Title	直観主義論理上での再帰理論の導入と諸概念の分離 [課題研究報告書]
Author(s)	森山, 巧
Citation	
Issue Date	2022-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/17662
Rights	
Description	Supervisor:石原　哉, 先端科学技術研究科, 修士（情報科学）

課題研究報告書

直観主義論理上での再帰理論の導入と諸概念の分離

森山　巧

主指導教員 石原　哉

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
（情報科学）

令和４年３月

Abstract

In this report, we discuss the recursion theory based on the constructive mathematics.

The problem occuring when we discuss recursion theory (or other territories of mathematics, too) in inutitionistic logic is that it is not trivial how to define concepts used in recursion theory. In the constructive sence, even it is not trivial how should we define characteristic functions, therefore computable sets either.

For example, if we define characteristic function f of $A \subset \omega$ as

$$x \in A \to f(x) = 0$$
$$x \in A^c \to f(x) = 1,$$

we might have some degree of freedom for f, since in the intuitionistic logic, $A \cup A^c$ is not (always) ω.

We introduce four definitions of characteristic functions; all of them are classically equivalent and characterize the concept of characteristic functions, but in the constructive sence those are not equivalent. Accordingly, we obtain four definitions of computability of sets. We call those definitions of characterisitic functions 1-characteristic functions, 2-characteristic functions, 3-characteristic functions, and 4-characteristic functions each other, and similary for definitions of computability. 1-characteristic functions and 1-computability are the strongest concept among them, and 4-characteristic functions and 4-computability are the weakest. 2-characteristic functions and 3-characteristic functions are logically imcomparable concepts, and 2-computability and 3-computability are so.

Of course, it changes that some proposition holds or doesn't hold depending on which of above four definitions we adopt. For example, if both $A \subset \omega$ and A^c are recursively enumerable (r.e.), we can conclude A is computable in classical mathematics. But it is not true in the constructive mathematics, using definitions in the existing literature. But we found above therem is provable in the intuitionistic logic for 3-computability. In fact, 3-computability is equivalent to "Both $A \subset \omega$ and A^c are r.e."

In addition, we point out those definitions of computability can also be characterized by some separability conditions of A and A^c.

Furthermore, we made the variations of definitions of many-to-one and one-to-one

reducibilities, which are corresponding to ones of computability. One of the definitions of reduciblity is useful to prove constructive analog of Rice's theorem; we don't know if we can prove $K \leq_1 A$ for inhabited index sets A such that

$$A \cap \{e : \forall n.[\varphi_e(n) \uparrow]\} = \emptyset$$

in the strongest definition of $\leq_1$ at this time, but we can prove that in a weaker definition, and it is suffice to prove A is not computable in the any sence of four definitions.

We also indicate the famous characterization of the r.e. sets that "be the empty set or the range of some primitive recursive function.", which is probably the epimology of "recursively enumerable", is not true in constructive mathematics, and in fact that this statement characterizes r.e. sets is equivalent to $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$, one of the non-constructive principles.

This report consists of Chapter 1 for introduction, Chapter 2 for preparing the recursion theory based on the classical logic, Chapter 3 for the intuitonic logic and arithmetic formal systems on it, Chapter 4 for the recursion theory on the intuitionistic logic, Chapter 5 for conclusion and the References.

Our main chapter is Chapter 4. Section 4.1 is for charateristic functions and computabilies, Section 4.2 is for r.e. sets, Section 4.3 is for redefinition of computabilities by separability conditions, Section 4.4 is for many-to-one and one-to-one reducibilities, and Section 4.5 is for analysis for classical theory of recursion theory.

目次

第 1 章

初めに

計算可能性理論 (computability theory)、あるいは再帰理論 (recursion thery) は A. M. Turing([16]) に始まる「機械的に計算できる」関数、部分関数に対しての分析を行う数学の一分野である。特に、古典再帰理論（classical recursion theorey, CRT. この用語を本稿の主題である論理を変更した場合の再帰理論において古典論理を選択するものと混同してはならない。古典再帰理論、一般再帰理論という用語は一般的にはどちらも古典論理上での議論を指す。）といった場合は自然数上の関数、部分関数の内「機械的に計算できる」関数、部分関数を特徴づける理論であり、一般再帰理論 (generalized recursion theory, GRT) とはそれを拡張し、実数や順序数、遅延ストリーミングなどの上での計算可能性を定めるものである。

実際のところ古典再帰理論の近代的な研究では、どんな関数、部分関数が計算可能であるかというよりも、次数と呼ばれる概念を用いて、計算可能ではない関数、部分関数に対して、その「計算可能ではない度合い」を測るような研究が中心のようである。

また直観主義論理 (intuitionistic logic) とは、L. E. J. Brouwer([2]) によってその概念が提唱され、A. Heyting らにより形式化された論理であり、古典論理では証明可能である排中律や二重否定除去と呼ばれる論理的規則が証明できないという特徴を持つ。一般に直観主義論理で証明可能な論理式は古典論理でも証明可能であるが、逆は成り立たないため直観主義論理は古典論理より弱い論理であるということが出来る。

直観主義論理の上で行われる数学を一般に構成的数学、または構成主義数学（いずれも constructive mathematics の訳語である。) と呼ぶ。構成的数学は現在では計算機科学の見地からも注目されている。これは直観主義論理によるある対象の存在の証明から、そのような対象の構成、計算方法、すなわちアルゴリズムが抽出できるという研究があるためである。

本稿では構成主義数学における古典再帰理論（本稿では一般再帰理論は扱わないため、以降では古典再帰理論を指して単に再帰理論と呼ぶ。）を展開する。

一般に構成主義数学では古典論理では同値となる定義が同値とならないことがあるため、古典論理上で定義されたある概念に複数の対応物が存在することがある。本稿では再帰理論における最も基本的な概念である計算可能集合や次数概念についても、構成的数学ではそれに対応する定義が唯一ではないことを指摘する。この古典論理では同値だが構成的数学ではそうではない定義達は、古典論理ではその同値性が証明のための技法として用いられていることが多いため、古典論理における定理の証明が直観主義論理では異なる定理の証明になっている、という事態が発生しているのである。

本稿の構成としては、まず 2 章で古典論理上での再帰理論の基礎的な定義や定理を概観する。3 章では直観主義論理や構成的数学についてその基礎的な定義や語彙について確認する。4 章が主題である構成的数学における再帰理論である。最後に 5 章で今回の研究をまとめ、後続に期待される研究について述べる。

第 2 章

古典論理上での再帰理論

本章では古典論理上での再帰理論の初歩的な定義や定理について述べる。基本的に本稿の 2 章では [14] を参照する。

2.1　記号、用語の整理

定義. 2.1.1 (自然数)**.** ω を自然数[*1]全体からなる集合とする。

定義. 2.1.2 (整数)**.** $\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。

定義. 2.1.3 (部分関数)**.** A, B を集合とする。A から B への (一変数) 部分関数 (partial function)f とは A と B との間の二項関係であって、関数の公理の内、左全域性以外の全てを満たすものを言い、このとき $f : A \rightharpoonup B$ と書く。このとき $\exists b \in B.[a\ f\ b]$ のとき「f は a で値を持つ」あるいは「$f(a)$ は値を持つ」といい $f(a)\downarrow$ と書く。さらにそのような b を $f(a)$ と書く。これをまとめて $f(a) \downarrow= b$ とも書く。また $a \in A$ に対して $\forall b \in B.[\neg(a\ f\ b)]$ であるとき $f(a)\uparrow$ または $f(a) =\uparrow$ と書く。

多変数部分関数も同様に多変数関数の定義から左全域性を除いたものとして定義し、同様の記法を用いる。

定義から全ての関数は部分関数であることに注意せよ。以降の議論ではむしろ部分関数を中心に議論する場合もある。そのような文脈では、時に「関数」という用語で部分関数を指すことがあるので注意せよ。そのため、通常の関数であることを強調する意味で「全域関数 (total function)」という語を使うことがあり、部分関数として定義された対象が

*1 本稿では自然数といった場合、0 を含める。

実際には関数になっている事を「部分関数が全域 (total) である」と表現する。

定義. 2.1.4 (部分関数の全射性、単射性)**.** 本稿では関数 $f : A \to B$ の場合と同様に、部分関数 $g : A \rightharpoonup B$ に対しても全射や単射という語を用いる。

これらはそれぞれ

$$\forall b \in B \exists a.[f(a) \downarrow = b]$$
$$\forall a_1, a_2 \in A, b \in B.[f(a_1) \downarrow = b \wedge f(a_2) \downarrow = b \to a_1 = a_2]$$

を意味する。特に g が全域である場合にはこれは通常の全射性、単射性と一致することに注意せよ。

定義. 2.1.5 (逆部分関数)**.** 部分関数 f が単射の時、$f(x) \downarrow = y \iff g(y) \downarrow = x$ を満たす部分関数 g を f の逆部分関数 (inverse partial function) と呼ぶ。f の部分逆関数は f^{-1} と表記される。

注意すべきことに、全域な単射 f であって、全射でないものは逆関数を持たないが逆部分関数を持つ。すなわち逆部分関数は部分関数に関して、その逆関数の類似を考えるというだけの概念ではない。

またある部分関数の逆部分関数が明らかに単射であること、ある部分関数の逆部分関数の逆部分関数は元の部分関数であることにも注意せよ。

定義. 2.1.6 (部分関数の像、逆像)**.** 部分関数 $f : A \rightharpoonup B$ と $C \subset A$ に対して C の f による像 (image)$f[C]$ は $\{b \in B; \exists a \in C.f(a) \downarrow = b\}$ で定義される。

同様に $D \subset B$ に対して D の f による逆像 (inverse image)$f^{-1}[D]$ は $\{a \in A; f(a) \downarrow \in D\}$ で定義される。ここで $f(a) \downarrow \in D$ は $\exists b \in D.[f(a) \downarrow = b]$ であることの略記である。

注. 2.1.7 (集合、補集合、関数、部分関数について)**.** 本稿では単に集合と言って ω の部分集合を指す場合がある。また単に A^c と書けばそれは ω 上での A の補集合を指す。また単に関数、部分関数と言えばそれは ω 上での一変数関数、部分関数の事を指す。

定義. 2.1.8 (関数空間)**.** A, B を集合とする。

$$Map(A, B)$$

を A から B への（一変数）関数全体の集合とする。またこの時

$$Map(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n, B)$$

を $A_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ から B への n 変数関数の集合だとみなす。

定義. 2.1.9 (部分関数空間)**.** A, B を集合とする。

$$PMap(A, B)$$

を A から B への（一変数）部分関数全体の集合とする。またこの時

$$PMap(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n, B)$$

を $A_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ から B への n 変数部分関数の集合だとみなす。

定義. 2.1.10 (空の集合族の直積、零変数関数)**.** 本稿においては空の集合族の直積を、形式的な記号 $\diamond$ による一点集合 $\{\diamond\}$ とみなす。

また、特に空の集合族の直積からの関数、すなわち零変数関数 $f \in Map(\prod_{A\in\emptyset} A, B)$ を、$f(\diamond)$ と同一視し、$Map(\prod_{A\in\emptyset} A, B) = B$ とみなすことがある。

定義. 2.1.11 (射影)**.** 集合の直積 $\prod_{i\in I} A_i$ に対して、k-射影 $[\![\cdot]\!]^I_k : \prod_{i\in I} A_i \to A_k$ を $s \in \prod_{i\in I} A_i$ の k 成分を抽出するものとして与える。

また本稿では n 個の集合の有限直積を暗黙に $n = \{0, \cdots, n-1\}$ に添字づけられた直積と見做す。これによって明示的に添字づけられてはいない直積にも同様の記法を用いる（例.$x \in A \times B \times C$ に対して $[\![x]\!]^3_0, [\![x]\!]^3_1, [\![x]\!]^3_2$ と書けばそれぞれ A, B, C への射影である。)。紛れのない場合には $[\![\cdot]\!]$ の上付き添字の添字集合は省略することもある。

2.2 Kleene の再帰関数

本節では S. C. Kleene([8],[10]) により導入された「原始再帰関数」と呼ばれる関数からなる $\bigcup_{n\in\omega} Map(\omega^n, \omega)$ の部分集合、および「部分再帰関数」と呼ばれる部分関数からなる $\bigcup_{n\in\omega} PMap(\omega^n, \omega)$ の部分集合を定義する。

これらのクラスの定義は「機械的に計算できる関数」の公理だと見ることも可能であり、再帰理論の最も基本的な定義となる。

定義. 2.2.1 (原始再帰関数)**.** $\bigcup_{n\in\omega} Map(\omega^n, \omega)$ の部分集合 **Prim.Rec.** は以下を満たす最小の集合として定義され、その元を「原始再帰関数 (primitive recursive function)」と呼ぶ。

