

Title	立方体の展開図の展開図分割 Rep-cube
Author(s)	岡田, 珠美
Citation	
Issue Date	2021-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/17086
Rights	
Description	Supervisor: 上原 隆平, 先端科学技術研究科, 修士 (情報科学)

修士論文

立方体の展開図の展開図分割 Rep-cube

岡田 珠美

主指導教員 上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
(情報科学)

令和3年3月

Abstract

This study deals with rep-cube at the frontiers of computational origami. Computational origami is a new field of study, and there are many unsolved problems in this field, including problems with rep-cube as in this study. By obtaining new results for rep-cube, we expect that future issues and unsolved problems will apply for future development in the research field.

Rep-cube is a new concept that was born in 2016 from the natural question “Is there any polyomino that folds to a cube, and its dissections fold to cubes?”. In other words, it is a polyomino that is a net of a cube. This was inspired by two famous concepts: polyomino and rep-tile. Polyomino and rep-tile were proposed by Solomon W. Golomb. Since then, it has been researched extensively in the puzzle industry and has played an important role in recreational mathematics. Polyomino is a set of unit squares. Rep-tile is a polygon that can be divided into replicas congruent to one another and similar to the original.

A polyomino is a rep-cube of order k that means it can fold into a cube and it can be divided into k polyominoes of which each of them can fold into a cube. If all k polyominoes have the same area, the original polyomino is a regular rep-cube. Also if all k polyominoes are congruent nets, the original polyomino is a uniform rep-cube.

So far, several rep-cubes have been found by trial and error. Previous studies have shown that regular rep-cubes exist for order $k = 2, 4, 5, 8, 9, 16, 18, 25, 36, 50, 64$, by actually making rep-cubes. It was also found that for any positive integer k' and any element g of the set $\{2, 4, 5, 8, 9, 16, 18, 25, 36, 50, 64\}$, there exists a rep-cube of order $k = 36gk'^2$. This means that there are infinitely many regular rep-cubes. Moreover, an algorithm was designed to enumerate regular rep-cubes for order $k = 2, 4$ of area $6k$ with a check for polyominoes that can cover a cube of size $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ without overlap. This algorithm applied to enumerate and analyze all regular rep-cubes of order $k = 2$ with area 12 and order $k = 4$ with area 24. However, rep-cubes have the same folding way and the same contour counted as different rep-cubes with a different division. Therefore, it needs to reconsider the rep-cube as a division of the surface of a cube.

The purpose of this study is to consider as based on the division patterns of a cube considered an approach based on the division of a cube. To achieve this, we designed the algorithm from the conventional method of fold a given polygon to unfolding the given polyhedron. It is also to discuss the value of the order k that can construct rep-cubes. For the case of a regular rep-cube, we consider the case for values of order k for which a regular rep-cube does not exist. For the case of a uniform rep-cube, we consider whether a uniform rep-cube can be constructed for every 11 nets of the unit cube.

First, we proposed an algorithm to divide the surface of a cube of $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ by a unit square. We applied this algorithm to experiment with the program for cases unfolding a cube of $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ into a polyomino of area 12 and unfolding a cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ into a polyomino of area 30.

Next, we proved the value of the order k for which regular rep-cubes do not exist as a general characterization of the numbers for which regular rep-cubes do not exist. Based on this, we explored the value of order k at which regular rep-cubes are expected to exist and found a new regular rep-cube of order $k = 10$ and a regular rep-cube of order $k = 13$.

Finally, for each of the 11 polyominoes of the unit cube, we proved the value of the order k at which a uniform rep-cube can be constructed. Although no uniform rep-cubes have been found so far for each two P_x and P_y of the 11 polyominoes of the unit cube, we showed that new uniform rep-cubes of order $k = 8$ can be constructed for each of the polyominoes P_x and P_y . We also showed that there does not exist a uniform rep-cube for order $k = 5$ for each of polyominoes P_x and P_y . By doing this, it indicated that a uniform rep-cube can construct for each of the 11 polyominoes of the unit cube, and the value of the smallest order k that constructs a uniform rep-cube was determined.

目次

第1章	はじめに	1
1.1	レプ・キューブ (rep-cube)	1
1.2	先行研究	2
1.3	研究目的	4
1.4	定義と用語	5
第2章	立方体の展開によるレプ・キューブへのアプローチ	7
2.1	立方体の表面の正方形分割	7
2.2	実験・評価	9
2.2.1	$(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を面積 12 のポリオミノに展開 . .	10
2.2.2	$(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を面積 30 のポリオミノに展開 . .	14
第3章	正則なレプ・キューブの存在性	15
3.1	次数 k の正則なレプ・キューブの非存在性	15
3.2	新しい正則なレプ・キューブ	16
第4章	一様なレプ・キューブを構成する最小の次数	18
4.1	ポリオミノ P_x の場合	20
4.2	ポリオミノ P_y の場合	22
第5章	おわりに	25
第6章	謝辞	27

目次

1	5 - omino	1
2	Rep-tile	2
3	A uniform (regular) rep-cube of order $k = 2$	3
4	A regular rep-cube of order $k = 5$	4
5	Pattern for making a rep-cube of order $k = 36$	5
6	A uniform rep-cube of order $k = 18$	5
7	A uniform rep-cube of order $k = 18i^2$ ($i = 3$)	6
8	Q : labeled cube	8
9	$G(Q)$: graph of a cube	8
10	$G'(Q)$: A spanning tree of a cube	9
11	A net of a cube on a matrix	9
12	The same net with different divisions	10
13	A net of a cube on a matrix with binary representation	10
14	A cube of $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$	11
15	$G(Q)$ for $k = 2$	11
16	A spanning tree for $k = 2$	11
17	Polyominoes of area 12	13
18	A cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$	14
19	$G(Q)$ for $k = 5$	14
20	A spanning tree for $k = 5$	14
21	A regular rep-cube of order $k = 10$	17
22	A regular rep-cube of order $k = 13$	17
23	Polyomino P_x	18
24	Polyomino P_y	18
25	A uniform rep-cube of order $k = 8$ (polyomino P_x)	19
26	A uniform rep-cube of order $k = 8$ (polyomino P_y)	19
27	A cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ with colored	20
28	Polyomino P_x patterns	20
29	The case of using B and A	21
30	The case of using D and A	22

31	Polymino P_y patterns	22
32	The case of using A and A	23
33	The case of using A and D	23
34	The case of using B and D	24

表 目 次

1	Adjacency list of a cube (Q)	8
2	Specification for experimental PC	11
3	Result of unfolding a cube of $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ into a polyomino of area 12	11
4	Result of unfolding a cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ into a polyomino of area 30	14
5	Minimal uniform rep-cubes for order k	18

第1章 はじめに

理論計算機科学の主要なトピックとして、アルゴリズム、計算量、計算幾何学がある。計算幾何学の中で、コンピュータ・サイエンスとしての折り紙は近年脚光を浴びており、方法論の確立とソフトウェアの開発が進んでいる。計算折り紙は、計算機科学の中で「計算幾何」や「最適化問題」として、「折り」の問題を捉えたアルゴリズムと計算量を研究する分野である。

本研究では、計算折り紙の最前線であるレプ・キューブについて扱う。計算折り紙は新しい学問分野であり、本研究で扱うレプ・キューブをはじめ、数多くの未解決問題がある。レプ・キューブに対して新しい結果を得ることで、今後の課題や未解決問題を見つけ出し、これからの研究分野における発展に活用されることが期待される。

1.1 レプ・キューブ (rep-cube)

レプ・キューブ (rep-cube) とは、「立方体が折れるポリオミノで、分割したポリオミノがそれぞれ立方体を折れるようなものは存在するか」という自然な疑問から2016年に生まれた新しい概念である。これはポリオミノとレプ・タイルとよばれる有名な二つの概念から着想を得ている。

