の項に関しては時間項以外は十分小さいと考えられるので省略できる.

3.5 速度計算

本研究の速度計算では、ナビエ・ストークス方程式を移流項と非移流項に分けて行う。まず非移流項の計算から中間的な速度および速度勾配を求める。つぎに移流方程式に CIP 法を適用して 3 次関数を定義し、非移流項より求めた中間的な速度と速度勾配から、次のタイムステップでの速度を計算する。

はじめに非移流項の計算について述べる。3 次元ナビエ・ストークス方程式の非移流項を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.23)$$

非移流項の式 (3.21), (3.22), (3.23) の空間微分を中心差分, 時間微分を前進差分で離散化すると,

x 軸方向では

$$\begin{aligned} \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = & -\frac{P_i^n - P_{n-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{u_{i-1} - 2u_i^2 + u_{i+1}}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{u_{i-1} - 2u_i^2 + u_{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{u_{i-1} - 2u_i^2 + u_{i+1}}{\Delta z^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

y 軸方向では

$$\begin{aligned} \frac{v^* - v^n}{\Delta t} = & -\frac{P_i^n - P_{n-1}^n}{\Delta y} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{v_{i-1} - 2v_i^2 + v_{i+1}}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{v_{i-1} - 2v_i^2 + v_{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i-1} - 2v_i^2 + v_{i+1}}{\Delta z^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

z 軸方向では

$$\begin{aligned} \frac{w^* - w^n}{\Delta t} = & -\frac{P_i^n - P_{n-1}^n}{\Delta z} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{w_{i-1} - 2w_i^2 + w_{i+1}}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{w_{i-1} - 2w_i^2 + w_{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{w_{i-1} - 2w_i^2 + w_{i+1}}{\Delta z^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

これらの式 (3.24), (3.25), (3.26) から中間的な速度 u^*, v^*, w^* を求めることができる。次に中間的な速度勾配はナビエ・ストークス方程式の空間微分を行い, その非移流成分より求める。

ナビエ・ストークス方程式を x 軸方向で空間微分を行うと,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) \quad (3.27)$$

展開すると,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) \quad (3.28)$$

ここで,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{u^* - u^n}{\Delta t} \quad (3.29)$$

であることから, 移流成分を除いて整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.30)$$

中間的な速度勾配 $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{\partial u^n}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t} = & \frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^* - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^* - u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2\Delta x \Delta t} \\ & - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2\Delta x} \\ & - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n}{2\Delta y} \\ & - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (3.31)$$

から求めることができる.

次に中間的な速度 $\frac{\partial u^*}{\partial y}$ は同様にしてナビエ・ストークス方程式について y 軸方向に空間微分を行うことで求めることができる.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) \quad (3.32)$$

展開すると,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) \quad (3.33)$$

さらに移流成分を除いて整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial u^*}{\partial y}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \frac{\partial u^n}{\partial y}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} &= \frac{u^*_{i,j+\frac{3}{2},k} - u^*_{i,j-\frac{1}{2},k} - u^n_{i,j+\frac{3}{2},k} - u^n_{i,j-\frac{1}{2},k}}{2\Delta y \Delta t} \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \frac{u^n_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - u^n_{i-1,j+\frac{1}{2},k}}{2\Delta x} \\ &\quad - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \frac{u^n_{i,j+\frac{3}{2},k} - u^n_{i,j-\frac{1}{2},k}}{2\Delta y} \\ &\quad - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \frac{u^n_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - u^n_{i,j+\frac{1}{2},k-1}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (3.35)$$

よって $\frac{\partial u^*}{\partial y}$ の式が得られた.

次に中間的な速度 $\frac{\partial u^*}{\partial z}$ は同様にしてナビエ・ストークス方程式について z 軸方向に空間微分を行うことで求めることができる.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) \quad (3.36)$$

展開すると,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) \quad (3.37)$$

移流成分を除いて整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial u^*}{\partial z} \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{\partial u^n}{\partial z} \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{u^*_{i,j,k+\frac{3}{2}} - u^*_{i,j,k-\frac{1}{2}} - u^n_{i,j,k+\frac{3}{2}} - u^n_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z \Delta t} \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{u^n_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - u^n_{i-1,j,k+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ &\quad - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{u^n_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - u^n_{i,j-1,k+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \\ &\quad - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{u^n_{i,j,k+\frac{3}{2}} - u^n_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (3.39)$$

よって $\frac{\partial u^*}{\partial z}$ の式が得られた. 同様の求め方で中間速度 u^*, v^*, w^* , さらに中間速度勾配 $\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial y}, \frac{\partial u^*}{\partial z}, \frac{\partial v^*}{\partial x}, \frac{\partial v^*}{\partial y}, \frac{\partial v^*}{\partial z}, \frac{\partial w^*}{\partial x}, \frac{\partial w^*}{\partial y}, \frac{\partial w^*}{\partial z}$ について全て求めることによって, 移流行に CIP 法を適用する際の 3 次関数の未知数を決定する.

