Title	A topological approach to modal logics
Author(s)	大下, 健史
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1698
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

A topological approach to modal logics

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

大下 健史

2003 年 3 月

修 士 論 文

A topological approach to modal logics

指導教官　小野 寛晰

審査委員主査　小野寛晰 教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　大堀淳 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

110021 大下 健史

提出年月: 2003 年 2 月

目 次

第1章　最初に

1.1　背景

様相論理の意味論としてはクリプキモデルによる意味論の研究が盛んに行なわれているが, 位相空間を用いた意味論の研究が Tarski 等により古くから研究されてきた. それは, 様相演算子 $\Box$ を位相空間における開核演算 (与えられた集合の内部に存在する 最大の開集合に対応させる演算) として解釈することである. この解釈は, 様相論理 S4 の公理と対応させて考えたとき非常に自然なものとなっている.

また, 位相空間を用いた空間による特徴づけに関する研究が最近行なわれるようになってきている. たとえば, カントル空間や実数上の位相空間から構築される位相モデルに関し, 様相論理 S4 が完全であることが示されている.

また, 上の様な研究とは少し異なった視点からの研究も行なわれている. それは, 位相空間の様に点の集合とその集合の部分集合のクラスからなる空間を意味論に用いた部分集合モデルと部分集合空間論理呼ばれる 2 つの様相演算子 $(\Box, K)$ をもつ論理体系に関する研究である. これに関し, 本研究では点と集合とを意味論に加えた場合に, 点と集合そして様相論理体系との間にどのような関係があるかを調査してきた.

本研究では特に意味論的アプローチを行ない, 上で述べた 2 種類の研究分野の調査を行なった. すなわち, 位相モデルを用いての意味論の調査, そして部分集合空間論理において完全性を示す為に用いるモデル, 決定可能性を示すために用いられた有限モデル性を持つモデル, そしてこのモデルと完全性を示す為に用いられたモデルとの間の関係を調査した.

また, 本研究では論理体系を S4 を含む様相論理を対象とした意味論の構築として位相モデルに対し点と開集合とを解釈に含めた意味論を考え, その意味論でのアプローチにおいて以下のことを行なった.

2 つの位相モデル間で論理式の解釈を変えないという関係の一つである topo-bisimulation と直積空間との関係 を明らかにすることや, topo-bisimulation が位相空間を定める要素である開集合と論理式の解釈を定める命題変数の付値による像との交叉関係に影響を受けていることを, 或る条件を仮定して topo-bisimulation を構築することによって明らかにした.

位相空間がもつ位相的な性質を他の位相空間に反映させる機能をもつ連続写像が, 与えられた開集合系においてどの様に構築されるされるのかを, 或る束同型写像を仮定した場合に明らかにし, それとともに連続写像が開集合系の部分集合と他方の空間における部分集合の或るクラス (べき集合の部分集合) との間に束同型を与えることを明らかにした.

構成

この論文では, まず第 2 章で基本的な様相論理である正規な様相論理について述べ, 第 3 章で位相空間と位相モデルの基本的な概念およびそれらの関わり (topo-bisimulation 等) について触れたあと, 種々の空間における完全性を述べる. 第 4 章では, 部分集合空間論理と点と集合とを解釈に加えたモデルについてのべ, その完全性について触れる. 第 5 章では, 第 4 章で扱った部分集合空間論理の有限モデル性, 決定可能性について述べる.

最後に第 6 章では, これらの調査をもとに得られた概念を考察し, 位相的な視点からまとめることにする.

第 2 章は主として [1], [3], [4] を参考にした. 第 3 章の位相空間に関しては [5], [6], [7] を参照し, 位相モデルや topo-bisimulaiton に関しては [1] を参照した. 第 4 章, 第 5 章で述べた結果は論文 [2] の主定理とその証明をまとめたものとなっている.

第2章　様相論理

この章ではまず, 様相論理の中で正規 (normal) である様相論理について述べそのクリプキモデルを用いた一般的な解釈について述べる. そのあとに, 古くからよく知られている様相論理である S4 について触れたあと, 完全性定理の証明に用いられる極大無矛盾集合という概念とリンデンバウムの補題 (*Lindenbaum's lemma*) など極大無矛盾集合の諸性質に触れていく. この章は主に, 文献 [1] ,[3] ,[4] を参考にした. この章でのべる結果は, 基本的なものであるので証明は省略することにする. これらの詳細についてはこれらの文献を参照して頂きたい.

2.1　正規な様相論理

様相論理の言語

まず, 論理を形成する際に用いる言語を定める. すなわち, 集合 $Formula$ を以下の様に帰納的に定める.

Definition 2.1.1. (Language) $Prop$ を命題変数の可算集合であるとする.

(i) $P \in Prop$ ならば, $P \in Formula$,
(ii) $\varphi, \chi \in Formula$ ならば, $(\varphi \wedge \chi) \in Formula$,
(iii) $\varphi \in Formula$ ならば, $(\neg\varphi) \in Formula$,
(iv) $\varphi \in Formula$ ならば, $(\Box\varphi) \in Formula$.

ここで, $\Diamond\varphi$ を, $(\neg(\Box(\neg\varphi)))$ の省略記号, $(\varphi \vee \chi)$ を, $(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\chi)))$ の省略記号として用い, $(\varphi \to \chi)$ を, $((\neg\varphi) \vee \chi)$ の代わりの記号として用いてもよいことにする. また, 混乱が生じない限りカッコを省略してもよいことにしておく. ただし, $\Box$ と $\Diamond$ の結合の強さは $\neg$ と同じとし, $\wedge, \vee, \to$ の結合の強さは $\Box, \Diamond, \neg$ よりも弱くそれぞれが同じ結合の強さを持つとする.

便宜上, 記号 $\perp$ を $P_0 \wedge \neg P_0$ の省略記号として用いる. ここで, P_0 は $Prop$ に番号 (自然数) を対応させたとき一番小さい番号に対応する $Prop$ の要素 (命題変数) であるとする. また, $\top$ を $\neg\perp$ の省略記号として用いる.

$Formula$ の要素を論理式 (formula) や文 (sentence) などと呼ばれるが, この論文では各章を通して論理式と呼ぶことにする.

2.1.1 クリプキ・モデル

ここでは, クリプキ (S.Kripke) によって与えられた様相論理の意味論について触れる.

Definition 2.1.2. $\langle X, R\rangle$ がクリプキ・フレームであるとは, X が空でない集合 $(X \neq \emptyset)$ であり R が X 上の二項関係であることをいう. また, $\langle X, R, \nu\rangle$ がクリプキ・モデルであるとは, $\langle X, R\rangle$ がクリプキフレームであり ν が命題変数の集合 $Prop$ から X のべき集合 $P(X)$ への写像であることをいう.

与えられたクリプキ・モデル $\langle X, R, \nu\rangle$ において, $\varphi \in Formula$ の解釈 $M, x \models \varphi$ を以下の様にして帰納的に定める.

Definition 2.1.3. $\langle X, R, \nu\rangle$ をクリプキ・モデルであるとする. それぞれの $x \in X$ に対し, $\models$ を次の様に帰納的に定める.

(i) すべての $P \in Prop$ に対し, $M, x \models \Leftrightarrow x \in \nu(P)$
(ii) $M, x \models \varphi \wedge \chi \Leftrightarrow M, x \models \varphi$ かつ $M, x \models \chi$
(iii) $M, x \models \neg\varphi \Leftrightarrow M, x \not\models \varphi$
(iv) $M, x \models \Box\varphi \Leftrightarrow$ 任意の y に対して, xRy ならば $M, y \models \varphi$

2.1.2 論理体系 $\mathcal{K}$

$\mathcal{L}$ が様相論理であるとは, $\mathcal{L}$ が公理系

$$\varphi \to (\chi \to \varphi)$$
$$(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$$
$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

の代入例である論理式 ($Formula$ の要素) すべてを含み, $\varphi \to \chi \in \mathcal{L}$ かつ $\varphi \in \mathcal{L}$ ならば $\chi \in \mathcal{L}$ という性質を持つような論理式の集合の中で最小の集合であることをいう. また, 様相論理 $\mathcal{L}$ が正規な様相論理であるとは, $\mathcal{L}$ が性質

(N) $\varphi \in \mathcal{L}$ ならば $\Box\varphi \in \mathcal{L}$

を持ち, かつ 公理型

(K) $\Box(\varphi \to \chi) \to (\Box\varphi \to \Box\chi)$

の代入例である論理式をすべて含む様相論理であるとする. このとき, 最小の正規な様相論理を $\mathcal{K}$ と呼ぶ. $\mathcal{K}$ は

$$\mathcal{K} = \cap\{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ が正規な様相論理である }\}$$

と表すことができ,

様相論理 $\mathcal{L}$ に関し, 論理式 φ が $\mathcal{L}$ で証明可能である ($\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と表す) とは $\varphi \in \mathcal{L}$ であることをいう (Γ は無限集合でもかまわない).

さらに, この証明可能という概念を一般化し $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (論理式の集合 Γ から論理式 φ が証明可能) であることを以下の様に定義する.

$\Gamma \subseteq Formula$, $\varphi \in Formula$ に対し, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であるとは,

$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であるか, または或る $\varphi_1, ...\varphi_n \in \Gamma$($n$ は自然数) が存在し,
$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \to \varphi$ である

ことをいう.

この定義により $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であることと $\emptyset \vdash \mathcal{L}\varphi$ であることとが同値であることがわかる. 様相論理 $\mathcal{L}$ が明示されているときは, $\vdash_{\mathcal{L}}$ の添字 $\mathcal{L}$ を省略することもある.

Proposition 2.1.1. *$\mathcal{L}$ を任意の正規な様相論理とする.*

(1) *$\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi \in Formula$ (n は自然数) に対し,*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \to \varphi \text{ ならば} \vdash_{\mathcal{L}} \Box\varphi_1 \wedge ... \wedge \Box\varphi_n \to \Box\varphi$$

(2) *任意の $\Gamma \subseteq Formula$, すべての $\varphi \in Formula$ に対して,*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{ならば} \quad \{\Box\chi \mid \chi \in \Gamma\} \vdash_{\mathcal{L}} \Box\varphi$$

次に, 無矛盾という概念について述べる.

Definition 2.1.4. $\Gamma \subseteq Formula$ が $\mathcal{L}$ に関し無矛盾であるとは, $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \perp$ であることをいう.

Proposition 2.1.2. *任意の $\Gamma \subseteq Formula$ に対し, $\mathcal{L}$ に関し Γ が無矛盾であることと*

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ との両方を満たす或る $\varphi \in Formula$ が存在する

こととは同値である.

Proposition 2.1.3. *$\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が $\mathcal{L}$ に関し無矛盾*

2.2 極大無矛盾集合

Definition 2.2.1. Γ が $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合であるとは, Γ が $\mathcal{L}$ に関し無矛盾であり, さらにすべての $\varphi \in Formula$ に対し $\varphi \in \Gamma$ または $\neg\varphi \in \Gamma$ のどちらかのみが成立することをいう.

ここで, $X^{\mathcal{L}} := \{\Gamma \mid \Gamma$が様相論理 $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合$\}$ としておく.

Lindenbaum's Lemma

$\mathcal{L}$ を正規な様相論理であるとする.

Lemma 2.2.1. *(Lindenbaum's Lemma)* 任意の $\Gamma \subseteq Formula$ に対し, Γ が $\mathcal{L}$ に関し無矛盾ならば, 或る $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合 Δ が存在し $\Gamma \subseteq \Delta$ である.

Lindenbaum's Lemma から次が導かれる.

Lemma 2.2.2.

(1) $\{\varphi \mid \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\} = \cap\{\Delta \in X^{\mathcal{L}} \mid \Gamma \subseteq \Delta\}$ が任意の $\Gamma \subseteq Formula$ に対して成り立つ. とくに,

(2) $\{\varphi \mid \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\} = \cap\{\Delta \mid \Delta \in X^{\mathcal{L}}\}$

(1) を示す. このとき, すべての $\varphi \in Formula$ に対し,
$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ならば $\varphi \in \Gamma$ であるから, 任意の $\Delta \subseteq Formula$ に対し $\Gamma \subseteq \Delta$ ならば $\varphi \in \Delta$. すなわち, $\varphi \in \cap\{\Delta \in X^{\mathcal{L}}. \mid \Gamma \subseteq \Delta\}$. 逆に, $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ならば, Proposition2.1.3 より $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が無矛盾であるので, Lindenbaum's Lemma より 或る $\Delta_0 \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Delta_0$ であるから, $\Gamma \subseteq \Delta_0$ かつ $\varphi \notin \Delta_0$ である. すなわち, $\varphi \notin \cap\{\Delta \in X^{\mathcal{L}} \mid \Gamma \subseteq \Delta\}$ である. Q.E.D.

ここで, Lemma 2.2.2 において, (1) は, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であることと φ が $\Gamma \subseteq \Delta$ であるすべての $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合 Δ に属することとが同値であることを表し, (2) は, φ が様相論理 $\mathcal{L}$ で証明可能であることと φ がすべての $\mathcal{L}$ 極大無矛盾集合に含まれることとが同値であることを表している.

カノニカルモデル

様相論理 $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合全体の集合 $X^{\mathcal{L}}$ 上に関係 $R^{\mathcal{L}}$ を定める.

Definition 2.2.2. $x, y \in X^{\mathcal{L}}$ であるとする.

$xR^{\mathcal{L}}y \Leftrightarrow$ すべての $\varphi \in Formula$ に対し $\Box\varphi \in x$ ならば $\varphi \in y$

これは

$xR^{\mathcal{L}}y \Leftrightarrow$ すべての $\varphi \in y$ に対し $\Diamond\varphi \in x$

と言いかえることができる. この関係 $R^{\mathcal{L}}$ に対し次が成立する.

Proposition 2.2.3. 任意の $x \in X^{\mathcal{L}}$, すべての $\varphi \in Formula$ に対し,

$\Box\varphi \in x \Leftrightarrow$ 任意の $y \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $xR^{\mathcal{L}}y$ ならば $\varphi \in y$

次に, フレーム $\langle X^{\mathcal{L}}, R^{\mathcal{L}}\rangle$ 上に付値 $\nu^{\mathcal{L}}$ を次の様に定める. すべての $P \in Prop$ に対し

$$\nu^{\mathcal{L}}(P) = \{\Gamma_{max} \in X^{\mathcal{L}} \mid P \in \Gamma_{max}\}$$

このとき, $\langle X^{\mathcal{L}}, R^{\mathcal{L}}, \nu^{\mathcal{L}}\rangle$ をカノニカルモデル (canonical model) という.

Lemma 2.2.4. *(Truth Lemma)* すべての $\varphi \in Formula$, $x \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,

$$M^{\mathcal{L}}, x \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in x$$

が成立する.

完全性定理

ここで, $\Gamma \subseteq Formula$ に対し $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$ であるとは, 任意のクリプキモデル $M = \langle X, R, \nu\rangle$ と, それぞれの $x \in X$ に対し,

$M, x \models \psi$ がすべての $\psi \in \Gamma$ に対し成り立つならば, $M, x \models \varphi$

であることをいう.

Theorem 2.2.5. *(Completeness)* 任意の $\Gamma \subseteq Formula$, およびすべての $\varphi \in Formula$ に対し,

$\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

である.

2.3 代表的な公理型とその完全性

ここに, 代表的な公理型を挙げる.

$$\begin{array}{ll}
\Box(\varphi \to \chi) \to (\Box\varphi \to \Box\chi) & \text{(K)} \\
\Box\varphi \to \varphi & \text{(T)} \\
\Box\varphi \to \Box\Box\varphi & \text{(4)} \\
\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi & \text{(5)}
\end{array}$$

S4 とは, 公理型 (K),(T),(4) の代入例すべてを含む最小の正規な様相論理である. また, 性質

(M) $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \chi$ ならば $\vdash_{\mathcal{L}} \Box\varphi \to \Box\chi$

を持ち, 次の公理系の代入例すべてを含む最小の様相論理 $\mathcal{L}$ と S4 は一致する.

$\Box\top$
$\Box(\varphi \wedge \chi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\chi)$
$\Box\varphi \to \varphi$
$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

S5 とは, 公理型 (K),(T),(5) の代入例すべてを含む最小の正規な様相論理である. また, S5 は S4 よりも真につよい体系 (すなわち, $\vdash_{S4} \varphi$ ならば$\vdash_{S5}$) であるが, その逆は成り立たないことが知られている.

完全性定理

擬順序 (反射律, 推移律) をもつクリプキ・モデルを S4 モデルと呼び, 同値関係 (反射律, 推移律, 対称律) をもつクリプキ・モデルと呼ぶことにする. すると, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2.3.1. (1) S4 は, S4 モデルのクラスに対し健全であり完全である.
(2) S5 は, S5 モデルのクラスに対し健全であり完全である.

第3章　様相論理S4と位相空間

この章では, 一般位相空間の定義に触れ, canonical topological space と model に触れたあと位相空間に随伴して用いられる概念である連続写像 (continuous map) と topo-bisimulation との関係について述べる. この章の位相空間に関する定義や, 定理は主に文献 [6], [5], [7] を参考とし, 位相モデルや topo-bisimulation に関しては文献 [1] に従った.

3.1　位相空間

Definition 3.1.1. $\langle X, O\rangle$ が位相空間であるとは、X が集合であり, O が X のべき集合 $P(X)$ の部分集合かつ, O が開集合系であることをいう. ただし O が開集合系であるとは, O が次の 3 つの性質を満たすことである.

(i) $\emptyset, X \in O$
(ii) $u, v \in O$ ならば, $u \cap v \in O$
(iii) $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq O$ ならば, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda \in O$ (Λ は添字集合).

条件 (ii) と次に挙げる条件 (ii') とは同値であることが導かれる.

(ii') $u_1, \cdots, u_n \in O$ ならば, $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} u_j \in O$ (n は自然数)

開集合系に属する集合を開集合という. また条件 (ii) を "O が有限個の部分集合に関して閉じているといい, 条件 (iii) を, "O が無限の和集合に関して閉じているという.

X を集合とするとき, $\langle X, P(X)\rangle$ は位相空間である. また, この位相空間を離散位相空間という.

次に, 集合に位相を入れる (すなわち, 開集合系を決定する) 際に用いられる開基 (open base) および, 部分基 (subbase) の概念について述べる.

Definition 3.1.2. $\langle X, O\rangle$ を位相空間とする. このとき, O の部分集合 B が O の開基 *(open base)* であるとは, 任意の $u \in O$ に対し, 或る $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq B$ が存在し, その $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ により, $u = \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ と表せることである.

この様に開基を定義すると, 開基 B は次の性質 (B1),(B2) を持つ.

(B1) 任意の $x \in X$ に対し, 或る $W \in B$ が存在し $x \in W$
(B2) 任意の $W_1, W_2 \in B$ と 任意の $x \in W_1 \cap W_2$ に対し, 或る $W_3 \in B$ が存在し, $x \in W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$

逆に, 与えられた $B \subseteq P(X)$ が 条件 (B1), (B2) を満たしているとき, O を

$$O := \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \mid \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B \text{ かつ } \Lambda \text{は任意の添字集合} \}$$

と定めると, O は 開集合系となることが示される.

Definition 3.1.3. $\langle X, O \rangle$ を 位相空間とする. このとき, $S \subseteq O$ が O の部分基 (*subbase* of O) であるとは, 集合 $\{\bigcap_{j=1}^{n} S_j \mid \{S_j\}_{j=1}^{n} \subseteq S\}$ が O の開基となることである.

Proposition 3.1.1. 任意の集合 X に対し, 集合のクラス $S_0 \subseteq P(X)$ が任意に与えられているとする. その S_0 により X の開集合系 O を構築することができる. 言い換えれば, $S_0 \subseteq P(X)$ により, 位相を入れることができる.

Proposition 3.1.1 を確かめるために,

$S := S_0 \cup \{X\}$ とし, $B := \{\bigcap_{j=1}^{n}, S_j \mid \{S_j\}_{j=1}^{n} \subseteq S\}$ と定める.

このとき, B が開基であること (すなわち, B が性質 (B1), (B2) を満たすこと) を確かめ, O を $O := \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \mid \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B\}$ と定めればよい.

Proposition 3.1.1 の正確な意味は, 与えられた S_0 の要素をすべて開集合にするような開集合系のうち最小のものである開集合系 O が存在するということである. このとき, O を集合のクラス S_0 により生成されるという.

ここで, 開集合 (系) と深い関係にある内部, 開核演算の概念について述べる.

Definition 3.1.4. $\langle X, O \rangle$ を位相空間とし, $A \subseteq X$ とする. このとき集合 A^i を次を満たす集合として定義する. 任意の $x \in X$ に対し,

$x \in A^i \Leftrightarrow$ 或る $u \in O$ が存在し, $x \in u \subseteq A$

この A^i を A の内部 (interior) や A の開核 (open kernel) といい, ^{i} を開核演算 (interior operator) という. また, $x \in A^i$ であることを"x が A の内点である"という.

この定義により, A^i を $A^i = \cup\{u \in O \mid u \subseteq A\}$ と書くことができるが, これは A の内点全体の集合 A^i が A に含まれる開集合の中で最も大きい開集合であることを意味している.

開核演算と開集合との間には次の様な関係が成立する．任意の $u \subseteq X$ に対し,

(IO) u が開集合 $\Leftrightarrow u^i = u$

また, $P(X)$ から $P(X)$ への写像 $*^i$ が開核演算であることと次の 4 つの性質をもつこととは同値である．A, B を X の任意の部分集合とする．

(I1) $X^i = X$
(I2) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$
(I3) $A^i \subseteq A$
(I4) $(A^i)^i = A^i$

この 4 つの性質が 2 章で紹介した様相論理 S4 の公理系と非常に似ていることから, S4 と位相空間との関わりが古くから注目されてきた.

次に, 位相空間と共に扱われる連続写像という概念について定義を述べる.

Definition 3.1.5. $\langle X, O\rangle$, $\langle X', O'\rangle$ を 位相空間とする．任意の f: $X \to X'$ に対して, f が X 上の連続写像であるとは,

$$\text{任意の } u' \in O' \text{に対し}, f^{-1}(u') \in O$$

を満たすことをいう．また, f が X から X' への 位相同型写像 (homeomorphism) であるとは, f が全単射であり f が X 上の連続写像 かつ f^{-1} が X' 上の連続写像であることをいう.

また, 位相空間 $\langle X, O\rangle$, $\langle X', O'\rangle$ に対し X から X' への 或る位相同型写像が存在する時, $\langle X, O\rangle$ と $\langle X', O'\rangle$ (または, X と X') が位相同型であるという.