ポリオミノ (polyomino) とは、単位正方形の辺同士を接着して得られる多角形である。図1に単位正方形5つによって構成される面積5のポリオミノを示す。

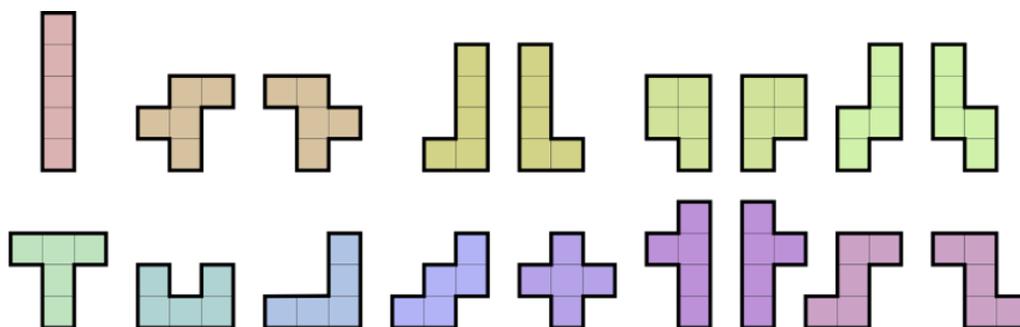


図 1: 5 - omino

ポリオミノは1954年にSolomon W. Golombによって考案された。それ以来、パズル業界において広く研究され、レクリエーション数学で重要な役割を果たしてきた。例えば、 $(\sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10})$ の立方体に対して、面積5のポリオミノ12種類をすべて使ってカバーする方法が示されている [1]。

そして、1962年にGolombはもう一つ概念であるレプ・タイル(rep-tile)を考案した。レプ・タイルとは、自分自身と相似な図形に分割できる多角形である。図2にレプ・タイルの例を示す。

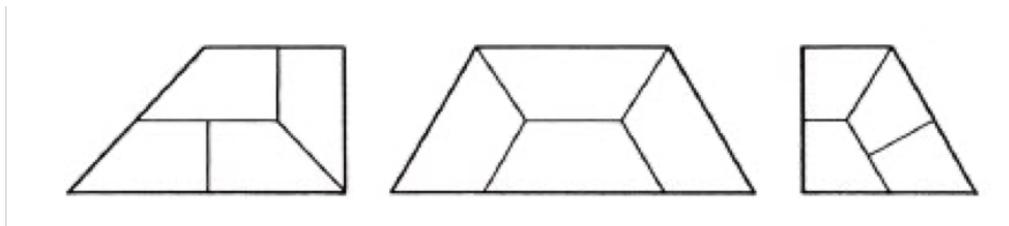


図 2: Rep-tile

立方体の展開図となるポリオミノを k 個のポリオミノに分割したとき、それぞれが立方体の展開図になるものを次数 (order) k のレプ・キューブとよぶ。すなわち、次数 k のレプ・キューブとは、それ自体が立方体を折れてかつ、それぞれが立方体を折れる k 個のポリオミノに分割できることを意味する。ここでの展開図とは、多面体の表面を切って平面上に広げた多角形のことを指し、連結であり重なりをもたない単純多角形であることが条件である。特に、多面体の辺に沿って切ることで得られる展開図を辺展開図とよぶ。

k 個に分割して得られた展開図がどれも同じ面積であるとき、元の展開図を次数 k の**正則** (regular) なレプ・キューブとよぶ。また、 k 個に分割して得られた展開図がすべて合同であったとき、元の展開図を次数 k の**一様** (uniform) なレプ・キューブとよぶ。

1.2 先行研究

これまで手作業や一部プログラムによる探索にて、いくつかのレプ・キューブが見つかっている。

定理 1. [2, 3] 次数 $k = 2, 4, 5, 8, 9, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ の正則なレプ・キューブが存在する。

文献 [2, 3] では、実際にレプ・キューブを作って示すことで構成的に証明が与えられている。例として、図3に $k = 2$ のレプ・キューブ、図4に $k = 5$ のレプ・キューブを示す。

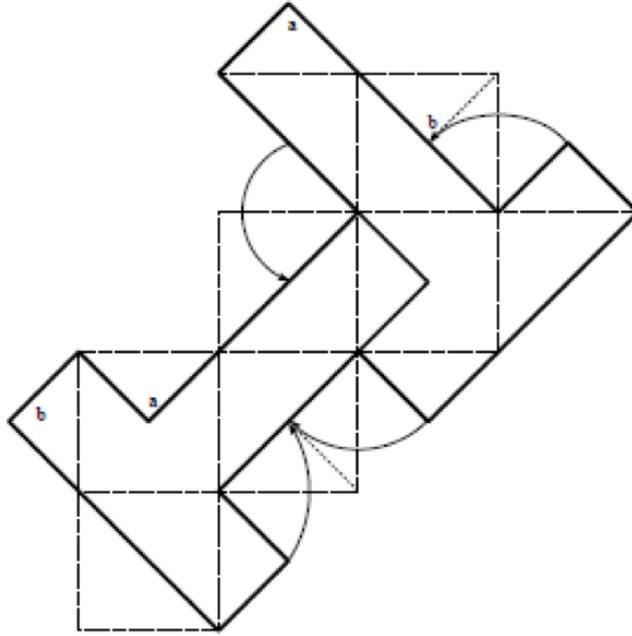


図 3: A uniform (regular) rep-cube of order $k = 2$

定理 2. [2] 任意の正整数 k' と集合 $\{2, 4, 5, 8, 9, 16, 18, 25, 36, 50, 64\}$ の任意の要素 g に対して $k = 36gk'^2$ の正則なレプ・キューブが存在する.

文献 [2] では, $k = 36$ のレプ・キューブを作るためのパターンを使って次数 k の正則なレプ・キューブが無限に存在することを示している. 図 5 に $k = 36$ のレプ・キューブを作るためのパターンを示す. このパターンを 6 枚使い, 11 種類ある立方体の辺展開図と同じ配置に並べて接着すると, $k = 36$ のレプ・キューブが完成する. 同様に, g の値に応じて定理 1 で示したレプ・キューブを 1 つ選ぶ. この中の単位正方形を k'^2 個の正方形に分割する. これらの正方形を $k = 36$ のレプ・キューブを作るためのパターンで置き換えると, 立方体の展開図となる.

定理 3. [3] 任意の正整数 i に対して, 次数 $k = 18i^2$ の一様なレプ・キューブが存在する.

文献 [3] では, 次数 $k = 18$ の一様なレプ・キューブの構成方法を利用して, 一様なレプ・キューブが無限に存在することを示している. 図 6 に $k = 18$ の一様なレプ・キューブの例を示す. この構成方法を利用して細分化することで, 任意の正整数 i に対しても同様に一様なレプ・キューブを構成することができる. 図 7 に $i = 3$ に対する構成例を示す.

また, 文献 [3] において大きさ $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ の立方体を重なりなくカバーすることができるポリオミノをチェックして, 次数 k で面積 $6k$ の正則なレプ・キューブを列挙するアルゴリズムが設計された. これにより, 次数 $k = 2$ で面積 12, 次

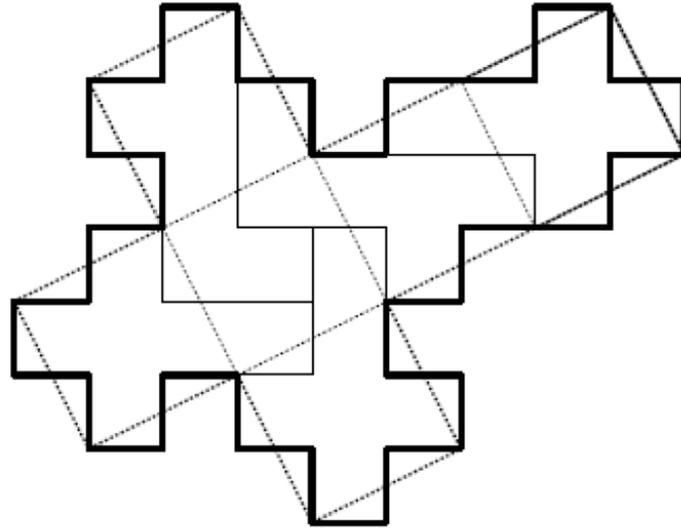


図 4: A regular rep-cube of order $k = 5$

数 $k = 4$ で面積 24 の正則なレプ・キューブの全列挙と解析をおこなっている．次数 $k = 2$ で面積 12 の正則なレプ・キューブについては，全部で 33 種類あることが示されている．次数 $k = 4$ で面積 24 の正則なレプ・キューブについては，全部で 7185 種類あることが示されている．次数 $k = 4$ で面積 24 の正則なレプ・キューブ 7185 種類の中には，回転対称であるレプ・キューブや，4 個のポリオミノに分割する方法が複数通りあるレプ・キューブが存在している．ここでは同じ折り畳み方法，同じ輪郭をもつレプ・キューブが，分割が異なる別のレプ・キューブとして数えられている．レプ・キューブとはポリオミノ P であり， P そのものが立方体の展開図であるため，レプ・キューブを立方体の表面の分割として再考する必要がある．

1.3 研究目的

本研究の目的は，レプ・キューブに対して従来の与えられた多角形を折る方法から，与えられた多面体を展開する方法でアプローチすることである．最終的には， $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体への拡張を検討する．定理 1 より次数 $k = 5$ の正則なレプ・キューブが存在することが示されており，これまでいくつか手作業で見つけられているが，全列挙はなされていない．