3.6 CIP 法

CIP 法の特徴としては 3 次関数を用いて、移流方程式を精度よく解くことができることである。従来の方法としては 1 次の風上差分のように単に線形の補間を用いる方法があるが、数値的拡散が生じるといった問題がある。また 2 次の補間では格子間の補間はできるが不連続な点では精度を保つことができない。3 次の補間を行う CIP 法は各格子点において値と各軸方向の勾配という 2 つの情報を与えることにより、格子点間のプロファイルとして 3 次関数を求めることを可能にし、それを利用することによって格子点間の補間を行う方法である。この 3 次補間は精度よくまた安定していることが確認されている。

本研究では MAC 法のスキームの速度計算の方法を変更し非移流項と移流項に分けて計算し、その時に移流項計算に CIP 法を適用する。ここでは 3 次元の移流方程式を CIP 法を用いて計算する際に用いる 3 次関数とその係数について示す。

3 次元移流方程式は次のようにあらわされる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (3.40)$$

ここで各軸方向に空間微分すると、

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + u \frac{\partial g_x}{\partial x} + v \frac{\partial g_x}{\partial y} + w \frac{\partial g_x}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} g_x - \frac{\partial v}{\partial x} g_y - \frac{\partial w}{\partial x} g_z \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial t} + u \frac{\partial g_y}{\partial x} + v \frac{\partial g_y}{\partial y} + w \frac{\partial g_y}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial y} g_x - \frac{\partial v}{\partial y} g_y - \frac{\partial w}{\partial y} g_z \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial t} + u \frac{\partial g_z}{\partial x} + v \frac{\partial g_z}{\partial y} + w \frac{\partial g_z}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z} g_x - \frac{\partial v}{\partial z} g_y - \frac{\partial w}{\partial z} g_z \quad (3.43)$$

ここで、

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3.44)$$

とすると伝搬速度が u, v, w であるとき、値 f とその勾配である g_x, g_y, g_z はともに u, v, w という速度で移流している。これらの値を用いることで、値が移動する前後のプロファイルを少ない誤差で Δt 秒後の値を表現することができる。

ここで $(i, j, k), (i + 1, j, k), (i, j + 1, k), (i + 1, j + 1, k), (i, j, k + 1), (i + 1, j, k + 1), (i, j + 1, k + 1), (i + 1, j + 1, k + 1)$ を結ぶ 3 次関数を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) = & C_{300}x^3 + C_{030}y^3 + C_{003}z^3 + C_{210}x^2y \\
& + C_{021}y^2z + C_{102}z^2x + C_{120}y^2x + C_{012}z^2y \\
& + C_{201}x^2z + C_{111}xyz + C_{200}x^2 + C_{020}y^2 \\
& + C_{002}z^2 + C_{110}xy + C_{011}yz + C_{101}xz \\
& + C_{100}x + C_{010}y + C_{001}z + C_{000}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

各軸方向に微分すると,

$$\begin{aligned}
GX(x, y, z) = & 3C_{300}x^2 + 2C_{210}xy + C_{102}z^2 + C_{120}y^2 + 2C_{201}xz \\
& + C_{111}yz + 2C_{200}x + C_{110}y + C_{101}z + C_{100}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
GY(x, y, z) = & 3C_{030}y^2 + C_{210}x^2 + 2C_{021}yz + 2C_{120}xy + C_{012}z^2 \\
& + C_{111}xz + 2C_{020}y + C_{110}x + C_{011}z + C_{010}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
GZ(x, y, z) = & 3C_{003}z^2 + C_{021}y^2 + 2C_{102}zx + 2C_{012}yz + C_{201}x^2 \\
& + C_{111}xy + 2C_{002}z + C_{011}y + C_{101}x + C_{001}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

この 20 個の未知数は各格子点で保持されている値と勾配, ここでは速度と速度勾配から決定することができる.