Definition 3.1.6. $\langle X, O\rangle$, $\langle X', O'\rangle$ を位相空間とし, f を X から X' への写像とする．このとき f が開写像であるとは, 任意の $u \in O$ に対し $f(u) \in O'$ であることをいう.

Definition 3.1.7. $\langle X_\lambda, O_\lambda\rangle$ を位相空間とする ($\lambda \in \Lambda$)．このとき B を

有限個の λ に対し $u_\lambda \in O_\lambda$ であり, その他の λ に対し $u_\lambda = X_\lambda$ である様な集合 ($\Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分集合) のクラス

であるとする．このとき, B を開基とする $\Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の位相を直積 (弱) 位相と呼び, 通常, 直積集合の位相を考える時は, この直積位相を用いる.

特に, 各 λ に対し $\langle X_\lambda, O_\lambda\rangle$ が $\{0, 1\}$ の離散位相空間であるとき, 直積集合 X^Λ に直積位相をいれた直積位相空間を カントル空間と言う.

Proposition 3.1.2. $\langle X_\lambda, O_\lambda\rangle$ を位相空間とする ($\lambda \in \Lambda$)．このとき射影 $pr_\lambda : \Pi_{\mu\in\Lambda} X_\mu \to X_\lambda$ を $pr_\lambda((x_\mu)_{\mu\in\Lambda}) = x_\lambda$ により定義する．すると,

pr_λ は, 全射であり連続かつ開写像である.

3.2　位相モデル

前節で与えられた概念を用い, ここでは, 古くから Tarski 等により位相を用いて行なわれてきた S4 の 解釈について触れたあと, その完全性について触れる.

Definition 3.2.1. $M = \langle X, O, \nu\rangle$ が 位相モデル (topological model) であるとは, $\langle X, O\rangle$ が位相空間 であり, かつ ν が集合 $Prop$ から X のべき集合 $P(X)$ への写像であることを言う. この様な写像 ν を M 上の付値という.

次に, $\varphi \in Formula$ の解釈 $M, x \models \varphi$ を以下の様に定義する.

Definition 3.2.2. $M = \langle X, O, \nu\rangle$ を 位相モデルとする. それぞれの $x \in X$ に対し, $\models$ を次の様に帰納的に定義する.

(i)　任意の $P \in Prop$ に対し $M, x \models P \Leftrightarrow x \in \nu(P)$
(ii)　$M, x \models \varphi \wedge \chi \Leftrightarrow M, x \models \varphi$ かつ $M, x \models \chi$
(iii)　$M, x \models \neg\varphi \Leftrightarrow M, x \not\models \varphi$
(iv)　$M, x \models \Box\varphi \Leftrightarrow$ 或る $u \in O$ が存在し, その u において, $x \in u$ でありかつ, 任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \varphi$

特に 対象としているモデル M が明確であるとき, $M, x \models \varphi$ を簡略して $x \models \varphi$ と書く.

ここで, 位相モデル $M = \langle X, O, \nu\rangle$ の付値 ν を次の様にして $Formula$ から $P(X)$ への写像に拡張する.

$$\nu(\varphi) := \{x \in X \mid M, x \models \varphi\}$$

また, 任意の $A \subseteq X$ に対し

$$x \in A^i \Leftrightarrow \text{或る } u \in O \text{ が存在し}, x \in u \subseteq A$$

であったので, これらから 上述の定義 (Definition 3.2.2) (iv) は

$$M, x \models \Box\varphi \Leftrightarrow x \in \nu(\varphi)^i$$

と表すことができる. すなわち, これは $\nu(\Box\varphi) = \nu(\varphi)^i$ であることを表している. この様に, 位相モデルにおいては $\Box$ を 開核演算として解釈している.

カノニカル空間とカノニカルモデル

この節では, 極大無矛盾集合を要素とする集合に位相を定める (開集合系を定める) ことにより, 完全性定理を示す. また, 健全性については, 容易に示されるので証明を省略する. ここで, $\mathcal{L}$ を S4 を含む任意の様相論理とする. 今, $X^{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合全体の集合とし, 任意の $\varphi \in Formula$ に対し $\langle\varphi\rangle$ を $\langle\varphi\rangle := \{\Gamma_{max} \in X^{\mathcal{L}} \mid \varphi \in \Gamma_{max}\}$ と定める. このとき, $B^{\mathcal{L}}$ を $B^{\mathcal{L}} := \{\langle\Box\varphi\rangle \mid \varphi \in Formula\}$ と定めると次が成立する.

Lemma 3.2.1. *$B^{\mathcal{L}}$ は, 開基の性質 (B1), (B2) を満たす.*

Definition 3.2.3. (Canonical space)
$\langle X^{\mathcal{L}}, O^{\mathcal{L}}\rangle$ がカノニカル位相空間 (canonical topological space) であるとは,

$X^{\mathcal{L}}$ が極大無矛盾集合全体のクラスであり, $O^{\mathcal{L}}$ が $B^{\mathcal{L}}$ を開基とする開集合系

であることを言う.

次に, このカノニカル位相空間に付値 $\nu^{\mathcal{L}}$ を定める.

Definition 3.2.4. (Canonical model)
$M^{\mathcal{L}} = \langle X^{\mathcal{L}}, O^{\mathcal{L}}, \nu^{\mathcal{L}}\rangle$ が カノニカル位相モデル (canonical topological model) であるとは, $\langle X^{\mathcal{L}}, O^{\mathcal{L}}\rangle$ が カノニカル位相空間であり, 付値 $\nu^{\mathcal{L}}$ を各 $P \in Prop$ に対し $\nu^{\mathcal{L}}(P) = \{\Gamma_{max} \mid P \in \Gamma_{max}\}$ と定めた 位相モデルであることをいう.

このカノニカルモデルに関する後述の Truth Lemma の証明に用いる性質を Proposition として, 次に触れておく.
$\varphi, \chi \in Formula$ であるとする. このとき,

Proposition 3.2.2. $\langle\neg\varphi\rangle = \langle\varphi\rangle^c \; (= X^{\mathcal{L}} \backslash \langle\varphi\rangle)$, $\langle\varphi \wedge \chi\rangle = \langle\varphi\rangle \cap \langle\chi\rangle$

Proposition 3.2.3. $\quad \langle\varphi\rangle \subseteq \langle\chi\rangle \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \chi$

が成り立つ.

$\langle\varphi\rangle \subseteq \langle\chi\rangle$ であることと, 任意の $y \in X^{\mathcal{L}}$ に対して $\varphi \to \chi \in y$ であることと同値である. したがって, Lemma 2.2.2 により Proposition 3.2.3 が示される.

Lemma 3.2.4. *(Truth Lemma) すべての $\varphi \in Formula$ に対し,*

任意の $x \in X^{\mathcal{L}}$ に対し $M^{\mathcal{L}}, x \models \varphi \Leftrightarrow x \in \langle\varphi\rangle$ である.

Proof: $Formula$ の構成に関する帰納法により証明を行なう．まず, base case のとき, すなわち $\varphi \in Prop$ であるときは $\models$, および $\nu^{\mathcal{L}}$ の定義より直ちに証明される．また, induction step として, φ が $\varphi = \chi \wedge \psi$, または $\varphi = \neg\chi$ であるとき, Proposition 3.2.2 を適用することにより示される．ここでは, $\varphi = \Box\chi$ の場合のみの証明の詳細を述べる．
任意の $x \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,
$(\Rightarrow)$
$M^{\mathcal{L}}, x \models \Box\chi$ ならば, 定義より或る $W \in O^{\mathcal{L}}$ が存在し $x \in W$ かつ任意の $y \in W$ に対し $M^{\mathcal{L}}, y \models \chi$ である．$W \in O^{\mathcal{L}}$ であることを考えると, 或る $\psi \in Formula$ が存在し $x \in \langle\Box\psi\rangle \subseteq W$ かつ任意の $y \in \langle\Box\psi\rangle$ に対して $M, y \models \chi$ であることが導かれる．すなわち帰納法の仮定により, 任意の $y \in \langle\Box\psi\rangle$ に対して, $y \in \langle\chi\rangle$ と言い換えられるので, $\langle\Box\psi\rangle \subseteq \langle\chi\rangle$ である．上述の Proposition 3.2.3 より, $\vdash_{\mathcal{L}} \Box\psi \to \chi$ が導かれ $\Box$ に関する推論規則により, $\vdash_{\mathcal{L}} \Box\Box\psi \to \Box\chi$ である．また 公理 (T), (4) により $\vdash_{\mathcal{L}} \Box\Box\psi \leftrightarrow \Box\psi$ であるから, $\vdash_{\mathcal{L}} \Box\psi \to \Box\chi$ である．Proposition 3.2.3 より $\langle\Box\psi\rangle \subseteq \langle\Box\chi\rangle$ であり, $x \in \langle\Box\psi\rangle$ であったので求める結果である $x \in \langle\Box\chi\rangle$ を得る．

次に, この逆を示す．
$(\Leftarrow)$
$x \in \langle\Box\chi\rangle$ ならば, $\langle\Box\chi\rangle \in B^{\mathcal{L}}$ かつ $B^{\mathcal{L}} \subseteq O^{\mathcal{L}}$ より, $u := \langle\Box\chi\rangle$ と定めれば, $x \in u$ かつ $u \in O^{\mathcal{L}}$ である．これとは独立に, $\Box\chi \to \chi$ は公理 (T) の代入形であるから, 任意の $y \in X^{\mathcal{L}}$ に対し $\Box\chi \to \chi \in y$. 極大無矛盾集合の性質より, $\Box\chi \in y$ ならば $\chi \in y$ である．言い換えると, 任意の $y \in X^{\mathcal{L}}$ に対して $y \in \langle\Box\chi\rangle$ ならば $y \in \langle\chi\rangle$ である．一方 $u = \langle\Box\chi\rangle$ であったので, 任意の $y \in u$ に対し, $y \in \langle\chi\rangle$. 帰納法の仮定より $M^{\mathcal{L}}, y \models \chi$ である．以上をまとめると, この $u \in O^{\mathcal{L}}$ に対し, $x \in u$ かつ 任意の $y \in u$ に対し, $M^{\mathcal{L}}, y \models \chi$ となることから, 定義により求める結果である $M^{\mathcal{L}}, x \models \Box\chi$ を得る．Q.E.D

Γ, φ を $\Gamma \subseteq Formula$, $\varphi \in Formula$ とする．このとき $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$ であるとは, 任意の位相モデル $M = < X, O, \nu >$ と, 任意の $x \in X$ に対し

$$M, x \models \psi \text{がすべての} \psi \in \Gamma \text{に対して成り立つならば} M, x \models \varphi$$

であることとする．

この時, 前述の *Truth Lemma* から, 次の完全性定理が導かれる．

Theorem 3.2.5. *(Completeness)* 任意の $\Gamma \subseteq Formula$ に対し, $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$ ならば, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Proof: 対偶を示す．$\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と仮定する．すると $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が無矛盾集合であるから Lindenbaum's Lemma (Lemma 2.2.1) より, 或る $\Gamma_{max} \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma_{max}$. 特に, $\neg\varphi \in \Gamma_{max}$ である．このとき極大無矛盾集合の性質 より, $\varphi \notin \Gamma_{max}$ つまり, $\Gamma_{max} \notin \langle\varphi\rangle$ である．ここで Truth Lemma から $M^{\mathcal{L}}, \Gamma_{max} \not\models \varphi$ が導かれる．他方, 任意の $\psi \in \Gamma$ に対し, $\psi \in \Gamma_{max}$ であるので, Truth Lemma より $M^{\mathcal{L}}, \Gamma_{max} \models \psi$ である．以上をまと

めると, 或る $\Gamma_{max} \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し, 任意の $\psi \in \Gamma$ に対して $M^{\mathcal{L}}, \Gamma_{max} \models \psi$ であるが $M^{\mathcal{L}}, \Gamma_{max} \not\models \varphi$. すなわち, $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}} \varphi$ である. Q.E.D

また, カノニカル空間 $\langle X^{\mathcal{L}}, O^{\mathcal{L}} \rangle$ に関しては, 次の様な結果も知られている.

Proposition 3.2.6. $\langle X^{\mathcal{L}}, O^{\mathcal{L}} \rangle$ は、*compact* かつ *dense-in-itself* である.

このことから, S4 は compact かつ dense-in-itself であるような位相空間のクラスに限っても完全となるということが言える.

3.3 topo-bisimulation

次に topo-bisimulation という概念を導入し, その概念と真偽値との関係, また 位相空間上の連続写像との関係について述べる.

Definition 3.3.1. $\langle X, O, \nu \rangle$, $\langle X', O', \nu' \rangle$ を位相モデルとする. X と X' 上の空でない関係 $\rightleftharpoons \subseteq X \times X'$ が *topo-bisimulation* であるとは, 次の性質を満たすことを言う. $x \rightleftharpoons x'$ ならば,

(i) $x \in \nu(P) \Leftrightarrow x' \in \nu'(P)$

(ii) $x \in u \in O$ ならば, 或る $u' \in O'$ が存在し, $x' \in u'$ であり,
任意の $y' \in u'$ に対し 或る $y \in u$ が存在し $y \rightleftharpoons y'$ を満たす.

(iii) $x' \in u' \in O'$ ならば, 或る $u \in O$ が存在し, $x \in u$ であり,
任意の $y \in u$ に対し 或る $y' \in u'$ が存在し $y \rightleftharpoons y'$ を満たす.

条件 (ii) を フォースコンディション (forth condition) といい, 条件 (iii) を バックコンディション (back condition) という. また, $X \times X'$ 上の関係 $\rightharpoonup$ が, 上の定義 (i),(ii) を満たしているとき, $\rightharpoonup$ を topo-simulation といい, M' が M を simulation すると言う ($M \rightharpoonup M'$ などと書く). また, topo-bisimulation $\rightleftharpoons$ が, 全面的 (total) であるとは,

任意の x に対し, $x \rightleftharpoons x'$ を満たす或る x' が存在し, かつ
任意の x' に対し, $x \rightleftharpoons x'$ を満たす或る x が存在する

ことをいう. つまり, これは X と X' のすべての要素に対し topo-bisimulation $\rightleftharpoons$ が定義されているという状態のことである.

この topo-bisimulation とこの章で扱っているセマンティクスとの間には 非常に深い関係がある. そこで, この topo-bisimulation という概念とモデルの真偽との関係について述べることにする.

Theorem 3.3.1. $M = \langle X, O, \nu \rangle$, $M' = \langle X', O', \nu' \rangle$ を 位相モデルとし, $\rightleftharpoons \subseteq X \times X'$ が topo-bisimulation であるとする．この時, すべての $\varphi \in Formula$ に対し, 次が成立する．任意の $x \in X, x' \in X'$ に対し

$x \rightleftharpoons x'$ ならば $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M', x' \models \varphi$

Proof: $Formula$ の構成に関する帰納法により証明を行う．

$\varphi = P \in Prop$ であるとき, $x \rightleftharpoons x'$ ならば bisimulation $\rightleftharpoons$ の定義 (i) により, $x \in \nu(P) \Leftrightarrow x' \in \nu'(P)$. $\models$ の定義を適用し, $M, x \models P \Leftrightarrow M', x' \models P$ を得る．次に $\varphi = \chi \wedge \psi$, および $\varphi = \neg\chi$ の形のときは, $\models$ の定義により 直ちに証明される．最後に $\varphi = \Box\chi$ であるとき, $x \rightleftharpoons x'$ ならば $M, x \models \Box\chi$ の定義である

或る $u \in O$ が存在し, $x \in u$ かつ任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \chi$

という条件と,

或る $u' \in O'$が存在し, $x' \in u'$かつ任意の $y' \in u'$に対し $M', y' \models \chi$

という条件が同値であることを示せばよい．そこで, 或る $u \in O$ が存在し, $x \in u$ かつ任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \chi$ であるとすると, $x \in u \in O$ であるので $\rightleftharpoons$ の定義 (ii)(forth condition) により, "或る $u' \in O'$ が存在し $x' \in u'$ であり, 任意の $y' \in u'$ に対し 或る $y \in u$ が存在し $y \rightleftharpoons y'$" である．この $y \rightleftharpoons y'$ である y と y' の組に対し帰納法の仮定を適用すると, $M, y \models \chi \Leftrightarrow M', y' \models \chi$. 一方で 仮定よりこの y に対して $M, y \models \chi$ であったから, $M', y' \models \chi$ である．y' は u' の任意の要素であったので, 以上をまとめると $M, x \models \Box\chi$ ならば $M', x' \models \Box\chi$ である．また, この逆を示すときには, topo-bisimulation の定義 (iii) (back condition) を用いる． Q.E.D.

この定理の逆 については, 実は 無限の深さを持つ言語を対象とした場合には成立するが, 我々が普段扱うような有限の深さしか持たない言語を対象とした場合には 一般には, 成立しないことが知られている．そこで, 前定理の逆に制限を加えた次の定理を述べることにする．

Theorem 3.3.2. $M = \langle X, O, \nu \rangle$, $M' = \langle X', O', \nu' \rangle$ を有限位相モデルとする．さらに, 与えられた $x \in X, x' \in X'$ に対し, $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M', x' \models \varphi$ がすべての $\varphi \in Formula$ に対して成り立つとする．このとき,

$$x \rightleftharpoons x \text{ である topo} - \text{bisimulation} \rightleftharpoons (\subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{X})' \text{が存在する．}$$

Proof: $X \times X'$ 上の関係 $\rightleftharpoons$ を

$z \rightleftharpoons z' \overset{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varphi \in Formula$ に対し $M, z \models \varphi \Leftrightarrow M', z' \models \varphi$

と定める．このとき $x \rightleftharpoons x'$ であり, それゆえ $\rightleftharpoons$ は空ではない関係である．そこで, $\rightleftharpoons$ が topo-bisimulation であることを示せばよい．$z \rightleftharpoons z'$ ならば, $\rightleftharpoons$ の与え方から任意の $P \in Prop(\subseteq Formula)$ に対し $M, z \models P \Leftrightarrow M', z' \models P$ であるので $z \in \nu(P) \Leftrightarrow z' \in \nu'(P)$ が成立する．次に, (forth condition) が成立することを背理法により示す．つまり, $z \rightleftharpoons z'$ かつ $z \in u \in O$ であるとき, 任意の $u' \in O'$ に対し

$z' \in u'$ ならば 或る $y' \in u'$ が存在し, 任意の $y \in u$ に対し $y \not\rightleftharpoons y'$

と仮定する．このとき, $\rightleftharpoons$ の 与え方から, $y \not\rightleftharpoons y'$ は, "或る $\varphi \in Formula$ が存在し, この φ に対しては $M, y \models \varphi \Leftrightarrow M', y' \models \varphi$ が成り立たない" ということと同値である．そして, 次と同値であることに注意しておく．

或る $\varphi_y \in Formula$ が存在し $M, y \not\models \varphi_y$ かつ $M', y' \models \varphi_y$

今, 主張の条件より 位相モデル M が有限モデルであるので, u の要素も有限である．すなわち, 次の様に与えた $\Phi_{u'}$ が $Formula$ の要素となる (任意の $u' \in o'$ に対し 存在する $y' \in u'$ を一つ固定して与える).

$$\Phi_{u'} := \wedge\{\varphi_y \mid y \in u\}$$

すると φ_y の性質から $M', y' \models \Phi_{u'}$ かつ任意の $y \in u$ に対して $M, y \not\models \Phi_{u'}$ が導かれる．したがって, 任意の $y \in u$ に対して $M, y \models \neg\Phi_{u'}$ である．ここまでを簡単にまとめると, 次の様になる．

$z \rightleftharpoons z'$ かつ $z \in u \in O$ であるとき, 任意の $u' \in O'$ に対し $z' \in u'$ ならば, 任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \neg\Phi_{u'}$ である．

また, このことは M' が 有限モデルであることから, 次の様に言い換えることができる．

$z \rightleftharpoons z'$ かつ $z \in u \in O$ であるとき 任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \wedge\{\neg\Phi_{u'} \mid u'$ は $z' \in u' \in O'$を満たす$\}$

すなわち, $z \rightleftharpoons z'$ かつ $z \in u \in O$ であるとき, "$z \in u$ かつ任意の $y \in u$ に対し $M, y \models \wedge\{\neg\Phi_{u'} \mid z' \in u' \in O'\}$" であるから, $M, z \models \Box \wedge \{\neg\Phi_{u'} \mid z' \in u' \in O'\}$ である．$z \rightleftharpoons z'$ より $M', z' \models \Box \wedge \{\neg\Phi_{u'} \mid z' \in u' \in O'\}$．定義より, 或る $v' \in O'$ が存在し, $z' \in v'$ かつ任意の $y'' \in v'$ に対し, $M', y'' \models \wedge\{\neg\Phi_{u'} \mid z' \in u' \in O'\}$．$z' \in v' \in O'$ であるから, 特に, 任意の y'' に対し $M, y'' \models \neg\Phi_{v'}$ である．しかし, $\Phi_{v'}$ の与え方から, 或る $y' \in v'$ が存在し $M', y' \models \Phi_{v'}$ であるから, 矛盾である．また (back condition) についても, 同様に示される．
Q.E.D.

これらのことから, 2 つの位相モデル間の関係である topo-bisimulation が論理式の意味を変えない関係であること, また, その逆に有限位相モデル間における論理式の意味を変えない関係が topo-bisimulation の関係にあることがわかった．

この次は, topo-bisimulation と連続写像との関わりについて触れる．

Theorem 3.3.3. $\langle X, O, \nu\rangle$, $\langle X', O', \nu'\rangle$ を位相モデルとし, f を X から X' への写像で, 任意の $P \in Prop$ に対し $\nu(P) = f^{-1}(\nu'(P))$ であるとする．このとき,

f が連続ならば, 関係 f^{-1} により M が M' を *simulation* する $(M' \rightharpoonup M)$.

Proof: $X' \times X$ 上の関係 $\rightharpoonup$ を, それぞれの $(x', x) \in X' \times X$ に対し $x' \rightharpoonup x \Leftrightarrow x' = f(x)$ と定める．まず, f の条件より, 任意の $P \in Prop$ に対し $f^{-1}(\nu'(P)) = \nu(P)$ であるから, 任意の $(x', x) \in X' \times X$ に対して $x' \in \nu'(P) \Leftrightarrow x \in \nu(P)$ である．また, $x' \rightharpoonup x$ かつ $x' \in u' \in O'$ であるとき, $u := f^{-1}(u')$ と定めると $x \in u$ であり, 任意の $y \in u$ に対し $y' := f(y)$ と定めれば $y' \rightharpoonup y$ である．すなわち, $\rightharpoonup$ は $X' \times X$ 上の topo-simulation である．よって, $\rightharpoonup$ により M が M' を simulation すると言える．Q.E.D.