また，レプ・キューブを構成できる次数 k の値について論証することである．正則なレプ・キューブについては，正則なレプ・キューブが存在しない次数 k の値の場合について考える．一様なレプ・キューブについては，単位立方体の辺展開図 11 種類に対して，どれも一様なレプ・キューブが構成できるかどうかについて探求する．

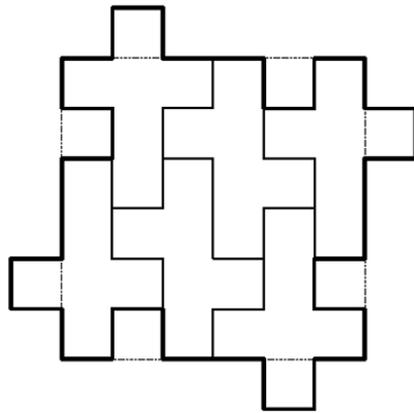


図 5: Pattern for making a rep-cube of order $k = 36$

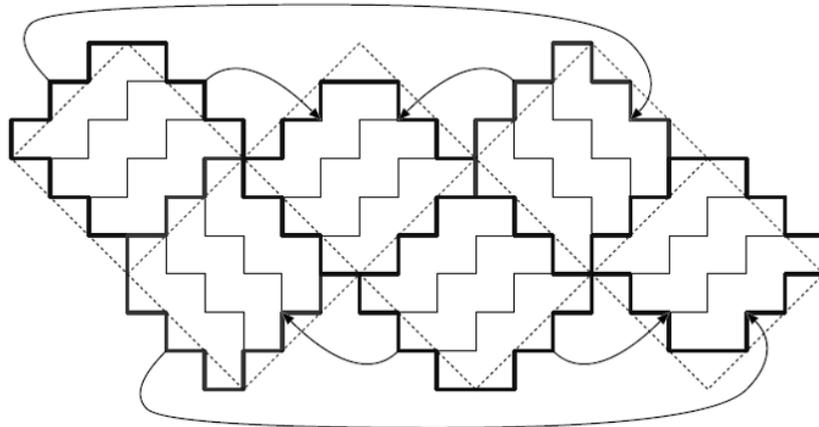


図 6: A uniform rep-cube of order $k = 18$

1.4 定義と用語

本論文で必要となる定義と用語について説明する。グラフと木、そして木を探索するためのアルゴリズムである深さ優先探索を導入する。

グラフ G とは、頂点 (vertex) の集合 V と辺 (edge) の集合 E の組として定義され、 $G = (V, E)$ とあらわす。無向グラフとは、頂点集合とその頂点集合の非順序対の集合である辺集合からなる構造をいう。頂点 $v_i, v_j \in V$ が辺 $e \in E$ によってつながっているとき、 v_i, v_j は互いに隣接 (adjacent) しているという。任意の2頂点 $u, v \in V$ 間に辺が存在するとき、グラフ G は連結しているという。したがって、連結な無向グラフにおいて、どの2頂点間も互いに到達可能である。また、頂点 $v_1, v_k \in V$ が $v_1 = v_k$ で、かつそれ以外は同じ頂点が2つ以上現れないとき、 (v_1, v_2, \dots, v_k) は閉路 (サイクル) であるという。頂点集合 V と辺集合 E それぞれの部分集合からなるグラフを部分グラフという。部分グラフのうち、極大で連結なものを連結成分

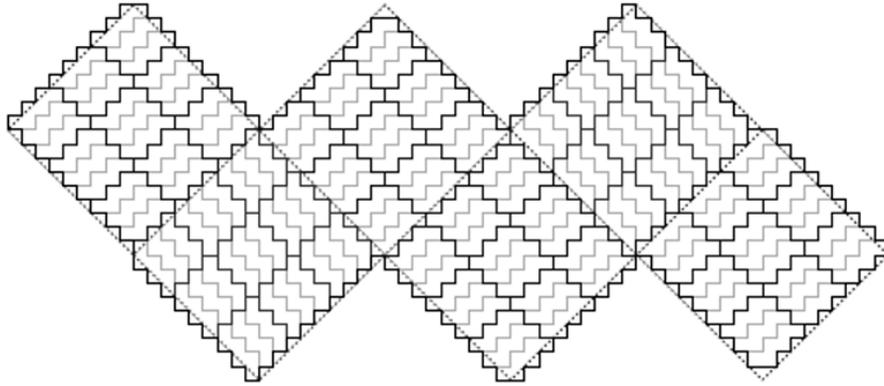


図 7: A uniform rep-cube of order $k = 18i^2$ ($i = 3$)

とよぶ.

グラフをデータで表現するためのデータ構造として、ゼロサプレス型二分決定グラフ (ZDD: zero-suppressed binary decision diagram) がある. これは, 集合族 (集合の集合) を効率よく表現するためのデータ構造である.

グラフ G が木 (tree) であるとは, 閉路がなくグラフに含まれる任意の 2 頂点間に辺が存在する連結グラフのことである. ここでは, 辺に向きのない無向グラフであることを前提とする. 特に, 1つの頂点を根 (root) として固定した木 G を根付き木という. 連結グラフ G において, G のすべての頂点を含む部分グラフで木であるものを全域木 (spanning tree) という. すなわち全域木は, 閉路が生じてはいけなかつ連結成分が 2 つ以上生じてはいけない.

木の探索は, 根を始点とし到達可能な頂点をすべてみつけるまでおこなう. 木の探索方法の 1 つである深さ優先探索 (DFS: depth-first search) とは, できる限り深く訪問することを繰り返すアルゴリズムである. 具体的には, 新たに訪問する頂点がなくなった場合, 1 つ前の頂点に戻り, そこからまたできる限り深く訪問する. 1 つ前の頂点に戻るとき, 戻る頂点はその時点で最も最近訪問した頂点となる.

第2章 立方体の展開によるレプ・キューブへのアプローチ

この章では、レプ・キューブを立方体の表面分割として生み出すためのアプローチについて述べる。はじめに立方体の表面を正方形で分割するアルゴリズムについて、単位立方体を例に挙げて述べる。そして $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体の表面の分割と、 $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体の表面の分割について得られた結果を示す。

2.1 立方体の表面の正方形分割

レプ・キューブを生み出す立方体において、立方体の表面の分割パターンに着目してみると、異なるレプ・キューブから同じ分割パターンをもつ立方体になるものが存在する。一様なレプ・キューブを生み出す立方体の分割と、非一様なレプ・キューブを生み出す立方体の分割は、それぞれ分割パターンによって分類することができる。このような立方体の表面の分割に基づくアプローチによるアルゴリズムを提案する。

具体的には、 $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ の立方体を面積 $6k$ のポリオミノに展開するアルゴリズムを以下に示す。ここでは、例として単位立方体 ($k = 1$) を用いる。

1. Q を対象となる $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ の立方体とする。 Q の面を頂点、面と面とのつながりを辺として全体グラフ $G(Q)$ としてあらわす。ここで、 Q の各面には番号のラベルをつけておく。図8にラベル付き単位立方体、図9にその全体グラフ $G(Q)$ を示す。
2. Q の各面の隣接関係を隣接リストとして設定する。図8の単位立方体に対応する隣接リストを表1に示す。
3. 全体グラフ $G(Q)$ の全域木 $G'(Q)$ を列挙する。このとき、ラベルが1の頂点を根とする。図9に示す $G(Q)$ の全域木 $G'(Q)$ の一例を図10に示す。

グラフ $G(Q)$ の全域木を列挙すると、それに対応する展開図を得ることができる。全域木は「閉路をもたず、すべての頂点を含む連結な構造」であるためである。もしグラフが閉路をもつ場合、得られる展開図は2つ以上のパーツに分断されてしまう。すなわち、展開図であるためには対応するグラフが全域木でなければならない。