$$C_{300} = \frac{GX_{i+1,j,k} + GX_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} - 2\frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta x)^3} \tag{3.49}$$

$$C_{030} = \frac{GY_{i,j+1,k} + GY_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} - 2\frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta y)^3} \tag{3.50}$$

$$C_{003} = \frac{GZ_{i,j,k+1} + GZ_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} - 2\frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta z)^3} \tag{3.51}$$

$$C_{210} = \frac{f_{i,j+1,k} + f_{i+1,j,k} - f_{i+1,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta x)^2 \Delta y} + \frac{GX_{i+1,j+1,k} - GX_{i+1,j,k}}{\Delta x \Delta y} \quad (3.52)$$

$$C_{021} = \frac{f_{i,j,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta y)^2 \Delta z} + \frac{GY_{i,j+1,k+1} - GY_{i,j+1,k}}{\Delta y \Delta z} \quad (3.53)$$

$$C_{102} = \frac{f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta z)^2 \Delta x} + \frac{GZ_{i,j+1,k+1} - GZ_{i,j,k+1}}{\Delta z \Delta x} \quad (3.54)$$

$$C_{120} = \frac{f_{i,j+1,k} + f_{i+1,j,k} - f_{i+1,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta y)^2 \Delta x} + \frac{GY_{i+1,j+1,k} - GY_{i,j+1,k}}{\Delta x \Delta y} \quad (3.55)$$

$$C_{012} = \frac{f_{i,j,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta z)^2 \Delta y} + \frac{GZ_{i,j+1,k+1} - GZ_{i,j,k+1}}{\Delta y \Delta z} \quad (3.56)$$

$$C_{201} = \frac{f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta x)^2 \Delta z} + \frac{GX_{i,j+1,k+1} - GX_{i+1,j,k}}{\Delta z \Delta x} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} C_{111} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \{ & (f_{i+1,j+1,k+1} - f_{i,j,k}) - (f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}) - (f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}) \\ & - (f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}) - (f_{i,j+1,k} + f_{i+1,j,k} - f_{i+1,j+1,k} - f_{i,j,k}) \\ & - (f_{i,j,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k}) \\ & - (f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k}) \} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$C_{200} = 3 \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} - \frac{GX_{i+1,j,k} - 2GX_{i,j,k}}{\Delta x} \quad (3.59)$$

$$C_{020} = 3 \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} - \frac{GY_{i,j+1,k} + 2GY_{i,j,k}}{\Delta y} \quad (3.60)$$

$$C_{002} = 3 \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} - \frac{GZ_{i,j,k+1} + 2GZ_{i,j,k}}{\Delta z} \quad (3.61)$$

$$C_{110} = -\frac{f_{i,j+1,k} + f_{i+1,j,k} - f_{i+1,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\Delta x \Delta y)} - \Delta x C_{210} - \Delta y C_{120} \quad (3.62)$$

$$C_{011} = -\frac{f_{i,j,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta y \Delta z)} - \Delta y C_{021} - \Delta z C_{012} \quad (3.63)$$

$$C_{101} = -\frac{f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k}}{(\Delta z \Delta x)} - \Delta z C_{102} - \Delta x C_{201} \quad (3.64)$$

$$C_{100} = GX_{i,j,k} \quad , \quad C_{010} = GY_{i,j,k} \quad (3.65)$$

$$C_{001} = GZ_{i,j,k} \quad , \quad C_{000} = f_{i,j,k} \quad (3.66)$$

ここで次のステップ $n+1$ でのプロファイルは x 軸方向に $-u\Delta t$, y 軸方向に $-v\Delta t$, z 軸方向に $-w\Delta t$ だけ移動すると考えられるので,

$$\xi = -u\Delta t \quad , \quad \eta = -v\Delta t \quad , \quad \zeta = -w\Delta t \quad (3.67)$$

とすると,

$$f_{i,j,k}^{n+1} = C_{300}\xi^3 + C_{030}\eta^3 + C_{003}\zeta^3 + C_{210}\xi^2\eta \quad (3.68)$$

$$+ C_{021}\eta^2\zeta + C_{102}\zeta^2\xi + C_{120}\eta^2\xi + C_{012}\zeta^2\eta \quad (3.69)$$

$$+ C_{201}\xi^2\zeta + C_{111}\xi\eta\zeta + C_{200}\xi^2 + C_{020}\eta^2 \quad (3.70)$$

$$+ C_{002}\zeta^2 + C_{110}\xi\eta + C_{011}\eta\zeta + C_{101}\xi\zeta \quad (3.71)$$