Theorem 3.3.4. $\langle X, O, \nu\rangle$, $\langle X', O', \nu'\rangle$ を位相空間とし, f を X から X' への写像で, 任意の $P \in Prop$ に対し $\nu(P) = f^{-1}(\nu'(P))$ を満たすものとする．このとき,

> f が全射であり X 上連続かつ開写像であるならば, f は全面的な topo-bisimulation である.

特に, f が位相同型写像であるならば, f は全面的な topo-bisimulation である.

Proof: $X \times X'$ 上の関係を $x \rightleftharpoons x' \Leftrightarrow x' = f(x)$ と定めると, 前定理 Theorem 3.3.3 と同様にして示される．Q.E.D.

3.4 様々な位相空間における完全性定理

$\langle X, O\rangle$ を位相空間とし, φ を $\varphi \in Formula$ とする．このとき, $\Gamma \models_{\langle X,O\rangle} \varphi$ であるとは,

> $M = \langle X, O, \nu\rangle$ である任意の位相モデルと, それぞれの $x \in X$ に対し, $M, x \models \psi$ が すべての $\psi \in \Gamma$ に対して成り立つならば $M, x \models \varphi$

であることとする.

前節に触れた topo-bisimulation の性質を用いて, *Aiello*[1] により証明が行われた空間を用いた S4 の完全性がある．位相空間に関する完全性とは, 以下の様な主張である．$\mathcal{L}$ を S4 より強い (S4 を含む) 様相論理であるとする.

Definition 3.4.1. $\langle X, O\rangle$ を位相空間とする．このとき, 様相論理 $\mathcal{L}$ が空間 $\langle X, O\rangle$ に関し完全であるとは, 任意の $\Gamma \subseteq Formula$, すべての $\varphi \in Formula$ に対して

> $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ならば $\Gamma \models_{\langle X,O\rangle} \varphi$

であることをいう.

この位相空間に関する完全性定理の証明にはクリプキモデルから作られる位相モデルを用いている．その構築には, 反射律と推移律とを満たす擬順序 (quasi-order) と開集合系との関係を利用している．まずは, その内容について述べていくことにする.

Theorem 3.4.1. $M = \langle X, R, \nu \rangle$ を S4 モデル (R が W 上の擬順序) であるとする．このとき，

> 或る位相モデル $M_R = \langle X, O_R, \nu_R \rangle$ が存在し，すべての $\varphi \in Formula$，任意の $x \in X$ に対し $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M_R, x \models \varphi$ である．

すなわち，与えられた S4 モデルに対し論理式の意味を変えないような位相モデルが存在するということである．

Proof: $O_R = \{u \mid u$ は X の部分集合で R についての upward closed set$\}$ とする．ただし，u が R についての upward closed set であるとは $x \in u$ かつ xRy ならば $y \in u$ が成り立つこととする．このとき，O_R は X の開集合系となる．また，すべての $P \in Prop$ に対し，$\nu_R(P) := \nu(P)$ とすれば，帰納法により，すべての $\varphi \in Formula$，任意の $x \in X$ に対し $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M_R, x \models \varphi$ であることが導かれる．Q.E.D.

逆に，位相モデル $M = \langle X, O, \nu \rangle$ に対し，S4 モデル $M_O = \langle X, R_O, \nu \rangle$ を

$$xR_O y \Leftrightarrow y \in \cap\{u \in O \mid x \in u\}$$

とすることにより構築することができるが，一般に $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M_O, x \models \varphi$ であることが証明できない．しかし，$\langle X, O \rangle$ がアレクサンドロフ空間であるとき，すなわち，任意の $x \in X$ に対し

> X の部分集合である $\cap\{u \in O \mid x \in u\}$ が開集合

であるときには $M, x \models \varphi \Leftrightarrow M_O, x \models \varphi$ であることが示される．

この様にして与えられた位相モデルに対して，以下のことがわかっている [1].

Theorem 3.4.2. $M = \langle X, R, \nu \rangle$ を X に R に関する最小元をもつ有限 S4 モデルとする．このとき，或る位相モデル $M_\Sigma = \langle \Sigma, O_\Sigma, \nu_\Sigma \rangle$ が存在し，

> M_R と M_Σ との間に全面的な topo-bisimulation が存在し，かつ
> 位相空間 $\langle \Sigma, O_\Sigma \rangle$ とカントル空間 C とが位相同型である．

Theorem 3.4.3. $M = \langle X, R, \nu \rangle$ を X に R に関する最小元をもつ有限 S4 モデルとする．このとき，或る位相モデル $M_{\Sigma'} = \langle \Sigma', O_{\Sigma'}, \nu_{\Sigma'} \rangle$ が存在し，

> M_R と $M_{\Sigma'}$ との間に全面的な topo-bisimulation が存在し，かつ
> 位相空間 $\langle \Sigma', O_{\Sigma'} \rangle$ と開区間 $(0, 1)$ とが位相同型である．

これら 2 つの定理から，S4 モデルが与えられたとき，それぞれの空間 C や $(0, 1)$ に対して論理式の意味を変えない位相モデルを構築することができることを表している．また，これら 2 つの定理から，それぞれの空間における完全性定理が導かれる．

Theorem 3.4.4. S4 は, カントル空間に関し完全である.

Proof: 対偶を示す. $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であるとする. クリプキモデルにおける $\mathcal{L}$ の完全性定理により, 最小元をもつ或る有限 S4 モデル $M = \langle X, R, \nu \rangle$ が存在し, 或る $x \in X$ において, すべての $\psi \in \Gamma$ に対し $M, x \models \psi$ であるが $M, x \not\models \varphi$ となる. Theorem 3.4.1 より, 或る位相モデル $M_R = \langle X, O_R \rangle$ に対してすべての $\psi \in \Gamma$ に対し $M_R, x \models \psi$ かつ $M_R, x \not\models \varphi$ である. また, Theorem 3.4.2 により, 或る位相モデル $M_\Sigma = \langle \Sigma, O_\Sigma, \nu_\Sigma \rangle$ が存在し M_R と全面的な topo-bisimulation の関係にあるから, 或る $\sigma \in \Sigma$ が存在し $x \rightleftharpoons \sigma$ である. topo-bisimulation は論理式の解釈 (真偽) を変えないので $M_\Sigma, \sigma \models \psi$ かつ $M_\Sigma, \sigma \not\models \varphi$. また, $\langle \Sigma, O_\Sigma \rangle$ がカントル空間 C と或る位相同型写像 f により位相同型であるので, すべての $\psi \in \Gamma$ に対し $C, f(\sigma) \models \psi$, かつ $C, f(\sigma) \not\models \varphi$ である. すなわち, $\Gamma \not\models_C \varphi$ である. Q.E.D.

Theorem 3.4.5. S4 は, 開区間 (0,1) に関し完全である.

前定理 Theorem 3.4.4 と同様にして示される.

また, この定理と関連して次の定理も成立する.

Theorem 3.4.6. S4 は, 実数 $\mathcal{R}$ に関し完全である.

証明は, $tan(\pi x + \frac{\pi}{2})$ が区間 (0,1) から実数 $\mathcal{R}$ への位相同型写像であることを用いる.

Corollary 3.4.7. S4 は, ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$(n は自然数) に関し完全である.

証明は, $\mathcal{R}^n$ から $\mathcal{R}$ への射影 $pr_1(x_1, ..., x_n) = x_1$ がユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ から実数 $\mathcal{R}$ への全射かつ連続開写像であるから, $\mathcal{R}^n$ 上の付値 ν^n を, すべての $P \in Prop$ に対し, $\nu^n(P) := {pr_1}^{-1}(\nu(P))$ と定めれば (ν は R 上の付値), Proposition3.3.4 により, pr_1 が (関係としてみたとき) 全面的な topo-bisimulation であることから示される.

これらの完全性に関し, 次のことに注意しておく. カントル空間は, 位相空間としてコンパクトなハウスドルフ空間であり, 超距離 (ultra metric) を持つことが知られている [5]. それに対し, 実数空間は位相空間としてコンパクトでないハウスドルフ空間であり, 有理数 $\mathcal{Q}$ により可分であることが知られている.

この章のまとめと考察

S4 および S4 より強い様相論理は, カノニカル空間を含め位相空間として全く異なる性質を持つ様々な空間との間に完全性を持つことがわかった.

その理由は, これら完全性定理の証明において, 証明不可能な論理式の反例モデルを構築しているが, 重要なのは証明不可能な論理式の構成 (部分論理式) とそれを否定するのに

必要な点 (の集まり) で, 必ずしもすべての開集合や点と関わっているのでは無いことによると考えられる. ここにおいて, S4 を完全にする様な位相モデルの中で最小の開集合系をもつ位相モデルを考えることは, 意味があると考えられる.

第4章　部分集合空間論理

この章と次の章では, 2 つの様相演算子 $(\Box, K)$ をもつ言語をもつ部分集合空間論理という様相論理について議論を行なう.

この章の前半では, まず 2 つの様相演算子を扱うための言語を述べたあと, その言語における論理記号の意味論について述べ, 部分集合空間論理という様相論理体系を定義する. また, この章の後半では, 前半で与えられた意味論 (モデル) において一般によく知られた Truth Lemma とは少し異なる Truth Lemma について述べたあと, その Truht Lemma を用いてその意味論において部分集合空間論理が完全であることを述べる.

4.1　言語

この節では, これから 2 つの章に渡って扱う部分集合空間論理を表現する為の言語について, 述べることにする. まず, $Prop$ を可算の命題変数の集合であるとする. その $Prop$ に対し, 集合 Formula を以下の様に帰納的に定める.

Definition 4.1.1. (i) $P \in Prop$ ならば $P \in Formula$

(ii) $\varphi, \chi \in Formula$ ならば $(\varphi \wedge \chi) \in Formula$

(iii) $\varphi \in Formula$ ならば $(\neg\varphi) \in Formula$

(iv) $\varphi \in Formula$ ならば $(\Box\varphi) \in Formula$

(v) $\varphi \in Formula$ ならば $(K\varphi) \in Formula$

2 章で行った様に, カッコは混乱が生じない程度に省略してよいものとし, $\varphi \vee \chi$ を $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\chi)$ の省略記号, $\varphi \to \chi$ を $\neg\varphi \vee \chi$ の代わりの記号として用い, $\Diamond\varphi$ を $\neg\Box\neg\varphi$ の省略記号, $L\varphi$ を $\neg K \neg\varphi$ の省略記号として用いる.

4.1.1　セマンティクス

次に, この言語に対し解釈を与える. そこで, 最初にフレーム, モデルの順に述べることにする.

Definition 4.1.2. $\langle X, O\rangle$ が部分集合フレームであるとは, X が集合であり, O が X のべき集合 $P(X)$ の部分集合かつ O が空集合でないことをいう. また, $M = \langle X, O, \nu\rangle$ が部分集合モデルであるとは, $\langle X, O\rangle$ が部分集合フレームであり, ν が $Prop$ から $P(X)$ への写像であることをいう. このとき, ν を M 上の付値 (valuation) という.

このモデルを用いて, $\varphi \in Formula$ の解釈 $x, u \models \varphi$ (ただし, $x \in X$, $u \in O$ であるとし, さらに $x \in u$ であるとする) を次の様にして定義する.

Definition 4.1.3. $M = \langle X, O, \nu \rangle$ を部分集合モデルとする. $x \in X$ かつ $x \in u$ である $u \in O$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&\text{すべての } P \in Prop \text{ 対し } x, u \models P \Leftrightarrow x \in \nu(P)\\
&x, u \models \varphi \land \chi \Leftrightarrow x, u \models \varphi \text{ かつ } x, u \models \chi\\
&x, u \models \neg\varphi \Leftrightarrow x, u \not\models \varphi\\
&x, u \models \Box\varphi \Leftrightarrow \text{任意の } v \in O \text{ に対し}, v \subseteq u \text{ ならば } x, v \models \varphi\\
&x, u \models K\varphi \Leftrightarrow \text{任意の } y \in u \text{ に対し } y, u \models \varphi
\end{aligned}
$$

x を視点, u を x を含む視界と捉え, $x, u \models \varphi$ を, 視点 x と視界 u の組み合わせでは, φ が真であると解釈するとする.

このとき, $x, u \models \Box\varphi$ は, 次の様に捉えることができる. (現在の) 視界 u 内部の x を含むようなどんな視界 v においても, 視点 x と視界 v の組み合わせで φ が真になる. すなわち, $x, u \models \varphi$ とは, "視点を変えず, 与えられた視界 u の内部でどの様に視界を変えてもその視点と (u 内部の) 視界との組み合わせにおいては, φ が真である" と捉えることができる.

また, この様な捉え方において $x, u \models K\varphi$ は, "視界を変えずその視界内のどの視点をとっても, その視界と視界内の視点の組み合わせにおいて φ が真になる" と捉えることができる.

4.1.2 公理系

次に, 部分集合空間論理 (subset space logic) と呼ばれる様相論理体系について述べる. $\mathcal{L}$ が部分集合空間論理であるとは, $\mathcal{L}$ が性質

$$
\begin{aligned}
&(\Box\text{-N})\ \varphi \in \mathcal{L} \text{ ならば} \Box\varphi \in \mathcal{L}\\
&(K\text{-N})\ \varphi \in \mathcal{L} \text{ ならば } K\varphi \in \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

を持ち, かつ $\mathcal{L}$ が命題論理におけるトートロジーの代入例をすべて含み, 以下の公理系を含むものとする. P は命題変数 ($P \in Prop$) である.

$$
\begin{aligned}
&(P \to \Box P) \land (\neg P \to \Box\neg P)\\
&\Box(\varphi \to \chi) \to (\Box\varphi \to \Box\chi)\\
&\Box\varphi \to \varphi\\
&\Box\varphi \to \Box\Box\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K(\varphi \to \chi) \to (K\varphi \to K\chi)\\
&K\varphi \to \varphi\\
&K\varphi \to KK\varphi\\
&L\varphi \to KL\varphi\\
&K\Box\varphi \to \Box K\varphi
\end{aligned}
$$

一番最後の公理 $K\Box\varphi \to \Box K\varphi$ をクロス公理 (cross axiom) という．また, $\Box$ に関する公理は S4, K に関する公理は S5 の様になっていることに注意する (S4, S5 については 2 章参照)．今後, 特に断わらない限り $\mathcal{L}$ を任意の部分集合空間論理であるとする．

この次の節 (4.2 節) では完全性定理を示す．その完全性定理の証明には極大無矛盾集合を用いるがカノニカルモデルは構築せず, 極大無矛盾集合 Γ_{max} ごとに反例モデルを構築する．そこで, どの様にモデルの構築をするのか, その手順を順に述べていくことにする．

$X^{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合全体の集合とする．極大無矛盾集合間に, 関係 $\xrightarrow{\Diamond}, \xrightarrow{L}$ を次の様に定義する．

Definition 4.1.4. $U, V \in X^{\mathcal{L}}$ であるとする．このとき, 関係 $\xrightarrow{\Diamond}, \xrightarrow{L}$ を

$$U \xrightarrow{\Diamond} V \Leftrightarrow \text{任意の}\varphi \in Formula\text{ に対し}\varphi \in V\text{ ならば}\Diamond\varphi \in U$$
$$U \xrightarrow{L} V \Leftrightarrow \text{任意の}\varphi \in Formula\text{ に対し}\varphi \in V\text{ ならば }L\varphi \in U$$

と定義する．

以上の様に定義された関係 $\xrightarrow{\Diamond}, \xrightarrow{L}$ は次の様な性質をもつ．

Proposition 4.1.1. *$\varphi \in Formula$ であり, $U \in X^{\mathcal{L}}$ であるとする．*

(1) $\xrightarrow{\Diamond}$ は, $X^{\mathcal{L}}$ 上の擬順序である．
(2) $\xrightarrow{L}$ は, $X^{\mathcal{L}}$ 上の同値である．
(3) $\Diamond\varphi \in U$ ならば或る $V \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $U \xrightarrow{\Diamond} V$
(4) $L\varphi \in U$ ならば或る $V \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $U \xrightarrow{L} V$

クロス公理に関連し, 関係 $\xrightarrow{\Diamond}, \xrightarrow{L}$ において次の性質をもつ．

Proposition 4.1.2. *(Cross axiom property)* 与えられた $U, V, W \in X^{\mathcal{L}}$ が $U \xrightarrow{\Diamond} W \xrightarrow{L} V$ であるとき,

或る $T \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し, $U \xrightarrow{L} T \xrightarrow{\Diamond} V$

が成り立つ．

Proof: S を

$$S := \{\varphi \mid K\varphi \in U\} \cup \{\Diamond\chi \mid \chi \in V\}$$

と定める．まず, この S が無矛盾であることを背理法により示す．そこで, S が矛盾集合と仮定する．S は無矛盾であるから, 定義より或る $K\varphi_1, ..., K\varphi_m \in U$ および, 或る $\chi_1, ..., \chi_n \in V$ (m, n は自然数) が存在し

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m \wedge \Diamond\chi_1 \wedge ... \wedge \Diamond\chi_n \to \bot$$

ここで φ, χ をそれぞれ $\varphi := \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$, $\chi := \chi_1 \wedge ... \wedge \chi_n$ とする．このとき, $K\varphi \in U$, $\chi \in V$ であることに注意しておく．さて, いま $j = 1, ..., n$ に対し $\vdash_{\mathcal{L}} \chi \to \Diamond\chi_j$ であるから, $\vdash_{\mathcal{L}} \Diamond\chi \to \Diamond\chi_1 \wedge ... \wedge \Diamond\chi_m$．また, $\vdash_{\mathcal{L}} \Diamond\chi_1 \wedge ... \wedge \Diamond\chi_n \to (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m \to \bot)$ であるので $\vdash_{\mathcal{L}} \Diamond\chi_1 \wedge ... \wedge \Diamond\chi_n \to \neg\varphi$, すなわち $\vdash_{\mathcal{L}} \Diamond\chi \to \neg\varphi$ となるから, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Diamond\chi \to L\neg\varphi$．極大無矛盾集合の性質より,

$$L\Diamond\chi \to L\neg\varphi \in U$$

である．他方, $\chi \in V$ であり $W \xrightarrow{L} V$ であったので $L\chi \in W$．また, $U \xrightarrow{\Diamond} W$ であるから $\Diamond L\chi \in U$．クロス公理より $\Diamond L\chi \to L\Diamond\chi \in U$ であるから, $L\Diamond\chi \in U$．すなわち, $L\neg\varphi \in U$．言い換えれば $\neg K\varphi \in U$ となるが, これは, 以前に述べた $K\varphi \in U$ であることと矛盾する．よって, 集合 S は無矛盾集合である．ここで, *Lindenbaum's Lemma* より 或る極大無矛盾集合 $T \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $S \subseteq T$．すなわち, $U \xrightarrow{L} T \xrightarrow{\Diamond} V$ である．この T が求める極大無矛盾集合である． Q.E.D.

Proposition 4.1.2 の一般形として次の Proposition が成り立つ.

Proposition 4.1.3. *与えられた $U_1, ...U_n \in X^{\mathcal{L}}$($n$ は自然数) に対し, $U_1 \xrightarrow{\Diamond} ... \xrightarrow{\Diamond} U_n$ かつ $U_n \xrightarrow{L} V$ が成り立っているとする．このとき,*

> *或る $V_1, ...V_n$ が存在し, $V_1 \xrightarrow{\Diamond} ... \xrightarrow{\Diamond} V_n$ であり $V_n = V$ かつ $U_j \xrightarrow{L} V_j$ が n 以下のそれぞれの自然数 j に対して成り立つ*

ことである.

Proof: Proposition 4.1.2 を帰納的に適用する.

4.2 完全性

完全性定理を示すためによく知られているのは, カノニカルモデルを用いた方法である．ここで, 着目しておきたいことはカノニカルモデルにおける *Truth Lemma* が"或るモデル (カノニカルモデル) が存在し任意の極大無矛盾集合に対して"の主張であるのに対し, 次に挙げる *Truth Lemma* は,

> "任意の極大無矛盾集合に対し或るモデルが存在し"

という主張であることである．つまり, ここでは, 極大無矛盾集合 T ごとにモデルを構築していることである．すなわち, 一般によく知られている *Truth Lemma* を弱めた主張である.

Lemma 4.2.1. *(Truth Lemma)* 任意の $T \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, 或る部分集合モデル $M = \langle X, O, \nu \rangle$ が存在し, すべての $\varphi \in Formula$ に対し

或る $x \in X$, 或る $u \in O$ に対して $x, u \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$ が成り立つ.

この *Truth Lemma* の証明のおおまかなスケッチを述べることにする. T を与えられた極大無矛盾集合 ($T \in X^{\mathcal{L}}$) であるとする. このとき, 次の性質をもつ $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ を構築する. x_0 が与えられたとする.

(M1) X は, x_0 を要素とする集合 ($x_0 \in X$)
(M2) $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$ は, 順序集合で最小元 p_0 を持つ.
(M3) i は P から $P(X) \backslash \{\emptyset\}$ への写像で, $i(p_0) = X$ かつ任意の $p, q \in \mathcal{P}$ に対し

$$p \leq q \Leftrightarrow i(q) \subseteq i(p)$$

である.
(M4) t は, 直積集合 $X \times P$ から $X^{\mathcal{L}}$ への写像であり, $t(x,p)$ が定義されるための必要十分条件は $x \in i(p)$ である. さらに, $x \in i(p)$ である任意の $x \in X$, 任意の $p \in P$ に対し,

(M4a1) $y \in i(p)$ ならば $t(x,p) \xrightarrow{L} t(y,p)$
(M4a2) $L\varphi \in t(x,p)$ ならば或る $y \in i(p)$ が存在し $\varphi \in t(y,p)$
(M4b1) $p \leq q$ ならば $t(x,p) \xrightarrow{\Diamond} t(x,q)$
(M4b2) $\Diamond\varphi \in t(x,p)$ ならば或る $q \in \mathcal{P}$ が存在し $p \leq q$ かつ $\varphi \in t(x,q)$
(M4c) $t(x_0, p_0) = T$

ここで, 与えられた極大無矛盾集合 T に関し以上の性質をもつ $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ が構築できたならば, モデル $M_T = \langle X, O, \nu \rangle$ を次の様に定める.