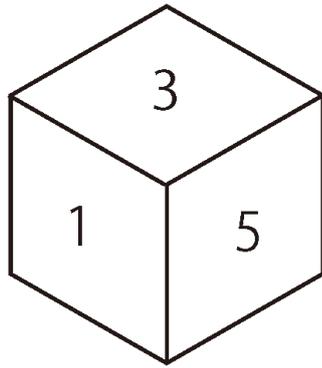


図 8: Q : labeled cube

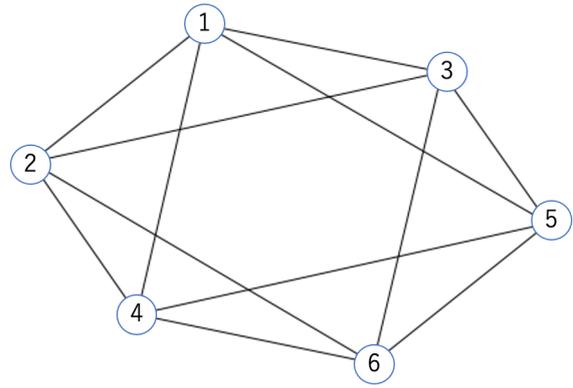


図 9: $G(Q)$: graph of a cube

表 1: Adjacency list of a cube (Q)

Face	Up	Right	Down	Left
1	3	5	4	2
2	6	3	1	4
3	6	5	1	2
4	1	5	6	2
5	1	3	6	4
6	4	5	3	2

4. 各 $G'(Q)$ に対して隣接リストをもとに、深さ優先探索で大きさ $n \times n$ のマトリックス上に展開する。ここで n は任意の正整数であり、要素数 $6k$ が十分に格納できるサイズであることに注意する。あらかじめ $G'(Q)$ の根であるラベルが 1 の頂点を、マトリックス上で開始位置として設定しておく。

図 10 の全域木をマトリックス上へ展開した様子を図 11 に示す。赤い枠は開始位置をあらわす。分割が異なる別の切り開き方でも、グラフの頂点にはラベルが付いているため、同型な展開図が得られる場合がある。分割は異なるが、図 11 と同型である展開図の例を図 12 に示す。したがって、ここから非同型な展開図だけを残していく。

5. 4. のそれぞれについて、単位正方形があるところを "1"、単位正方形がないところを "0" として 0/1 行列で表現する。図 11 を 0/1 行列で表現したものを図 13 に示す。ここで 1 の個数を数えて、展開図として重なりがあるかどうかを判定し、1 の個数が $6k$ 個あるものだけを残しておく。
6. 5. のそれぞれについて、回転と裏返して全部で 8 通り生成し、ラスタスキャンで 0 と 1 のシーケンスを取得する。そのうちの最小値を代表としてリストに保存する。

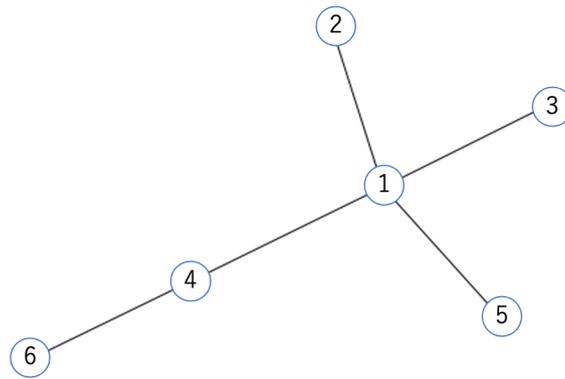


図 10: $G'(Q)$: A spanning tree of a cube

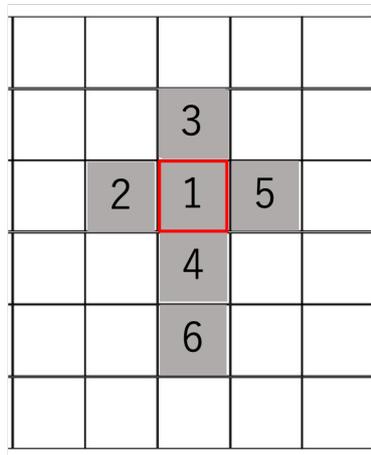


図 11: A net of a cube on a matrix

6. のリストを set 型に渡し、重複した要素を削除する。set 型は集合をあらわすデータ構造であり、重複した要素は取り除かれる。すると、非同型な展開図である面積 $6k$ のポリオミノが得られる。

可視化のために出力する場合は、大きさ $n \times n$ のマトリックスに戻し、1 があるところを単位正方形としてプロットする。

2.2 実験・評価

前節で述べたアルゴリズムを $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を面積 12 のポリオミノに展開した場合と、 $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を面積 30 のポリオミノに展開した場合について実装し、得られた結果を示す。

実験環境を表 2 に示す。実験プログラムは Anaconda3 を用いて Python で実装した。グラフの生成には NetworkX ライブラリを使用した。全域木の列挙につい

		4		
	2	6	5	
		3		
		1		

図 12: The same net with different divisions

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

図 13: A net of a cube on a matrix with binary representation

では、全域木に対して ZDD 構築可能であるため、ZDD を構築するアルゴリズムを実現できる Python ライブラリ Graphillion[4] を用いて実装した。

2.2.1 $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を面積 12 のポリオミノに展開

図 14 に $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を示す。図 14 より、 $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体の表面は格子状に分割されていることがわかる。 $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体に対応する全体グラフの頂点数は 12 であり、これを図 15 に示す。図 15 に示したグラフから得られた全域木の一例を図 16 に示す。

前節で述べたアルゴリズムによって $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を面積 12 のポリオミノに展開した結果を表 3 に示す。非同型な展開図のうち、例として図 17 に展開図 (面積 12 のポリオミノ) を 10 個挙げる。

表 2: Specification for experimental PC

CPU	Intel(R) Core(TM) m3-6Y30 CPU @ 0.90GHz 1.51 GHz
実装 RAM	4.00 GB
OS	64-bit Windows 10 Pro

表 3: Result of unfolding a cube of $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ into a polyomino of area 12