$$+ C_{100}\xi + C_{010}\eta + C_{001}\zeta + C_{000} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
GX_{i,j,k}^{n+1} &= 3C_{300}\xi^2 + 2C_{210}\xi\eta + C_{102}\zeta^2 + C_{120}\eta^2 + 2C_{201}\xi\zeta \\
&\quad + C_{111}\eta\zeta + 2C_{200}\xi + C_{110}\eta + C_{101}\zeta + C_{100}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
GY_{i,j,k}^{n+1} &= 3C_{030}\eta^2 + C_{210}\xi^2 + 2C_{021}\eta\zeta + 2C_{120}\xi\eta + C_{012}\zeta^2 \\
&\quad + C_{111}\xi\zeta + 2C_{020}\eta + C_{110}\xi + C_{011}\zeta + C_{010}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
GZ_{i,j,k}^{n+1} &= 3C_{003}\zeta^2 + C_{021}\eta^2 + 2C_{102}\zeta\xi + 2C_{012}\eta\zeta + C_{201}\xi^2 \\
&\quad + C_{111}\xi\eta + 2C_{002}\zeta + C_{011}\eta + C_{101}\xi + C_{001}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

このようにして隣接する各格子点間を補間する3次関数を計算することができる。

非移流項で求めた中間的な速度と、中間的な速度勾配によって得られた3次関数により次のタイムステップでの値 u^{n+1} , $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}$, $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial z}$ が計算される。

v^{n+1} , $\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}$, $\frac{\partial v^{n+1}}{\partial z}$ および w^{n+1} , $\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{n+1}}{\partial y}$, $\frac{\partial w^{n+1}}{\partial z}$ についても同様に計算される。

3.7 境界条件

3.7.1 固定壁における境界条件

固定壁での境界条件についてはMAC法と同様に図3.2のようなスタッガード格子を用いて境界条件を設定する。壁面の境界条件には non-slip 条件を用いる。この条件は流体と壁面との間に摩擦があり、壁面における流速の垂直方向成分と水平成分がともに0になる境界条件である。この条件を満たすように仮想セルでの速度を次のように設定する。また圧力については壁面で勾配が0になるように仮想セルの圧力設定を行う。

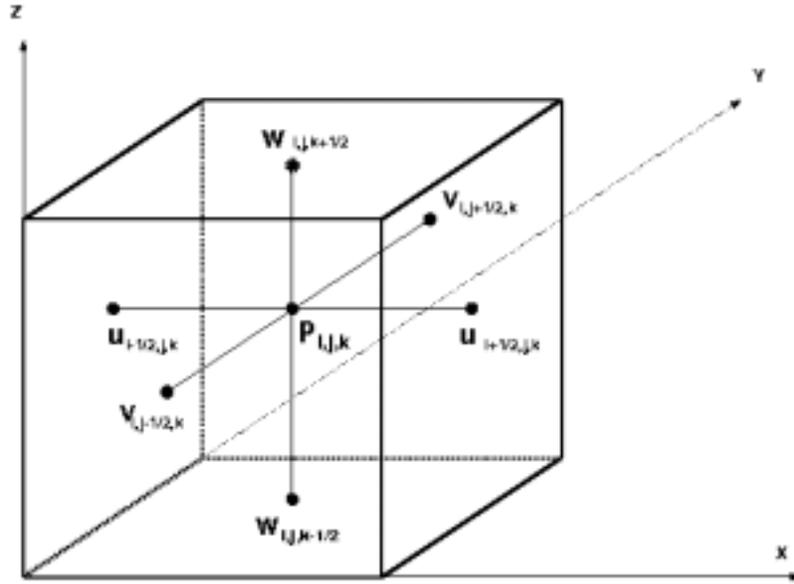


図 3.2: スタッガード格子

まず yz 平面に平行な面では,

$$u_{i+\frac{3}{2},j,k} = u_{i-\frac{1}{2},j,k} \quad (3.76)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k} = 0 \quad (3.77)$$

$$v_{i+1,j+\frac{1}{2},k} = -v_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (3.78)$$

$$w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} = -w_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (3.79)$$

$$P_{i+1,j,k} = P_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (3.80)$$

つぎに xz 平面に平行な面では,

$$v_{i,j+\frac{3}{2},k} = u_{i,j-\frac{1}{2},k} \quad (3.81)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k} = 0 \quad (3.82)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1,k} = -u_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (3.83)$$

$$w_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} = -w_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

$$P_{i,j+1,k} = P_{i,j,k} \quad (3.85)$$

同様にして xy 平面に平行な面では,

$$w_{i,j,k+\frac{3}{2}} = u_{i,j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.86)$$

$$w_{i,j,k+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.87)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k+1} = -u_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (3.88)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k+1} = -v_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (3.89)$$

$$P_{i,j,k+1} = P_{i,j,k} \quad (3.90)$$

また CIP 法での計算を行う際には, 中間的な速度, u_*, v_*, w_* と, その中間的な速度勾配についても境界条件を設定する. 中間速度についての境界条件は, 先の速度の境界条件と同様に設定する. 中間速度勾配については 0 とする. yz 平面では, 次の様になる. 他の壁面に対しても同様に設定する.