1. 一変数関数 $suc(x)$ を

$$suc(x) = x + 1$$

で定まる関数とすると $suc(x)$ は **Prim.Rec.** に属する。この関数を後者関数 (successor function) と呼ぶ。

2. $n, m \in \omega, m < n$ に対して、全ての ω^n の m 射影 $[\![\cdot]\!]^n_m$ は **Prim.Rec.** に属する。この関数を射影 (projection) と呼ぶ。
3. $n, m \in \omega$ に対して、n 変数関数 $const_{n,m}$ を
$$const_{n,m}(x_0, \cdots, x_{n-1}) = m$$
で定まる関数とすると全ての $const_{n,m}$ は **Prim.Rec.** に属する[*2]。この関数を定数関数 (constant function) と呼ぶ。
4. n 変数関数 f と n 個の m 変数関数 $\{g_i\}_{0 \leq i < n}$ が **Prim.Rec.** に属するとき、m 変数関数 $f \circ \{g_i\}$ を
$$f \circ \{g_i\}(x_0, \cdots, x_{m-1}) = f(g_0(x_0, \cdots, x_{m-1}), \cdots, g_{n-1}(x_0, \cdots, x_{m-1}))$$
で定まる関数とすると $f \circ \{g_i\}$ は **Prim.Rec.** に属する。
5. n 変数関数 f と $n+2$ 変数関数 g が **Prim.Rec.** に属するとき、$n+1$ 変数関数 $R_{f,g}$ を
$$R_{f,g}(0, x_0, \cdots, x_{n-1}) = f(x_0, \cdots, x_{n-1}),$$
$$R_{f,g}(k+1, x_0, \cdots, x_{n-1}) = g(k, R_{f,g}(k, x_0, \cdots, x_{n-1}), x_0, \cdots, x_{n-1})$$
で定まる関数とすると $R_{f,g}$ は **Prim.Rec.** に属する[*3]。このような関数の構成を原始再帰 (primitive recursion) と呼ぶ。

定義. 2.2.2 (部分再帰関数)**.** $\bigcup_{n \in \omega} PMap(\omega^n, \omega)$ の部分集合 **PRec.** は以下を満たす最小の集合として定義され、その元を「部分再帰関数 (partial recursive fuunction)」と呼ぶ。

1. 一変数関数 $suc(x)$ を
$$suc(x) = x + 1$$

---

*2 ここで 0 への定数関数（即ち本稿でいえば $const_{n,0}$ のみについて仮定する著者もいる。両者の定義は
$$const_{n,m}(x_0, \cdots, x_{n-1}) = suc^m(x_0, \cdots, x_{n-1})(= \underbrace{suc(suc(\cdots(suc}_{m\text{-}times}(x)\cdots)))$$
より殆ど同値だが、算術の（超準）モデル上で原始再帰関数や部分再帰関数を考えたい等のシチュエーションでは同値ではないこともある。

*3 ここで $R_{f,g}(0, x_0, \cdots, x_{n-1})$ を Base Case、$R_{f,g}(k+1, x_0, \cdots, x_{n-1})$ を Inductive Steps と呼ぶことがある。

で定まる関数とすると $suc(x)$ は **PRec.** に属する。

2. $n, m \in \omega, m < n$ に対して、全ての ω^n の m 射影 $[\![\cdot]\!]^n_m$ は **PRec.** に属する。
3. $n, m \in \omega$ に対して、n 変数関数 $const_{n,m}$ を

$$const_{n,m}(x_0, \cdots, x_{n-1}) = m$$

で定まる関数とすると全ての $const_{n,m}$ は **PRec.** に属する。

4. n 変数部分関数 f と n 個の m 変数部分関数 $\{g_i\}_{0 \le i < n}$ が **PRec.** に属するとき、m 変数部分関数 $f \circ \{g_i\}$ を

$$\begin{gathered} g_0(x_0, \cdots, x_{m-1}) \downarrow \wedge \cdots \wedge g_{n-1}(x_0, \cdots, x_{m-1}) \downarrow \\ \wedge\, f(g_0(x_0, \cdots, x_{m-1}), \cdots, g_{n-1}(x_0, \cdots, x_{m-1})) \downarrow \\ \Updownarrow \\ f \circ \{g_i\}(x_0, \cdots, x_{m-1}) \downarrow = f(g_0(x_0, \cdots, x_{m-1}), \cdots, g_{n-1}(x_0, \cdots, x_{m-1})) \end{gathered}$$

で定まる部分関数とすると $f \circ \{g_i\}$ は **PRec.** に属する。

5. n 変数部分関数 f と $n+2$ 変数部分関数 g が **PRec.** に属するとき、$n+1$ 変数部分関数 $R_{f,g}$ を

$$f(x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow \iff R_{f,g}(0, x_0, \cdots, x_{n-1}) = f(x_0, \cdots, x_{n-1}),$$

かつ、

$$\begin{gathered} R_{f,g}(n, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow \wedge g(n, R_{f,g}(n, x_0, \cdots, x_{n-1}), x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow \\ \Updownarrow \\ R_{f,g}(n+1, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow = g(n, R_{f,g}(n, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}), x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{gathered}$$

で定まる部分関数とすると $R_{f,g}$ は **PRec.** に属する。

6. $n+1$ 変数部分関数 f が **PRec.** に属するとき、n 変数部分関数 $\mu y.f$ を

$$\begin{gathered} \exists s \in \omega. f(s, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow = 0 \wedge \forall t < s. [f(t, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow] \\ \Updownarrow \\ \mu y. f(y, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow = [f(s, x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow = 0 \text{ たる最小の自然数 } s] \end{gathered}$$

[*4]で定まる部分関数とすると $\mu y.f$ は **PRec.** に属する。このような部分関数の構成を μ 再帰 (μ-recursion) と呼ぶ。

[*4] この $\mu y.f$ の引数の記法は慣例的なものである。見た目上 $y, x_0, \cdots, x_{n-1}$ と $n+1$ 変数受け取っているように見えるが、この y は形式的な記号（構文変数）であり、実際の仮引数は $x_0, \cdots, x_{n-1}$ のみとなるため、先に断ったように n 変数関数となる。

注．2.2.3. これ以降、部分関数が合成された形の式で部分関数を表現することがある（例.f, g を部分関数として新たな部分関数 h を $h(x) = f(g(x))$ のように定義する。）。このような式は**定義．2.2.2.** で $f \circ \{g_i\}$ や $R_{f,g}$ を定めた時と同様に「右辺の全ての部分項が値を持つ時かつその時に限って値を持ち、その値は（存在が仮定された）右辺の値によって定まる部分関数」を意味する。

また両辺に値を持つとは限らない項の等式を書くことがある（例.$f(a) = g(b)$）。これは「もしどちらかの辺が値を持てば反対の辺も値を持ってその値は等しい」ことを意味する。

さらに二つの引数の数が等しい部分関数 f, g について $f \simeq g$ と書くことがある。これは

$$\forall x_0, \cdots, x_{n-1}[f(x_0, \cdots, x_{n-1}) = g(x_0, \cdots, x_{n-1})]$$
$$(\iff \forall x_0, \cdots, x_{n-1}, a.[f(x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow= a \iff g(x_0, \cdots, x_{n-1}) \downarrow= a])$$

を意味し、「f と g は外延的に等しい」と読む。

外延的等しさは f, g が全域ならば通常の関数の相等に一致する。

定義．2.2.4 (全域再帰関数)**.** $\bigcup_{n \in \omega} Map(\omega^n, \omega)$ の部分集合 **Rec.** を **Rec.** $=$ **PRec.** $\cap \bigcup_{n \in \omega} Map(\omega^n, \omega)$ で定義し、その元を「全域再帰関数 (total recursive function)」、あるいは単に「再帰関数 (recursive function)」という。

定理．2.2.5.

$$\mathbf{PRec.} \supset \mathbf{Rec.} \supset \mathbf{Prim.Rec.}$$

証明)

PRec. $\supset$ **Rec.** は **Rec.** の定義から明らか。**Rec.** $\supset$ **Prim.Rec.** を見る。

Prim.Rec. $\subset$ **PRec.** は構成から明らかである。

また定義から **Prim.Rec.** $\subset \bigcup_{n \in \omega} Map(\omega^n, \omega)$。したがって **Prim.Rec.** $\subset$ **PRec.** $\cap \bigcup_{n \in \omega} Map(\omega^n, \omega) =$ **Rec.**。 □

定理．2.2.6.

$$\mathbf{Rec.} \neq \mathbf{Prim.Rec.}$$

証明)

後に触れる。 □

2.3 Turing 機械

本節では「機械的に計算できる」関数の **PRec.** とは異なった形式化として A. M. Turing によって導入された ([16])Turing 機械を定義する。

定義. 2.3.1 (Turing 機械)**.** Turing 機械 (Turing machine)M とは、「状態集合 (state set)」と呼ばれる有限集合 S と、「初期状態 (initial state)」と呼ばれる $i \in S$ と、「停止状態 (halting state)」と呼ばれる $h \in S$ と、「遷移 (transition)」と呼ばれる部分関数 $T : S \times \{0,1\} \rightharpoonup S \times \{0,1\} \times \{0,1\}$ の 4 個組 (S, i, h, T) で、$i \neq h$ と $T(h, 0) \uparrow \wedge T(h, 1) \uparrow$ を満たすものである。このとき T は定義域が有限集合であるような部分関数だから対の有限集合として書けることに注意せよ。また Turing 機械 (S, i, h, T) に対して S の各元をその「状態」と呼ぶ。Turing 機械全体の集合を **TM.** と書く。

定義. 2.3.2 (Turing 機械の遷移列)**.** Turing 機械 (S, i, h, T) の遷移列 (transition sequence)

$$tr_{(S,i,h,T)} : \prod_{\mathbb{Z}} \{0,1\} \times \omega \rightharpoonup S \times \prod_{\mathbb{Z}} \{0,1\} \times \mathbb{Z}$$

とは以下のように定義される部分関数である。以降では引数の $t_0 \in \prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\}$ を「初期テープ (initial tape)」、$n \in \omega$ を「ステップ (step)」、返り値の直積の第零成分を「状態 (state)」、第一成分を「テープ (tape)」、第二成分を「ヘッダ (header)」と呼ぶ。

ステップが 0 の場合は $tr_{(S,i,h,T)}(t_0, 0) \downarrow = (i, t_0, 0)$ で定義する。

ステップが $n > 0$ の場合、$tr_{(S,i,h,T)}(t_0, n)$ は

$$tr_{(S,i,h,T)}(t_0, n-1) \downarrow$$

かつ

$$T([\![a]\!]^3_0, [\![[\![a]\!]^3_1]\!]^{\mathbb{Z}}_{[\![a]\!]^3_2}) \downarrow$$

(ただし $a = tr_{(S,i,h,T)}(t_0, n-1)$ とした。この a は以降でも用いる。)
の時、かつその時に限って値を持ち、その値は $T([\![a]\!]^3_0, [\![[\![a]\!]^3_1]\!]^{\mathbb{Z}}_{[\![a]\!]^3_2}) = b$ として

$$tr_{(S,i,h,T)}(t_0, n) = \begin{cases} ([\![b]\!]^3_0, t, [\![a]\!]^3_2 + 1) & (\text{if } [\![b]\!]^3_2 = 1) \\ ([\![b]\!]^3_0, t, [\![a]\!]^3_2 - 1) & (\text{if } [\![b]\!]^3_2 = 0) \end{cases}$$

(ただしここで t は

$$[\![t]\!]^{\mathbb{Z}}_x = \begin{cases} [\![b]\!]^3_1 & (\text{if } x = [\![a]\!]^3_2) \\ [\![[\![a]\!]^3_1]\!]^{\mathbb{Z}}_x & (\text{if } x \neq [\![a]\!]^3_2) \end{cases}$$

で定まる。）となる。

注. 2.3.3. 以降では Turing 機械 (S, i, h, T) を $\mathfrak{M}$ で書くことがある。

定義. 2.3.4 (Turing 機械の停止)**.** Turing 機械 $\mathfrak{M}$ と初期テープ t_0、ステップ n について $tr_{\mathfrak{M}}(t_0, n)\downarrow$ の時、「Turing 機械 $\mathfrak{M}$ は初期テープ t_0 で n ステップまでに停止する (halt(s))」という。そのような n の存在のみを主張する場合は、単に「Turing 機械 $\mathfrak{M}$ は初期テープ t_0 で停止する」という。

特にあるステップ n で $[\![tr_{\mathfrak{M}}(t_0, n)]\!]^3_1 = h$ ならば、Turing 機械と遷移列の定義から $\mathfrak{M}$ は t_0 で $n+1$ ステップまでに停止する。この時「Turing 機械 $\mathfrak{M}$ は初期テープ t_0 で正常に停止する (successfully halt(s))」という。

もし $\mathfrak{M}$ が $T(a, b)\uparrow \iff a = h$ を満たすならば、$\mathfrak{M}$ が t_0 で停止するならば、正常に停止する。

補題. 2.3.5. 有限個の例外を除いて全ての成分で 0 であるような初期テープ t_0 を一つ固定する。この時 $tr_{\mathfrak{M}}(t_0, n)\downarrow$ であるような全ての n で、$tr_{\mathfrak{M}}(t_0, n)$ のテープは有限個の例外を除いて全ての成分で 0 である。

証明)

遷移列のテープの 1 である成分は、ステップを動かしたとき 1 ステップ増えるごとに高々 1 個しか増えないことに着目すれば、簡単な帰納法によってわかる。 □

このような時、1 であるような成分の個数を単にテープ上の 1 の個数と呼ぶことがある。

定義. 2.3.6 (表現テープ)**.** 自然数の有限列 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ に対して、その表現テープ (denoting tape)

$$t_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})} \in \prod_{\mathbb{Z}} \{0, 1\}$$