$O := \{i(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$,
すべての $Q \in \mathit{Prop}$ に対し $\nu(Q) := \{x \in X \mid Q \in t(x, p_0)\}$

$O \subseteq P(X)$ であるので, この M_T は部分集合モデルである. このモデル M_T に対し, 次が成立する.

Proposition 4.2.2. 与えられた $p, q \in \mathcal{P}$ が $p \leq q$ であるとする. このとき, $x \in i(q)$ である任意の $x \in X$, およびすべての $Q \in \mathit{Prop}$ に対し,

$$Q \in t(x,p) \Leftrightarrow Q \in t(x,q)$$

である.

特に, 任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し, $x \in i(p)$ ならば $Q \in t(x, p_0) \Leftrightarrow Q \in t(x,p)$ である.

Proof: $p \leq q$ であるとする (ただし, $p, q \in \mathcal{P}$). このとき, 性質 (M4b1) から $t(x,p) \xrightarrow{\Diamond} t(x,q)$ であり, $(Q \rightarrow \Box Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \Box \neg Q)$ が公理の代入例であることに注意する.

$Q \in t(x,p)$ とする．$Q \to \Box Q$ は $\mathcal{L}$ で証明可能であり $t(x,p)$ は極大無矛盾集合であるから $Q \to \Box Q \in t(x,p)$．すなわち，$\Box Q \in t(x,p)$ である．$t(x,p) \overset{\Diamond}{\to} t(x,q)$ であるから，$Q \in t(x,q)$ である．まとめると，$Q \in t(x,p)$ ならば $Q \in t(x,q)$ である．逆 $(\Leftarrow)$ は，$\Diamond Q \to Q$ が $\mathcal{L}$ で証明可能であることを利用する．Q.E.D.

Proposition 4.2.3. $x \in i(p)$ である任意の $x \in X$ および，任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し

(a) $L\varphi \in t(x,p) \Leftrightarrow$ 或る $y \in i(p)$ が存在し，$\varphi \in t(y,p)$
(b) $\Diamond\varphi \in t(x,p) \Leftrightarrow$ 或る $q \in \mathcal{P}$ が存在し，$p \leq q$ かつ $\varphi \in t(x,q)$

がすべての $\varphi \in Formula$ に対し成り立つ．

(a) は，性質 (M4a1), (M4a2) から導かれ，(b) は，性質 (M4b1), (M4b2) から導かれる．
以上により，与えられた極大無矛盾集合 T に対し，構築された部分集合モデル M_T が次の性質をもつことが示される．

Lemma 4.2.4. 任意の極大無矛盾集合 $T \in X^{\mathcal{L}}$ に対し，$X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ が上述の (M1) から (M4) の性質すべてを持つとする．このとき，任意の $x \in X$，任意の $p \in \mathcal{P}$ $(x \in i(p))$ に対し

$x, i(p) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in t(x,p)$ がすべての φ に対し成り立つ．

特に，すべての $\varphi \in Formula$ に対し，$x_0, X \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$ である．

Proof: 論理式の構成に関する帰納法により証明を行なう．base case として $\varphi = P \in Prop$ であるとき，$x, i(p) \models P$ は，$x \in \nu(P)$ と同値であり，さらに $\nu(P)$ の定義から $P \in t(x,p_0)$ と同値である．今，$x \in i(p)$ であるから Proposition4.2.2 により，$P \in t(x,p)$ と同値である．
次に $\varphi = \chi \wedge \psi$，または $\varphi = \neg\chi$ であるときには，$\models$ の定義により直ちに導かれる．$\varphi = L\chi$ であるとき，$x, i(p) \models L\chi$ は，定義より或る $y \in i(p)$ が存在し $y, i(p) \models \chi$ であることと同値である．このとき帰納法の仮定より，($x \in i(p)$ であることにも注意すると) このことは

或る $y \in i(p)$ が存在し $\chi \in t(y,p)$

と表される．Proposition 4.2.3(a) により，この主張は $L\chi \in t(x,p)$ と同値となる．すなわち，$x, i(p) \models L\chi \Leftrightarrow \varphi \in t(x,p)$ である．
また，$\varphi = \Diamond\chi$ であるときは $\varphi = L\chi$ のときと同様に示される．Q.E.D.

ここで，この Lemma 4.2.4 から次のことが言える．すなわち，任意の極大無矛盾集合 T に対し，(M1) から (M4) すべてを満たす $X, \mathcal{P}, i, t$ が構築できるならば或る部分集合モデル $M_T = \langle X, O, \nu \rangle$ が存在し，

すべての $\varphi \in Formula$ に対し　$x, X \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$

が成り立つ. すなわち, *Truth lemma* が満たされる.

次に, 考えることは 性質 (M1),(M2),(M3),(M4) をもつ $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ の組が存在するかどうかということである. 実際には, 次の様な性質をもつ $X_n, \langle \mathrm{P_n}, \leq_n \rangle, i_n, t_n$ (n は自然数) の組を用いて $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ を定義する.

極大無矛盾集合 $T \in X^{\mathcal{L}}$ が与えられているとする. まず, $X_n, \langle \mathrm{P_n}, \leq_n \rangle, i_n, t_n$ が持つ局所的な性質から述べることにする.

(L1) X_n は, x_0 を要素としてもつ有限集合.
(L2) $\langle \mathcal{P}_n, \leq_n \rangle$ は, p_0 を最小元としてもつ順序集合であり, 任意の $p \in \mathcal{P}_n$ に対し

$\downarrow (p) := \{q \in \mathcal{P}_n \mid p \leq q\}$ が全順序 (線形順序).

(L3) i_n は, $\mathcal{P}_n$ から (要素を 2 つ以上もつ $P(X)$ の部分集合) $P^{**}(X)$ への写像で, 任意の $p, q \in \mathcal{P}_n$ に対し

(1) $p \leq q \Leftrightarrow i_n(q) \subseteq i_n(p)$ であり,
(2) $i_n(p_0) = X_n$

(L4) t_n は, $X_n \times \mathcal{P}_n$ から $X^{\mathcal{L}}$ への部分写像で, $t_n(x, p)$ が定義される為の必要十分条件は $x \in i_n(p)$ であり, さらに任意の $x \in X_n$ および任意の $p \in \mathcal{P}(x \in i_n(p))$ に対し

(L4a) $y \in i_n(p)$ ならば $t_n(x, p) \xrightarrow{L} t_n(y, p)$
(L4b) $x \in i_n(q)$ かつ $p \leq q$ ならば $t_n(x, p) \xrightarrow{\Diamond} t_n(x, q)$
(L4c) $t_n(x_0, p_0) = T$

次に, 大域的な性質をのべる.

(G1) $X_n \subseteq X_{n+1} (n = 0, 1, 2, 3, ...)$
(G2) $\mathcal{P}_n$ は, $\mathcal{P}_{n+1}$ 部分順序集合であり, 任意の $p \in \mathcal{P}_{n+1}$, 任意の $q \in \mathcal{P}_n$ に対し

$p \leq_{n+1} q$ ならば $p \in \mathcal{P}_n$

(G3) 任意の $p \in \mathcal{P}_{n+1}$ に対し

$i_{n+1}(p) \cap X_n = i_n(p)$

(G4) t_{n+1} の $X_n \times \mathcal{P}_n$ に対する制限が, ちょうど t_n になっている. すなわち, 任意の $x \in X_n$, 任意の $p \in \mathcal{P}_n$ に対し

$t_{n+1}(x, p) = t_n(x, p)$

である.

最後に, 次の性質も必要とする.

(R4a) $L\varphi \in t_n(x,p)$ ならば或る自然数 $m < n$ が存在し

或る $y \in i_m(p)$ に対し $\varphi \in t_m(y,p)$

(R4b) $\Diamond\varphi \in t_n(x,p)$ ならば或る自然数 $m < n$ が存在し

或る $q \in \mathcal{P}_m$ に対し, $p \leq_m q$ かつ $\varphi \in t_m(x,q)$

以上の様な性質をもつ $X_n, \langle \mathcal{P}_n, \leq_n \rangle, i_n, t_n$ が与えられたとき, $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle$, を以下の様に定める.

(1) $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$

(2) $\mathcal{P} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ とし $\leq := \bigcup_{n=0}^{\infty} \leq_n$

(3) $p \in \mathcal{P}$ に対し, m を $m = min\{k \mid p \in \mathcal{P}_k\}$ である自然数または 0 ($m = 0$ であるときは, $p = p_0$ を意味する) としたとき,

$$i(p) := \bigcup_{n>m}^{\infty} i_{n+1}(p)$$

(4) 任意の $x \in X$, 任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し n を $t_n(x,p)$ が定義される任意の自然数とする. この n に対し

$$t(x,p) := t_n(x,p)$$

性質 (G4) により, この定義は矛盾無く定義される.

以上の様に定めた $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ に対し, 次が成立する.

Proposition 4.2.5.

(1) 任意の $p \in \mathcal{P}_n$ に対し, $i_{n+k}(p) \cap X_n = i_n(p) \quad (k = 1, 2, 3, ...)$

すなわち, 任意の $j \geq n$ に対し $i_j(p) \cap X_n = i_n(p)$ である.

(2) 任意の $p \in \mathcal{P}$, 任意の $l \geq m$ に対し, $i(p) \cap X_l = i_l(p)$
ただし, m は $m = min\{k \mid p \in p \in \mathcal{P}_k\}$ である自然数または 0 とする.

(3) 任意の $p, q \in \mathcal{P}$ に対し, $p \leq q \Leftrightarrow i(q) \subseteq i(p)$ であり, さらに $i(p_0) = X$

Proof:

(1) 任意の $p \in \mathcal{P}$, $k = 1, 2, 3, ...$ に対し, 性質 (G3) より $i_{n+k}(p) \cap X_n = (i_{n+k-1}(p) \cap X_{n+k-1}) \cap X_n$. $n + k - 1 \geq n$ であるから性質 (G1) (X_j が単調増加) よりこの右辺の集合は, $i_{n+k-1}(p) \cap X_n$ と一致する. これを帰納的にくり返すと, $i_{n+k}(p) \cap X_n = i_n(p) \cap X_n$ が得られる. すなわち, $i_{n+k}(p) \cap X_n = i_n(p)$ である.

(2) 任意の $p \in \mathcal{P}$, 任意の $l \geq m$ に対して, $i(p)$ の定義により $i(p) \cap X_l = \bigcup_{j>m} i_{j+1}(p) \cap X_l$ である. $i_j(p)$ は j に関して単調増加であるから この右辺の集合は $\bigcup_{j>l}(i_{j+1}(p) \cap X_l)$ と一致する. また, $p \in \mathcal{P}_l$ であるから, この Proposition の (1) より, 任意の $j > l$ に対し $i_{j+1}(p) \cap X_l = i_l(p)$ すなわち, $\bigcup_{j>l}(i_{j+1}(p) \cap X_l) = i_l(p)$. 以上により, $i(p) \cap X_l = i_l(p)$ である.

(3) 任意の $p, q \in \mathcal{P}$ に対し, 0 または自然数である或る m, n が存在し $p \in \mathcal{P}_m \backslash \mathcal{P}_{m-1}$ かつ $q \in \mathcal{P}_n \backslash \mathcal{P}_{n-1}$ (ただし, 便宜上 $\mathcal{P}_{-1} = \emptyset$ としておく). この m, n において, $l := max\{m, n\}$ とする. このとき, $i(q) \subseteq i(p)$ ならば, $i(q) \cap X_l(q) \subseteq i(p) \cap X_l$ であるから, この Proposition の (2) より $i_l(q) \subseteq i_l(p)$ である. 性質 (L3) により $p \leq_l q$ であり, $\leq_l$ は $\leq$ の部分順序であるから $p \leq q$ である. 逆に $p \leq q$ であるとき, l の与え方から $p \leq_l q$ であり, また $\leq_j$ は j に関し単調増加であるから, 任意の $j \geq l$ に対し $p \leq_j q$. 性質 (L3) より, 任意の $j \geq l$ に対し $i_j(q) \subseteq i_j(p)$ である. したがって, $\bigcup_{j>l} i_{j+1}(q) \subseteq \bigcup_{j>l} i_{j+1}(p)$ が得られる. $m, n \leq l$ であったので, このことは $\bigcup_{j>n} i_{j+1}(q) \subseteq \bigcup_{j>m} i_{j+1}(p)$ と言い換えることができる. すなわち, $i(q) \subseteq i(p)$ である.

また, $i(p_0) = \bigcup_{n>0} i_{n+1}(p) = \bigcup_{n>0} X_{n+1}$ であり, X_j は j に関し単調増加であるので, $\bigcup_{n>0} X_{n+1}$ $= \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. よって, $i(p_0) = X$ である. Q.E.D.

この Proposition を利用し, 以下の Proposition を示すことができる.

Proposition 4.2.6. $X_n, \langle, \mathcal{P}_n, \leq_n \rangle, i_n, t_n$ が (L1),(L2),(L3),(L4),(G1),(G2),(G3),(G4),(R1),(R2) を満たすとする *($n = 0, 1, 2, ...$).* このとき, 上述の様にして与えられた $X, \langle \mathcal{P}, \leq \rangle, i, t$ が性質 (M1),(M2),(M3),(M4) を満たす.

ここではその詳細に触れないが, 次の主張が成立することが知られている.

Lemma 4.2.7. 任意の極大無矛盾集合 T および, 0 または自然数であるすべての n 性質 (L1),(L2),(L3),(L4),(G1),(G2)
,(G3),(G4),(R1),(R2) をもつ $X_n, \langle \mathcal{P}_n, \leq_n \rangle, i_n, t_n$ が存在する.

この Lemma の証明において, 条件 (L2) の一部である

任意の $p \in \mathcal{P}_n$ に対し, $\downarrow(p)$ が線形順序

であることが本質的であり, それによりクロス公理の性質とも言える Proposition4.1.3 が適用できることに及んでいる. 詳しくは, 文献 [2] を参照されたい.

以上により, この節の冒頭から触れてきた *Truth Lemma* のスケッチができた. これをまとめると, 以下の様になる.

Lemma4.2.7 により, 任意の極大無矛盾集合 T に対し, 性質 (L)(G)(R) すべてをもつ 或る $X_n, \mathcal{P}_n, i_n, t_n (n = 1, 2, 3, ...)$ が存在し, さらに Proposition4.2.6 により, $X_n, \mathcal{P}_n, i_n, t_n (n = 1, 2, 3, ...)$ から構築される $X, \mathcal{P}, i, t$ が性質 (M) をもつ. この $X, \mathcal{P}, i, t$ から部分集合モデル $M_T = \langle X, O, \nu$ が構築できる. Lemma4.2.4 により, 或る $x_0 \in X$ に対し,

$x_o, X \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$ がすべての $\varphi \in Formula$ について成り立つ.

これにより, *Truth Lemma* が導かれる.

完全性定理

実際に前節で述べた *Truth Lemma* により, 完全性定理が成立することを確かめる. ここで, Γ, φ を $\Gamma \subseteq Formula$, $\varphi \in Formula$ であるとする. このとき, $\Gamma \models \varphi$ であるとは, 任意の $x \in X$, 任意の $u \in O$ に対し

$x, u \models \psi$ がすべての $\psi \in \Gamma$ において成り立つならば $x, u \models \varphi$

であることをいう.

Theorem 4.2.8. *(Completeness)* 任意の $\Gamma \subseteq Formula$ および すべての φ に対し

$\Gamma \models \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

が成り立つ.

Proof: 対偶を示す. $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$ とする. このとき, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾であるから, Lindenbaum's Lemma より或る極大無矛盾集合 $\Gamma_{max} \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma_{max}$ である. 特に, $\neg\varphi \in \Gamma_{max}$ である. *Truth Lemma* からこの Γ_{max} に対し, 或るモデル $M_{\Gamma_{max}} = \langle X, O, \nu \rangle$ が存在し, 或る $x_0 \in X$ に対し

$x_0, X \models \psi \Leftrightarrow \psi \in \Gamma_{max}$ がすべての $\psi \in Formula$ に対し成り立つ

ので, $x_0, X \models \neg\varphi$ である. すなわち, $x_0, X \not\models \varphi$ である.

他方で, 任意の $\chi \in \Gamma$ に対し $\chi \in \Gamma_{max}$ であるから, (上述と同じモデル)$M_{\Gamma_{max}}$ において, $x_0, X \models \chi$ である. ゆえに, $\Gamma \not\models \varphi$ である. Q.E.D.

まとめ

以上の様に部分集合空間論理 $\mathcal{L}$ が, 点と集合との両方を解釈に加えた部分集合モデル全体のクラスにおいて完全であることが示された. しかし, 現在 (2003 年) 部分集合モデルのクラスを有限の共通部分に関して閉じている様なモデルのクラス, (有限の共通部分に関して閉じていて任意の集合和に関して閉じている) 位相空間に付値を与えたモデルのクラスに限った意味論においては, まだ完全性が示されていないことをここに付け加えておく.

次の章では, 部分集合モデルではないモデルのクラスを考え, そのモデルのクラスを用いて部分集合空間論理が決定可能であることを導く.

第5章　部分集合空間論理の決定可能性

この章では, 前章に述べた部分集合空間論理の決定可能性について述べる. その決定可能性には, 有限公理化性と有限モデル性を用いるが部分集合モデルのクラスは有限モデル性を持たないことが知られている [2]. すなわち, 有限モデル性を示す為には, 部分集合モデル全体のクラスより広いモデル全体のクラスを必要とする. ただし, 部分集合モデル全体のクラスよりもモデルのクラス $\mathcal{C}$ が広いとは,

> 与えられた部分集合モデルに対し, $\mathcal{C}$ の要素である或るモデル M が存在し, 任意の論理式に対し, M における解釈 (充足可能性) が, 与えられた部分集合モデルと一致する

ことをここでは意味することにする.
　そこで, まず始めにそのモデルのクラスについて述べることにする.

5.1　クロス公理モデル

Definition 5.1.1. $\langle J, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\diamond}\rangle$ がクロス公理フレームであるとは, J が集合で, $\xrightarrow{L}$ が J 上の空でない同値関係であり, かつ $\xrightarrow{\diamond}$ が J 上の空でない擬順序であって, さらに次の性質をもつことである. 任意の $i, j, k \in J$ に対し,

$i \xrightarrow{\diamond} j \xrightarrow{L} k$ ならば, 或る $l \in J$ が存在し $i \xrightarrow{L} l \xrightarrow{\diamond} k$

　この定義における最後の条件と前章で述べた部分集合空間論理における性質 Proposition 4.1.2 との関係に注意しておく.

Definition 5.1.2. $\langle J, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\diamond}, \nu\rangle$ がクロス公理モデルであるとは, $\langle J, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\diamond}\rangle$ がクロス公理フレームであり, ν が $Prop$ から J のべき集合 $P(J)$ への写像であり, 任意の $i, j \in J$, およびすべての $P \in Prop$ に対し

$i \xrightarrow{\diamond} j$ ならば, $i \in \nu(P) \Leftrightarrow j \in \nu(P)$

であることをいう.

　最後の条件 $i \xrightarrow{\diamond} j$ ならば $i \in \nu(P) \Leftrightarrow j \in \nu(P)$ はクロス公理モデルが健全性をもつことを示す際, 具体的には公理 $(P \to \Box P) \wedge (\neg P \to \Box\neg P)$ がクロス公理フレームにおいて恒真になることを示す際に必要となることに注意しておく.

以下において, 部分集合モデルのクラスよりもクロス公理モデルのクラスが広いことを確かめる.

部分集合モデル $\langle X, O, \nu_0 \rangle$ が与えられたとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&J_X := \{(x,u) \in X \times O \mid x \in u\} \\
&(x,u) \xrightarrow{L} (y,v) \Leftrightarrow u = v \\
&(x,u) \xrightarrow{\Diamond} (y,v) \Leftrightarrow y = x \text{ かつ } v \subseteq u \\
&\nu(P) := \{(x,u) \in X \times O \mid x \in \nu_0(P) \cap u\}
\end{aligned}
$$

と定める. このとき,

Proposition 5.1.1. 任意の $i, j, k \in J_X$ に対し,

(1) $i \xrightarrow{\Diamond} j \xrightarrow{L} k$ ならば或る $l \in J$ が存在し $i \xrightarrow{L} l \xrightarrow{\Diamond} k$

(2) すべての $P \in Prop$ に対して, $i \in \nu(P)$ ならば $j \in \nu(P)$

Proof: $i = (x_i, u_i)$, $j = (x_j, u_j)$, $k = (x_k, u_k)$ と表すことにする.

(1) $i \xrightarrow{\Diamond} j \xrightarrow{L} k$ であるとする. このとき, $l = (x_l, u_l)$ を (x_k, u_i) と定めると, $i \xrightarrow{\Diamond} j$ であるから $u_j \subseteq u_i$ である. $j \xrightarrow{L} k$ より $u_j = u_k$ であり l の与え方から $u_i = u_l$ であるので, $x_l = x_k \in u_k \subseteq u_l$ である. すなわち, $l \in J$ でありそれ故 $l \xrightarrow{\Diamond} k$ である. 一方, l の与え方から $u_i = u_l$ であるから $i \xrightarrow{L} l$. 以上により, $l \in J$ かつ $i \xrightarrow{L} l \xrightarrow{\Diamond} k$ である.

(2) $i \xrightarrow{\Diamond} j$ ならば, $x_i = x_j$ かつ $u_j \subseteq u_i$ であり, $i, j \in J$ であることから, $x_i = x_j \in u_j \subseteq u_i$ である. これにより, すべての $P \in Prop$ に対し

$$x_i \in \nu_0(P) \cap u_i \Leftrightarrow x_j \in \nu_0(P) \cap u_j$$

であるから, したがって すべての $P \in Prop$ に対し $i \in \nu(P) \Leftrightarrow j \in \nu(P)$ である. Q.E.D.

定義により, $\xrightarrow{L}$ が同値関係であることおよび, $\xrightarrow{\Diamond}$ が擬順序であることは直ちに示される. すなわち, 前命題 Proposition 5.1.1 により次が成り立つ.

Proposition 5.1.2. $\langle J_X, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ は, クロス公理モデルである.

以上により, 与えられた部分集合モデルによりクロス公理モデルが構築できることがわかった. また, この構築において論理式の解釈 (充足可能性) が一致することを次に示す. ただし, クロス公理モデルの解釈はクリプキによるセマンティクスを用いるものとする.