$$u_{i+\frac{3}{2},j,k}^* = u_{i-\frac{1}{2},j,k}^* \quad (3.91)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* = 0 \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{i+\frac{3}{2},j,k}^* = \frac{\partial}{\partial y} u_{i+\frac{3}{2},j,k}^* = \frac{\partial}{\partial z} u_{i+\frac{3}{2},j,k}^* = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^* = \frac{\partial}{\partial y} v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^* = \frac{\partial}{\partial z} v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^* = 0 \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^* = \frac{\partial}{\partial y} w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^* = \frac{\partial}{\partial z} w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^* = 0 \quad (3.95)$$

第4章 実験

4.1 実験モデル

本研究では図 4.1 のような 3 次元キャビティをモデルとして計算を行った. 図の矢印のように立方体の上面 (xy 平面) に流体の流れがあるとき, 立方体の中の流体はそれに引きずられるようにして動きだし, 立方体の内部に渦をつくる.

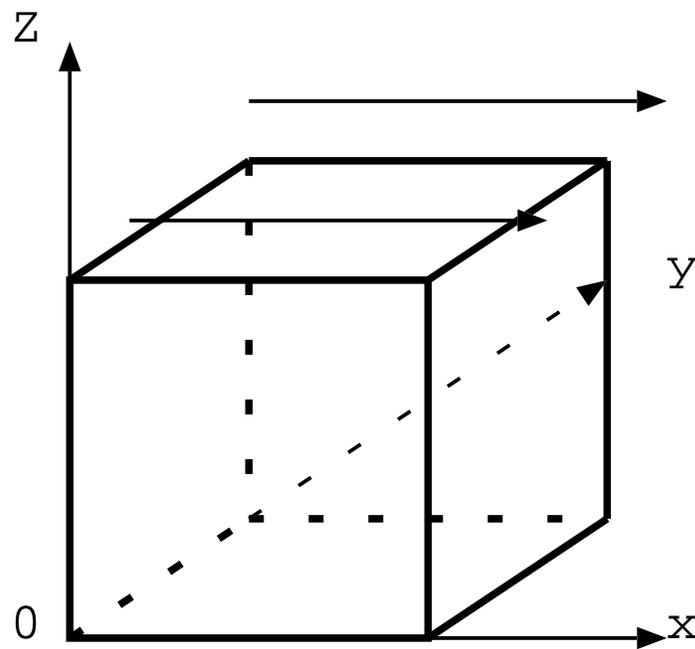


図 4.1: キャビティモデル

4.2 計算結果

本研究では x 方向, y 方向, z 方向にそれぞれ 20 分割し, 格子間隔は $dx = dy = dz = 0.05$ として, 時間刻みを $dt = 0.001$, 圧力計算 (SOR 法) については反復計算の残差の総和が 1.0×10^{-4} まで小さくなるか, または反復ステップが 30000 回に達するまで計算する設定で行った. レイノルズ数については CIP 法では $Re = 20, 40, 60, 80, 100$ の 5 回, 他のパラメータを同一の条件にして計算を行った. その中で $Re = 20, Re = 100$ での xz 面, xy 面の中央付近での結果をそれぞれ図 4.2, 図 4.3, 図 4.4, 図 4.5 に示す. また MAC 法を用いた計算結果 ($Re = 20, 100$) についても図 4.6, 図 4.7, 図 4.8, 図 4.9 に示す.

4.3 考察

CIP 法と MAC 法の結果を比べた結果, 定性的に一致していると思われる. CIP 法では Re の違いによる流れ場の変化はあまり見られなかったが, MAC 法においては $Re = 20$ の場合よりも $Re = 100$ の場合のほうが渦の位置が右にシフトしているのが見てとれる. また CIP 法よりも MAC 法のほうが渦の位置が少し下に位置している.

キャビティを上から見た流れが xy 面になる. 立方体中央であるため, 上面の流れとは向きが逆になっている. 流れの方向は真っ直ぐではなく, 流れが y 軸に向かうにつれて上面と底面に近い流れは特に左右に割れていく様が見て取れる. その傾向は CIP 法, MAC 法ともに $Re = 20$ の場合よりも $Re = 100$ の場合のほうがよく出ている. CIP 法の結果では境界付近での流れが見えていない場所があるので検討が必要である.