とは

$$\begin{aligned} y_{-1} &= -2 \\ y_{k+1} &= y_k + x_{k+1} + 2 \end{aligned}$$

として

$$[\![t_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})}]\!]^{\mathbb{Z}}_a = \begin{cases} 1 & (\text{if } 0 \leq \exists k < n.[y_{k-1} + 2 \leq a \leq y_k]) \\ 0 & (\text{if } 0 \leq \forall k < n.[a < y_{k-1} + 2 \vee y_k < a]) \end{cases}$$

によって定まる。このとき $y_{n-1} + 1$ を表現テープ $t_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})}$ の長さといい $lg(t_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})})$ で書く。

ただし空の列 () の表現テープ t は

$$[\![t_{()}]\!]^{\mathbb{Z}}_a = 0(\text{for all } a.)$$

によって定まり、その長さは $lg(t_{()}) = 0$ である。

例)

(2,3,0,3) の表現テープは以下のようになり、$lg(t_{(2,3,0,3)}) = 15$ である。

$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$\cdots 0$	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	$0\cdots$

定義. 2.3.7 (Turing 機械による自然数値部分関数の表現)**.** Turing 機械 $\mathfrak{M}$ と自然数 n に対して、$\mathfrak{M}$ が表現する自然数値 n 変数部分関数 $f^{(n)}_{\mathfrak{M}} : \omega^n \rightharpoonup \omega$ とは以下で定まる。

$$f^{(n)}_{\mathfrak{M}}(\vec{x}) = \begin{cases} [\text{number of 1s on the tape} & \\ \text{at the last step } n \text{ s.t. } tr_{\mathfrak{M}}(t_{\vec{x}}, n)\downarrow] & (\text{if } \mathfrak{M} \text{ halts with } t_{\vec{x}}.) \\ \uparrow & (otherwise) \end{cases}$$

ここで $\vec{x}$ は $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ の略記である。また↑ $(otherwise)$ は上の条件（今回は一つだったが複数ある場合はそのいずれか）に当てはまらない引数に対しては部分関数の値を定めないことを意味する。ここで注意しておきたいのは、本稿の後半の直観主義論理を用いた議論では、この表記と

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (\text{if } P(x)) \\ \uparrow & (\text{if } \neg P(x)) \end{cases}$$

と書くこととは必ずしも同じでない。その意味で↑ $(otherwise)$ は特殊な記法であり、通常の場合分けとは異なる。

なお $\mathfrak{M}$ が $t_{\vec{x}}$ で停止する限り定義式の右辺が値を持つことは、**補題. 2.3.5.** からわかる。

定義. 2.3.8 (Turing 機械による計算可能性)**.** 部分関数 $f : \omega^n \rightharpoonup \omega$ に対してある Turing 機械 $\mathfrak{M}$ が存在して $f^{(n)}_{\mathfrak{M}}$ が $f(\vec{x})\downarrow = a \iff f^{(n)}_{\mathfrak{M}}(\vec{x})\downarrow = a$ となる時 f は Turing 機械で計算可能 (computable) であると言い、Turing 機械で計算可能な部分関数全体の集合を **TMComp.** と表記する。

定義. 2.3.9 (状態集合が正規化された Turing 機械)**.** Turing 機械 (S, i, h, T) は S が $n = \{0, \cdots, x_{n-1}\}$ の形で書ける時、「状態集合が正規化されている」という。このような

Turing 機械を (n, i, h, T) と書く。Turing 機械全体の代わりに状態集合が正規化された Turing 機械のみを考えても **TMComp.** は変化しない。状態集合が正規化された Turing 機械全体の集合を **rTM.** と書く。

定義. 2.3.10 (一様遷移列)**.** 一様遷移列 (uniform transition sequence)

$$tr' : \mathbf{rTM.} \times \prod_{\mathbb{Z}} \{0,1\} \times \omega \rightharpoonup \omega \times \prod_{\mathbb{Z}} \{0,1\} \times \mathbb{Z}$$

とは

$$tr'((n, i, h, T), t_0, n) = tr_{(n,i,h,T)}(t_0, n)$$

によって定まる部分関数である。

2.4 Church の提唱

定理. 2.4.1.

$$\mathbf{PRec.} = \mathbf{TMComp.}$$

証明)

後に触れる。 □

提唱. 2.4.2 (Church の提唱)**.** 本稿で紹介した **PRec.** と **TMComp.** 以外にも、直感的な意味で「機械的に計算可能」に思われる自然数値部分関数の集合を与える定義がいくつも知られている。代表的なものをいくつかあげるとすれば型無しラムダ計算やレジスター機械と呼ばれるアプローチも存在する。しかしながらそれらの定義が定める部分関数の集合は全て等しいことが知られている。

そこで **TMComp.**(= **PRec.**) に含まれる部分関数を単に「計算可能部分関数 (computable partial function)」と呼ぼう、と Church は提唱した (Church's thesis)。

現在ではこれが部分関数が計算可能であることの定義として広く受け入れられている。

また本稿では同様に **Rec.** の元を計算可能全域関数（computable total function) と呼ぶ。

2.5 計算可能部分関数に関する注意と補題

本節ではまず計算可能部分関数の概念を少し拡張する。そしていくつかの関数が計算可能部分関数であることを指摘する。

定義（再定義）. 2.5.1. これ以降では計算可能部分関数を定義するとき、「ある条件を満たす n では値を定義**しない**」と定義する場合がある。

このような場合は、値が定義**できない**場合（これまで $\uparrow$ と書いていた状況）とは区別したい。

そこで以降では計算可能という言葉を $f : \omega \rightharpoonup \omega$ たる部分関数に対しての代わりに、始域、終域の両方に直感的には「未定義値」や「意味のない値」という意味の記号 $\uparrow_H$ を追加して $f : \omega \cup \{\uparrow_H\} \rightharpoonup \omega \cup \{\uparrow_H\}$ たる部分関数に対して使い、これが値を持たない事を $f \uparrow_I$ で表現することにする。Turing 機械 (S, i, h, T) に対しても同様に「停止するが正常に停止しない」ような場合には $f^{(n)}_{(S,i,h,T)} =\uparrow_H$ と書く。

また、伴って原始再帰関数及び部分再帰関数の定義に、

1. 部分再帰関数 f と自然数 n に対して
$$ifDefined_{f,k}(n) = \begin{cases} f(n) & (\text{if } n \in \omega) \\ k & (\text{if } n =\uparrow_H) \end{cases}$$
(ここで $k \in \omega \cup \{\uparrow_H, \uparrow_I\}$)
は原始（部分）再帰関数。
2. 自然数 n に対して
$$const_{n,\uparrow_H}(\vec{x}) =\uparrow_H$$
は原始（部分）再帰関数。

を追加しておく。

この変更によって既に定義した計算可能 (部分) 関数 f が $f(\uparrow_H)$ が未定義であるという意味で不完全な定義となることがあるが、これまでの定義もこれから定義する関数も含めて特に断らなければ $f(\uparrow_H) =\uparrow_H$ と定めたことの省略であるとする。

なお以降では $f(x) \downarrow$ という表記は $f(x)$ が $\uparrow_H$ ではない値を持つという意味で用い、$f(x) \uparrow$ は $f(x) \uparrow_I$ または $f(x) =\uparrow_H$ という意味で用いる。

なおこの定義の変更によってある $k \in \omega$ に対して $f(k) =\uparrow_H$ であっても $f(k) \uparrow_I$ とはならなければ「全域である」と表現することがある。通常の意味の全域性と陽には使い分けないので注意せよ。特に **Rec.** はある自然数で $\uparrow_H$ を取る関数も含めることにする。

注. 2.5.2. 先の**定義（再定義）. 2.5.1.** は計算可能性に対する本質的な変更ではなく、記号の置き換えに過ぎないことを注意しておく。

もし計算可能部分関数を従来の $\omega \rightharpoonup \omega$ の部分関数とみなしたうえで、$\uparrow_H$ と $\uparrow_I$ を区別する恩恵を享受したいならば、0 を $\uparrow_H$、自然数 $n+1$ を n と読み替えれば、従来の計算

可能部分関数の中で**定義（再定義）.2.5.1.** で定義した意味の計算可能部分関数を再現できる。追加された公理は何れも従来の部分計算可能関数の定義とこの読み替えの下で妥当であること、及びこの読み替えは明らかに計算可能であることに注意せよ。

本節のこれ以降では、いくつかの関数が計算可能部分関数であることを指摘し、それらに伴ったいくつかの定理を証明する。これらを部分再帰関数あるいは Turing 機械を用いて実際に構成するのはそれほど難しくはないが、非常に時間と紙面がかかるので単に事実として認めることにする。一般に使われるプログラミング言語の埋め込み関数やライブラリで採用されている関数がほとんどなので、これらを認めるのは直感的には難しくないと思われる。なお今節で指摘する計算可能（部分）関数は直観主義論理でも同様に計算可能（部分）関数である。

補題. 2.5.3 (四則演算)**.** $n, m \in \omega$ による四則演算（除法については商、剰余共に) は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。ただしゼロ除算は $0, \uparrow_H$ 等適当な値を返す事とする。

系. 2.5.4 (Cantor の対関数)**.** 自然数 x, y に対して、Cantor の対関数と呼ばれる関数 $\langle x, y\rangle := \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$ は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。これは $\omega^2 \leftrightarrow \omega$ の全単射である。

補題. 2.5.5 (論理、不等号、ゼロ判定、等号、条件分岐)**.** 0 を真、1 を偽を表すものとして、否定、論理和、論理積は（0 でも 1 でもない値を引数に受け取った時は適当な値を返すものとして）原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。

また $n, m \in \omega$ に対して $n \leq m$ の判定は計算可能全域である。特にある自然数 n が 0 に等しいか否かの判定及び、$n, m \in \omega$ に対して $n = m$ かの判定は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。

引数 $n, k, \ell \in \omega \cup \{\uparrow_H\}$ を受け取り $n = 0$ なら k を、それ以外なら ℓ を返す関数 $if(n, k, \ell)$ は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域である。

補題. 2.5.6 (反復適用)**.** 固定された一引数計算部分全域関数 f に対して、ある引数 $n, init$ を与えられて f を $init$ に n 回反復適用させる関数は計算可能部分関数である。とくに f が原始再帰関数なら原始再帰関数になる。

系. 2.5.7 (冪乗、テトレーション、$\cdots$)**.** 冪乗、テトレーション、$\cdots$ は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。

補題． 2.5.8 (有界探索)**.** 固定された一引数計算可能全域関数 f に対して、ある引数 $limit$ を与えられて $\exists n < limit.f(n) = 0$ ならばその n を、さもなければ $\uparrow_H$ を返す関数は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。

系． 2.5.9 (素数判定)**.** 素数判定は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。さらに、与えられた $n \in \omega$ より大きい最小の素数の発見や n 番目の素数の発見も同様である。

系． 2.5.10 (平方根)**.** $n \in \omega$ に対して、n の平方根の整数近似を求める関数は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。

系． 2.5.11 (Cantor の対関数のデコーダ)**.** 以下の二つの関数

$$\llbracket\cdot\rrbracket_0^2 : \langle x, y\rangle \mapsto x$$
$$\llbracket\cdot\rrbracket_1^2 : \langle x, y\rangle \mapsto y$$

は原始再帰関数であり、従って特に計算可能全域関数である。**系． 2.5.4.** で触れたように Cantor の対関数は全単射だから、その逆関数の第零成分と第一成分をそれぞれ参照することと同じであるから、射影と同じ記号を用いるわけである。これらの関数を「Cantor の対関数のデコーダ」と呼ぶ。

これによって自由に自然数 2 個の順序対を扱うことが出来るから、$\langle x, y\rangle$ をあたかも「順序対」というプリミティブなデータ型であるかのように扱う (もちろんその実態は一つの自然数であるわけだが $\langle x, y\rangle$ と書いたときは、その実装ではなく「順序対」だととらえて言及するわけである。)。さらに Cantor の対関数を反復して用いることで 3 以上の成分を持つ順序対も扱うことが出来る。ここでは一般形として $\langle\vec{x}\rangle_n$ と $\llbracket\cdot\rrbracket_n^k$ を

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_1 &= x \\
\langle x, \vec{y}\rangle_{n+1} &= \langle x, \langle\vec{y}\rangle_n\rangle (\text{where length of } \vec{y} \text{ is } n.) \\
\llbracket\langle\vec{x}\rangle_n\rrbracket_k^n &= k\text{-th elememt of } \vec{x}
\end{aligned}$$

（ただし $x, \vec{y}$ は $y, x_1, \cdots, x_{n-1}$ の略記）として導入する。なお紛れのない場合は $\langle\cdot\rangle$ の添え字を省略することがあり、添字がないことが必ず 2 個の順序対であるという訳ではない。

注意すべきことに、この方法は任意の成分の数の順序対を表現できるが、その成分の数は事前に決まっていなくてはならない。いくつの成分の対であろうと実態はただの 1 自然数であるため、「いくつの対か」という情報を持ってはいないのである。

このように自然数によって、より複雑なデータ構造（ここでは順序対）を表現することをエンコーディング (encodeing) といい、あるデータ構造を表現している自然数をそのデータ構造のコード (code) という。本節のこれ以降でこれ以降の関数の多くは何らかのエンコーディングに関わるものである。

この方法による順序対のエンコーディング、あるいはそれによって得られるコードを本稿では Cantor のタプル (Cantor's tuple) と呼ぶ。これは Cantor が自然数全体とその二個組全体の濃度が等しいことを示す際に用いた方法に由来するからである。特に $\langle\vec{x}\rangle_n$ を Cantor の n-タプルと呼ぶこともある。

系. 2.5.12 (Gödel のリスト)**.** $n \in \omega$ に対して、n を割り切らない最小の素数の発見は原始再帰関数、従って特に計算可能全域関数になり（これは n までの有界探索であるためだと理解できる)、また n に追加で引数 $k \in \omega$ を与えられた場合、n を k で反復して割る場合に整除できる回数を求める関数も原始再帰関数になる。

そこで自然数の有限 (k) 長列[*5]$\{a_n\}_{n<k}$ に対して以下の自然数を定義しそのコードとする。

$$\prod_{n<k} p_n^{a_n+1}$$

where p_i is i-th prime.