Proposition 5.1.3. 任意の $x \in X, u \in O$ に対し, $x \in u$ ならば, 次のことが成り立つ.

すべての $\varphi \in Formula$ に対し, $x, u \models_X \varphi \Leftrightarrow (x,u) \models_{J_X} \varphi$.

ここで, $x, u \models_X \varphi$ を部分集合モデルにおける φ の解釈であるとし, $(x,u) \models_{J_X} \varphi$ をクロス公理モデルにおける φ の解釈であるとする.

Proof: φ の構成に関する帰納法により証明する．まず最初に $\varphi = P \in Prop$ であるとき，

$$x, u \models_X P \Leftrightarrow x \in \nu_0(P) \cap u \Leftrightarrow (x, u) \models_{J_X} P$$

より成立．次に $\varphi = \chi \wedge \psi$ および $\varphi = \neg\chi$ であるとき，$\models_X$ と $\models_{J_X}$ の定義と帰納法の仮定により直ちに導かれる．$\varphi = K\psi$ であるときには，定義により $x, u \models K\psi$ は，任意の $y \in u$ に対し $y, u \models_X \psi$ であることと同値であり，さらにこのことは次の様に言い換えられる．

任意の $(y, v) \in X \times O$ に対し，$y \in v$ かつ $v = u$ ならば $y, v \models_X \psi$

$\xrightarrow{L}$ の与え方と帰納法の仮定により，

任意の $(y, v) \in J_X$ に対し，$(x, u) \xrightarrow{L} (y, v)$ ならば $(y, v) \models_{J_X} \psi$

と同値である．すなわち，$(x, u) \models_{J_X} K\psi$ と同値である．

次に，$\varphi = \Box\psi$ であるとき，定義により $x, u \models \Box\psi$ は，任意の $v \in O$ に対し，$x \in v \subseteq u$ ならば $x, v \models_X \psi$ であることと同値であり，このことは次の様に言い換えられる．

任意の $(y, v) \in X \times O$ に対し，$y = x \in v \subseteq u$ ならば $y, v \models_X \psi$

$\xrightarrow{\Diamond}$ の与え方と帰納法の仮定により，これは

任意の $(y, v) \in J_X$ に対し，$(x, u) \xrightarrow{\Diamond} (y, v)$ ならば $(y, v) \models_{J_X} \psi$

と同値である．すなわち，$(x, u) \models_{J_X} \Box\psi$ と同値である． Q.E.D.

この Proposition 5.1.2 により，部分集合空間論理の部分集合モデルにおける完全性を用いて，任意の部分集合空間論理 $\mathcal{L}$ がクロス公理モデル全体のクラスにおいて完全 (決定的) であることが示される．

Proposition 5.1.4. 任意の部分集合空間論理 $\mathcal{L}$ において，

$$\vdash_{\mathcal{L}} L\varphi \wedge L\chi \rightarrow L(L\varphi \wedge \chi)$$

すなわち、$\vdash_{\mathcal{L}} L\varphi \wedge L\chi \leftrightarrow L(L\varphi \wedge \chi)$

Proof: 任意のクロス公理モデル $M = \langle J, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ および、任意の $x \in J$ に対し，$M, x \models L\varphi \wedge L\chi$ ならば或る $y, z \in J$ が存在し $x \xrightarrow{L} y$, $x \xrightarrow{L} z$ であり $y \models \varphi$ かつ $z \models \chi$ である．この y, z に関して，($\xrightarrow{L}$ が同値関係であることから) $z \xrightarrow{L} x \xrightarrow{L} y$. すなわち，$z \xrightarrow{L} y$ であり $y \models \varphi$ であるから，$z \models L\varphi$ である．一方，$z \models \chi$ であったので，まとめると $z \models L\varphi \wedge \chi$ である．最後に $x \xrightarrow{L} z$ であるから，$x \models L(L\varphi \wedge \chi)$. 部分集合空間論理のクロス公理モデル全体のクラスにおける完全性定理により，$\vdash_{\mathcal{L}} L\varphi \wedge L\chi \rightarrow L(L\varphi \wedge \chi)$. 逆の $\vdash_{\mathcal{L}} L(L\varphi \wedge \chi) \rightarrow L\varphi \wedge L\chi$ は，$\vdash_{\mathcal{L}} \chi \rightarrow L\chi$ であることと，$\vdash_{\mathcal{L}} L(L\varphi \wedge L\chi) \leftrightarrow (L\varphi \wedge L\chi)$ であることを用いる．

当然のことではあるが，この Proposition 5.1.4 の主張は，様相演算子がひとつである S5 を含む正規な様相論理 $\mathcal{L}$ に対しても成立することに注意しておく．

カノニカルモデルとクロス公理モデル

$\mathcal{L}$ を最小の部分集合空間論理であるとし, $X^{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ における極大無矛盾集合全体の集合とする.

このとき, $X^{\mathcal{L}}$ 上の関係 $\xrightarrow{L}$, $\xrightarrow{\Diamond}$ において, 次のことが成り立つ.

Proposition 5.1.5. 任意の $U, V, W \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,

(1) $U \xrightarrow{\Diamond} W \xrightarrow{L} V$ ならば, 或る $T \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $U \xrightarrow{L} T \xrightarrow{\Diamond} V$

(2) $U \xrightarrow{\Diamond} V$ ならば, すべての $P \in Prop$ に対し $U \in \nu^{\mathcal{L}}(P) \Leftrightarrow V \in \nu^{\mathcal{L}}(P)$

Proof: (1) は, 第 4 章 Proposition 4.1.2 を参照.
(2) を示す. 部分集合空間論理において, すべての $P \in Prop$ に対し

$(P \to \Box P) \wedge (\Diamond P \to P)$ が公理

であることに注意しておく.

$U \xrightarrow{\Diamond} V$ ならば, すべての $P \in Prop$ に対し $U \in \nu^{\mathcal{L}}(P) \Leftrightarrow P \in U$ が定義であるので, $P \in U \Leftrightarrow P \in V$ であることを示せばよい. そこでまず, $P \in U$ であるとする. このとき, 上に挙げた公理により $\vdash_{\mathcal{L}} P \to \Box P$ から, $\Box P \in U$ である. $U \xrightarrow{\Diamond} V$ であるので $P \in V$ である. 逆に, $P \in V$ であるとすると, $U \xrightarrow{\Diamond} V$ であるから $\Diamond P \in U$ である. また, $\vdash_{\mathcal{L}} \Diamond P \to P$ であるので $P \in U$ である. よって, $P \in U \Leftrightarrow P \in V$ である. Q.E.D.

この Proposition 5.1.5 から次のことがいえる.

Proposition 5.1.6. カノニカルモデル $\langle X^{\mathcal{L}}, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu^{\mathcal{L}} \rangle$ はクロス公理モデルである.

5.2 Γ_s の諸性質

この節から, 有限モデル性を考える為に, クロス公理モデルであるカノニカルモデル対して濾過法 (filtration) を適用することを考える. この節ではまず, そのための準備とそれに関わる諸性質を述べることにする.

任意の $\varphi \in Formula$ に対し, $\Gamma = \Gamma(\varphi) \subseteq Formula$ を以下の様に与える. $SF(\varphi) = \{\psi \in Formula \mid \psi は \varphi の部分論理式\}$ であるとする.

$\Gamma' := SF(\varphi)$
$\Gamma^{\neg} := \Gamma' \cup \{\neg\psi \in Formula \mid \psi \in \Gamma'\}$
$\Gamma^{\wedge} := \Gamma' \cup \{\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \in Formula \mid \psi_1, ..., \psi_n \in \Gamma^{\neg} かつ, i \neq j ならば \psi_i \neq \psi_j\}$
$\Gamma := \Gamma^{\wedge} \cup \{L\psi \mid \psi \in \Gamma^{\wedge}\}$

また, 便宜上

$$\Gamma^L := \{L\psi \mid \psi \in \Gamma^\wedge\}$$

としておく．すなわち, $\Gamma = \Gamma^\wedge \cup \Gamma^L$ である ($\Gamma^\wedge \cap \Gamma^L = \emptyset$ とは限らない)．ここで, Γ が有限集合であることに注意しておく．

論理式の有限部分集合 $\Delta \subseteq Formula$ に対して, $\mathcal{S}_\Delta$ を

> 或る $\Delta_0 \supseteq \Delta$ が存在し, s が Δ_0 から $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$ への写像であるような s 全体の集合

であるとする．すなわち, $\mathcal{S}_\Delta = \{s \mid 或る\Delta_0 \supseteq \Delta に対し, s : \Delta_0 \to \{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}\}$.

ここで, 任意の $s \in \mathcal{S}_\Delta$ に対し,

$$\Delta_s := \wedge\{\psi \mid \psi \in \Delta かつ\ s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta かつ\ s(\psi) = \mathcal{F}\}$$

と定める．ただし, この定義の右辺は, 論理式の番号づけを或るひとつに定めておき, その番号づけに関し $\{\psi \mid \psi \in \Delta かつ\ s(\psi) = \mathcal{T}\} = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$, $\{\psi \mid \psi \in \Delta かつ\ s(\psi) = \mathcal{F}\} = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ と表せたとき,

$$((...(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge ...) \wedge \varphi_m) \wedge ((...(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2) \wedge ...) \wedge \neg\psi_n)$$

を省略した書き方であるとする．

このとき, Δ が有限であるので Δ_s は論理式である．また, 任意の $\psi \in \Delta$ に対し, $\Delta \vdash_\mathcal{L} \psi$ または $\Delta \vdash_\mathcal{L} \neg\psi$(または, その両方) が成り立つ．

$\Gamma = \Gamma(\varphi)$ に対し, 次が成り立つ．

Lemma 5.2.1. 任意の $s \in \mathcal{S}_\Gamma$ に対して,

(1) Γ_s が無矛盾であるならば, $s(\psi) = \mathcal{T} \Leftrightarrow s(\neg\psi) = \mathcal{F}$ が
すべての $\psi \in \Gamma'$ において成立する．

(2) $\vdash_\mathcal{L} \Gamma_s^L \leftrightarrow L\Gamma_s^L$

Proof:

(1) 或る論理式 $\psi \in \Gamma'$ に対し $s(\psi) = s(\neg\psi)$ ならば Γ_s が矛盾を表す論理式に等しいことを示す．そこで, 或る $\psi \in \Gamma'$ が存在し, $s(\psi) = s(\neg\psi)$ であると仮定する．まずは, $s(\psi) = \mathcal{T}$ かつ $s(\neg\psi) = \mathcal{T}$ である場合．$s(\psi) = \mathcal{T}$ で $\psi \in \Gamma'$ であるから, Γ'_s の与え方から $\vdash_\mathcal{L} \Gamma'_s \to \psi$ である．よって, $\vdash_\mathcal{L} \Gamma_s \to \psi$ また, $\psi \in \Gamma'$ であることから $\neg\psi \in \Gamma^\neg$ であるので, $\vdash_\mathcal{L} \Gamma_s^\neg \to \neg\psi$. すなわち, $\vdash_\mathcal{L} \Gamma_s \to \neg\psi$ 以上により, $\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} \psi \wedge \neg\psi$ であるから, Γ_s は矛盾を表す論理式に等しい．

もう一方の $s(\psi) = s(\neg\psi) = \mathcal{F}$ である場合, 同様にして, $\vdash_\mathcal{L} \Gamma_s \to \neg\psi \wedge \neg\neg\psi$ であることがわかるので, Γ_s は矛盾を表す論理式に等しい．

(2) 集合 Γ^L は次の様に表すことができることに注意する．

$\Gamma^{\wedge} = \{\varphi_1, ..., \varphi_m, \psi_1, ..., \psi_n\}$ に対し,
$\Gamma^L = \{L\varphi_1, ..., L\varphi_m, L\psi_1, ..., L\psi_n\}$
ただし, $s(L\varphi_i) = \mathcal{T}$, $s(L\psi_j) = \mathcal{F}$ $(i = 1, ..., m, j = 1, ..., n)$

これにより, $\Gamma_s^L \leftrightarrow (\wedge_{i=1}^m L\varphi_{i\wedge} \wedge_{j=1}^n \neg L\psi_j) \leftrightarrow (\wedge_i^m L\varphi_{i\wedge} \wedge_j^n K\neg\psi_j) \leftrightarrow (\wedge_i^m L\varphi_{i\wedge}(K \wedge_j^n \neg\psi_j))$ であるから, $L\Gamma_s^L \leftrightarrow L(\wedge_i^m L\varphi_{i\wedge}(K \wedge_j^n \psi_j))$. S5 の公理を用いて,

$$\begin{aligned} L\Gamma_s^L &\rightarrow \wedge_i^m LL\varphi_{i\wedge}(LK \wedge_j^n \psi_j) \\ &\rightarrow \wedge_i^m L\varphi_{i\wedge}(K \wedge_j^n \psi_j) \\ &\rightarrow \Gamma_s^L \end{aligned}$$

である. よって, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_s^L \rightarrow \Gamma_s^L$. 一方, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \rightarrow L\Gamma_s^L$ であるから $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_s^L \leftrightarrow \Gamma_s^L$ である. Q.E.D.

Proposition 5.2.2. 任意の $s \in \mathcal{S}_\Gamma$ に対し, 次が成立する.

(1) $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s \leftrightarrow (\Gamma_s^L \wedge \Gamma_s^{\wedge})$

(2) Γ_s が無矛盾ならば, $\vdash_{\mathcal{L}} (\Gamma_s^{\wedge} \leftrightarrow \Gamma_s')$

(3) $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \wedge L\Gamma_s^{\wedge} \leftrightarrow L(\Gamma_s^L \wedge \Gamma_s^{\wedge})$

Proof:
(1) $\Gamma_s \leftrightarrow \wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma$かつ $s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma$かつ $s(\psi) = \mathcal{F}\}$ であり, $\Gamma = \Gamma^{\wedge} \cup \Gamma^L$ であるので, この右辺は

$$\begin{aligned} &\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma^{\wedge}\text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\psi \mid \psi \in \Gamma^L\text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\} \\ &{}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma^{\wedge}\text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma^L\text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

と論理的に同値である. そしてこの論理式は $\Gamma_s^{\wedge} \wedge \Gamma_s^L$ と論理的に同値であることから, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s \leftrightarrow \Gamma_s^{\wedge} \wedge \Gamma_s^L$ である.
(2) Γ' は,

$\Gamma' = \{\varphi_1, ..., \varphi_m, \psi_1, ..., \psi_n\}$
$s(\varphi) = \mathcal{T}$, $s(\psi) = \mathcal{F}$ $(i \leq m, j \leq n)$

と表せるので, $\Gamma_s' = \wedge_{i=1}^m \varphi_{i\wedge} \wedge_{j=1}^n \neg\psi$ である. また, $\Gamma^{\neg}$ は

$$\Gamma^{\neg} = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_n, \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_n\}$$

と表すことができる. このとき,Γ_s が無矛盾であるので Lemma 5.2.1(1) より,

$s(\psi) = \mathcal{T} \Leftrightarrow s(\neg\psi) = \mathcal{F}$ がすべての $\psi \in \Gamma'$ に対して成立

したがって,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_s^{\neg} &\leftrightarrow (\wedge_i^m \varphi_{i\wedge} \wedge_j^n \neg\psi_j)_\wedge(\wedge_i^m \neg\neg\varphi_{i\wedge} \wedge_j^n \neg\psi_j) \\
&\leftrightarrow (\wedge_i^m \varphi_{i\wedge} \wedge_j^n \neg\psi_j)_\wedge(\wedge_i^m \varphi_{i\wedge} \wedge_j^n \neg\psi_j) \\
&\leftrightarrow (\wedge_i^m \varphi_{i\wedge} \wedge_j^n \neg\psi_j) \\
&\leftrightarrow \Gamma_s'
\end{aligned}
$$

さらに, Γ と $\Gamma^\wedge$ が無矛盾なので $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \leftrightarrow \Gamma_s^\neg$ である (後述 Proposition 5.2.3 を参照). したがって, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \leftrightarrow \Gamma_s'$ である.

(3) 先に述べた Lemma 5.2.1 より, $\Gamma_s^L \wedge L\Gamma_s^\wedge$ は $L\Gamma_s^L \wedge L\Gamma_s^\wedge$ と論理的に同値である. そして, 後者の論理式は Proposition 5.1.4 により, $L(L\Gamma_s^L \wedge \Gamma_s^\wedge)$ と論理的に同値である. 再度, Lemma 5.2.1 により, この論理式は $L(\Gamma_s^L \wedge \Gamma_s^\wedge)$ と同値であるから, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \wedge L\Gamma_s^\wedge \leftrightarrow L(\Gamma_s^L \wedge \Gamma_s^\wedge)$ である. Q.E.D.

ここで, 注意しておきたいことは $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \to \Gamma_s^\neg$ であることは一般に成り立つが, $\vdash \Gamma_s^\neg \to \Gamma_s^\wedge$ であることが一般に成り立たないことである.

例えば, 与えられた $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma^\neg$ に対して $\psi_1 \wedge \psi_2 \notin \Gamma^\neg$ であり $\nvdash_{\mathcal{L}} \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ とする. (例えば, $\varphi = P \wedge Q$ において $(P, Q \in Prop)$, $\psi_1 := P, \psi_2 := \neg Q$ として与える). このとき, $s \in \mathcal{S}_\Gamma$ $s(\psi_1) = s(\psi_2) = \mathcal{T}$, $s(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathcal{F}$ となるように $s \in \mathcal{S}_\Gamma$ を定めると, $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^\wedge$ であり $s(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathcal{F}$ であるので, $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \in \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma^\wedge \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\}$ である. すなわち $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \leftrightarrow \Gamma_s^\wedge \wedge \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ である. しかし, $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ と論理的に同値である $\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$ に関して, $s(\psi_1) = s(\psi_2) = \mathcal{T}$ であることから $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\neg \to \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$ であることが一般に言えず, $s(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathcal{F}$ であるが, $\psi_1 \wedge \psi_2 \notin \Gamma^\neg$ であるため $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\neg \to \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ であることが一般に言えない. また, $\nvdash_{\mathcal{L}} \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ であることに注意する.

このことに関し, 次のことが成立する.

Proposition 5.2.3.

(1) 任意の $s \in \mathcal{S}_\Gamma$ に対し $(\Gamma = \Gamma(\varphi))$, 次の (α),(β),(γ) は同値である.

(α) $\Gamma_s^\wedge$ が無矛盾
(β) 任意の $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma^\wedge$ に対し, $s(\psi_1) = s(\psi_2) = \mathcal{T} \Leftrightarrow s(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathcal{T}$
(γ) 任意の $\psi_1, ..., \psi_n \in \Gamma^\neg$ に対し,

$$s(\psi_1) = ... = s(\psi_n) = \mathcal{T} \Leftrightarrow s(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) = \mathcal{T}$$

(2) 任意の $\psi_1, ..., \psi_n \in \Gamma^\neg$ に対し, $s(\psi_1) = ... = s(\psi_n) = \mathcal{T} \Leftrightarrow s(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) = \mathcal{T}$ が成り立つならば, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \leftrightarrow \Gamma_s^\neg$

(3) $\Gamma_s^\wedge$ が無矛盾ならば $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^\wedge \leftrightarrow \Gamma_s^\neg$

ここで, 任意の $\psi \in Formula$ に対して, $L\psi$ が無矛盾ならば ψ が無矛盾であることを注意しながら, 次の Proposition に移る.

Proposition 5.2.4.

(1) $\Gamma'_s \in \Gamma^\wedge$ したがって, (1') $L\Gamma'_s \in \Gamma^L$,

(2) Γ_s が無矛盾ならば, $s(\Gamma') = \mathcal{T}$,

(3) $L\Gamma_s$ が無矛盾ならば, $s(L\Gamma') = \mathcal{T}$.

Proof:
(1) $\Gamma^\neg = \Gamma' \cup \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma'\}$ であるので,

$$\{\psi \mid \psi \in \Gamma \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\} \subseteq \Gamma^\neg \text{ であり }, \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\} \subseteq \Gamma^\neg$$

である. したがって, $\Gamma^\wedge$ の与え方により,

$$\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\} \in \Gamma^\wedge$$

すなわち, $\Gamma'_s \in \Gamma^\wedge$ である.
(2) $\Gamma'_s = \wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\}$ は, Γ_s が無矛盾であるので Lemma 5.2.1 (1) により次の論理式と一致する.

$$\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \in \Gamma^\neg \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\neg\psi) = \mathcal{T}\}$$

また, $\Gamma^\wedge_s$ が無矛盾でもあるので前の Proposition 5.2.3 の (1) より (Γ' が有限であることに注意)

$$s(\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \in \Gamma^\neg \mid \psi \in \Gamma' \text{かつ } s(\neg\psi) = \mathcal{T}\}) = \mathcal{T}$$

すなわち, $s(\Gamma'_s) = \mathcal{T}$ である.
(3) 背理法により示す. $L\Gamma_s$ が無矛盾であり $s(L\Gamma'_s) = \mathcal{F}$ であると仮定する.
今, $L\Gamma_s$ が無矛盾であるから Γ_s も無矛盾である. 上で証明した Proposition 5.2.4 の (1) より $\Gamma' \in \Gamma^\wedge$ であり, この Proposition 5.2.4 の (2) より $s(\Gamma'_s) = \mathcal{T}$ であるから $\Gamma^\wedge_s \vdash_\mathcal{L} \Gamma'_s$ である. したがって, $\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} \Gamma'_s$ であるので, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} L\Gamma'_s$ である.
一方, 仮定より $s(L\Gamma'_s) = \mathcal{F}$ であり, この Proposition 5.2.4 の (1') より $L\Gamma' \in \Gamma^L$ であるので, $\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} \neg L\Gamma'_s$ である. これは $\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} K\neg\Gamma'_s$ と論理的に同値であるので, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} LK\neg\Gamma'_s$ が導かれる. また, S5 の性質から $\vdash LK\neg\Gamma'_s \to K\neg\Gamma'_s$ であるので, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} K\neg\Gamma'_s$ が導かれる. すなわち, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} \neg L\Gamma'_s$ である.
以上をまとめると, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} L\Gamma'_s$ であり, $L\Gamma_s \vdash_\mathcal{L} \neg L\Gamma'_s$ であるので, $L\Gamma_s$ は矛盾となるが, これは仮定に反することである. Q.E.D.