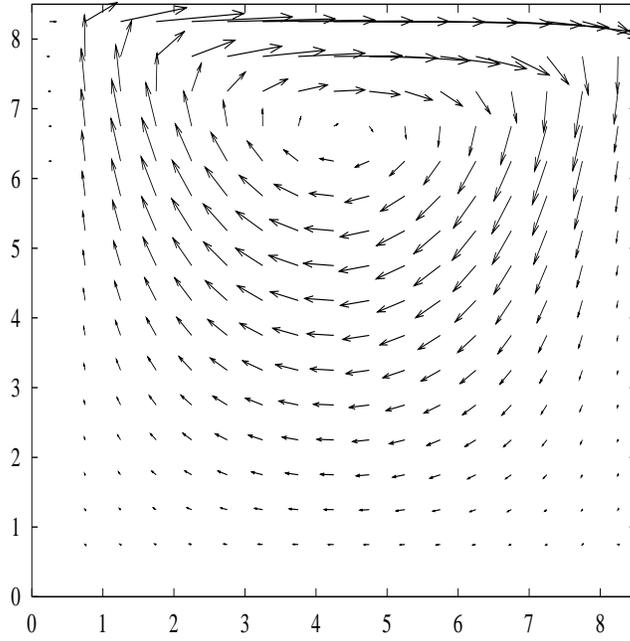


图 4.2: CIP 法, $Re=20$, xz 平面 (中央)

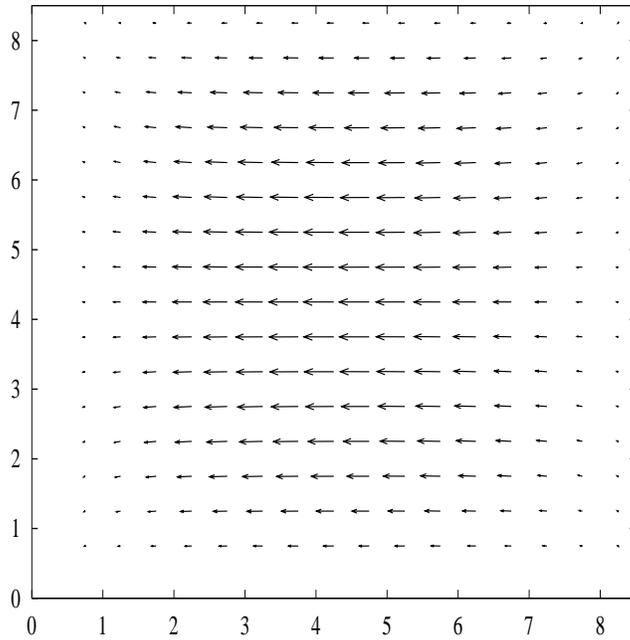


图 4.3: CIP 法, $Re=20$, xy 平面 (中央)

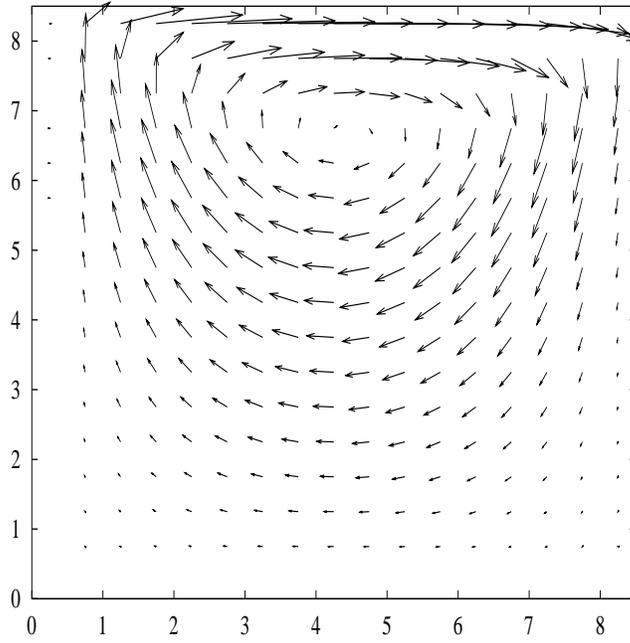


图 4.4: CIP 法, $Re=100$, xz 平面 (中央)