全域木の数 (同型な展開図を含む)	非同型な展開図の数
331776	13002

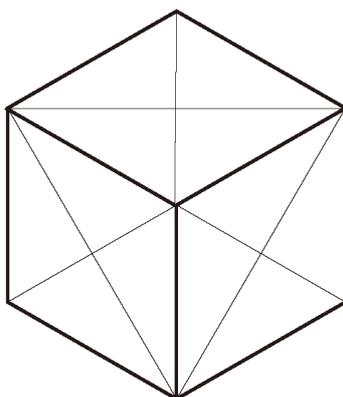


図 14: A cube of $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$

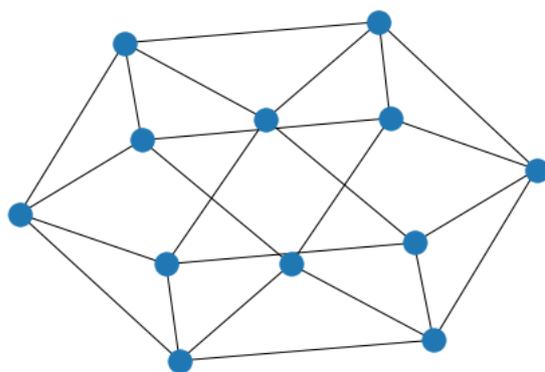


図 15: $G(Q)$ for $k = 2$

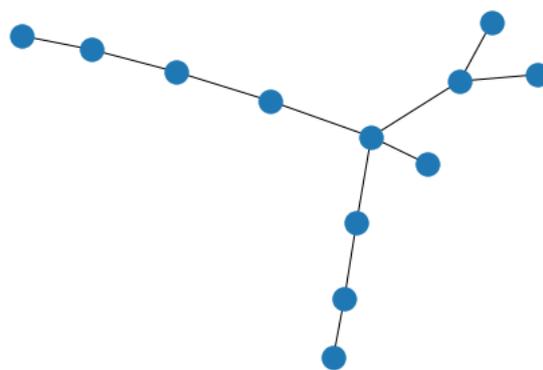
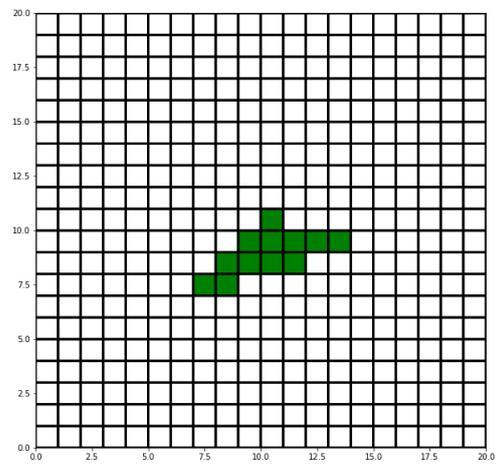
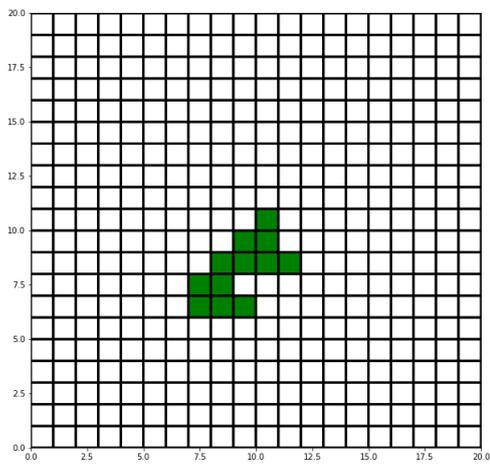
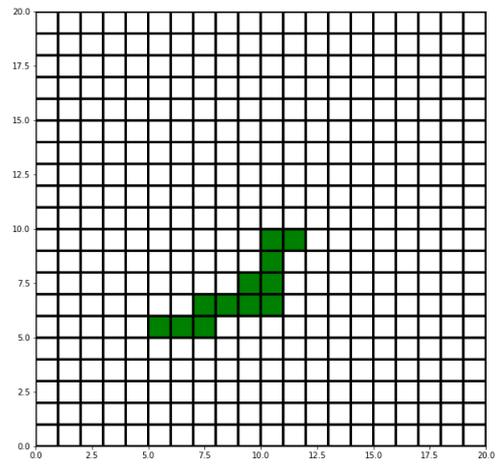
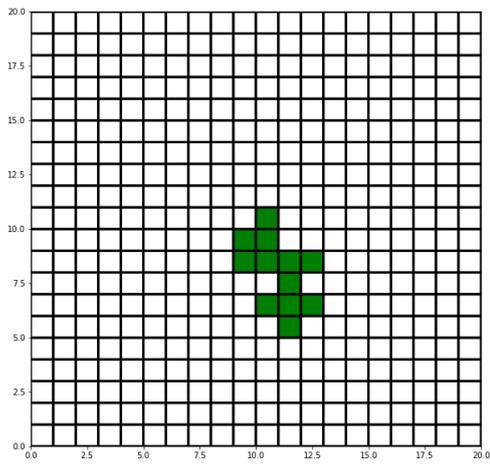
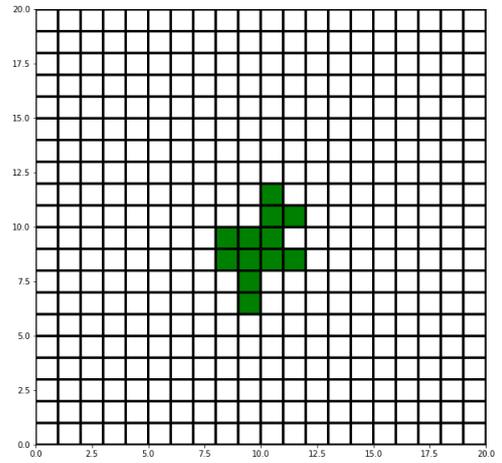
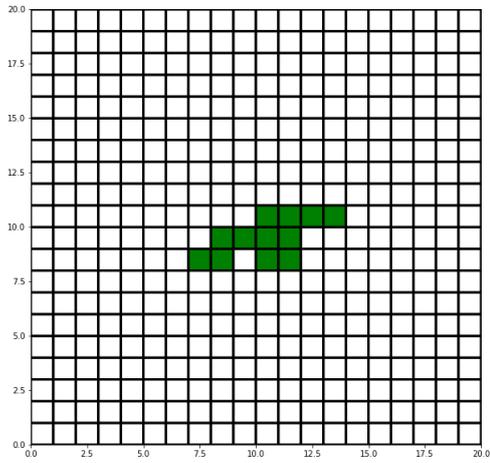
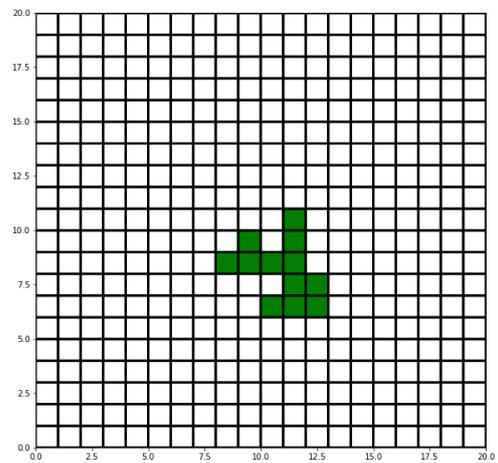
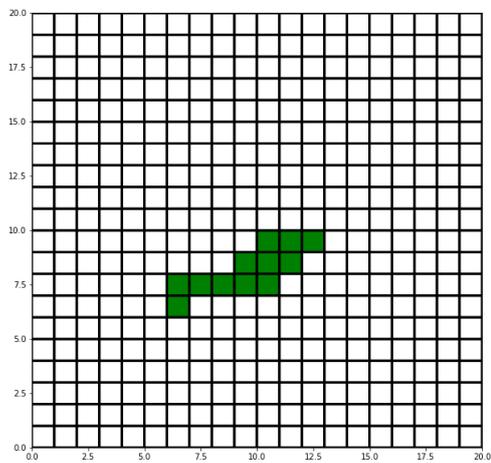
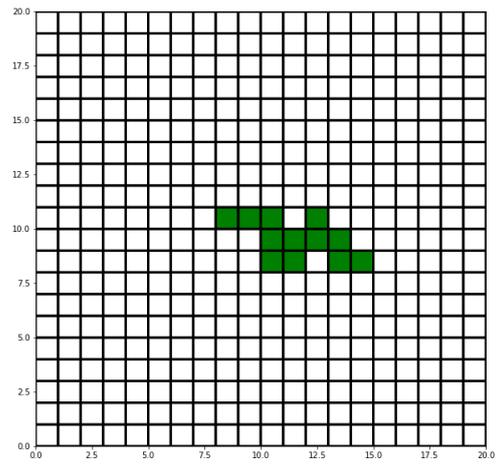
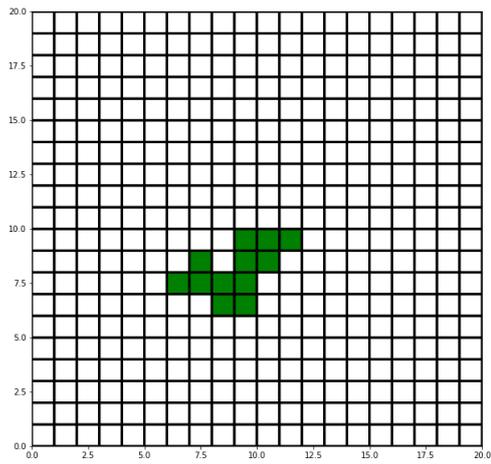


図 16: A spanning tree for $k = 2$





☒ 17: Polyominoes of area 12

2.2.2 $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を面積 30 のポリオミノに展開

図 18 に $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を示す. $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体に対応する全体グラフの頂点数は 30 であり, これを図 19 に示す. 図 19 に示したグラフから得られた全域木の一例を図 20 に示す.

前節で述べたアルゴリズムによって $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を面積 30 のポリオミノに展開した結果を表 4 に示す. 全域木をマトリックス上に展開する際に, 実験用 PC においてメモリがあふれてしまったため, 非同型な展開図の数は得られなかった.

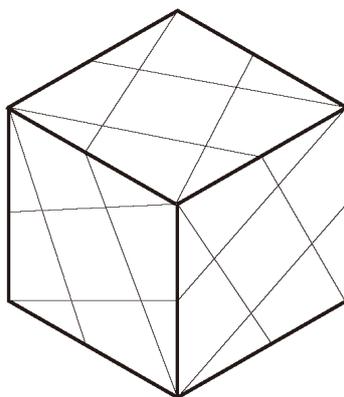


図 18: A cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$

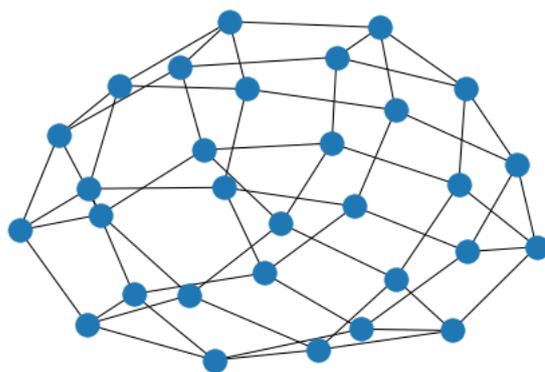


図 19: $G(Q)$ for $k = 5$

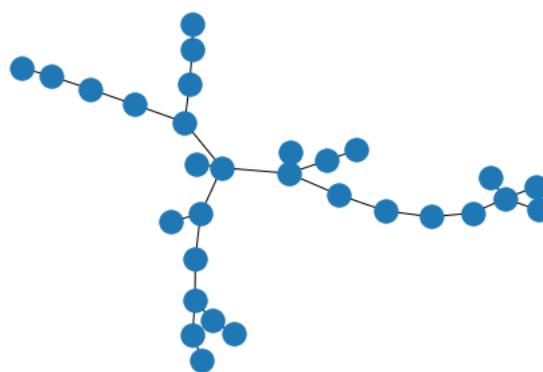


図 20: A spanning tree for $k = 5$

表 4: Result of unfolding a cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ into a polyomino of area 30

全域木の数 (同型な展開図を含む)	非同型な展開図の数
303887720448000	?