Definition 5.2.1. 任意の $\Delta \subseteq Formula$, 任意の $s, t \in \mathcal{S}_\Delta$ に対し, s と t が Δ 上で一致するとは, 任意の $\psi \in \Delta$ に対し, $s(\psi) = \mathcal{T} \Leftrightarrow t(\psi) = \mathcal{T}$ であることをいう.

Proposition 5.2.5. すべての $\varphi \in Formula$ に対し $\Gamma = \Gamma(\varphi)$ において, 次のことが成り立つ. 任意の $s, t \in \mathcal{S}_\Gamma$ に対し,

(1) $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t$ が無矛盾ならば, s と t が Γ^L 上で一致する.

(2) s と t が Γ^L 上で一致するならば, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \leftrightarrow \Gamma_t^L$

Proof:

(1) 対偶を示す. s と t が Γ^L 上で一致しないとする. すなわち, 或る $L\psi \in \Gamma^L$ が存在し, $s(L\psi) = \mathcal{T}$ かつ $t(L\psi) = \mathcal{F}$, または $s(L\psi) = \mathcal{F}$ かつ $t(L\psi) = \mathcal{T}$ であると仮定する.

まず, $s(L\psi) = \mathcal{T}$ かつ $t(L\psi) = \mathcal{F}$ であるとき, $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} L\psi$ であり $\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} \neg L\psi$ である. 後者は $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_t \to K\neg\psi$ と同値であるから, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t \to LK\neg\psi$ が導かれる. S5 の性質から $\vdash LK\neg\psi \to K\neg\psi$ であるので, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t \to K\neg\psi$ が導かれる. これは $L\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} \neg L\psi$ と同値であり $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} L\psi$ であったので, $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} L\psi \wedge \neg L\psi$. すなわち, $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t$ は矛盾を表す論理式である.

次に, $s(L\psi) = \mathcal{F}$ かつ $t(L\psi) = \mathcal{T}$ であるとき, $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} \neg L\psi$ であり $\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} L\psi$ である. 後者は $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_t \to L\psi$ と同値であるから, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t \to LL\psi$ が導かれる. S5 の性質から $\vdash LL\psi \to L\psi$ であるので, $\vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t \to L\psi$ が導かれる. これは $L\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} L\psi$ と同値であり $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} \neg L\psi$ であったので, $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t \vdash_{\mathcal{L}} \neg L\psi \wedge L\psi$. すなわち, $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t$ は矛盾を表す論理式である.

(2) s と t が Γ^L 上で一致するならば,

$$\{\psi \mid \psi \in \Gamma^L \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{T}\} = \{\psi \mid \psi \in \Gamma^L \text{かつ } t(\psi) = \mathcal{T}\} \text{ であり,}$$
$$\{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma^L \text{かつ } s(\psi) = \mathcal{F}\} = \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma^L \text{かつ } t(\psi) = \mathcal{F}\}$$

であるので, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \leftrightarrow \Gamma_t^L$ を得る. Q.E.D

この Proposition 5.2.5 により, 次の定義のあとに述べる Proposition が導かれる.

Definition 5.2.2. 任意の $\Delta \subseteq Formula$ に対し, Δ が (様相演算子)L の下で**強く閉じている**とは, 任意の $s, t \in \mathcal{S}_\Delta$ に対し, $\Delta_s \wedge L\Delta_t$ が無矛盾ならば $\vdash_{\mathcal{L}} \Delta_s \to L\Delta_t$ が成立することをいう.

Proposition 5.2.6. $\varphi \in Formula$, $\Gamma = \Gamma(\varphi)$ であるとする.

(1) 任意の $s, t \in \mathcal{S}_\Gamma$ に対し, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s^L \leftrightarrow \Gamma_t^L$ かつ $L\Gamma_t$ が無矛盾な論理式ならば, $\Gamma_s^L \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t^\wedge$

(2) $\Gamma(\varphi)$ は L の下で強く閉じている.

Proof: (1) 今, 条件より $L\Gamma_t$ が無矛盾であるから Proposition 5.2.4(3) により, $t(L\Gamma'_t) = \mathcal{T}$ であるので, $\Gamma^L_t \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma'_t$ (Proposition 5.2.4(1') より $L\Gamma'_t \in \Gamma^L$ となるので). また, Γ_t が無矛盾でもあるので Proposition 5.2.2(2) より $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma'_t \leftrightarrow \Gamma^{\wedge}$ であり, したがって $\Gamma^L_t \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma^{\wedge}_t$. 今, $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_s \leftrightarrow \Gamma^L_t$ であるので, 求める結果である $\Gamma^L_s \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma^{\wedge}_t$ を得る.

(2) 任意の s と t に対し, $\Gamma_s \wedge L\Gamma_t$ が無矛盾ならば Proposition 5.2.5(1) により, s と t が Γ^L 上で一致するので, Proposition 5.2.5(2) により $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_s \leftrightarrow \Gamma^L_t$ である. このことと $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_s$ であることから, $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_t$ である.

一方, この Proposition の (1) から $\Gamma^L_s \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma^{\wedge}_t$ であるので, $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma^{\wedge}_t$ である.

以上により $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_t \wedge L\Gamma^{\wedge}_t$ である. ここで, Proposition 5.2.2 の (3) により, これは $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} L(\Gamma^L_t \wedge \Gamma^{\wedge}_t)$ と同値である. Proposition 5.2.2 の (1) より $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma^L_t \wedge \Gamma^{\wedge}_t \leftrightarrow \Gamma_t$ であるので, $\Gamma_s \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_t$. すなわち, 求める結果である $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_s \to L\Gamma_t$ を得る. Q.E.D

5.3 濾過法の適用

この節では, 5.1 節の最後に触れたクロス公理モデルであるカノニカルモデルに対し, 実際に濾過法を適用する.

$\varphi \in Formula$ とし, $\Gamma = \Gamma(\varphi)$ であるとする. また, $X^{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ における極大無矛盾集合の集合とし, $M^{\mathcal{L}} = \langle X^{\mathcal{L}}, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\diamondsuit}, \nu^{\mathcal{L}} \rangle$ をカノニカルモデルとする.

このとき, 任意の $U \in X^{\mathcal{L}}$, すべての $\psi \in U$ に対し,

$$1_U(\psi) := \mathcal{T} \Leftrightarrow \psi \in \Gamma \cap U$$
$$1_U(\psi) := \mathcal{F} \Leftrightarrow \psi \in \Gamma \backslash U$$

として与えられた $1_U \in \mathcal{S}_\Gamma$ において,

$$\Gamma_U := \Gamma_{1_U}$$

と定める.

Definition 5.3.1. 任意の $U, V \in X^L$ に対し,

$$U \sim_\Gamma V \Leftrightarrow \Gamma_U = \Gamma_V$$

と定める.

すなわち, $\sim_\Gamma$ は同値関係であり, 次の Proposition が成り立つ.

Proposition 5.3.1. 任意の $U, V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,

(1) $U \sim_\Gamma V \Leftrightarrow U \cap \Gamma = V \cap \Gamma$

(2) $U \sim_\Gamma V \Leftrightarrow \Gamma_U \in V$

Proof:
(2) を示す．($\Rightarrow$)$U \sim_\Gamma V$ であるとする．定義より $\Gamma_U = \Gamma_V$ であるから，

$$\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\} = \wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap V\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash V\}$$

すなわち, 任意の $\psi \in \Gamma$ に対し,

$\psi \in U$ ならば $\psi \in V$ であり, $\psi \notin U$ ならば $\psi \notin V$ つまり $\neg\psi \in V$ である．

V が極大無矛盾集合であるから,

$$\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\} \in V$$

よって, $\Gamma_U \in V$ である．
($\Leftarrow$)$\Gamma_U \in V$ であるとする．つまり,

(I) $\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\} \in V$

である．ここで,

(i) $\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\} \in V$ ならば, $\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\} = \{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap V\} \in U$
(ii) $\{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\} \in V$ ならば, $\{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\} = \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash V\} \in U$

であることに注目する．これにより (I) から次の (II) が示される．

(II) $\wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap U\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash U\}$
$= \wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap V\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash V\}$

すなわち, $\Gamma_U = \Gamma_V$ である． Q.E.D

次に, $\sim_\Gamma$ をもとに同値類を考える．任意の $U \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,

$$[U] := \{V \in X^{\mathcal{L}} \mid U \sim_\Gamma V\}$$

と定め, 任意の $U, V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し,

$[U] \xrightarrow{L} [V] \Leftrightarrow$ 或る $U' \in [U]$ と或る $V' \in [V]$ が存在し, $U' \xrightarrow{L} V'$
$[U] \xrightarrow{\Diamond} [V] \Leftrightarrow$ 或る $U' \in [U]$ と或る $V' \in [V]$ が存在し, $U' \xrightarrow{\Diamond} V'$

と定める．
この $\xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}$ を用いて,

$[X^{\mathcal{L}}] := \{[U] \mid U \in X^{\mathcal{L}}\}$
$F^{\mathcal{L}} := \langle [X^{\mathcal{L}}], \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond} \rangle$

と定める．このとき, $[X^{\mathcal{L}}]$ は有限である．
以下では, この $F^{\mathcal{L}}$ が求めるクロス公理フレームとなることを示していく．

Proposition 5.3.2. 任意の $U, V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, 次の 3 つは同値である.

(1) $[U] \xrightarrow{L} [V]$

(2) $\Gamma_U \wedge L\Gamma_V$ が無矛盾

(3) $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_U \to L\Gamma_V$

Proof:
(1)⇒(2) を示す. (1) であるならば, $\xrightarrow{L}$ の与え方から或る $U' \in [U]$ と或る $V' \in [V]$ が存在し $U' \xrightarrow{L} V'$ である. $V \sim_\Gamma V'$ であるから Proposition 5.3.1 の (2) より, $\Gamma_V \in V'$. また, $X^{\mathcal{L}}$ 上の $\xrightarrow{L}$ の定義により $L\Gamma_V \in U'$.
同様に, $U \sim_\Gamma U'$ であるから, $\Gamma_U \in U'$. すなわち, $\Gamma_U \wedge L\Gamma_V \in U'$. U' は極大無矛盾集合であるので, $\Gamma_U \wedge L\Gamma_V$ は無矛盾である.
(2)⇒(3) は, 前節における Proposition 5.2.6 の (2) により $\Gamma(\varphi) = \Gamma$ が L の下で強く閉じているので, (2) ならば (3) である.
(3)⇒(1) を示す. $\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_U \to L\Gamma_V$ であるとすると, $\Gamma_U \to L\Gamma_V \in U$ である. また $U \sim_\Gamma U$ であるから $\Gamma_U \in U$ である. すなわち, 極大無矛盾集合の性質から $L\Gamma_V \in U$ であり, 或る $V' \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $\Gamma_V \in V'$ かつ $U \xrightarrow{L} V'$ である. Proposition 5.3.1 の (2) より, $\Gamma_V \in V'$ であることと, $V \sim_\Gamma V'$ すなわち $V' \in [V]$ であることと同値であるので, これらの $U \in [U]$ および $V' \in [V]$ に対し $U \xrightarrow{L} V'$ である. したがって, 求める結果である $[U] \xrightarrow{L} [V]$ を得る. Q.E.D.

Proposition 5.3.3. 任意の $U, V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, 次の *2* つは同値である.

(1) $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V]$

(2) $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ が無矛盾

Proof: (1)⇒(2) は, Proposition 5.3.2 と同様.
(2)⇒(1) を示す. $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ が無矛盾であるとすると, Lindenbaum's Lemma により或る $U' \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $\{\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V\} \subseteq U'$ である.
$\Diamond\Gamma_V \in U'$ であるから, 或る $V \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $\Gamma_V \in V'$ かつ $U' \xrightarrow{\Diamond} V'$. 他方で, $\Gamma_U \in U'$ であるから $U \sim_\Gamma U'$. すなわち, $U' \in [U]$ である.
以上により, 或る $U' \in [U]$ と或る $V' \in [V]$ に対し $U' \xrightarrow{\Diamond} V'$ であるので, $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V]$ である. Q.E.D.

Proposition 5.3.4. $[F^{\mathcal{L}}]$ 上の関係 $\xrightarrow{L}$ と $\xrightarrow{\Diamond}$ は次の性質をもつ.

(1) $\xrightarrow{L}$ は, 同値関係 (反射律, 推移律, 対称律をもつ).
(2) $\xrightarrow{\Diamond}$ は, 反射律をもつ.
(3) $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V] \xrightarrow{L} [W]$ ならば, 或る $T \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し
$[U] \xrightarrow{L} [T] \xrightarrow{\Diamond} [V]$ である. (ただし, $U, V, W \in X^{\mathcal{L}}$)

Proof:(1) $\xrightarrow{L}$ が推移律をもつことのみを示す. $[U] \xrightarrow{L} [V]$ かつ $[V] \xrightarrow{L} [W]$ であるとする. このとき, Proposition 5.3.2 により, $\Gamma_U \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_V$ であり $\Gamma_V \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_W$ である. 後者から $L\Gamma_V \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_W$ が導かれるので, $\Gamma_U \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_W$ である. すなわち, $[U] \xrightarrow{L} [W]$ である.

この証明では, $\xrightarrow{L}$ が推移律をもつことを示す為に $[U] \xrightarrow{L} [V] \Leftrightarrow \Gamma_U \wedge L\Gamma_V$ であることを用いているが, $\xrightarrow{\Diamond}$ に関しては $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V] \Leftrightarrow \Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ であることが一般に言えない. そこで, $\xrightarrow{\Diamond}$ が推移律をもつことを示す為にはこの方法とは異なる方法を用いる必要がある.

5.4 $F^{\mathcal{L}}$ 上の関係 $\xrightarrow{\Diamond}$ の推移律

Lemma 5.4.1. $[X^{\mathcal{L}}]$ 上の関係 $\xrightarrow{\Diamond}$ は, 推移律をもつ.

*Proof:*以下 51 ページに至るまで証明が続く. $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V] \xrightarrow{\Diamond} [W]$ であるとする. Proposition 5.3.3 により, $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$, $\Gamma_V \wedge \Diamond\Gamma_W$ が共に無矛盾.

ここで, 論理式 χ が無矛盾であるならば Lindenbaum's Lemma により, 或る極大無矛盾集合 $T \in X^{\mathcal{L}}$ が存在し $\chi \in T$ である. また, この T に対し部分集合空間論理の Truth Lemma(前章を参照) から, 或る部分集合モデル $N_T = \langle X, O, \nu_0 \rangle$ が存在し, 或る $x \in X$ と或る $u \in O$ に対しすべての $\varphi \in Formula$ において, $x, u \models_X \psi$ であるので, 特に $x, u \models_X \chi$ である. さらにこの部分集合モデル N に対し, 或るクロス公理モデル $M_T = \langle J_X, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ が存在し, すべての $\psi \in Formula$ に対し, $x, u \models_{N_T} \psi \Leftrightarrow (x, u) \models_{M_T}$ であるので, 特に $M_T, (x, u) \models_{J_X} \chi$ である. 以上のことから次の結果が得られる.

Proposition 5.4.2. 任意の $\chi \in Formula$ に対して, χ が無矛盾ならば, 或るクロス公理モデル $M = \langle X, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond} \rangle$ が存在し或る $x \in X$ に対し $M, x \models \chi$ が成り立つ.

今, $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ および $\Gamma_V \wedge \Diamond\Gamma_W$ が共に無矛盾であるので, 或るクロス公理モデル $M_J = \langle J, \xrightarrow{L}_J, \xrightarrow{\Diamond}_J, \nu_J \rangle$ が存在し或る $x_J \in J$ に対し $x_J \models_J \Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ であり, また或るクロス公理モデル $M_K = \langle K, \xrightarrow{L}_K, \xrightarrow{\Diamond}_K, \nu_K \rangle$ が存在し或る $x_K \in K$ に対し $x_K \models_K \Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ である.

さらに, (極大無矛盾集合に対する部分集合モデルの構築の仕方から) $J \cap K = \emptyset$ であるようにできる (この証明は行なわないが, 詳細は [2] を参照).

ここで, 我々が求める結果は $U \xrightarrow{\Diamond} W$ であるがこれは, そのままでは証明を行ないにくい. そこで, Proposition 5.3.3 より $U \xrightarrow{\Diamond} W$ であることは, $\Gamma_U \wedge L\Gamma_W$ が無矛盾であることと同値であることに注目する. そして, この論理式の無矛盾性を証明する為に $\Gamma_U \wedge L\Gamma_W$ が或る極大無矛盾集合の要素となることを示す. 或る 1 つのモデルにおいて真であるとい

う論理式の集合は極大無矛盾集合になるので, 今与えられている 2 つのモデル (M_J, M_K) モデルをもとに 1 つのモデルを構築する. それでは, まずその ($\Gamma_U \wedge L\Gamma_W$ を真にする様な) モデルの構築方法から述べることにする.

クロス公理モデルの結合

$J \cap K = \emptyset$ であるようにできるので (上述を参照), $M_J = \langle J, \xrightarrow{L}_J, \xrightarrow{\Diamond}_J, \nu_J \rangle$ と $M_K = \langle K, \xrightarrow{L}_K, \xrightarrow{\Diamond}_K, \nu_K \rangle$ に対して, $J \cap K = \emptyset$ が成り立っているとする.

$J \oplus_\Gamma K$ を J と K の (互いに素である) 和集合であるとする. このとき, 任意の $p, q \in J \oplus_\Gamma K$ に対し,

- $p \xrightarrow{L} q \Leftrightarrow p \xrightarrow{L}_J q$ であるか $p \Leftrightarrow_K q$ であるかのどちらか一方
- $p \xrightarrow{\Diamond} q \Leftrightarrow p \xrightarrow{\Diamond}_J q$ であるか $p \xrightarrow{\Diamond}_K q$ であるか, 或る $j \in J$ と或る $k \in K$ が存在し $p \xrightarrow{\Diamond}_J j$ かつ $k \xrightarrow{\Diamond}_K q$ であり $\Gamma \cap th_J(j) = \Gamma \cap th_K(k)$ であるかの, いずれか一つのみ成り立つ

と定める. ただし, $th_J(j) := \{\psi \mid j \models_J \psi\}$ であるとする. このとき, $th_J(j)$ が極大無矛盾集合であること ($th_J(j) \in X^{\mathcal{L}}$ であること) に注意しておく.

Lemma 5.4.3.

(1) 任意の $a', b' \in K$ に対し, $a' \xrightarrow{L}_K b'$ ならば $th_K(a') \xrightarrow{L} th_K(b')$

(2) 任意の $a \in J$, 任意の $T \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $a \models_J \Gamma_T \Leftrightarrow \Gamma_{th_J(a)} = \Gamma_T$

J, K を入れ換えても成立する.

Proof: (1) $a' \xrightarrow{L}_K b'$ とする. 任意の $\psi \in th_K(b')$ に対し, $b \models_K \psi$ であり $a' \xrightarrow{L}_K b'$ であるので, $a' \models_K L\psi$. すなわち, $L\psi \in th_K(a)$ である. 極大無矛盾集合間の関係である $\xrightarrow{L}$ の定義から, $th_K(a') \xrightarrow{L} th_K(b')$ を得る.

(2) ($\Leftarrow$) $\Gamma_{th_J(a)} = \Gamma_T$ であるとする. 任意の極大無矛盾集合 U に対し $U \sim_\Gamma U$ より $\Gamma_U \in U$ であるので, 特に $\Gamma_{th_J(a)} \in th_J(a)$ である. すなわち, $a \models_J \Gamma_{th_J(a)}$ であるから, 条件により, $a \models_J \Gamma_T$

($\Rightarrow$) $a \models_J \Gamma_T$ とする. すなわち, $\Gamma_T \in th_J(a)$ であるから

$$\Gamma_T = \wedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma \cap T\}_\wedge \wedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Gamma \backslash T\} \in th_J(a)$$

と表すことができる. $th_J(a)$ が極大無矛盾集合であることから, これは,

任意の $\psi \in \Gamma \cap T$ に対し, $\psi \in th_J(a)$ であり
任意の $\psi \in \Gamma \backslash T$ に対し, $\neg\psi \in th_J(a)$

と同値である．これはさらに次の様に言い換えられる．

任意の $\psi \in \Gamma$ に対し, $\psi \in T$ ならば $\psi \in th_J(a)$ であり
任意の $\psi \in \Gamma$ に対し, $\psi \notin T$ ならば $\psi \notin th_J(a)$

すなわち, 任意の $\psi \in \Gamma$ に対し, $\psi \in T \Leftrightarrow \psi \in th_J(a)$ であるから, $T \cap \Gamma = th_J(a) \cap \Gamma$ である．Proposition 5.3.1(1) により, $\Gamma_T = \Gamma_{th_J(a)}$ である．

また, $\nu(P) := \nu_J(P) \cup \nu_K(P)$ と定めると次が成り立つ．

Lemma 5.4.4.

(1) $M = \langle J \oplus_\Gamma K, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ は, クロス公理モデルである．

(2) すべての $\psi \in \Gamma$, 任意の $x \in J \oplus_\Gamma K$ に対し,

$x \in J$ ならば $x \models_J \psi \Leftrightarrow x \models_{J \oplus_\Gamma K} \psi$
$x \in K$ ならば $x \models_K \psi \Leftrightarrow x \models_{J \oplus_\Gamma K} \psi$

Proof:
(1) このフレームにおいては, 部分集合空間論理の各公理に対し, Γ の論理式の代入例 (であるような論理式) に関して健全であり, すべての公理を真にするわけではないことに注意しておく．しかし, このフレーム $F^{\mathcal{L}}$ では Γ の要素である論理式以外については議論をしないので, この健全性で十分である．

クロス公理に関する性質のみ示す．すなわち, 任意の $p, q, r \in J \oplus_\Gamma K$ に対し, $p \xrightarrow{\Diamond} q \xrightarrow{L} r$ ならば或る $s \in J \oplus_\Gamma K$ が存在し $p \xrightarrow{L} s \xrightarrow{\Diamond} r$ であることのみを示す．

$p \xrightarrow{\Diamond} q \xrightarrow{L} r$ であるとする．このとき, $(p, q) \in J \times J$ であるか, $(p, q) \in J \times K$ であるか $(p, q) \in K \times K$ いずれかのみで ($\xrightarrow{L} \subseteq J \times J \cup K \times K, J \cap K = \emptyset$),

$(p, q) \in J \times J$ ならば $(q, r) \in J \times J$ で,
$(p, q) \in K \times K$ ならば $(q, r) \in K \times K$ であり,
$(p, q) \in J \times K$ ならば $(q, r) \in K \times K$

であることに注目する．$(p, q) \in J \times J$, $(p, q) \in K \times K$ であるときは, それぞれ J 上もしくは, K 上の性質を用いればよい．

$(p, q) \in J \times K$ であるとき, いま $(p, q) \in J \times K$ であるから, 或る $a \in J$ と或る $a' \in K$ が存在し,

(I) $p \xrightarrow{\Diamond}_J a$ かつ $a' \xrightarrow{\Diamond}_K q$ であり $\Gamma_{th_J(a)} = \Gamma_{th_K(a')}$.