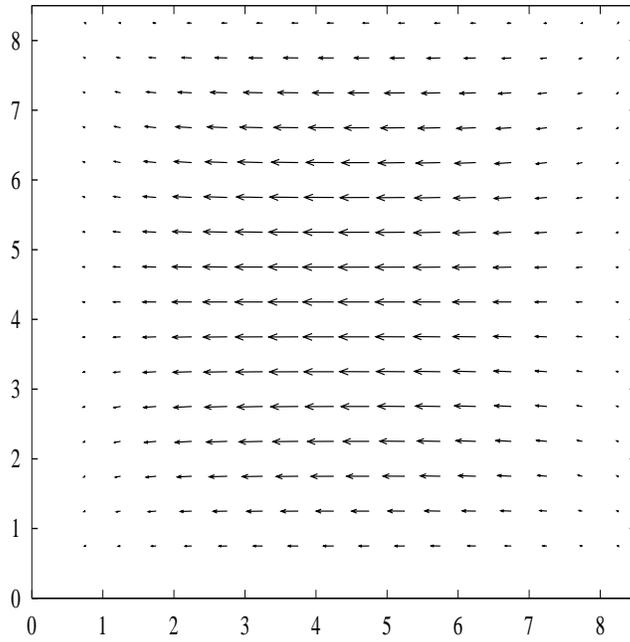


图 4.5: CIP 法, $Re=100$, xy 平面 (中央)

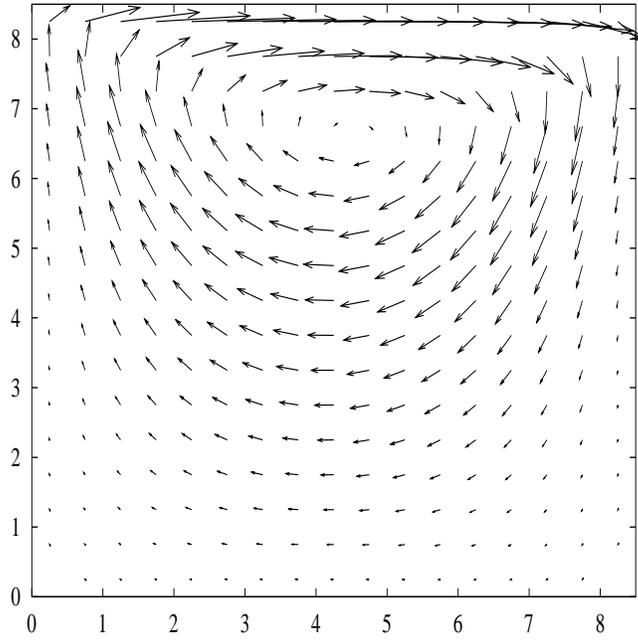


图 4.6: MAC 法, $Re=20$, xz 平面 (中央)

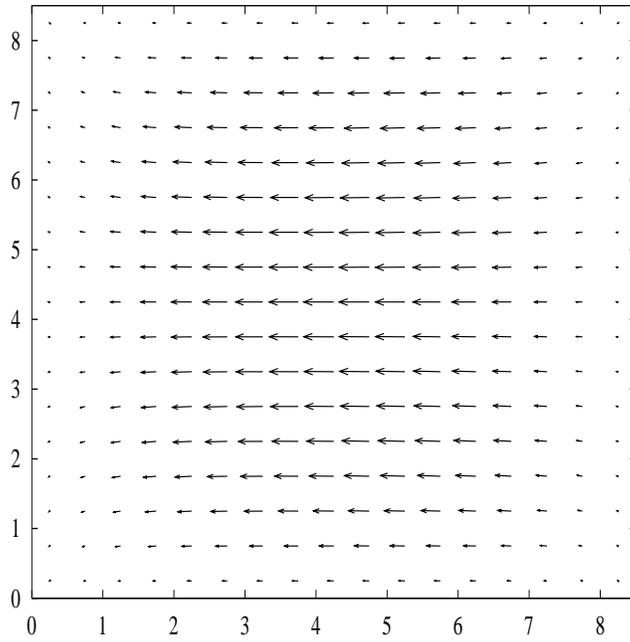


图 4.7: MAC 法, $Re=20$, xy 平面 (中央)