ここで定義された列のコードとなる自然数自体の事を以下では $\{a_n\}_{n<k}$ で言及する。特に、空列、つまり $k = 0$（したがって自然数としては 1）に対応するケース、のための記号として $\{\}$ を用いる。

この方法による列のエンコーディング、あるいはそれによって得られるコードを本稿では Gödel のリスト (Gödel's list) と呼ぶ。これは [4] の中で、Gödel が有限列のコード化を行った方法の一つだからである。また特に直前で定義された、Cantor の対関数による n-対とは異なり、このエンコーディングは「$n \in \omega$ に対して、n を割り切らない最小の素数の発見は計算可能全域関数となる」ことより、自身の長さに関する情報を持っているため、事前に長さを決める必要はなく、「可変な長さの」列として扱うことができる。

なおもう一つ Cantor の対関数と異なる点として、Gödel のリストは $\omega^{<\omega}$ と ω の間の全単射ではない。

例えば自然数 0 や 10 はどんな列のコードにもならない。

補題. 2.5.13 (列に対する処理)**.** 先の**系. 2.5.12.** で定義された Gödel のリストは、以

[*5] 紛れの恐れがないなら以下では有限長列の事を単に列と呼ぶことがある。

下のような列に対する一般的な処理を計算可能全域関数や計算可能部分関数によって行うことができる。

ここでは計算可能部分関数についての図式の形で表示される部分関数が登場する。ここで図式の計算可能部分関数についてのパラメータに、全域でない計算可能部分関数を受け取った場合は、（補助関数を含む）定義中に出現するいずれかの項が値を持たないならば、そのような引数に対して関数全体が値を持たないものとする。

また前述の通り全ての自然数が列のコードと見做せるわけではないため、以下の $list?$ を除く全ての関数はリストを受け取るべき変数に列のコードと見做せない数を受け取った場合には $\uparrow_H$ を返す事を最初に指摘しておく。なお以降もなんらかのコードを受け取る変数がその変数のコードと見做せない自然数を受け取った場合は同様に $\uparrow_H$ を返すこととする。

これらの列の処理が計算可能になるのは、本質的には $leng(\{a_n\}_{n<k})$ までの原始再帰や有界探索になるからである（$leng(\{a_n\}_{n<k})$ 自体が原始再帰的なのは、**系. 2.5.12.**) で指摘した通りである。)。特に計算可能部分関数の図式になっている関数はパラメータが原始再帰関数の時原始再帰的になる。

1.
$$list?(n) = \begin{cases} 0 & (\text{if } n \text{ can be regarded as list.} \\ & \iff \forall k < \max\{p : prime; p|n\}.k|n) \\ 1 & (\text{if } n \text{ can't be regarded as list.} \\ & \iff \exists k < \max\{p : prime; p|n\}.k \nmid n) \end{cases}$$

2.
$$leng(\{a_n\}_{n<k}) = k$$

3.
$$head(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} a_0 & (\text{if } \{a_n\} \text{ is inhabited.}) \\ \uparrow_H & (\text{if } \{a_n\} \text{ is empty.}) \end{cases}$$

4.
$$tail(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} a_{k-1} & (\text{if } \{a_n\} \text{ is inhabited.}) \\ \uparrow_H & (\text{if } \{a_n\} \text{ is empty.}) \end{cases}$$

5.
$$body(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} \{a_{n+1}\}_{n<k-1} & (\text{if } \{a_n\} \text{ is inhabited.}) \\ \uparrow_H & (\text{if } \{a_n\} \text{ is empty.}) \end{cases}$$

6.
$$co\text{-}body(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} \{a_n\}_{n<k-1} & (\text{if } \{a_n\} \text{ is inhabited.}) \\ \uparrow_H & (\text{if } \{a_n\} \text{ is empty.}) \end{cases}$$

7.

$$tail\text{-}cons(\{a_n\}_{n<k}, r) = \{b_n\}_{n<k+1}$$

ここで

$$b_n = \begin{cases} a_n & (\text{if } n < k) \\ r & (\text{if } n = k) \end{cases}$$

8.

$$head\text{-}cons(\{a_n\}_{n<k}, r) = \{b_n\}_{n<k+1}$$

ここで

$$b_n = \begin{cases} a_{n-1} & (\text{if } n > 0) \\ r & (\text{if } n = 0) \end{cases}$$

9.

$$ref(\{a_n\}_{n<k}, r) = \begin{cases} a_r & (\text{if } r < leng(\{a_n\}_{n<k})) \\ \uparrow_H & (\text{if } leng(\{a_n\}_{n<k}) < r) \end{cases}$$

10.

$$sublist(\{a_n\}_{n<k}, r, s) = \begin{cases} \{a_{n+r}\}_{n<s-r} & (\text{if } r < s \leq leng(\{a_n\}_{n<k})) \\ \uparrow_H & (\text{if } r \geq s \vee s > leng(\{a_n\}_{n<k})) \end{cases}$$

11.

$$reverse(\{a_n\}_{n<k}) = \{a_{k-n-1}\}_{n<k}$$

12. f をある 2 変数計算可能部分関数として

$$foldl_f(\{a_n\}_{n<k}, r) = f(a_{k-1}, f ...(f(a_0, r)...))$$

13. f をある 2 変数計算可能部分関数として

$$foldr_f(\{a_n\}_{n<k}, r) = f(a_0, f ...(f(a_{k-1}, r)...))$$

14.

$$append(\{a_n\}_{n<k_1}, \{b_n\}_{n<k_2}) = \{c_n\}_{n<k_1+k_2}$$

ここで

$$c_n = \begin{cases} a_n & (\text{if } n < k_1) \\ b_{n-k_1} & (\text{if } n \geq k_1) \end{cases}$$

15. f をある計算可能部分関数として

$$filter_f(\{a_n\}_{n<k}) = \{c_n\}_{n<k'}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
c_n &= a_{t(n)} \\
t(-1) &= -1 \\
t(n) &= \begin{cases} \min A_n & (\text{if } n \geq 0 \wedge \ t(n-1) \text{ is defined.} \\ & \wedge \{m > t(n-1); f(a_m) = 0\}(=: A_n) \text{ is inhabited.}) \\ \text{undefined} & (\text{if } [t(n-1) \text{ is not defined.}] \vee [A_n \text{ is empty.}]) \end{cases} \\
k' &= \min\{n | t(n) \text{ is undefined}\}
\end{aligned}
$$

16.

$$unique(\{a_n\}_{n<k}) = \{c_n\}_{n<k'}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
c_n &= a_{t(n)} \\
t(-1) &= -1 \\
t(n) &= \begin{cases} \min A_n & (\text{if } n \geq 0 \wedge \ t(n-1) \text{ is defined.} \\ & \wedge \{m > t(n-1); \forall \ell . a_m \neq a_\ell\}(=: A_n) \text{ is inhabited.}) \\ \text{undefined} & (\text{if } [t(n-1) \text{ is not defined.}] \vee [A_n \text{ is empty.}]) \end{cases} \\
k' &= \min\{n | t(n) \text{ is undefined}\}
\end{aligned}
$$

17.

$$remove(\{a_n\}_{n<k}, r) = \{c_n\}_{n<k'}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
c_n &= a_{t(n)} \\
t(-1) &= -1 \\
t(n) &= \begin{cases} \min A_n & (\text{if } n \geq 0 \wedge \ t(n-1) \text{ is defined.} \\ & \wedge \{m > t(n-1); a_m \neq r\}(=: A_n) \text{ is inhabited.}) \\ \text{undefined} & (\text{if } [t(n-1) \text{ is not defined.}] \vee [A_n \text{ is empty.}]) \end{cases} \\
k' &= \min\{n | t(n) \text{ is undefined}\}
\end{aligned}
$$

18. f をある計算可能部分関数として

$$map_f(\{a_n\}_{n<k}) = \{f(a_n)\}_{n<k}$$

19. f をある計算可能部分関数として

$$exists_f(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists x < k. f(a_x) = 0) \\ 1 & (\text{if } \forall x < k. f(a_x) \neq 0) \end{cases}$$

20. f をある計算可能部分関数として

$$forall_f(\{a_n\}_{n<k}) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \forall x < k.f(a_x) = 0) \\ 1 & (\text{if } \exists x < k.f(a_x) \neq 0) \end{cases}$$

21.

$$member(\{a_n\}_{n<k}, r) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists x < k.a_x = r) \\ 1 & (\text{if } \forall x < k.a_x \neq r) \end{cases}$$

22.

$$\supseteq_s (\{a_n\}_{n<k_1}, \{b_n\}_{n<k_2}) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \forall x < k_2, \exists y < k_1.b_x = a_y) \\ 1 & (\text{if } \exists x < k_2, \forall y < k_1.b_x \neq a_y) \end{cases}$$

23.

$$=_s (\{a_n\}_{n<k_1}, \{b_n\}_{n<k_2}) = \supseteq_s (\{a_n\}_{n<k_1}, \{b_n\}_{n<k_2}) \wedge \supseteq_s (\{b_n\}_{n<k_1}, \{a_n\}_{n<k_2})$$

24. ℓ, s, r を固定された自然数として、

$$assoc_{\ell,s,r}(\{\langle \vec{a}_n \rangle_\ell\}_{n<k}, q) = \begin{cases} [\![\langle \vec{a}_{\min A} \rangle_\ell]\!]^\ell_r & (A \text{ is inhabited}) \\ \uparrow_H & (\text{if } A \text{ is empty.}) \end{cases}$$

ここで

$$A := \{m < k | [\![\langle \vec{a_m} \rangle_\ell]\!]^\ell_s = q\}$$

ここで $\vec{a}_n$ は自然数の ℓ 個組からなる列を、$\{\langle \vec{a}_n \rangle_\ell\}_{n<k}$ は「$\vec{a}_n$ に対応する Cantor の ℓ-タプル達 $\langle a_n \rangle_\ell$ による Gödel 列」を意味する。

25. ℓ, s を固定された自然数として、

$$assoc'_{\ell,s}(\{\langle \vec{a}_n \rangle_\ell\}_{n<k}, q) = \begin{cases} \langle \vec{a}_{\min A} \rangle_\ell & (\text{if } A \text{ is inhabited.}) \\ \uparrow_H & (\text{if } A \text{ is empty.}) \end{cases}$$

ここで

$$A := \{m < k | [\![\langle \vec{a_m} \rangle_\ell]\!]^\ell_s = q\}$$

注. 2.5.14 (有限集合のエンコーディング)**.** 先の**系. 2.5.12.** によるリストから順序を忘れることによって、同じ自然数を有限集合のコードとみなす事もできる。リストの場合と違い、有限集合のコードとみた場合、多重元や並べ替えの分だけ、集合としては同じものを表現する、異なるコードが存在できる。それでも集合の相等、包含関係の判定や基本集合演算が計算可能全域な事は上の補題から従う。以降では有限集合と列を陽には区別しないことがある。

注. 2.5.15 (有限分岐木のエンコーディング)**.** 列の（コードの）列、列の列の列、$\cdots$（あるいは列の代わりに有限集合）を考えることで有限分岐木をエンコーディングすることが出来る。

定義. 2.5.16 (関数状)**.** Cantor の ℓ-タプル達による Gödel のリスト $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が、ある $i<\ell$ に対して、

$$\forall n,m<k.[[\![\langle a_n\rangle_\ell]\!]_i^\ell = [\![\langle a_m\rangle_\ell]\!]_i^\ell \to n=m]$$

を満たすとき、$\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ は i に関して関数状 (functional) であるという。

定義. 2.5.17 (タプル列による有限部分関数の表現)**.** Cantor の ℓ-タプル達による Gödel のリスト $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が、$i<k$ に関して関数状な時、

$$f(x) = assoc_{\ell,i,j}(\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}, x)$$

を $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ の成分 i,j によって表現される関数という。明らかにこの形で表現できるのは有限部分関数のみである。特に $\ell=2, i=0, j=1$ の時、f は自身のグラフを Cantor のタプルと Gödel のリストでエンコーディングしたもの（以降はこれを単にグラフと呼ぶことがある。）によって、成分 $0,1$ で表現される。この場合には成分を明示せずに、単に f のグラフが f を表現するということもある。