今, $q \xrightarrow{L}_K r$ であるから特に $a' \xrightarrow{\Diamond}_K q \xrightarrow{L}_K r$ である．K 上のクロス公理に関する性質より, 或る $b' \in K$ が存在し

(II) $a' \xrightarrow{L}_K b' \xrightarrow{\Diamond}_K r$

である． $a' \xrightarrow{L}_K b'$ であるから Lemma 5.4.3(1) より，$th_K(a') \xrightarrow{L} th_K(b')$． すなわち，$[th_K(a')] \xrightarrow{L} [th_K(b')]$． Proposition 5.3.2 より，$\Gamma_{th_K(a')} \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_{th_K(b')}$． (I) より $\Gamma_{th_K(a')} = \Gamma_{th_J(a)}$ であるから，$\Gamma_{th_J(a)} \vdash_{\mathcal{L}} L\Gamma_{th_K(b')}$． フレーム $F^{\mathcal{L}}$ の部分集合空間論理のクロス公理モデルに関する健全性により，$\models_J \Gamma_{th_J(a)} \to L\Gamma_{th_K(b')}$ であり $a \models_J \Gamma_{th_J(a)}$ であるので (Lemma 5.4.3(2) を参照)，$a \models_J L\Gamma_{th_K(b')}$ である．充足可能性 $\models_J$ の定義からこのことは，或る $b \in J$ が存在し，

(III) $a \xrightarrow{L}_J b$ かつ $b \models_J \Gamma_{th_K(b')}$

であることと同値である．Lemma 5.4.3(2) により

(IV) $\Gamma_{th_J(b)} = \Gamma_{th_K(b')}$.

(I),(III) より，$p \xrightarrow{\Diamond}_J a \xrightarrow{\Diamond}_J b$ であるので，J 上のクロス公理に関する性質から，或る $s \in J$ が存在し

(V) $p \xrightarrow{L}_J s \xrightarrow{\Diamond}_J b$

(IV) より $\Gamma_{th_J(b)} = \Gamma_{th_K(b')}$ であり，$s \xrightarrow{\Diamond}_J b$ かつ $b' \xrightarrow{\Diamond}_K r$ であるから ((II) を参照)，$s \xrightarrow{\Diamond} r$. すなわち，$p \xrightarrow{L} s \xrightarrow{\Diamond} r$ であり，$s \in J \oplus_\Gamma K$ であるので，求める結果を得る．

(2) 論理式 ψ の構成に関する帰納法により示す．$\psi = P \in \Gamma \cap Prop$ であるとき，任意の $j \in J$ に対し，$j \models_J P \Leftrightarrow j \in \nu_J(P)$．$j \notin \nu_K(P)$ $(J \cap K = \emptyset)$ であるので，$j \in \nu_J(P) \Leftrightarrow j \in \nu_J(P) \cup \nu_K(P)$ である．$j \in \nu_J(P) \cup \nu_K(P) \Leftrightarrow j \models_{J \oplus_\Gamma K} P$ であるから，$j \models P \Leftrightarrow j \models_{J \oplus_\Gamma K} P$ を得る．$k \in K$ に関しても同様.

$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma$ および，$\psi = \neg\chi \in \Gamma$ である場合は，充足可能性 $\models$ の定義から直ちに導かれる．

$\psi = L\chi \in \Gamma$ であるとき，任意の $j \in J$ に対して，$j \models_J L\chi$ は，定義より次と同値である．

或る $j' \in J$ が存在し，$j \xrightarrow{L}_J j'$ かつ $j' \models_J \chi$

$j \in J$ かつ $\xrightarrow{L} \subseteq J \times J \cup K \times K$ であることと帰納法の仮定から，次と同値である．

或る $j' \in J \oplus_\Gamma K$ が存在し，$j \xrightarrow{L} j'$ かつ $j' \models_{J \oplus_\Gamma K} \chi$

すなわち，$j \models_{J \oplus_\Gamma K} L\chi$ と同値である．$k \in K$ に対しても同様である．

$\psi = \Diamond\chi \in \Gamma$ であるとき，任意の $j \in J$ に対し，$j \models_J \Diamond\chi$ は，定義より

(α) 或る $j' \in J$ が存在し，$j \xrightarrow{\Diamond}_J j'$ かつ $j' \models_J \chi$

と同値となる．この主張と

(β) 或る $p \in J \oplus_\Gamma K$ が存在し, $j \xrightarrow{\Diamond} p$ かつ $p \models_{J\oplus_\Gamma K} \chi$

が同値であることを示せばよい. (α) ならば (β) は直ちに示される.

そこで, (β) ならば (α) を示す. もし $p \in J$ ならば $j' := p$ とおけばよい. $p \in K$ ならば, $j \xrightarrow{\Diamond} p$ かつ $(j,p) \in J \times K$ より或る $a \in J$ と或る $b \in K$ が存在し,

(I) $j \xrightarrow{\Diamond}_J a$ かつ $b \xrightarrow{\Diamond}_K p$ であり, $th_J(a) \cap \Gamma = th_K(b) \cap \Gamma$

である. いま, $b \xrightarrow{\Diamond}_K p$ かつ $p \models_{J\oplus_\Gamma K} \chi$ ((β) より) であるから, K に関係する帰納法の仮定より $b \xrightarrow{\Diamond}_K p$ かつ $p \models_K \chi$. すなわち, $b \models_K \Diamond\chi$ である. 言い換えると $\Diamond\chi \in th_K(b)$ であり, $\Diamond\chi \in \Gamma$ であるので $\Diamond\chi \in th_K(b) \cap \Gamma$. (I) より $\Diamond\chi \in th_J(a) \cap \Gamma$ であるから, $a \models_J \Diamond\chi$. したがって,

或る $j' \in J$ が存在し, $a \xrightarrow{\Diamond}_J j'$ かつ $j' \models_J \chi$

である. (I) から $j \xrightarrow{\Diamond}_J a$ であり $a \xrightarrow{\Diamond}_J j'$ であるから, $j \xrightarrow{\Diamond}_J j'$. これにより, 求める j' が得られた.

最後に, ($\psi = \Diamond\chi$ であるとき) 任意の $k \in K$ に対し $k \models_K \Diamond\chi$ は,

或る $k' \in K$ が存在し $k \xrightarrow{\Diamond}_K k'$ かつ $k' \models_K \chi$

であるが, これは

或る $k' \in J \oplus_\Gamma K$ が存在し $k \xrightarrow{\Diamond} k'$ かつ $k' \models_{J\oplus_\Gamma K} \chi$

であることと同値である ($k \in K$ より $\xrightarrow{\Diamond} \subseteq K \times K$). すなわち, $k \models_{J\oplus_\Gamma K} \Diamond\chi$ である. Q.E.D.

以上により, Lemma 5.4.4 が示された. すなわち, (1) により与えられた M_J, M_K の結合により得られたモデル M がクロス公理モデルであること, また (2) により, 任意の論理式 $\psi \in \Gamma$ に対し, $j \in J$ においては, M_J における ψ の解釈と M における ψ の解釈とが一致し, $k \in K$ においては, M_K における ψ の解釈と M における ψ の解釈とが一致することがわかった.

推移律

ここで, 今までのことを振り返ると

或る $x_J \in J$ が存在し, $x_J \models_J \Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_V$ であり,
或る $x_K \in K$ が存在し, $x_K \models_K \Gamma_V \wedge \Diamond\Gamma_W$

であった. まず, $x_J \models_J \Diamond\Gamma_V$ であることと $x_K \models_K \Gamma_V$ であることに注目する. $x_J \models_J \Diamond\Gamma_V$ であるので, 或る $a \in J$ が存在し

(I) $x_J \xrightarrow{\Diamond}_J a$ かつ $a \models_J \Gamma_V$

特に, $a \models_J \Gamma_V$ であり $x_K \models \Gamma_V$ であるので Lemma 5.4.3(2) より

(II) $\Gamma_{th_J(a)} = \Gamma_{th_K(x_K)}$

である.

また, $x_K \models \Diamond\Gamma_W$ であるから, 或る $b \in K$ が存在し,

(III) $x_K \xrightarrow{\Diamond}_K b$ かつ $b \models_K \Gamma_W$

である. 以上を簡単にまとめると, 順に (I),(III),(II),(III) により $x_J \xrightarrow{\Diamond}_J a$ かつ $x_K \xrightarrow{\Diamond}_K b$ であり $\Gamma_{th_J(a)} = \Gamma_{th_K(x_K)}$ および, $b \models_{J \oplus_\Gamma K} \Gamma_W$ である (Lemma 5.4.4(2) より). すなわち, $x_J \xrightarrow{\Diamond} b$ および, $b \models_{J \oplus_\Gamma K} \Gamma_W$ であるから, $x_J \models_{J \oplus_\Gamma K} \Diamond\Gamma_W$.

さらに, $x_J \models_J \Gamma_U$ かつ $x_J \in J$ であったので, 前 Lemma 5.4.4(2) により, $x_J \models_{J \oplus_\Gamma K} \Gamma_U$.

以上により, $x_J \models_{J \oplus_\Gamma K} \Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_W$. したがって, $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_W \in th_{J \oplus_\Gamma K}(x_J)$ であり, $th_{J \oplus_\Gamma K}(x_J)$ は極大無矛盾集合であるので, $\Gamma_U \wedge \Diamond\Gamma_W$ は無矛盾である. ここで, Proposition 5.3.3 に戻り, $[U] \xrightarrow{\Diamond} [W]$ を得る.

すなわち, $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V]$ かつ $[V] \xrightarrow{\Diamond} [W]$ ならば, $[U] \xrightarrow{\Diamond} [W]$ である. 以上のことにより Lemma 5.4.1 の証明が終了する. したがって, $F^{\mathcal{L}}$ は有限クロス公理フレームである.

部分集合空間論理の決定可能性

これまでのことから, (任意に) 与えられた $\varphi \in Formula$ に対し, 有限クロス公理フレーム $F^{\mathcal{L}}$ が存在することがわかった. そこで, この有限フレームに $F^{\mathcal{L}}$ 付値を定め φ に対する有限モデルを構築する.

$\varphi \in Formula$, $\Gamma = \Gamma(\varphi)$ であるとする. このとき, 得られる有限クロス公理フレーム $F^{\mathcal{L}} = \langle [X^{\mathcal{L}}], \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond} \rangle$ に関し付値 ν を次の様に定める. $P \in Prop$ とするとき,

$[U] \in \nu(P) \Leftrightarrow$ 或る $U' \in [U]$ が存在し $P \in U' \cap \Gamma$

$[U] \models^* \psi$ をモデル $\langle [X^{\mathcal{L}}], \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ における ψ の解釈とする.

Proposition 5.4.5.

(1) 任意の $T \in X^{\mathcal{L}}$ 対し, $T \models_{X^{\mathcal{L}}} \chi \Leftrightarrow [T] \models^* \chi$ であるとする. この χ に関し次が成り立つ.

$[U] \xrightarrow{L} [V]$ である任意の $V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し $[V] \models^* \chi$ であるとき, $K\chi \in \Gamma \cap U$

である.

(2) 任意の $U \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $U \models_{X^{\mathcal{L}}} \chi \Leftrightarrow [U] \models^* \chi$ であるとする．この χ に関し次が成り立つ.

> $[U] \xrightarrow{\Diamond} [V]$ である任意の $V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し $[V] \models^* \chi$ であるとき, $\Box\chi \in \Gamma \cap U$

である.

Γ' は φ の部分論理式全体の集合である.

Proof:(1) を示す ((2) の証明は全く同様). (2) 任意の $V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $U \xrightarrow{L} V$ ならば $\chi \in U$ を示す.

任意の $V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $U \xrightarrow{L} V$ ならば $[U] \xrightarrow{L} [V]$ であるので, 条件より $[V] \models^* \chi$. さらに仮定により, $V \models \chi$ と同値であり, これはカノニカルモデルに関する Truth Lemma から $\chi \in V$ である．すなわち, $K\chi \in U$ である.

Lemma 5.4.6. $U \in X^{\mathcal{L}}$ ならば,

> すべての $\psi \in \Gamma$ に対し, $U \models \psi \Leftrightarrow [U] \models^* \psi$

ただし, $U \models \psi$ は $U \models_{X^{\mathcal{L}}} \psi$ であるとする.

Proof: 論理式の構成に関する帰納法により示す． $\psi = P \in \Gamma \cap Prop$ であるとき, $U \models P \Leftrightarrow U \in \nu^{\mathcal{L}}(P)$ であり, 付値 $\nu^{\mathcal{L}}$ の与え方から, $U \in \nu^{\mathcal{L}}(P) \Leftrightarrow P \in U$. いま, この右辺は $P \in U \cap \Gamma$ と同値であり, これは

> 或る $U' \in [U]$ が存在し, $P \in U' \cap \Gamma$

と同値である．すなわち, $[U] \models^* P$ と同値である.

次に $\psi = K\chi \in \Gamma$ であるとき, 以下の 4 つの条件

(I) $U \models K\chi$
(II) 任意の $V \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $U \xrightarrow{L} V$ ならば $V \models \chi$
(III) 任意の $[V] \in X^{\mathcal{L}}$ に対し, $[U] \xrightarrow{L} [V]$ ならば $[V] \models^* \chi$
(IV) $K\chi \in U \cap \Gamma$

において, (I)$\Leftrightarrow$(II)$\Rightarrow$(III) であり, 特に $\chi \in \Gamma$ であることから帰納法の仮定が適用できるので, 前 Proposition 5.4.5(1) から (III)$\Rightarrow$(IV) Truth Lemma から (IV)$\Rightarrow$(I) である．すなわち, (I)$\Leftrightarrow$(III) であるから． $U \models K\chi \Leftrightarrow [U] \models^* K\chi$ を得る．最後に $\psi = \Box\chi \in \Gamma$ である場合だが, これは $\psi = K\chi \in \Gamma$ である場合と同様に示される． Q.E.D.

決定可能性定理

> (Decidability) 最小の部分集合空間論理 $\mathcal{L}$ における論理式の証明可能性は, 決定可能である.

Proof:

Lemma 5.4.6 から, 次のことが言える. クロス公理モデルである $\langle [X^{\mathcal{L}}], \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond}, \nu \rangle$ は, 有限モデルであり, このモデルによる論理式 φ の真偽が φ の証明可能性と一致するので, この部分集合空間論理 $\mathcal{L}$ はクロス公理モデルに関し有限モデル性をもつ. また, $\mathcal{L}$ は有限の公理からなるので有限公理化可能である. すなわち, 有限モデル性をもち有限公理化可能であるので, 与えられた論理式 φ が $\mathcal{L}$ で証明可能か否かを判定することは, 決定可能である.

第6章　最後に

6.1　考察

この節では, 本研究を行なうに当たり考察してきたことを述べることによりどこまでが明らかになったのかを述べる.

6.1.1　直積空間と topo-bisimulation

3章に関連し, 我々が行なってきた考察において次のことがわかった.

まず最初に, 直積空間と topo-bisimulation との関係を考える. $M_\lambda = \langle X_\lambda, O_\lambda, \nu_\lambda \rangle$ を位相モデルとする ($\lambda \in \Lambda$). このとき, $M = \langle X, O, \nu \rangle$ がモデルのクラス $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相モデルであるとは $\langle X, O \rangle$ が位相空間のクラス $\{\langle X_\lambda, O_\lambda \rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相空間であり, 付値 ν に関して任意の $P \in Prop$ に対し, $\nu(P) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \nu_\lambda(P)$ を満たしているものとする.

いま, 添字 λ に対する位相モデル $M_\lambda = \langle X_\lambda, O_\lambda, \nu_\lambda \rangle$ および $M'_\lambda = \langle X'_\lambda, O'_\lambda, \nu'_\lambda \rangle$ において, $\rightleftharpoons_\lambda$ を M_λ と M'_λ との間の全面的な topo-bisimulation であるとする ($\lambda \in \Lambda$). このとき, $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相モデルを $M = \langle X, O, \nu \rangle$ とし, $\{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相モデルを $M' = \langle X', O', \nu' \rangle$ とする. このとき, 次のことが成り立つ.

Proposition 6.1.1. 任意の $x \in X$ および任意の $x' \in X'$ に対し, X と X' との間の関係 $\rightleftharpoons$ を,

$$x \rightleftharpoons x' \Leftrightarrow \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } pr_\lambda(x) \rightleftharpoons_\lambda pr_\lambda(x')$$

と定める. すると, $\rightleftharpoons$ は M と M' との間の全面的な topo-bisimulation となる. ただし, pr_λ を射影とする.

Proof:

$pr_\lambda(x)$ を x_λ と書き, $pr_\lambda(x')$ を x'_λ と書くことにする. すなわち $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であり, $x' = (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であるとする.

ここで, $x \rightleftharpoons x'$ とする. まず命題変数に関する性質を確かめる. すべての $P \in Prop$ に対して, $x \in \nu(P)$ であることは,

$$\text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し, } x_\lambda \in \nu_\lambda(P)$$

である.

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $x_\lambda \rightleftharpoons x'_\lambda$ より $x_\lambda \in \nu_\lambda(P)$ であることと $x'_\lambda \in \nu_\lambda(P)$ であることとは同値である. したがって,

$$\text{任意の}\ \lambda \in \Lambda\ \text{に対し},\ x'_\lambda \in \nu'_\lambda(P)$$

である. つまり, $x' \in \nu(P)$ と同値である.

次に, (forth condition) を満たすことを示す. $x \rightleftharpoons x'$ とし, $x \in u \in O$ であるとする. このとき, 或る $u_\mu \in O_\mu$ が存在し $(x)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda \times u_\lambda$ (これは O の部分基の要素) である.

いま, $x \rightleftharpoons x'$ なので, この $\mu \in \Lambda$ に対し, $x_\mu \rightleftharpoons_\mu x'_\mu$ であることから, 或る $u'_\mu \in O'$ が存在し

(I) 任意の $y'_\mu \in u'_\mu$ に対し, 或る $y_\mu \in u_\mu$ が存在し, $y_\mu \rightleftharpoons_\mu y'_\mu$.

である.

そこで, $u' := \prod_{\lambda \neq \mu} X'_\lambda \times u_\mu$ と定めると u' は直積位相 O' の部分基の要素であるので $u' \in O'$ である.

また, 任意の $y' \in u' (y' = (y'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ に対し $\lambda = \mu$ ならば (I) により或る $y_\mu \in u_\mu$ が存在し $y_\mu \rightleftharpoons_\mu y'_\mu$ である. $\lambda \neq \mu$ ならば $y'_\lambda \in X'_\lambda$ であるが条件より各 λ に対し $\rightleftharpoons_\lambda$ は全面的であるので, 或る $y_\lambda \in X_\lambda$ が存在し $y_\lambda \rightleftharpoons_\lambda y'_\lambda$ である. すなわち, これらの $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて $y := (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と定めれば $y \in u$ であり $y \rightleftharpoons y'$ である. したがって (forth condition) を満たす. また, (back condition) についいも全く同様にして示され, $\rightleftharpoons$ が全面的であることは各 $\rightleftharpoons_\lambda$ が全面的であることから得られる. Q.E.D.

しかしながら, 直積位相モデル M における点 (x_λ) での論理式 φ の解釈である $M, (x_\lambda) \models \varphi$ が真であることと任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $M, x_\lambda \models \varphi$ で真であることすなわち, 直積を与えるすべてのモデル M_λ における点 x_λ での φ の解釈が真であることとは一般に同値とならない.

以上では, 直積位相モデルの定義を直積集合上に直積位相 (弱位相) と呼ばれる一般的な位相 (開集合系) を導入しているが, 直積位相モデルの定義をこれよりも強い位相 (直積位相とくらべて集合として大きい開集合系) をもつ箱位相というものを用いて定義をした場合, $M, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \models \varphi$ が真であることと任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $M_\lambda, x\lambda \models \varphi$ が真であることとが同値となる. 特に添字集合 Λ が有限集合であるとき, 箱位相と直積位相が一致することも知られている. (箱位相, 箱位相と直積位相との関連については, 文献 [7] を参照.)

これは, 位相としてより細かい開集合系を与えること (開集合系を増やすこと) により, 各点での論理式の解釈に影響を与えるという一つの例である. この理由として,

直積位相における解釈 ν は, 射影 pr_λ を用いて

$$\nu(P) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} pr_\lambda^{-1}(\nu(P))$$

と表すことができ, 直積位相の開集合系 O は, $S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\{pr_\lambda(u_\lambda)\} \mid u_\lambda \in O_\lambda\}$ を部分基とする開集合系として表すことができるが, 直積位相空間では位相空間として十分な開集合が無いために φ を真にするような点の集合に対し, 開核を意味する集合がその空間において開集合として構築できないことが考えられる. つまり $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\nu_\lambda(\varphi) = \{x \mid x \models \varphi\}$ が開集合であるとしても直積空間において, $\bigcap_{j=1}^{\infty} pr_\lambda^{-1}(\nu(\varphi))$ が開集合とは限らない. このことが, 解釈の座標上と直積空間上での解釈の相異につながると考えられるのである. また, 直積位相 (弱位相) モデル M での解釈が真となることと, 或る有限個の $\lambda \in \Lambda$ に対して $M_{\lambda\in\Lambda}$ での解釈が真となることは, 同値であることに注意しておく.

さらに有限個 (n 個) の位相空間から成る有限直積空間上では, 直積位相モデルで論理式が真であることと射影した各 (任意の) 位相モデル $M_j(j \leq n)$ で論理式が真であることと同値である, すなわち直積位相モデルでの論理式が偽であることと, 直積を形成する或る位相モデルで偽になることとが同値であることを意味している. 具体的には, $X \times Y, (x, y) \models \varphi$ が偽であることと, $X, x \models \varphi$ が偽になるもしくは $Y, y \models \varphi$ が偽になるということとは同値である.

6.1.2 開集合系と topo-bisimulation

この節では, topo-bisimulation と 開集合との関わりを考察する. 2 つの位相モデル $\langle X, O, \nu\rangle$ および $\langle X', O', \nu'\rangle$ が与えられたとき, topo-bisimulation $\rightleftharpoons$ は, X と X' との間の関係として定義され, 特に, topo-bisimulation はすべての論理式の解釈を変えないという関係になっている.