第3章 正則なレプ・キューブの存在性

この章では、次数 k の値に対して、正則なレプ・キューブが存在するかどうかについて論証する。

3.1 次数 k の正則なレプ・キューブの非存在性

正則なレプ・キューブが存在しない次数 k の値を考える。先行研究 [3] より、次数 $k = 3$ の正則なレプ・キューブは存在しないことが示されている。また、集合 \bar{S} の要素 k に対して、面積 $6k$ の次数 k の正則なレプ・キューブは存在しないことも示されている。ここで集合 \bar{S} とは、 a, b を自然数とすると

$$S = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, \dots\} = \{x \mid x = a^2 + b^2 \text{ を満たす } a, b \text{ が存在する}\}$$

$\bar{S} = \mathbb{Z} \setminus S = \{3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, \dots\} = \{x \mid x = a^2 + b^2 \text{ を満たす } a, b \text{ が存在しない}\}$ である。

次に、整数論における素数にまつわる2つの定理を導入する [5]。

定理 4 (フェルマーの二平方和定理). p を奇素数とする。ある整数 a, b に対して、

$$p = a^2 + b^2 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$$

定理 5 (ディリクレの算術級数定理). n を自然数とする。 a, b が互いに素な正整数のとき、 $an + b$ とあらかわせる素数は無限に存在する。

先行研究 [3] と定理 4 より、次の補題 1 を示す。

補題 1. (1) p を素数とする。 $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき p は集合 S の要素である。(2) q を合成数、 $p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_m^{d_m}$ を q の素因数分解とする。すべての素数 $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ に対して d_i が偶数であるとき、 q は集合 S の要素である。

そして、正則なレプ・キューブが存在しない次数 k の値について、より強い結果を定理 6 に示す。

定理 6. 集合 \bar{S} の要素 k に対して、次数 k の正則なレプ・キューブは存在しない。また、次数 k の正則なレプ・キューブが存在しないような \bar{S} の要素 k は無限に存在する。

Proof. k を「4で割ると3あまる素数」とする. すると, 補題1より, $k \in \bar{S}$ である. また, 定理5よりこのような素数 k は無限に存在する.

ここで次数 k の正則なレプ・キューブが存在すると仮定し, これを \hat{P} とする. \hat{P} は k 個の展開図 P_1, \dots, P_k に分割できる. \hat{P} から折れる立方体を \hat{Q} , P_i から折れる立方体を Q_i とおく. Q_i の辺の長さはすべて同じであるため, これを l とおく. すると P_i は $6l^2$ -omino, \hat{P} は $6kl^2$ -omino となる. ここで $6l^2$ は自然数であるが, l は必ずしも自然数ではないことに注意する. このとき, ある自然数 a, b, \hat{a}, \hat{b} が存在し,

$$a^2 + b^2 = l^2$$

$$\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = kl^2$$

が成立する. したがって, $kl^2 \in S$ であり

$$\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = k(a^2 + b^2)$$

となる. すなわち, $k(a^2 + b^2) \in S$ である.

ここで $\hat{a}^2 + \hat{b}^2$ が合成数 $k(a^2 + b^2)$ であることがわかった. よって, k は素数であり $k \equiv 3 \pmod{4}$ であることから, 補題1より $\hat{a}^2 + \hat{b}^2$ は k を偶数個因子にもつ. したがって, $(a^2 + b^2)$ は k を奇数個因子にもつ. ところが, これは $(a^2 + b^2) \in S$ であることに矛盾している. したがって, \bar{S} の要素 k に対して次数 k の正則なレプ・キューブは存在しない. \square

3.2 新しい正則なレプ・キューブ

前節で示した定理6より, 定理1で見つかっていない次数 k の正則なレプ・キューブが存在するかどうかを確かめるために, 手作業で作成を試みた. その結果, 次数 $k = 10$ の正則なレプ・キューブと次数 $k = 13$ の正則なレプ・キューブを新たに作成することができた. よって, 次の定理7が得られる.

定理 7. 次数 $k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ の正則なレプ・キューブが存在する.

Proof. 図21に次数 $k = 10$ の正則なレプ・キューブを示す. また, 図22に次数 $k = 13$ の正則なレプ・キューブを示す. \square

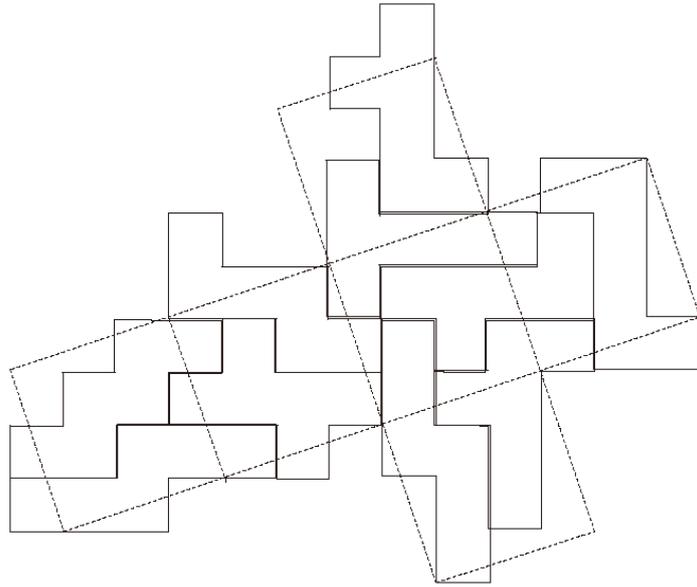


图 21: A regular rep-cube of order $k = 10$

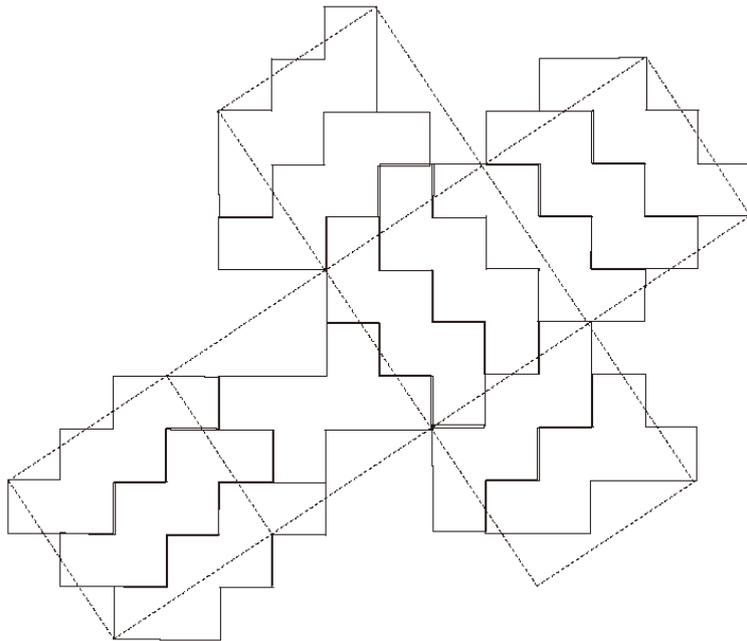


图 22: A regular rep-cube of order $k = 13$

第4章 一様なレプ・キューブを構成する最小の次数

単位立方体の辺展開図 11 種類の各ポリオミノについて、一様なレプ・キューブを構成する最小の次数 k を示す。このときの最小の次数 k の値についてまとめたものを表 5 に示す。

表 5: Minimal uniform rep-cubes for order k

$k = 2$	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
$k = 4$	○			○	×	○		×	○		○
$k = 5$					×			×			
$k = 8$					○			○			

ここで、表 5 より次の定理 8 が得られる。

定理 8. 単位立方体の辺展開図 11 種類の各ポリオミノ P に対して、 P によって構成される一様なレプ・キューブが存在する。

Proof. 次数 $k = 2$ と $k = 4$ の一様なレプ・キューブについては、先行研究 [3] より見つかっている。

図 23 に示すポリオミノ P_x を使って構成する次数 $k = 8$ の一様なレプ・キューブを図 25、図 24 に示すポリオミノ P_y を使って構成する次数 $k = 8$ の一様なレプ・キューブを図 26 に示す。□