また $\langle\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}, i, j\rangle$ を $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が成分 i,j で表現する有限部分関数のエンコーディングとして用いることが出来る。

補題. 2.5.18. Cantor の ℓ-タプル達による Gödel のリスト $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が $i<k$ に対しても $j<k$ に関しても関数状ならば $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が成分 i,j によって表現する関数は単射。

証明)

明らかである。 □

補題. 2.5.19. Cantor の ℓ-タプル達による Gödel のリスト $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ の成分 i,j によって表現される部分関数 f が単射の時、$\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ は j に関しても関数状であり、f^{-1} は $\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ の成分 j,i によって表現される。

証明)

$\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}$ が i に関して関数状だったことから全ての $\langle\vec{a}_n\rangle$ は

$$g(x) = assoc'_{2,0}(\{\langle\vec{a}_n\rangle_\ell\}_{n<k}, x)$$

を用いて $g(a)$ の形に一意に書ける。可能性は $f([\![\langle\vec{a}_n\rangle]\!]_i^\ell) = \langle\vec{a}_n\rangle$ より、一意性は $[\![\cdot]\!]_j^\ell$ の単射性からわかる。

f,g の単射性により、$f(x)=f(y) \iff x=y \iff g(x)=g(y)$ を得る。

定義から $f(x) = [\![g(x)]\!]^\ell_j$ であるから、$[\![g(x)]\!]^\ell_j = [\![g(y)]\!]^\ell_j \iff g(x) = g(y)$。$g(x), g(y)$ は $\langle \vec{a}_n \rangle$ に対する一意な表記を与えるのだったから

$$\forall n, m < k.[[\![\langle a_n \rangle_\ell]\!]^\ell_j = [\![\langle a_m \rangle_\ell]\!]^\ell_j \to n = m]$$

がわかる。故に $\{\langle \vec{a}_n \rangle_\ell\}_{n<k}$ は j に関して関数状。

よって $\{\langle \vec{a}_n \rangle_\ell\}_{n<k}$ は成分 j, i によってある有限部分関数 h を表現するのだが、$f(x) = z$ とすると第 i 成分が x で第 j 成分が z であるような $\langle \vec{a}_n \rangle$ が存在せねばならず、しかもそれは上の議論から一意だから $h(z) = x$。

さらに全ての $\langle \vec{a}_n \rangle$ が $g(x)$ で表現でき、$f(x) = [\![g(x)]\!]^\ell_j$ だったから、h の定義域に属す全ての自然数、すなわち $[\![\langle \vec{a}_n \rangle]\!]^\ell_j$ と書ける全ての自然数は f の値域に属する。したがって h は f の逆部分関数。 □

注. 2.5.20 (Turing 機械のエンコーディング、計算可能関数のインデックス)**.** 既に、状態集合が正規化された Turing 機械の構成に必要な要素（順序対、有限集合）のエンコーディングが得られているから、それらを組み合わせれば状態集合が正規化された Turing 機械のエンコーディングが得られる。正規な状態集合を持つ Turing 機械のコードは通常 e や f で書かれる。以降ではこれを単に Turing 機械のエンコーディング（コード）と呼ぶ。今後 Turing 機械のコード e とそれが表す Turing 機械を明確に区別せず、Turing 機械自身の事も e で表すことがある。また計算可能関数 f に対して、f を表現する Turing 機械（のうち任意の一つ）のコードを f のインデックス (index) という。

注. 2.5.21 (整数のエンコーディング)**.** 自然数の二つ組 (n, k)（実際にはその Cantor のタプル）を整数 $n - k$ のコードとみなすことが出来る。整数としての等号は $(n, k) = (n', k') \iff n + k' = n' + k$ だから原始再帰関数、したがって特に計算可能全域関数で判定できる。整数としての四則演算も同様である。

注. 2.5.22 (有限個だけ 1 を持つテープのエンコーディング)**.** $s \in \{t \in \prod_{\mathbb{Z}}\{0, 1\}; \{a \in \mathbb{Z}; [\![t]\!]^{\mathbb{Z}}_a = 1\} \text{ is finite.}\}$ に対して $\{b \in \mathbb{Z}; [\![s]\!]^{\mathbb{Z}}_b = 1\}$ のコード（b は整数だから実際にはこれもエンコーディングする必要があることに注意）を s のコードとする。

補題. 2.5.23 (有限個だけ 1 を持つ初期テープに限定した一様遷移列は原始再帰関数)**.** e を Turing 機械、t_0 を有限個の例外を除いて全ての成分で 0 であるような初期テープのコードとして $tr'(e, s, n)$ は原始再帰関数で、従って特に計算可能全域関数（但しここでいう全域性は $tr'(e, t_0, n)$ は値を定義しないことがあるが、それは $\uparrow_H$ の意味に限られることを指す。）。但しここで $tr'(e, s, n)$ 返り値は状態の自然数とテープ（のコード）とヘッダ

（のコード）の Cantor のタプルである。

補題. 2.5.24 (万能 Turing 関数、万能 Turing 関数の有限近似、Kleene の停止述語)**.** 全ての自然数 n に対して万能 Turing 関数と呼ばれる $n+1$ 変数関数

$$\varphi_e^{(n)}(\vec{x}) = f_e^{(n)}(\vec{x})$$

は計算可能部分関数である。この $\varphi_e^{(n)}$ という記法は慣例的なもので、ややわかりにくいが e も引数であるが n はそうでないことに注意せよ。

また二つの $n+2$ 引数関数

$$\varphi_{e,s}^{(n)}(\vec{x}) = \begin{cases} \varphi_e(\vec{x}) & (\text{if } [e \text{ halts with } t_{\vec{x}} \text{ in } s \text{ steps.}] \wedge lg(t_{\vec{x}}) \leq s) \\ \uparrow_H & (otherwise) \end{cases}$$
$$T^{(n)}(e,s,\vec{x}) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \varphi_{e,s} \downarrow) \\ 1 & (\text{if } \varphi_{e,s} \uparrow) \end{cases}$$

は原始再帰関数で、従って特に計算可能全域関数である。$\varphi_{e,s}^{(n)}$ については s もやはり引数であることに注意せよ。$\varphi_{e,s}^{(n)}$ を $\varphi_e^{(n)}$ の有限近似と言い、$T^{(n)}$ を Kleene の停止述語と呼ぶ。なお以降では $n=1$ の場合は、これら三つの関数の右肩付きの (n) を省略することにする。

系. 2.5.25.

$$\textbf{PRec.} = \textbf{TMComp.}$$

証明)

$(\supset)$

Turing 機械 e に対して $\varphi_e^{(n)}$ が $f_e^{(n)}$ と外延的に等価な部分関数となるので良い。

$(\subset)$

本稿では証明は扱わないが事実として認める。 □

系. 2.5.26 (Kleene の標準形)**.** 全ての計算可能部分関数 f は、原始再帰関数 g,h を用いて

$$f(\vec{x}) = g(\mu y.h(y,\vec{x}),\vec{x})$$

とできる。この形の計算可能部分関数の表示を Kleene の標準形 (Kleene's normal form) と呼ぶ。

証明)

e を f を表現する Turing 機械とし、

$$
\begin{aligned}
g(s, \vec{x}) &= \varphi_{e,s}^{(n)}(\vec{x}) \\
h(y, \vec{x}) &= T^{(n)}(e, y, \vec{x})
\end{aligned}
$$

とすればよい。

系. 2.5.27. ここまで計算可能部分関数の図式の形で表記した計算可能部分関数は、図式のメタパラメータとして計算可能部分関数を受け取る代わりに、現在の引数に加えてさらにオブジェクト引数 e を受け取り関数パラメータの部分を $\varphi_e^{(n)}$（n はもともとのメタパラメータのアリティに等しい）で置き換えることにしても計算可能部分関数である。

補題. 2.5.28. 原始再帰関数および部分再帰関数は自然数にエンコーディングできる。

証明)

ある（部分）関数が原始再帰関数もしくは部分再帰関数になることを定義に従って証明するとき、その証明は有限分岐木の構造を持つため、その有限分岐木をエンコーディングすればその（部分）関数を特徴づけられる。 □

補題. 2.5.29. 全ての自然数 n に対して

$$
\dot{\varphi}_e^{(n)}(\vec{x}) = f(\vec{x})
$$

（ただしここで f は e が原始再帰関数のコードとして表現する原始再帰関数）は計算可能全域関数である。

また同様に

$$
\ddot{\varphi}_e^{(n)}(\vec{x}) = f(\vec{x})
$$

（ただしここで f は e が部分再帰関数のコードとして表現する部分再帰関数）は計算可能部分関数である。

系. 2.5.30.

$$
\mathbf{Prim.Rec.} \neq \mathbf{Rec.}
$$

証明)

$\dot{\varphi}_e(s)$ は先に触れたように全域計算可能関数であるから $f(e) = \dot{\varphi}_e(e) + 1$ とするとこれも全域計算可能であり、従って **Rec.** に属する。

今 f が **Prim.Rec.** に属さないことを見る。

コードが e であるような $g \in \mathbf{Prim.Rec.}$ と f は引数に e を受け取った時の返り値が 1 だけ異なるから外延的に等しくない。

全ての原始再帰関数はエンコーディングできるのだったから、全ての原始再帰関数は f と外延的に等しくないことがわかる。 □

以降のいくつかの計算可能全域関数は一意に関数を定めるものではなく、ある特徴を満たす操作に対応する全域計算可能関数の存在のみを主張していると言える。これらの内 s-m-n 関数を除く多くの関数には今までのように特別な名前や記号は定めない。というのもこれらの操作は通常数学を行っていれば無意識に行うような操作であり、いちいち全てに名前を付けて明記すると却ってわかりづらく、煩わしいからである。

補題. 2.5.31. n を自然数、σ を $(0, \cdots, n-1)$ の上の置換とする。
このとき以下の等式を満たす関数 $f_{n,\sigma}$ を計算可能全域関数として取れる。

$$\varphi^{(n)}_{f_{n,\sigma}(e)}(x_{\sigma(0)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}) = \varphi^{(n)}_e(x_0, \cdots, x_{n-1}).$$

補題. 2.5.32. n, m を自然数とする。以下の等式を満たす関数 $f_{n,m}(1 \leq m \leq n)$ が計算可能全域関数として取れる。

$$\varphi^{(n-m+1)}_{f_{n,m}(e)}(\langle x_0, \cdots, x_{m-1}\rangle_m, x_m, \cdots, x_{n-1}) = \varphi^{(n)}_e(x_0, \cdots, x_{n-1})$$

逆に以下を満たす関数 $g_{n,m}(m > 0)$ も同様に計算可能全域関数として取れる。

$$\varphi^{(n+m-1)}_{f_{n,m}(e)}([\![x_0]\!]^m_0, \cdots, [\![x_0]\!]^m_{m-1}, x_1, \cdots, x_{n-1}) = \varphi^{(n)}_e(x_0, \cdots, x_{n-1})$$

これにより必要に応じて多変数関数をそれより小さい引数を受け取る関数とみなすことが出来る。以降では特に 1 引数関数とみなすことで議論を単純化する場合がある。

定理. 2.5.33 (s-m-n 補題)**.** n, m を自然数とする。以下の等式を満たす $m+1$ 変数関数 s^m_n が計算可能全域関数として取れる。

$$\varphi^{(n)}_{s^m_n(e, x_0, \cdots, x_{m-1})}(y_0, \cdots, y_{n-1}) = \varphi^{(n+m)}_e(x_0, \cdots, x_{m-1}, y_0, \cdots, y_{n-1})$$

この関数 s^m_n を s-m-n 関数と呼ぶ。

略証)

s-m-n 関数が各引数 $(e, x_0, \cdots, x_{m-1})$ に対して行うべき操作を記述する。

まず **Lem.2.5.31** より e から

$$\varphi^{(n+m)}_f(y_0, \cdots, y_{n-1}, x_0, \cdots, x_{m-1}) = \varphi^{(n+m)}_e(x_0, \cdots, x_{m-1}, y_0, \cdots, y_{n-1})$$

たる $f = \langle k, i_0, h, T_0\rangle$ を計算する。

次に初期テープに $t_{y_0,\cdots,y_{n-1}}$ が刻まれたならば、$t_{x_0,\cdots,x_{m-1}}$ を $lg(t_{y_0,\cdots,y_{n-1}})+1$ だけシフトしたものを書き加え、その後ヘッダを 0 に戻すという遷移列を持つ Turing 機械 $\langle \ell, i_1, \ell-1, T_1\rangle$ を構築する（$\ell-1$ が終了状態になるように構築できるのは明らかである)。

さらに T_0 に出現する状態を表す自然数全てに $\ell-1$ を足したものを T_0' とし、T_1 に出現する状態を表す自然数 $\ell-1$ を全て $i+\ell-1$ に置き換えたものを T_1' とする。