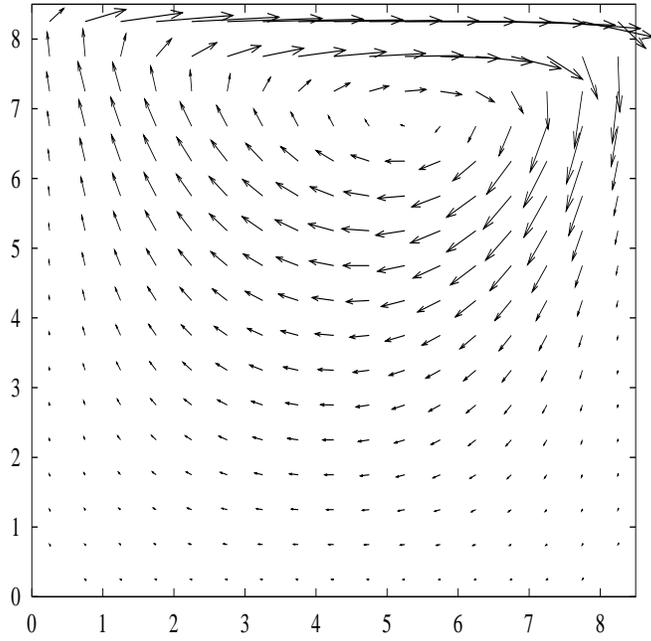


图 4.8: MAC 法, $Re=100$, xz 平面 (中央)

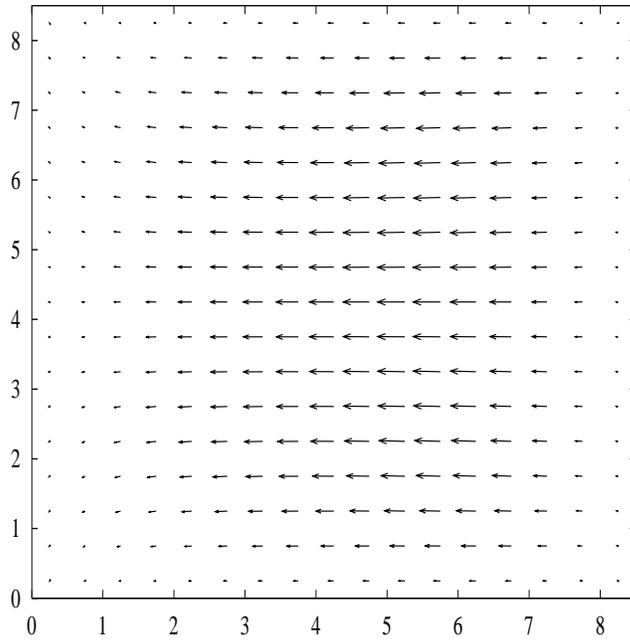


图 4.9: MAC 法, $Re=100$, xy 平面 (中央)

第5章 まとめ

本研究では、3次元キャビティ問題のMAC法での解法における速度計算の部分にCIP法を適用した。非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を移流項と非移流項に分離し、移流方程式にCIP法を適用した。CIP法でのレイノルズ数 $Re = 100$ のデータは3次元キャビティの代表的な文献であるKU氏 [5] の結果と照らし合わせてみると、本研究ではグリッド数が少ないということを考慮すれば比較的精度があることが速度ベクトルを比べてみて確認された。これはCIP法が格子点に各軸方向の勾配という情報を保持していることによるものであると推測される。一方、CIP法での格子数 20, 40 での結果の比較から、ある程度の格子数は必要であることが分かる。

CIP法の結果では境界付近でのデータがあまりよくないのでそれに関しては検討が必要であると思われる。

また精度を上げる方法としてグリッドをもっと細かく切る、時間ステップをもっと小さくするなどが挙げられるので、クーランの条件を満たす範囲内で検討したい。今後の予定としては管内流れにCIP法を適用し、ポアズイユ流の流れ場の解析、また狭窄部をもつ管内モデルが計算対象となる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、貴重なご意見とご指導を頂きました松澤照男教授、博士課程の渡邊正宏さん、市川成義さんに深く感謝致します。また、お世話になった研究室の皆様にも深く感謝致します。

参考文献

- [1] T.Yabe, “Unified Solver CIP for Solid,Liquid and Gas” published in Computational Fluid Dynamics Review 1997 ED.by M.M.Hafez and K.Okishima(Wiley,1997)
- [2] 古田展康,“CIP 法による移動する物体まわりの流れの解析” 第 11 回数値流体力学シンポジウム pp337-338
- [3] 荒木 宏之,“CIP 法による非定常流れの並列計算” 北陸先端科学技術大学院大学修士論文
- [4] 松澤 崇,“流体と弾性壁面の相互作用の解析” 北陸先端科学技術大学院大学修士論文
- [5] Hwar C.Ku,“A Pseudospectral Method for Solution of the Three-Dimensional Incompressible Navie-Stokes Equations”
- [6] 数値流体力学シリーズ 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会
- [7] 数値流体力学シリーズ 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会
- [8] 棚橋隆彦著 , はじめての CFD , コロナ社
- [9] コンピュータアナリシスシリーズ 流れの数値シミュレーション, 日本機械学会編 , コロナ社
- [10] 八田夏夫著 , 流れの計算 , 森北出版株式会社 コロナ社