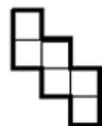


図 23: Polyomino P_x

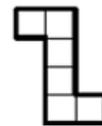


図 24: Polyomino P_y

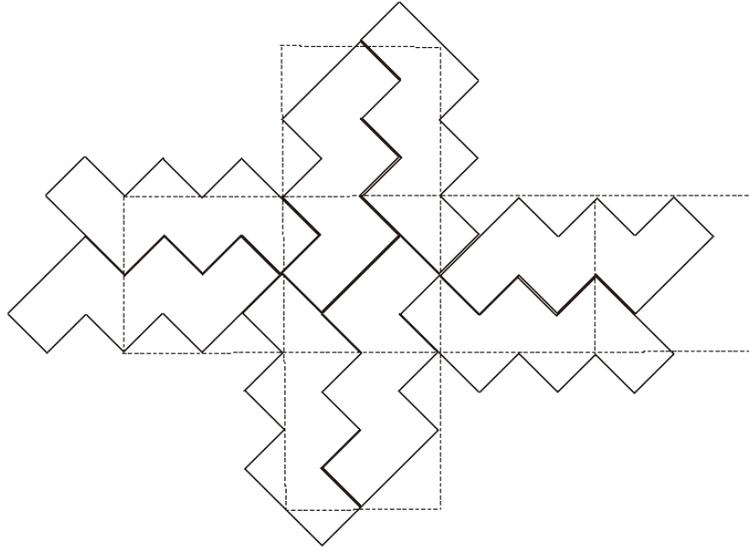


図 25: A uniform rep-cube of order $k = 8$ (polyomino P_x)

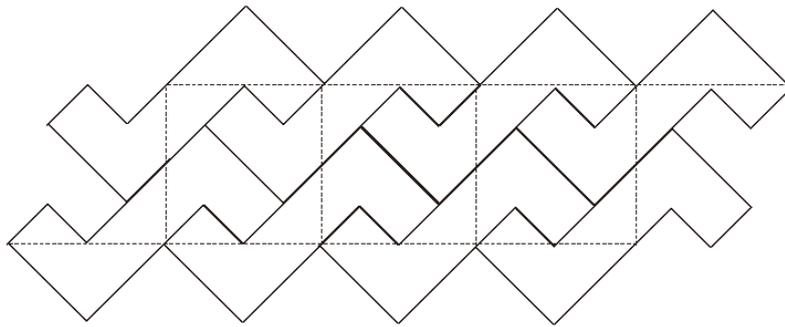


図 26: A uniform rep-cube of order $k = 8$ (polyomino P_y)

一方で、図 23 に示すポリオミノ P_x を使って構成する次数 $k = 5$ の一様なレプ・キューブと、図 24 に示すポリオミノ P_y を使って構成する次数 $k = 5$ の一様なレプ・キューブはこれまで見つかっていない。次節 4.1 と 4.2 において、ポリオミノ P_x とポリオミノ P_y それぞれに対して次数 $k = 5$ の場合、一様なレプ・キューブが存在しないことを示す。これにより、単位立方体の辺展開図 11 種類の各ポリオミノについて一様なレプ・キューブを構成する最小の次数 k の値が決まる。

4.1 ポリオミノ P_x の場合

ポリオミノ P_x を5つ使い, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーできないことを示す.

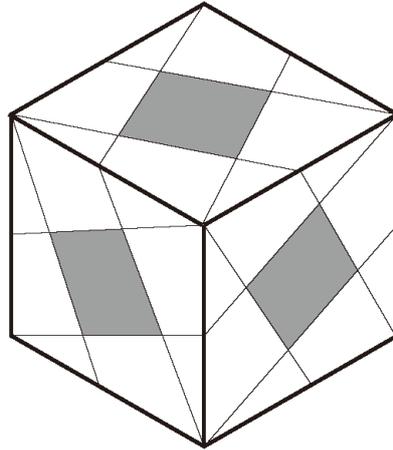


図 27: A cube of $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ with colored

定理 9. ポリオミノ P_x で構成される次数 $k = 5$ の一様なレプ・キューブは存在しない.

Proof. 図 27 に $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体を示す.

ポリオミノ P_x を使って $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーする方法を考える. 図 27 より立方体の各面の中央に位置する色がぬられている正方形部分 (以下, 中央正方形とよぶ) はポリオミノ P_x 中に必ず含まれる. このときのポリオミノ P_x のパターンを図 28 に示す.

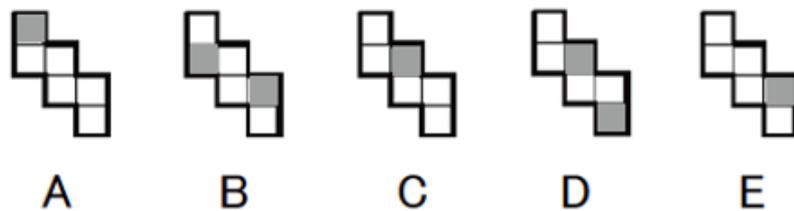


図 28: Polymino P_x patterns

したがって, ポリオミノ P_x を5つ使って $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするためには, 図 28 のパターンより B または D を1つ使い, あとは A, C, E から適当に4つ使うことになる. すなわち, B を1つ使う場合と, D を1つ使う場合を考えればよい.

- (1) Bを1つ使う場合: Bで使われていないBの近傍の中央正方形を考える. これをA,C,Eのどれかでカバーする必要がある. それぞれ4つの向きがあるため, 12通りすべて試してみると, Bと重なる場合や, 穴が現れる場合がほとんどであり, 唯一の例外がAをある方向に貼るときである. これを図29に示す. 破線はB, 実線はAをあらわす.

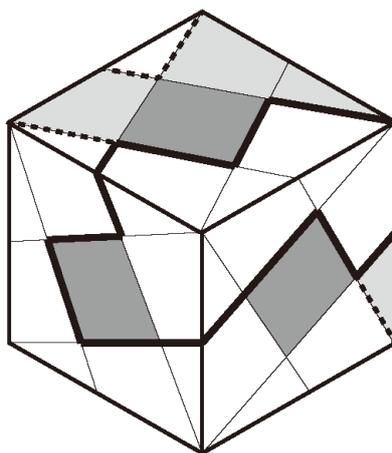


図 29: The case of using B and A

Bは対象な形をしているため, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体上で, Bが貼られている面と反対側の面についても同様の議論ができる. つまり, Bの両側の近傍の中央正方形には, Aを特定の向きで貼ることしかできないが, これら両側にAを2つ貼ってみると, 2つのAがBの反対側で重なってしまう.

したがってBを1つ使う場合, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするパターンは存在しない.

- (2) Dを1つ使う場合: Dで使われていないDの近傍の中央正方形を考える. (1)の場合と同様にDの両側の近傍の中央正方形には, Aを特定の向きでしか貼ることができない. これを図30に示す. 破線はD, 実線はAをあらわす.

しかし, ここにAを貼ると穴が現れる.

したがってDを1つ使う場合, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするパターンは存在しない.

- (1), (2)よりポリオミノ P_x を5つ使って, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーすることはできない. □

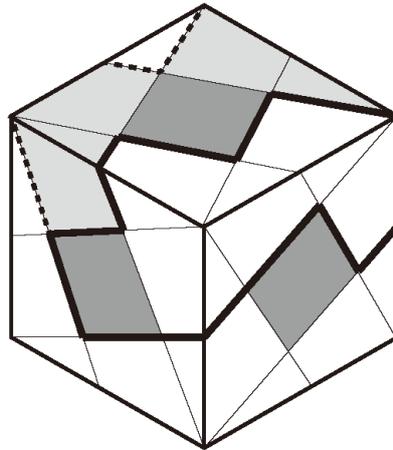


図 30: The case of using D and A

4.2 ポリオミノ P_y の場合

ポリオミノ P_y を 5 つ使い, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーできないことを示す. 前節 4.1 と同様のアプローチで証明をおこなう.

定理 10. ポリオミノ P_y で構成される次数 $k = 5$ の一様なレプ・キューブは存在しない.

Proof. ポリオミノ P_y を使って $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするとき, 中央正方形が現れるポリオミノ P_y のパターンを図 31 に示す.