ここで $\langle k+\ell-1, i_1, h+\ell-1, T_0'\cup T_1'\rangle$ とするとこれが所望の関数値である。 □

系. 2.5.34. n, m を自然数とする。以下の等式を満たす $n+1$ 変数関数 $g_{n,m}$ が計算可能全域関数として取れる。

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(m)}_{g_{n,m}(e,f_0,\cdots,f_{n-1})}(x_0,\cdots,x_{m-1})\\
&=\varphi^{(n)}_e(\varphi^{(m)}_{f_0}(x_0,\cdots,x_{m-1}),\cdots,\varphi^{(m)}_{f_{n-1}}(x_0,\cdots,x_{m-1}))
\end{aligned}
$$

証明)

$$
\begin{aligned}
&h_{n,m}(e,f_0,\cdots,f_{n-1},x_0,\cdots,x_{m-1})\\
&:=\varphi^{(n)}_e(\varphi^{(m)}_{f_0}(x_0,\cdots,x_{m-1}),\cdots,\varphi^{(m)}_{f_{n-1}}(x_0,\cdots,x_{m-1}))
\end{aligned}
$$

は計算可能部分関数であるから、これのインデックス a をひとつとり、s-m-n 関数を用いて $g_{n,m}(e,f_0,\cdots,f_{n-1})=s^{n+1}_m(a,e,f_0,\cdots,f_{n-1})$ とすればよい。 □

補題. 2.5.35 (パディング補題)**.** n を自然数とする。以下を満たす二変数関数 f_n が計算可能全域関数として取れる。

$$
\forall k,\vec{x}.[\varphi^{(n)}_{f_n(e,k)}(\vec{x})=\varphi^{(n)}_e(\vec{x})]\wedge\forall e,k,\ell.[f_n(e,k)=f_n(e,\ell)\to k=\ell]
$$

略証)

e に「無駄な」状態と遷移を付け加えるように定めればよい。

具体的には $f_n(e,0)$ については $f_n(e,k)=e$ と定め、$f_n(e,k+1)$ については $f_n(e,k)=\langle \ell, i, h, T\rangle$、$T$ に

$$
\begin{gathered}
\langle\langle \ell,0\rangle\langle \ell+1,0,0\rangle\rangle,\\
\langle\langle \ell,1\rangle\langle \ell+1,1,0\rangle\rangle,\\
\langle\langle \ell+1,0\rangle\langle i,0,1\rangle\rangle,\\
\langle\langle \ell+1,1\rangle\langle i,1,1\rangle\rangle
\end{gathered}
$$

を追加したものを T' として、$f_n(e, k+1) = \langle k+2, k, h, T' \rangle$ と定めればよい。 □

系．2.5.36. 上の**補題．2.5.31.** から**系．2.5.34.** までの関数は実際には単射的に取ることが出来る。特に s-m-n 関数は今後単射にとったものを指すこととする。

略証)

今、いずれかの関数を計算して得られた Turing 機械が、もしそれより小さい引数（多引数関数の場合はそれを Cantor のタプルにすれば比較できる。）の関数値と衝突したならば、そのときパディング補題の関数を用いてまだ関数値として使われたことのない、その Turing 機械と外延的に等しいインデックスを探索する。現在計算中の引数より小さい自然数は有限個しかないからいずれ必ずまだ関数値として使われていない Turing 機械が見つかる。そのような Turing 機械を関数値と定めればよい[*6]。 □

以降に述べるのは不動点定理と呼ばれる定理のバリエーションである。

定義．2.5.37 (不動点)**.** 計算可能関数 f に対して、$\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$ が成り立つ n をその「不動点 (fixed point)」と呼ぶ。

定理．2.5.38 (Kleene の不動点定理)**.** ある計算可能全域単射関数 f が存在し、以下を満たす。

$$\forall e.[[\varphi_e(x) \text{ は全域}] \to [f(e) \text{ は } \varphi_e(x) \text{ の不動点}]].$$

証明)

$c(u, z)$ を

$$c(u, z) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}(z) & (\text{if } \varphi_u(u)\downarrow) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

とすると、c は計算可能部分関数であり、c を表す Turing 機械のコードを a として $d(u) = s^1_1(a, u)(s^1_1$ is s-m-n function.) とすれば

$$\varphi_{d(u)}(z) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}(z) & (\text{if } \varphi_u(u)\downarrow) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases} \tag{2.1}$$

たる単射全域計算可能関数 $d(u)$ を得る[*7]。

ここで**系．2.5.34** より $\varphi_v = \varphi_e \circ d$ たる v を計算する。v は**系．2.5.36** から各 e 毎に異なったものが取れることに注意せよ。

[*6] これは厳密には後に登場する拡張原始再帰を用いた構成になる。

[*7] このような関数定義を以降では s-m-n 定理による定義と呼んで多く用いる。場合によっては全く断らずに (2.1) のような式を書いて定義とすることもあるので注意すること。

そして $f(e)=d(v)$ とすると所望を満たすこと、即ち $d(v)$ が不動点になっていることおよび f が単射であることを見る。

まず $\varphi_v(v)=\varphi_e\circ d(v)$ は停止する。φ_e, d が共に全域だからである。

従って $\varphi_{d(v)}\simeq\varphi_{\varphi_v(v)}$ となり、

$$\begin{aligned}\varphi_{f(e)} &\simeq \varphi_{d(v)}\\ &\simeq \varphi_{\varphi_v(v)}\\ &\simeq \varphi_{\varphi_e(d(v))}\\ &\simeq \varphi_{\varphi_e(f(e))}\end{aligned}$$

となって $f(e)$ は確かに不動点である。

さらに各 e 毎に異なった v が取れることと、d の単射性より f は単射になっている。 □

定理. 2.5.39 (パラメータ付き不動点定理)**.** ある計算可能全域単射関数 f が存在し、以下を満たす。

$$[\varphi_{f(e)}\text{ は単射。}]\wedge\forall y.[\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y),y)\downarrow\rightarrow\varphi_{\varphi_{f(e)}(y)}\simeq\varphi_{\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y),y)}] \tag{2.2}$$

特に $\varphi_e^{(2)}(x,y)$ が全域関数の時、

$$[\varphi_{f(e)}\text{ は単射。}]\wedge\forall y.[\varphi_{\varphi_{f(e)}(y)}\simeq\varphi_{\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y),y)}]$$

証明)

s-m-n 定理から二変数関数 $d(x,y)$ を

$$\varphi_{d(x,y)}(z)=\begin{cases}\varphi_{\varphi_x^{(2)}(x,y)}(z) & (\text{if }\varphi_x^{(2)}(x,y)\downarrow)\\ \uparrow_I & (otherwise)\end{cases}$$

となる計算可能単射全域関数と定める。ここで $d(x,y)$ は単射である s-m-n 関数 s_1^2 の第零引数をある値で固定したものだからそれ自体単射である。さらに

$$\begin{array}{lcr}& \varphi_v^{(2)}(x,y)=\varphi_e^{(2)}(d(x,y),y)(=\varphi_e^{(2)}(d(x,y),[\![(x,y)]\!]_1^2) & \\ (\iff & \varphi_v\simeq\varphi_e^{(2)}\circ\{d,[\![\cdot]\!]_1^2\} &)\end{array}$$

となるように v をとる。

ここで $\varphi_a(y)=d(v,y)$ たる a をとり、$f(e)=a$ とする。パディング補題から f を単射にできるのは明らかであり、また $d(x,y)$ が単射だったことから $d(v,y)$ も単射だから、これが (2.2) の後半部分を満たすことを見れば証明は完了する。

固定された y に対して、$\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y), y)\downarrow$ を仮定すると

$$\begin{aligned}\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y), y)\downarrow &\iff \varphi_e^{(2)}(\varphi_a(y), y)\downarrow \\ &\iff \varphi_e^{(2)}(d(v, y), y)\downarrow \\ &\iff \varphi_v^{(2)}(v, y)\downarrow\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\varphi_{\varphi_{f(e)}(y)} &\simeq \varphi_{\varphi_a(y)} \\ &\simeq \varphi_{d(v,y)} \\ &\simeq \varphi_{\varphi^{(2)}_{v(v,y)}} \\ &\simeq \varphi_{\varphi_e^{(2)}(d(v,y),y)} \\ &\simeq \varphi_{\varphi_e^{(2)}(\varphi_a(y),y)} \\ &\simeq \varphi_{\varphi_e^{(2)}(\varphi_{f(e)}(y),y)}\end{aligned}$$

を得る（4 つめの変形で $\varphi_v^{(2)}(v, y)\downarrow$ より $\varphi_{\varphi_e^{(2)}(d(v,y),y)} \simeq \varphi_{\varphi^{(2)}_{v(v,y)}}$ であることを用いた。)。 $\square$

2.6　古典論理上での再帰理論

今章では古典論理上で展開される再帰理論の基本的な定義や定理について述べる。今章の定理の全部ではないが多くは直観主義論理でも同様に成り立つ（ただし集合の計算可能性を 1-計算可能性、多対一帰着を 1-多対一帰着で、一対一帰着を 1-一対一帰着で読み替える)。そこで直観主義論理ではそのままは成り立たない定理についてはその旨を明記することにする。直観主義論理で成り立たないものについては一部の証明を省略する。これは後の 4 章で直観主義論理上で同じ内容を直観主義論理で議論するからである。大まかな方針として

1. 証明が容易なものについては、本節で証明を扱う。
2. 古典論理、直観主義論理両方で同様の定理が証明できる場合、本節で証明を扱う。
3. 古典論理では証明できるが、直観主義論理では追加の仮定を足したり、主張を弱化させなくては証明できないもの、あるいは主張自体はそのまま通じるが証明に追加の工夫が必要なもの等については 4 章に譲る。

とする。

定義. 2.6.1 (特性関数)**.** $A \subset \omega$ とする。自然数値全域関数 f で

1. $$\forall x.[f(x) = 0 \wedge f(x) = 1]$$

2. $$f(x) = 0 \iff x \in A$$

たるものを A の特性関数 (charcterisitic function) と呼ぶ。

定義. 2.6.2 (計算可能集合、原始再帰集合)**.** $A \subset \omega$ で A の特性関数が存在して、かつ計算可能全域関数になるとき A は計算可能集合 (recursive set) であるという。計算可能集合全体の集合を **Rec.** で書く。同様に特性関数が原始再帰関数の時、集合は原始再帰集合 (primitive recurusive set) であるという。

補題. 2.6.3. $A, B \subset \omega$ について、A, B が計算可能ならば以下の集合も計算可能である。

1. A^c
2. $A \cup B$
3. $A \cap B$
4. $A \setminus B, B \setminus A$

証明)
論理演算が計算可能全域関数であったことから従う。

補題. 2.6.4. 全域関数 f のグラフ、すなわち Cantor のタプル（と見た自然数）の集合 $\{\langle a, b\rangle; f(a) = b\}$ を満たすもの、が計算可能であることと f が計算可能であることは同値。
証明)
f が計算可能であるときグラフが計算可能であることは明らか。
逆に f のグラフ G_f が計算可能であるとき、その特性関数を g として f は

$$f(x) = [\![\mu y.[g(y) = 0(\Leftrightarrow y \in G_f) \wedge [\![y_0]\!] = k]\!]_1$$

[*8]によって計算できる。

[*8] 今回初めて $\mu y.$ に続けて論理式を書いたが、ゼロ判定や論理演算は計算可能であり、また真理値「真」の代わりに 0 を使うと約束していたから、これは妥当な記法である。

よって同値。 $\square$

定義. 2.6.5 (定義域、値域)**.** 部分関数 f に対して、$\{x|f(x)\downarrow\}$ を f の定義域 (domain) といい、$\mathrm{Dom}(f)$ で書く。同様に $\{x|\exists y.[f(y)\downarrow= x]\}$ を値域 (range) と言い、$\mathrm{Ran}(f)$ で書く。この記号を用いれば特性関数の定義は、

1. $$\mathrm{Ran}(f)\subset\{0,1\}$$

2. $$f(x)=0\iff x\in A$$

とも書ける。

定義. 2.6.6 ($W_e, W_{e,s}$)**.** $\mathrm{Dom}(\varphi_e)=\{x;\varphi_e(x)\downarrow\}=\{x;\exists s.[T(e,x,s)=0]\}$ は W_e とも書く。また同様に $\mathrm{Dom}(\varphi_{e,s})=\{x;\varphi_{e,s}(x)\downarrow\}=\{x;T(e,x,s)=0\}$[*9]は $W_{e,s}$ とも書く。φ_e と $\varphi_{e,s}$ の関係と同様に $W_{e,s}$ も W_e の有限近似と呼ばれる。

注. 2.6.7. 定義から $\forall e,s\forall x\in W_{e,s}.[x<s]$ である。特に $W_{e,s}$ は e によらない上界を持つ。この性質はよく利用される。

補題. 2.6.8.
$$W_e=\bigcup_s W_{e,s}$$

証明)
明らかである。

定義. 2.6.9 (計算可枚挙集合)**.** $A\subset\omega$ が「計算可枚挙 (recursively enumerable, 以降 r.e. と書く)」であるとは、ある Turing 機械 e によって $A=W_e$ とできることを言う。同じことだが、ある計算可能部分関数の定義域となる集合を計算可枚挙という。計算可枚挙集合全体の集合を **R.E.** で書く。

補題. 2.6.10. $A\subset\omega$ について、A が計算可能ならば r.e. である。
証明)