しかし, 開集合系がどのように解釈の不変性 (topo-bisimulation) に関係しているのか, または関係していたとしてもそれほど重要じゃないのかということは topo-bisimulation の定義からは認識しにくい. そこで以下に記す主張を通して, 少なからず開集合系と付値との関係が影響していることを明確にする.

$g : O \to O'$ に対して, 以下のこと (集合 $E(y), E'(y')$) を定める. 任意の $y \in X$ に対し,

$$A = \{P \in Prop \mid y \in \nu(P)\},$$
$$D = \{v \in O \mid y \in v\}$$

としたとき,

$$E(y) := \bigcap_{P\in A} \nu'(P) \cap \bigcap_{P\notin A} \nu'(P)^c \cap \bigcap_{v\in D} g(v) \cap \bigcap_{v\notin D} g(v)^c$$

同様に, 任意の $y' \in X'$ に対し,

$$A' = \{P \in Prop \mid y' \in \nu'(P)\},$$
$$D' = \{v \in O \mid y' \in g(v)\}$$

としたとき,

$$E'(y') := \bigcap_{P\in A'} \nu(P) \cap \bigcap_{P\notin A'} \nu(P)^c \cap \bigcap_{v\in D'} v \cap \bigcap_{v\notin D'} v^c$$

と定める.

そして, X と X' の間の関係 $\rightleftharpoons$ として, $x \rightleftharpoons x'$ であることを

すべての $P \in Prop$ に対し $x \in \nu(P) \Leftrightarrow x' \in \nu'(P)$ であり,
任意の $v \in O$ に対し $x \in v \Leftrightarrow x' \in g(v)$

とする. この定め方において次が成立する.

Proposition 6.1.2. *$g : O \to O'$ を全射であるとする. 任意の $y \in X$ および, 任意の $y' \in X'$ に対し, $E(y)$, $E'(y') \neq \emptyset$ とする. このとき, $\rightleftharpoons$ は全面的な topo-bisimulation となる.*

Proof: $x \rightleftharpoons x'$ とする. このとき, 命題変数の条件は $\rightleftharpoons$ の定義により直ちに導かれる.

(forth condition) を満たすことを示す. $x \in u \in O$ であるとき, $u' := g(u)$ と定めると, 関係 $\rightleftharpoons$ の定め方と $g : O \to O'$ より $x' \in g(u) \in O$ であるから, $x' \in u' \in O'$ である. さらに, 任意の $y' \in u'$ に対し

$A' := \{P \in Prop \mid y' \in \nu(P)\}$
$D' := \{v \in O \mid y' \in g(v)\}$

と定めると, 条件からこれらにより与えられる $E'(y')$ が空ではないので ($E'(y') \neq \emptyset$), 或る $y \in X$ が存在し

$$y \in \bigcap_{P\in A'} \nu(P) \cap \bigcap_{P\notin A'} \nu(P) \cap \bigcap_{v\in D'} v \cap \bigcap_{v\notin D'} v^c$$

である. したがって,

任意の $P \in A'$ に対し $y \in \nu(P)$.
任意の $P \in A'^c$ に対し $y \notin \nu(P)$.
任意の $v \in D'$ に対し $y \in v$.
任意の $v \in D'^c$ に対し $y \notin v$.

であるから, A', D' の与え方により

(1) $y' \in \nu'(P)$ ならば $y \in \nu(P)$.
(2) $y' \notin \nu'(P)$ ならば $y \notin \nu(P)$.
(3) $y' \in g(v)$ に対し $y \in v$.
(4) $y' \notin g(v)$ に対し $y \notin v$.

となる．いま $y' \in u' = g(u)$ であるから, (3) より $y \in u$ である．また, (1),(2),(3),(4) より $y \in \nu(P) \Leftrightarrow y' \in \nu'(P)$ であり, $y \in v \Leftrightarrow y' \in g(v)$ となるので, $y \rightleftharpoons y'$ となる．

(back condition) については $x' \in u' \in O'$ であるとすると $g : O \to O'$ が全射であるので, 或る $u \in O$ が存在し $g(u) = u'$．また $x \rightleftharpoons x'$ であるので $x \in u$ である．以下, (forth condition) の場合と同様にして任意の $y \in u$ に対し, 或る $y \in g(u) = u'$ が存在し $y \in \nu(P) \Leftrightarrow y' \in \nu'(P)$ であり, $y \in v \Leftrightarrow y' \in g(v)$ という性質を得る．

また, $\rightleftharpoons$ が全面的 (な topo-bisimulation) であることは任意の $y \in X, y' \in X'$ に対し $E(y), E'(y') \neq \emptyset$ であることから導かれる．Q.E.D.

g が X から X' への位相同型写像であるときこの Proposition 6.1.2 の仮定を満たす．しかし, 位相同型写像の条件から単射の条件を除いた写像である g が全射であり連続開写像であるときには, 仮定 (条件) を満足しない．

この Proposition 6.1.2 で仮定している条件のひとつである $E(y) \neq \emptyset$ という条件は, y を含む開集合 u と y で真となる各命題変数の組み合わせで表現される集合においては, もう一方のモデルにおいても全く同じような (集合の) 組み合わせで得られる集合に属す y' が存在し, 2 つの点 $y \in X, y' \in X'$ が $y \rightleftharpoons y'$ という関係にあることを意味する条件となっている．

また, これにより bi-simulation が開集合と付値による集合との交叉関係に影響を受けていることが明らかになった．

$g : X \to X'$ である場合を考えると, この g が O から O' への写像であり全射であることは, g が X 上連続かつ開写像であることよりも弱い条件であることに注意しておく．これは, それぞれ g の像や逆像が開集合である必要がないということが起因している．しかし topo-bisimulation を $g(x) = x'$ と定義することと上述の Proposition の様に topo-bisimulation を定義することとを考えると $g(x) = x'$ と定義することの方が弱い関係であることに注意する．

また, $g : X \to X'$ に対し, g が Proposition 6.1.2 の条件 (任意の $y \in X$ に対し $E(y) \neq \emptyset$) を満たすことは一般には示せない．

以上のことから, 上述の Proposition 6.1.2 は第 3 章で述べた Proposition 3.3.4 の一般形ではないことがわかる．

これにより, $g : O \to O'$ にいくつか条件を加えたとき X と X' との間の関係 $\rightleftharpoons$ が topo-bisimulation となることがわかったが, $g : O \to O'$ は $g \subseteq O \times O'$ と考えることができるので, $g : O \to O'$ をより一般化し, $g \subseteq O \times O'$ にいくつか条件を加えたとき X と X' との間の関係 $\rightleftharpoons$ が topo-bisimulation となる様なものが構築できるかどうかということや, $g : O \to O'$ で十分であるかどうかということを試みること, さらには $g : X \to X'$ となっているときや, g が X 上の連続写像かつの開写像であるときなどの場合の一般化になっている様な条件において topo-bisimulation が構築できるかどうかを探ることは今後の課題として残される．

これらにより仮に topo-bisimulation という概念, さらには論理式の解釈を変えない関

係というものが位相空間を用いてより明確に, 具体的に表現されたとき, 論理式の解釈を変えないという関係がどの様なものであるか一層の視覚化が可能であると考えている.

6.1.3 □ の解釈と連続写像

第 3 章において, □ を位相空間上の開核演算として解釈していた. また, 第 4 章では点と集合との両方を解釈に含めた意味論を与えた. そこで本研究では, 位相の連続であり開写像であるという概念が様相論理における様相演算として解釈可能かどうかを試みた.

$M = \langle X, O, \nu \rangle$ を位相モデルとする. この位相モデルの位相空間 $\langle X, O \rangle$ に関して, $CO(X)$ を X から X への連続開写像全体の集合とする. すなわち, $CO(X) = \{f \mid f : X \to X$ であり X 上連続かつ開写像 $\}$ であるとする.

言語は, 第 2 章で述べた言語を用いる. このとき, 論理式の解釈 $x, u \models \varphi$ を以下の様に定める ($x \in u \in O$). 命題変数の解釈, $\wedge, \neg$ の解釈は通常と同様にして解釈するものとする. そして, □ の解釈を

$$x, u \models \Box\varphi \Leftrightarrow \text{任意の } f \in CO(X), \text{ に対して } f(x), f(u) \models \varphi$$

と定めると. この解釈において S4 で健全性をもつ. しかし, まだこの解釈が S4 で完全であるかどうかを示すことが出来ていない. そこで, 完全性を示す準備として連続写像の構成方法を考え, 一部の連続写像の具体的な構築方法が次の命題を考えることにより得られることがわかった. 記号 O'_F, $Ante(u)$ を

$$O'_F := \{u \cap F \mid u \in O'\}$$
$$Ante(u) := \{v \in O \mid v \subseteq u\}$$

としておく.

Proposition 6.1.3. $\langle X, O \rangle$, $\langle X', O' \rangle$ を位相空間とする. 与えられた $F \subseteq X'$ に対し或る $D \subseteq O$ が存在し, $\langle D, \subseteq \rangle$ が束であり $\emptyset \in D$ であるとする. そして O'_F が集合を要素として有限であるとし, さらに 或る g が存在し $g : D \to O'_F$ かつ束の同型写像であり, 任意の $u \in D$ に対し $\#(u \backslash \cup Ante(u)) \geq \#(g(u) \backslash \cup Ante(g(u)))$ を満たしているとする. このとき,

$\cup D$ から F への連続写像 f が存在し, $f(\cup D) = F$ である.

ただし, 集合 A に対して $\#A$ を A の濃度とする.

Proof: $F \subseteq X'$ が与えられたとする. 条件により $O'_F = \{v \cap F \mid F \in O'\}$ が有限であるので, 次の様にして帰納的に O'_F を分割できる.

$$
\begin{aligned}
L_0 &:= \{\emptyset\} \\
L_n &:= \{v \cap F \in O'_F \backslash \bigcup_{j=0}^{n-1} L_j \mid \text{任意の } A \in O'_F \backslash \bigcup_{j=0}^{n-1} L_j \text{に対して}, A \neq v \cap F \\
&\qquad\qquad \text{ならば } A \not\subseteq v \cap F\} \\
&= \{v_i^n\}_{i=1}^{N_n}
\end{aligned}
$$

と定める. L_n は特に $O'_F \backslash \bigcup_{j=0}^{n-1} L_j$ の極小点全体の集合を与えている. この様に定めた L_n を用いて以下の様にして帰納的に写像を与えることにする.

$n = 1$ の場合 (base case). $g : D \to O'_F$ が束の同型写像であるので, 任意の $v_i^1 \in L_1$ に対して或る $u_i^1 \in D \subseteq O$ が存在し, $u_i^1 = g^{-1}(v_i^1)$ である. このとき $Ante(v_1^i) = \{\emptyset\}$ であるので, g が $\subseteq$ の順序を保つ同型写像であり, $\emptyset \in D$ であることから $Ante(u_1^i) = \{\emptyset\}$ である. すなわち,

$$
\# u_i^1 = \#(u_i^1 \backslash \cup Ante(u_i^1)) \geq \#(g(u_i^1) \backslash \cup Ante(g(u_i^1))) = \# g(u_i^1)
$$

したがって, $\# u_i^1 \geq \# v_i^1$ であり, 特に $u_i^1, v_i^1 \neq \emptyset$ である.

ここで, 空でない集合 A, B に対し $Map(A, B) := \{f \mid f : A \to B\}$ とする. $\# u_i^1 \geq \# v_i^1$ であるから, $Map(u_i^1, v_i^1) \neq \emptyset$ である. 任意に $f_i^1 \in Map(u_i^1, v_i^1)$ をとる. ここで,

$$
\text{任意の } x \in u_i^1 \text{ に対し } f(x) := f_i^1(x)
$$

と定める. すなわち f の u_i^1 による制限 $f_{|u_i^1}$ が f_i^1 と一致する様に定める. この様に $i \leq N_1$ に対して f を与えたとき, この f が 2 点以上へ移るということがないことを確認する. 任意の $v_i, v_{i'} \in L_1$ に対して, L_1 の与え方から $v_i \neq v_{i'}$ ならば $v_i \cap v_{i'} = \emptyset$ である. また $g : O \to O'_F$ が束準同型であり, $\emptyset \in D$ でもあるので対応する $u_i, u_{i'}$ に対して, $u_i \cap u_{i'} = \emptyset$ となる. すなわち, 或るひとつの点で移り先が 2 点であることがないということである. これにより, f が $\bigcup_{i=1}^{N_j} u_i^1$ 上で写像として, 定義された.

$n \geq 2$ の場合 (induction step). $U_j := \bigcup_{i=1}^{N_j} u_i^j$ とおき ($j \leq n-1$), $U := \bigcup_{j=1}^{n-1} U_j$ とおくことにする. また, V に関しても同様に与えるものとする.

このとき, 帰納法の仮定として f が U 上で写像として定まっているとする. 特に, $f^{-1}(v_j^i) = u_j^i$ である. さらに, 任意の $v^n \in L_n$ に対して, 任意に選んだ $v \in O'_F$ が $v \subsetneq v^n$ ならば或る $m < n$ が存在し $v \in L_m$ であることに注意しておく.

任意の $v_i^n \in L_n$ に対し, $g : O \to O'$ が束同型であるので或る $u_i^n \in D$ が一意に存在し, $u_i^n = g^{-1}(v_i^n)$. この u_i^n に対し, $u_i^n \backslash U = u_i^n \backslash \cup Ante(u_i^n)$ であることに注意すると (対応する v に関しても同様で),

$$
\begin{aligned}
\text{(I) } \#(u_i^n \backslash U) &= \#(u_i^n \backslash Ante(u_i^n)) \geq \#(g(u_i^n) \backslash \cup Ante(g(u_i^n))) = \#(v_i^n \backslash Ante(v_i^n)) \\
&\geq \#(v_i^n \backslash V)
\end{aligned}
$$

である．いま帰納法の仮定により f の U による制限 $f_{|U}$ が定まっている．そこで k, もし $u_i^n \backslash U = \emptyset$ ならば, 何もしない ($f_{|U}$ が定まっている)．このとき, $f^{-1}(v_i^n) = u_i^n$ が成り立っていることを確かめる．いま $u_i^n \backslash U = \emptyset$ なので, $u_i^n = U = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} u_k^j$ である．$g : D \to O'_F$ が束同型写像であるから,

$$v_i^n = g(u_i^n) = g(\textstyle\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} u_k^j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} g(u_k^j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} v_k^j$$

である．帰納法の仮定から f が U から V への写像であり $f^{-1}(v_k^j) = u_k^j$ であるので, 逆像の性質から

$$f^{-1}(v_i^n) = f^{-1}(\textstyle\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} v_k^j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} f^{-1}(v_k^j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{N_j} u_k^j = u_i^n$$

である．

次に, $u_i^n \backslash U \neq \emptyset$ ならば, (I) より $Map(u_i^n \backslash U, v_i^n \backslash V) \neq \emptyset$ であるから, 任意の $f \in Map(u_i^n \backslash U, v_i^n \backslash V)$ をとり, $f_{|(u_i^n \backslash U)} := f_i^n$ と定める．この与え方により $f^{-1}(v_i^n) = u_i^n$ であり, $j \leq n$ および $k \leq N_j$ に対して, $f^{-1}(v_k^j) = u_k^j$ であることに変わりがない．

以上により, $f_{|\bigcup_{i=1}^{N_n} u_i^n \backslash U}$ が定義された．次にこれが写像であることを確かめる．つまり, ひとつの点から 2 点へ移ることがないことを確かめる．任意の $u_i^n, u_{i'}^n \in L_n \quad (u_i^n \neq u_{i'}^n)$ に対して, $g : D \to O'_F$ が束同型写像であるから, L_j の与え方より $g(u_i^n \cap u_{i'}^n) \subsetneq g(u_i^n) = v_i^n$ であるので, 或る $m < n$ が存在し, $g(u_i^n \cap u_{i'}^n) \in L_m$．$g : D \to O'_F$ が全単射であることから, 或る $u_k^m \in g^{-1}(L_m)$ が存在し, $u_k^m = u_i^n \cap u_{i'}^n$．すなわち, $u_i^n \cap u_{i'}^n \subseteq U$ である．よって,

$$(u_i^n \backslash U) \cap (u_{i'}^n \backslash U) = \emptyset$$

であるから, $f_{|\bigcup_{i=1}^{N_n} u_i^n \backslash U}$ は写像であり, $f_{|U}$ が写像であったので, $f_{|\bigcup_{i=1}^{N_n} u_i^n}$ も写像となる．

また, $L_N = \{X' \cap F\} = \{F\}$ となる自然数 N が存在するので, この構築を $n = N$ までくり返し, $f(\cup D) = F$ を得る．これに加えて, $D = \{f^{-1}(v) \mid v \in O'\} \subseteq O$ となっている．

このようにして得られた写像 f が $\cup D$ 上連続となることは明らかである ($f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(\cup D))$ であることに注意)．Q.E.D.

この命題に関して次のことを捕捉しておく．$\#A \geq \#B$ ならば $f : A \to B$ であるような写像は必ず存在するが, この命題の証明には, この様な $f : A \to B$ を任意にとってくることができることを仮定している (すなわち撰択公理を仮定している)．

X' が有限集合であるとき, または O' が有限個の開集合しか持たないとき, この命題を用いて得られる様な連続写像 f の全体は, X から X' への連続写像全体になる．これは次の命題から得られる．

Proposition 6.1.4. $\langle X, O \rangle$ $\langle X', O' \rangle$ を任意の位相空間とする．

$f : X \to X'$ が連続ならば, 或る $D \subseteq O$ が存在し, $\emptyset, X \in D$ であり, かつ $f : \cup D \to O'_{f(X)}$ が束同型写像となる．

Proof: $D := \{f^{-1}(v') \mid v' \in O'_{f(X)}\} = \{f^{-1}(v \cap f(X)) \mid v \in O'\}$ とおけばよい.

以上の命題により, 連続写像が開集合系の部分集合と値域のべき集合の部分集合との間に束の同型を与えることが明らかとなり, 開集合系の部分集合ともう一方の有限個の集合との間に束同型が定められていて濃度の条件を満たしていれば, 連続写像が構築することができることがわかった. また, 開写像においても同様の性質 (束同型等) をもつことをここで注意しておく.

6.2 まとめ

第 3 章から, S4 ではカノニカルモデルを用いて完全であること. また, カントル空間や実数空間が完全となることがわかった. また, この論文では詳しく取りあげていないが最小元をもつクリプキモデルから十分な連結性をもつ位相空間 (well-connected topological space) を構築している. もちろん S4 で, その位相空間は完全である [1]. すなわち, 種々の位相的性質 (コンパクト性や, 距離化可能性, 連結性など) を持つ空間において, 完全であることがわかった.

この様に位相空間としてことなる性質での完全性が成立するのは, 種々の完全性の証明に証明不可能な論理式に対する反例モデルを構築しているが, その反例モデルとしての位相モデルで重要なのが証明不可能な論理式の構造 (部分論理式) とその構造を表現するに及ぶ点と開集合で, すべての点や開集合が関係しているためではないことが起因していると考えられる.

また, 考察により直積空間と topo-bisimulation との関係や, topo-bisimulation を与える一つの条件がわかった. また, topo-bisimulation において, 開集合と付値による集合との交叉点 (共通部分の要素) の有無が深く関係していることが考察できた.

第 4 章から, 点と (点の) 集合における解釈をもつ部分集合モデルにおいて, 部分集合空間論理が完全であること, またその部分集合空間において, 部分集合モデル全体のクラスが有限性を持たないことから, 決定可能性を示すの為に有限性を持つモデルのクラスを考える必要があった.

しかし, 現在 (2003 年) において部分集合モデルのクラスを有限の共通和に関して閉じているような部分集合の集合 (O) に限った共通和モデル (intersection models) のクラスに関しては意味論の完全性が示されていない. (当然, 位相モデルのこの意味論での完全性も示されていない.)

考察において, 点と集合とを解釈に含めたセマンティクスを考えた. このセマンティクスにおいて健全性を示すことができ, 或る特別な連続写像が, 開集合系の部分ともう一方の位相空間上のべき集合の部分との間の束同型写像により与え得ることがわかったがその一方で, 完全性を示すには及ばなかった.

6.3 今後の課題

考察において述べたように第 2 章で与えた解釈による位相モデルにおいて, topo-bisimulation と同等な条件として開集合系や付値, さらには位相の諸性質を用いて表現することができるかどうか. また, 位相モデルに点と集合とを解釈に含めた意味論において, topo-bisimulation すなわち, 論理式の解釈をひとしくするような関係の一つはどの様に表すことができるか, そしてその (位相モデルに点と集合との解釈を与えた) 意味論の完全性を示せるかどうか. そして, S4 よりも強い様相論理に対し, どういう公理がどんな開集合系の構造を与えるか, または 開集合系と付値による集合のクラスとの交叉関係がどのような性質をもつか. さらには, 考察で述べたような様相演算子と連続写像との関係を与えた意味論の完全性を示すことができるかどうか, 連続写像に対応する様相演算を与えることができるかどうか, そしてその為にもっと具体的な連続写像の諸性質, 例えば移り先が無限個の集合である開集合系の一部 (開集合のクラス) からの或る束の同型写像が与えられたとき連続写像を構築できるか等を明らかにすることが今後の課題として残っている.

謝辞

本研究の内容に合わせて 1 対 1 のゼミをして下さったばかりでなく, この論文の締切りぎりぎりにまで個人のご指導をして下さった小野寛晰教授に深い感謝を示したいと思います. 本当にありがとうござました. また, 審査会などで研究に関するコメントを下さった石原哉助教授, ゼミなどでコメント下さった浜野正浩助手, Dr. Tomasz Kowalski, 小野研究室の皆様に深い感謝を申し上げます.

関連図書

[1] M.Aiello. Spatial Reasoning: Theory and Practice, Ph. D thesis, University of Amsterdam, 2002.

[2] A.Dabrowski,L.S.Moss, R.Parikh. Topological reasoning and the logic of knowledge, Annals of Pure and Applied Logic 78 (73-110), 1996.

[3] R.Goldblatt. Mathematics of Modality, 1993.

[4] 小野寛晰, 情報科学における論理, 1994.

[5] 田中俊一, 位相と論理, 2000.

[6] 矢野公一, 距離空間と位相構造, 1997.

[7] 岩波辞典第３版, 1985.