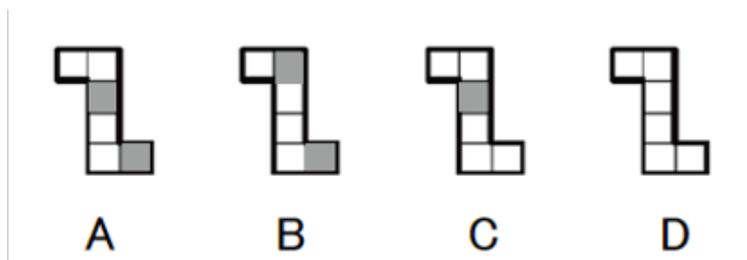


図 31: Polymino P_y patterns

したがって, ポリオミノ P_y を 5 つ使って $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーする場合, 図 31 のパターンより A または B のどちらかを必ず 1 つ以上使う. よって, A を 1 つ以上使う場合と, B を 1 つ以上使う場合を考えればよい.

- (1) A を 1 つ以上使う場合: A を $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体上の任意の位置に貼ると, この A の近傍において穴が現れないように貼るポリオミノのパターンが決まり, A または D となる.

ここで A を貼った場合を図 32 に示す。破線は最初に貼った A，実線は 2 つめに貼った A をあらわす。

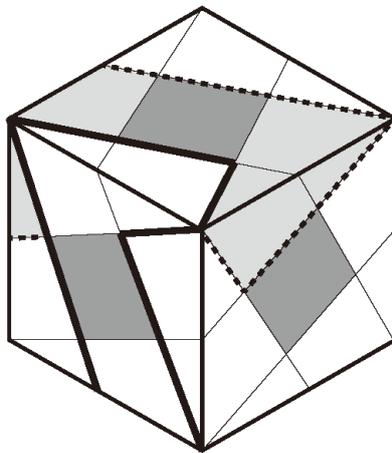


図 32: The case of using A and A

すると，次に貼るポリオミノのパターンは一意に決まり，A となる．しかし，残りのポリオミノのパターンである D を使って $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーすることはできない．

一方で D を貼った場合を図 33 に示す．破線は A，実線は D をあらわす．

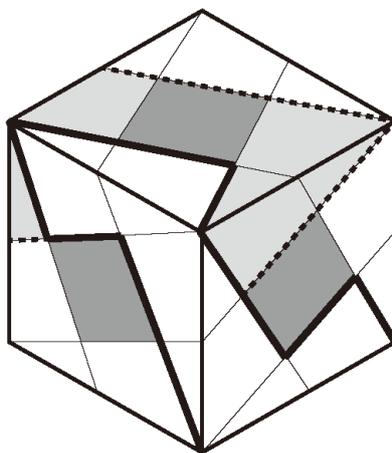


図 33: The case of using A and D

すると，次に貼るポリオミノのパターンは一意に決まり，B となる．しかしこの B を貼ると，穴が現れる．

A を裏返して 1 つ貼った場合についても同じ振る舞いをする．

したがって A を 1 つ以上使う場合, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするパターンは存在しない.

- (2) B を 1 つ以上使う場合: B を $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体上の任意の位置に貼ると, この B の近傍において穴が現れないように貼るポリオミノのパターンが一意に決まり, D となる.

ここで D を貼った場合を図 34 に示す. 破線は B, 実線は D をあらわす.

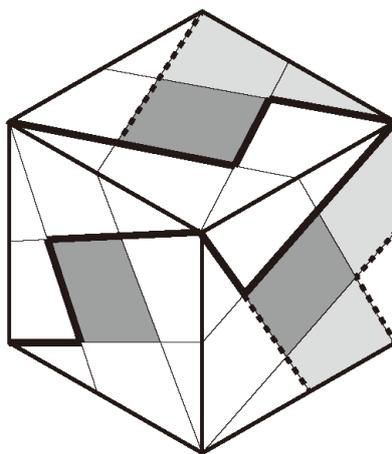


図 34: The case of using B and D

すると, 次に貼るポリオミノのパターンは一意に決まり, A となる. しかしこの A をはると, 穴が現れる.

B を裏返して 1 つ貼った場合についても同じ振る舞いをする.

したがって B を 1 つ以上使う場合, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーするパターンは存在しない.

- (1), (2) よりポリオミノ P_y を 5 つ使って, $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体をカバーすることはできない. □

第5章 おわりに

本研究では、レプ・キューブを立方体の表面の分割として再考するために、従来の与えられた多角形を折る方法から、与えられた多面体を展開する方法へアプローチを変えて、アルゴリズムの設計をおこなった。また、レプ・キューブを構成できる次数 k の値について議論した。正則なレプ・キューブについては、正則なレプ・キューブが存在しない次数 k の値を特徴づけた。一様なレプ・キューブについては、単位立方体の辺展開図 11 種類に対して、どれも一様なレプ・キューブが構成できるかどうかを探究した。

2章では、大きさ $(\sqrt{k} \times \sqrt{k} \times \sqrt{k})$ の立方体の表面を単位正方形で分割するアルゴリズムを提案し、プログラムによる実験をおこなった。その結果、 $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2})$ の立方体を面積 12 のポリオミノに展開した場合の結果を得た。そして、 $(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$ の立方体についても実験をおこなったが、プログラムの実行途中でメモリがあふれてしまった。これについては、スーパーコンピュータの使用によって解が得られる可能性が考えられる。

そして3章では次数 k の値に対して、正則なレプ・キューブが存在するかどうかについて論証し、正則なレプ・キューブが存在しない次数 k の値を証明した。この証明に基づいて、正則なレプ・キューブの存在が予想される次数 k の値を探究し、新たに次数 $k = 10$ の正則なレプ・キューブと次数 $k = 13$ の正則なレプ・キューブを示した。

最後の4章では、単位立方体の辺展開図 11 種類の各ポリオミノ P に対して、 P によって構成される一様なレプ・キューブが存在することを示し、一様なレプ・キューブを構成する最小の次数 k の値を示した。

今後の課題は次の通りである。

- 2章で述べたアルゴリズムにおいて、対応するグラフのリストと隣接リストは予め手作業で用意する必要がある。したがって次数 k の値が大きくなった場合、同じ手法では拡張が困難であると考えられるためアルゴリズムの工夫が必要である。そして最終的には、このアルゴリズムによって得られたポリオミノを、さらに k 個のポリオミノに分割しなければならない。
- ひとつのレプ・キューブで分割パターンが複数通りあるものについて、エンターテインメントゲームとしてのパズルの視点では、分割パターンを考慮すべきである。これは、ある二つのレプ・キューブが同じ折り畳み方法や同じ

輪郭をもつレプ・キューブであったとしても、分割パターンが異なる場合、別のレプ・キューブとして数える方が好ましいことを意味する。

レプ・キューブが応用できる分野については、平面を規則的に埋め尽くすタイリングが挙げられる。例えば、レプ・キューブを構成するポリオミノはタイリングパズルで用いられる。タイリングは、空間を単位格子が周期的に埋め尽くす結晶学における結晶構造や、3章でも導入した整数論との関連がある。幾何学的視点から新しい構造を見つけることで、他の問題がもつ構造の解析に貢献できると考えられる。また、レプ・キューブに対する問題の枠組みそのものを離散幾何学的視点から最適化問題として捉えることで、新しいアプローチとして最適化問題を解くためのモデル化が可能である。このようにレクリエーション数学のみならず、他の分野において新たな応用と展開が期待される。

第6章 謝辞

本研究に際して、様々なご指導とご助言をいただきました上原隆平教授に心より感謝いたします。そして、日々のゼミナールでのご助言や数々の知見をご教示いただいた上原研究室の研究補助員である谷口智子氏をはじめ、上原研究室の皆様感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Martin Gardner. Hexaflexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi. Cambridge, 2008.
- [2] Zach Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina Kostitsyna, Jayson Lynch, and Ryuhei Uehara: Unfolding and Dissection of Multiple Cubes, Tetrahedra, and Doubly Covered Squares, Journal of Information Processing, Vol. 25, pp. 610-615, August 2017.
- [3] Dawei Xu, Jinfeng Huang, Yuta Nakane, Tomoo Yokoyama, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara: Rep cubes:Dissection of a Cube into Nets, IEICE Trans. on Inf. and Sys., Vol. E101 A,No.9, pp.1420 1430, September 2018.
- [4] Takeru Inoue, Hiroaki Iwashita, Jun Kawahara, and Shin-ichi Minato: Graphillion: Software Library Designed for Very Large Sets of Labeled Graphs, International Journal on Software Tools for Technology Transfer, Springer, vol.18, issue 1, pp.57-66, February 2016.
- [5] 高木貞治 初等整数論講義 第2版, 共立出版社 1991.