[*9] 以降では Kleene の停止述語のように、$\mathrm{Ran}(f)=\{0,1\}$ たる計算可能全域関数 p について、$p(x)=0$ の意味で単に $p(x)$、$p(x)=1$ の意味で $\neg p(x)$ と書いて述語であるかのように扱うという事がある。これは計算可能関数の中で真偽値を扱うときは 0 を「真」の記号と取り決めたことからの連想である。

A の特性関数 f を取る。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) = 0) \\ \uparrow_H & (f(x) \neq 0) \end{cases}$$

と定めれば、確かに g の定義域は A である。 □

定理. 2.6.11 (Turing の停止性問題)**.** 計算可能ではない r.e. 集合が存在する。特に $K := \{x; \varphi_x(x)\downarrow\}$ はその例である。

証明)

$f(x) = \varphi_x(x)$ は計算可能部分関数であり、K はその定義域だから、r.e. であることは良い。

K が計算可能であると仮定して矛盾を導く。

K が計算可能であるとすると、

$$g(x) = \begin{cases} \uparrow_H & (\text{if } x \in K) \\ 0 & (\text{if } x \notin K) \end{cases}$$

も計算可能であるから、g を計算する Turing 機械 e が取れる。

ここで $e \in K$ とすると、g の定義から $g(e)\uparrow$ だが、K の定義から $e \in K^c$ となって矛盾。

故に $e \in K^c$ だが、今度は $g(e)\downarrow= 0$ となって、やはり K の定義から $e \in K$ となって矛盾。

従って K は計算可能ではない。 □

系. 2.6.12. $K_0 := \{\langle e, x\rangle; x \in W_e\}$ は r.e. だが計算可能ではない。

証明)

K_0 は $f(x) = \varphi_{[\![x]\!]^2_1}([\![x]\!]^2_0)$ の定義域だから r.e. である。

K_0 が計算可能であると仮定すると、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \langle x, x\rangle \in K_0) \\ 1 & (\text{if } \langle x, x\rangle \notin K_0) \end{cases}$$

として K の特性関数が計算可能となる。これは矛盾。 □

定義. 2.6.13 (還元)**.** 計算可能全域関数 f が $A \subset \omega$ を $B \subset \omega$ に多対一還元させる (many-to-one reduce(s)) とは

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

を満たすことであり、この時 f を A の B への多対一還元関数 (many-to-one reductive function) という。

特に、f が単射であるときには、f が A を B に一対一還元させる (one-to-one reduce(s)) といい、f を A の B への一対一還元関数 (one-to-one reductive function) という。

補題. 2.6.14. f が A を B に多対一帰着させることと、A^c を B^c に多対一帰着させることとは同値である。この定理は直観主義論理上では同様には成り立たない。

証明)

明らかである。 □

定義. 2.6.15 (還元可能性)**.** ある計算可能全域関数 f が $A \subset \omega$ を $B \subset \omega$ に多対一還元させるとき、A は B に多対一還元可能 (many-to-one reducible) であるといい、$A \leq_m B$ と書く。

同様に、ある計算可能全域関数 f が A を B に一対一還元させるときには、A は B に一対一還元可能 (one-to-one reducible) であるといい $A \leq_1 B$ と書く。

補題. 2.6.16. $\leq_m, \leq_1$ は $\mathcal{P}(\omega)$ 上の擬順序である。

証明)

(反射律)

恒等関数は全ての集合を自身に一対一還元し、特に多対一還元する。

(推移律)

$A \leq_m B$ かつ $B \leq_m C$ とする。

A の B への多対一還元関数 f と、B の C への多対一還元関数 g を取り、$g \circ f$ が A を C に多対一還元することを示す。

$$x \in A \iff f(x) \in B \in g \circ f(x) = g(f(x)) \in C$$

だから確かに $g \circ f$ は A を C に多対一還元する。

$A \leq_1 B$ かつ $B \leq_1 C$ の場合も単射関数同士の合成関数が単射であることを用いることを除いて、同様である。 □

補題. 2.6.17. $A, B \subset \omega$ で $A \leq_m B$ かつ B が計算可能ならば、A も計算可能。

証明)

A の B への多対一還元関数 f と、B の特性関数 g を取る。$g \circ f$ は A の特性関数で明らかに計算可能である。

補題. 2.6.18. A を計算可能集合とする。この時 $B \subset \omega$ であって、B も B^c も元を持つようなものについて $A \leq_m B$ である。

証明)

B, B^c からそれぞれ元を取り b, c とする。

$$f(x) = \begin{cases} b & (\text{if } x \in A) \\ c & (\text{if } x \in A^c) \end{cases}$$

とすれば f は A を B に多対一還元させる。

補題. 2.6.19 (多対一同値、多対一次数、一対一同値、一対一次数)**.** $A, B \subset \omega$ が $A \leq_m B \wedge B \leq_m A$ であるとき A と B は多対一同値 (many-to-one equivalence) であると言い、$A \equiv_m B$ と書く。$\equiv_m$ は $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係であり、その同値類を多対一次数 (many-to-one degree) と呼ぶ。

同様に $A \leq_1 B \wedge B \leq_1 A$ であるとき A と B は一対一同値 (one-to-one equivalence) であると言い、$A \equiv_1 B$ と書き、その同値類を一対一次数 (one-to-one degree) と呼ぶ。

定理. 2.6.20 (インデックス集合)**.** $A \subset \omega$ が $e \in A \iff \forall f.[\varphi_f \simeq \varphi_e \to f \in A]$ を満たすとき A をインデックス集合 (index set) という。

定理. 2.6.21 (Rice の定理)**.** インデックス集合 A について A も A^c も元を持つならば、$K \leq_1 A \vee K^c \leq_1 A$ である。なおこの定理は直観主義論理上では同様には成り立たない。

証明)

任意の $x \in \omega$ について $\varphi_{e_0}(x) \uparrow$ たる e_0 を一つとる。

$e_0 \in A \vee e_0 \in A^c$ だから今 $e_0 \in A^c$ を仮定する。この時 $K \leq_1 A$ を示す（もし $e_0 \in A$ ならば全く同様にして $K^c \leq_1 A$ が示される)。

$e_1 \in A$ を一つとる。

s-m-n 定理から $f(x)$ を

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varphi_{e_1}(x) & (\text{if } x \in K) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

と定義する。

この時

$$\begin{aligned} x \in K \Rightarrow & \qquad \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_1} & \Rightarrow f(x) \in A \\ x \in K^c \Rightarrow & \forall y.[\varphi_{f(x)}(y) \uparrow] \Rightarrow \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_0} & \Rightarrow f(x) \in A^c \end{aligned}$$

となる。f は s-m-n 関数の第零引数を固定したものだから単射であり、従って $K \leq_1 A$。 □

系. 2.6.22. インデックス集合 A が計算可能なのは $A = \emptyset$ か $A = \omega$ の場合のみである。[*10] この定理も直観主義論理上では同様には成り立たない。

証明)

A が $\emptyset$ でも ω でもないなら、直前の定理から $K \leq_1 A \vee K^c \leq_1 A$ である。

$K \leq_1 A$ とすると特に $K \leq_m A$ だから、もし A が計算可能なら K が計算可能となって矛盾。

$K^c \leq_1 A$ とすると特に $K^c \leq_m A$ だから、もし A が計算可能なら K^c が計算可能となり、したがってその補集合である K も計算可能となって矛盾。 □

定義. 2.6.23 ($\mathcal{C}$-多対一完全、$\mathcal{C}$-一対一完全)**.** ある $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\omega)$ に対して、ある $X \in \mathcal{C}$ が全ての $A \in \mathcal{C}$ に対して $A \leq_m X$ を満たす時、X を $\mathcal{C}$-多対一 ($\mathcal{C}$-many-to-one complete) という。同様に $A \leq_1 X$ を満たす時、$\mathcal{C}$-一対一完全 ($\mathcal{C}$-one-to-one complete) という。特に $\mathcal{C} = \mathbf{R.E.}$ の時は単に多対一完全、一対一完全という。また容易にわかるように X が $\mathcal{C}$-多対一完全（resp.$\mathcal{C}$-一対一完全）で $X \equiv_m Y$（resp.$X \equiv_1 Y$）ならば Y は $\mathcal{C}$-多対一完全（resp.$\mathcal{C}$-一対一完全）なので、ω の部分集合ではなく、$\mathcal{C}$-多対一次数（resp.$\mathcal{C}$-一対一次数）に対して $\mathcal{C}$-多対一完全（resp.$\mathcal{C}$-一対一完全）という語を用いることもある。

定理. 2.6.24. K は一対一完全。従って多対一完全でもある。

証明)

A を r.e. 集合とする。$A = W_e$ たる e を一つとる。今全域な単射 f を

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 0 & (\exists s.T(e,x,s)) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

で定義する。

$$x \in A \iff \exists s.T(e,x,s) \iff \varphi_{f(x)}(f(x)) \downarrow = 0 \iff f(x) \in K$$

より f は A を K に一対一帰着させる。 □

系. 2.6.25.

$$K_0 \equiv_1 K$$

[*10] こちらの主張を Rice の定理と呼ぶことも多い。

定義. 2.6.26 (再帰置換)**.** 計算可能な全単射 f を再帰置換 (recursive permutation) という。

補題. 2.6.27. 再帰置換全体の成す集合は合成を演算として群を成す。

証明)

計算可能関数同士の合成関数は計算可能で、全単射の合成関数は全単射だから演算に閉じていることは良い。

演算の結合性は関数合成が一般に結合的であることから従う。

演算の単位元として恒等関数が取れ、これは明らかに計算可能な全単射だから単位元も存在する。

演算の逆元は再帰置換 f に対して f^{-1} である。これが計算可能なことは $f^{-1}(x) = \mu y.[f(y) = x]$ と定義できることからわかる。 $\square$

定義. 2.6.28. $A, B \subset \omega$ に対して $f(A) = B$ たる再帰置換が存在するとき $A \equiv B$ と書く。

補題. 2.6.29. $\equiv$ は $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係である。

証明)

A, B がある f によって $f(A) = B$ となる時、$f^{-1}(B) = A$ である。f が再帰同型であるとき f^{-1} も再帰同型である事は既にみた。 $\square$

定義. 2.6.30 (再帰不変量)**.** $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\omega)$ が、$A \in \mathcal{C}$ かつ $A \equiv B$ ならば $B \in \mathcal{C}$ を満たすとき $\mathcal{C}$ は再帰不変量 (recursive invariant) であると言われる。

定理. 2.6.31 (Myhill の同型定理)**.**

$$A \equiv_1 B \Leftrightarrow A \equiv B$$

証明）

$(\Leftarrow)$

$p(A) = B$ たる p を一つとれば、p は A を B に一対一還元させ、p^{-1} は B を A に一対一還元させる。

$(\Rightarrow)$

A を B に一対一還元させる f、B を A に一対一還元させる g をそれぞれ取る。証明は実際に条件を満たす再帰置換 h を構成することによって行う。

以降実際に h として使用できるアルゴリズムを構成するが、大きく二つの段階に分かれている。

第一の段階が $\bigcup_{s\in\omega} h'(s) = h$ となるような有限部分関数の列 $h'(s)$ およびその逆部分関数 $(h'(s))^{-1}$ を生成する s についての原始再帰であり、第二の段階がそれらを貼り合わせて、実際に h および h^{-1} を作る段階である。

まず第一の段階を詳しく見ていく。注意すべきことに、計算可能関数というのは自然数上の関数だから上でのスケッチでみたように $h'(s)$ を本当に有限部分関数として構成するわけにはいかない。そこで**定義. 2.5.17** から、我々は有限部分関数のコードとして、そのグラフを用いる。ただし $h'(s)$ を我々は関数と見做しているのだから、$(h'(s))(s)$ のような書き方を $assoc_{2,0,1}(h'(s), s)$ の略記だという事にしておく。なお、このような証明技法は以降でも複数回登場するため、本稿では以降でこれを拡張原始再帰と呼ぶ。これは通常の原始再帰が引数が $n-1$ の時の関数値を用いて、引数が n の時の関数値を定義するのに対して、この方法を使う事で任意の $k < n$ での関数値を用いて n での関数値を定義できることによる筆者の命名である。

これより $h'(s)$ を原始再帰によって構成し、それと同時に数学的帰納法によって、構成される $h'(s)$ に必要な性質を保証する。必要な性質は下に挙げるとおりである。

1. $h'(s)$ は 0 に関しても 1 に関しても関数状。（$\Rightarrow h'(s)$ は関数として単射になり、その逆部分関数も $assoc$ による方法で定義でき、特に計算可能全域。）
2. s が自然数ならば、$(h'(s))(s)\downarrow \wedge (h'(s))^{-1}(s)\downarrow$。
3. $leng(h'(s)) \leq 2s+2$.
4. $\forall x[\forall t < s.(h'(s))(x) = (h'(t))(x)]$.
5. $\forall x \exists n \in \mathbb{Z}.[(h'(s))(x) = f\circ(g\circ f)^n(x)(\Leftrightarrow (h'(s))^{-1}(x) = g\circ(f\circ g)^{-n-1}(x))]$.
   ただし、$n < -1$ に対して f^n とは f^{-1} の $-n$ 回の反復合成を指す。

さて原始再帰の Base Case として $h'(-1) = \emptyset$ とする（0 ではなく、-1 から原始再帰を始めたのは、そうすると上の五条件の内、第二の条件が非常に見やすいという視覚的な都合で、理論的に大きな意味はない。これからもこのように添え字をずらすことはよく行う。)。

Base Case は確かに上記の 1. から 5. の条件を満たす。

Inductive Steps では 1 ステップが前半と後半に分かれる。第 s ステップの前半で定義される列を $h'_{fh}(s)$ とする。

前半では $(h'(s))(s)$ が定義されるようにする。その方法は以下である。

まず $(h'(s-1))(s)$ が定義されているかを確認する。これは $assoc_{2,0,1}(h'(s), s)$ を実際に計算してみればわかる（$assoc_{l,s,r}$ は計算可能全域関数で、該当する組がリストの中に

なければ $\uparrow_H$ を返すのだった。)。定義されているならば $h'_{fh}(s) = h'(s-1)$ とする、

定義されていない場合、以下のようにする。まず列

$$[f(s), f \circ (h'(s-1))^{-1} \circ f(s), ..., f \circ ((h'(s-1))^{-1} \circ f)^n(s), ...] \tag{2.3}$$

を、$f(s)$ から始めて、その直後が定義される限り、順に計算する。ここで列の直後が定義されなくなることは $(h'(s))^{-1}$ が定義されなくなることと同値であり、従って $\mathrm{Ran}(h'(s-1))(= map_{[\![\cdot]\!]_1}(h'(s-1)))$ に含まれない数を得たことと同値であることに注意せよ。この $\mathrm{Ran}(h'(s-1))$ に含まれない列の最後の数を a とし、$h'_{fh}(s) = h'(s-1) \cup \{a\}$ で定める。

ただし、この計算が必ず終了することは確認が必要である。まず、もしもこの列に同じ要素が二度現れないならば、列の長さは高々 $2s$ とわかる。帰納法の仮定から $leng(h'(s-1)) \leq 2s$ であり、$map_{snd}(h'(s-1))(= \mathrm{Ran}(h(s-1)))$ はそれと同じ長さのはずだからである。

そして実際この列に同じ要素は二度現れない。なぜならば条件と帰納法の仮定から f と $(h'(s-1))^{-1}$ は共に単射であり、従って $f \circ (h'(s-1))^{-1}$ も単射なので $f \circ ((h'(s-1))^{-1} \circ f)^n(s) = f \circ ((h'(s-1))^{-1} \circ f)^m(s) (n \geq m)$ とすると $((h'(s-1))^{-1} \circ f)^{n-m}(s) = s$ となるが、$(h'(s-1))(s)$ が定義されていないのだったから、$(h'(s-1))^{-1}(x)$ が s になることはあり得ず、よって $n = m$ とわかる。

後半パートでは $(h'(s))^{-1}(s)$ が定義されるようにする。しかしここでの構成は f の代わりに g を、$(h'(s-1))^{-1}$ の代わりに $h'_{hf}(s)$ を用いる事を除いて、全く前半と対称な方法なので省略する。

ではこうして構成された $h'(s)$ が、帰納法の 1. から 5. の条件を満たすことを見よう。

2. および 4. の条件は明らかである。

1. の条件は前半（resp. 後半）パートで追加される要素となる Cantor のタプルについて、その前者（resp. 後者）は最初に $(h(s-1))(s)$（resp.$(h_{fh}(s))^{-1}(s)$）が定義されているかを確認しているので重複せず、後者（resp. 前者）は a が $\mathrm{Ran}(h'(s-1))$（resp.$\mathrm{Dom}(h'_{fh}(s))$）に含まれない数であったことから、関数状であることが保たれる。

3. の条件は $h(s)$ を $h(s-1)$ と比較した際、リストに増え得る要素は前半パートと後半パートで高々一つずつだから成り立つ。

5. の条件を見るためには (2.3) の列（および後半パートにおけるその対応物である

$$[g(s), g \circ (h'_{fh}(s)) \circ g(s), ..., g \circ ((h'_{fh}(s)) \circ g)^n(s), ...]$$

）について、列に現れる全ての要素が $f \circ (g \circ f)^n(x)$（resp.$g \circ (f \circ g)^n(x)$）の形であることを示す。これは前半パートでは $s-1$ で 5. の条件が成立すること、後半パートでは前

半パートで得た $h'_{fh}(s)$ について同様の条件（$\forall x \exists n \in \mathbb{Z}.[h_{fh}(x) = f \circ (g \circ f)^n(x)]$）が成立することを用いて、$n$ に関する数学的帰納法によって示すことが出来る。

さて証明の第二の段階に移る。しかし第二の段階は実際には容易である。第一の段階の構成で

$$(h'(s))(s)\downarrow \wedge (h'(s))^{-1}(s)\downarrow$$

を満たすようになっていたから、単に $h(s) = (h'(s))(s), h^{-1}(s) = (h'(s))^{-1}(s)$ とすればよい。

以上によって計算可能関数 h が構成された。これが全単射であることは逆写像の存在からわかる。

ここで第一の段階で挙げた五つの条件の内の 5. の条件から h についても

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z}.[h(x) = f \circ (g \circ f)^n(x)]$$

が成り立つことがわかる。

今

$$\forall x.x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$
$$\forall y.y \in B \Leftrightarrow g(y) \in A$$

を思い出せば、$x \in A \Leftrightarrow h(x) = f \circ (g \circ f)^n(x) \in B$ が n に対する数学的帰納法で得られる。これは所望であった。 □

以降では特に r.e. 集合について詳しく見ていく。

定義．2.6.32. 計算可能部分関数 f による r.e. 集合 W_e の像および逆像は r.e. である。より強くそれぞれ二変数の計算可能関数 g, h であって、$W_{g(e,f)} = \varphi_f[W_e], W_{h(e,f)} = \varphi_f^{-1}[W_e]$ たるものが存在する。

証明)

まず、g を構成する。s-m-n 定理から

$$\varphi_{g(e,f)}(x) = \mu y.[T(e, [\![y]\!]^2_1, [\![y]\!]^2_0)\downarrow \wedge \varphi_{f,[\![y]\!]^2_0}([\![y]\!]^2_1)\downarrow = x]$$

と定義する。

$x \in \varphi_f[W_e]$ とすると

$$\begin{aligned} x \in \varphi_f[W_e] &\iff \exists z \in W_e.[\varphi_f(z)\downarrow = x] \\ &\iff \exists z.[z \in W_e \wedge \varphi_f(z)\downarrow = x] \\ &\iff \exists z.[\exists s_1.T(e, x, s_1) \wedge \exists s_2.[\varphi_{f,s_2}(z)\downarrow = x]] \end{aligned} \tag{2.4}$$

だから、ここで (2.4) 式を満たす z, s_1, s_2 をとり、$s = \max(s_1, s_2)$ とすると $z \in W_{e,s}$ かつ $\varphi_{f,s}(z)\downarrow = x$。

よって、このとき $\varphi_{g(e,f)}(x)\downarrow$。

逆に $\varphi_{g(e,f)}(x)\downarrow$ ならば $x \in \varphi_f[W_e]$ は容易にわかるから、$\varphi_f[W_e] = W_{g(e,f)}$ となる。

次に、h を構成する。

$$x \in \varphi_f^{-1}[W_e] \iff \varphi_f(x) \in W_e \iff \varphi_e \circ \varphi_f(x)\downarrow$$

だから**補題. 2.5.34.** を用いて $\varphi_{h(e,f)} \simeq \varphi_e \circ \varphi_f$ となるようにとれば、$\varphi_f^{-1}[W_e] = W_{h(e,f)}$ となる。 □

定義. 2.6.33 (射影的述語、Σ_1-形)**.** 以下のように定義する。

1. 一変数述語 $R \subset \omega$ が二変数述語 $R' \subset \omega \times \omega$ を用いて、

$$R(x) \iff \exists y.R'(x, y)$$

   とできるとき R' の射影的述語 (projective relation) という。
2. 一変数述語がある計算可能関係 R' の射影的述語であるとき、Σ_1-形 (Σ_1-form) もしくは Σ_1 であるという。

定理. 2.6.34 (量化子縮約定理)**.** 任意の

$$\exists y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}.p(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

の形の単項関係は、Σ_1 である。

証明)

$$p'(x, y) := p(x, [\![y]\!]_0^n \cdots, [\![y]\!]_{n-1}^n)$$

とする。

$\varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \iff \varphi'(x, \langle y_0, y_1, ..., y_{n-1}\rangle^n)$ だから、$\exists y.\varphi'(x, y)$ は与えられた命題と同値である。

注. 2.6.35. 量化子縮約定理および類似の Cantor のタプルによる構成を利用すれば、射影的述語および Σ_1-形の概念の定義は、もう少し一般的な設定にしても同値であり、便利である。

即ち、

1. n 変数述語 $R \subset \omega^n$ が $n < k$ たる k 変数述語 $R' \subset \omega^k$ を用いて、

$$R(\vec{x}) \iff \exists \vec{y}.R'(\vec{x}, \vec{y})$$

と出来るとき R' の射影的述語という。ここで $\vec{x}, \vec{y}$ は

$$x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{k-n-1}$$

の略記である。

2. 関係がある計算可能関係 R' の射影的関係であるとき、Σ_1-形であるという。

定理. 2.6.36 (r.e. 集合標準形定理)**.** $A \subset \omega$ について以下は同値。

1. A は r.e. 集合。
2. A は Σ_1 形。
3. A は原始再帰集合の射影的述語。

証明.)

(1⇒3)

$A = W_e$ たる e をとれば、$x \in W_e \iff \exists s.T(e, x, s)$ であった。

(3⇒2)

明らかである。

(2⇒1)

$x \in A \iff \exists \vec{y}.R(x, \vec{y})$ として、$f(x) = \mu y.[R(x, [\![y]\!]_0^n, \cdots [\![y]\!]_{n-1}^n)]$ とすれば $A = \mathrm{Dom}(f)$ である。 □

定理. 2.6.37 (一様化定理)**.** 二項述語が Σ_1 であるならば、ある計算可能部分関数 f であって、

$$(f(x)\downarrow \leftrightarrow \exists y.R(x, y)) \wedge R(x, f(x))$$

であるものが取れる。

証明)

$\varphi_e(x, y) = R(x, y)$ たる e を一つとり、$f(x, \langle y, s\rangle) = \varphi_{e,s}(x, y)$ とする。$[\![\mu y'.f(x, y')]\!]_0$ たる関数は所望を満たす。 □

定理. 2.6.38 (グラフ定理)**.** 部分関数 f について

[f が計算可能部分関数。] $\iff$ [f のグラフを G_f と書けば、G_f は r.e. 集合となる。]

証明)

(⇒)

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & (\text{if } f(x)\downarrow = y) \\ \uparrow_H & (\text{if } f(x)\downarrow \neq y) \\ f(x)(=\uparrow_H \ \ or \ \ \uparrow_I) & (otherwise) \end{cases}$$

とすれば $\mathrm{Dom}(g) = G_f$ である。

(⇐)

G_f の有限近似を $G_{f,s}$ とする。

$$R(x,y) \iff \exists s.\langle x,y\rangle \in G_{f,s}$$

として R に一様化定理を適用すればよい。 □

定理. 2.6.39 (リスティング定理)**.**

$$[A \subset \omega \text{ は r.e. かつ元を持つ。}] \iff \exists f \in \mathbf{Prim.Rec.}.[A = \mathrm{Ran}(f)]$$

(⇒)

$A = W_e$ とし、は元を持つからそれを一つとり n とする。ここで

$$f(\langle x,s\rangle) = \begin{cases} x & (\text{if } T(e,x,s)) \\ n & (\text{if } \neg T(e,x,s)) \end{cases}$$

とする）と定義すれば、f は所望の原始再帰関数になる。

$\mathrm{Ran}(f)$ と A の包含関係は $\mathrm{Ran}(f) \subset A$ のほうは明らかであり、逆は $\varphi_{e,s}, \varphi_e$ の定義から、$\varphi_e(z)\downarrow = m$ ならば、ある s に対して $\varphi_{e,s}(z)\downarrow = m$ であることからわかる。

(⇐)

原始再帰関数 f は全域関数だからその値域が元を持つことは明らか。

また $h(x) = \mu y.[f(x) = y]$ とすると、明らかに $\mathrm{Dom}(h) = \mathrm{Ran}(f)$ だから $\mathrm{Ran}(f)$ は r.e. 集合。 □

定理. 2.6.40. R.E. は交差に閉じている。より強く任意の Turing 機械 e, f に対して $\varphi_{g(e,f)} = W_e \cap W_f$ たる二変数原始再帰関数 g が存在する。

証明)

三変数 e, f, x をうけとって $x \in W_e \cap W_f$ の時停止する Turing 機械の構成は容易である（e に x の表現テープを初期テープとして計算させ、停止したら今度は f に同様に計算させればよい)。そのような Turing 機械のコードを a として、$g(e,f) = s^2_1(a,e,f)$ によって所望の g を得る。 □

定理．2.6.41. R.E. は和集合に閉じている。より強く任意の Turing 機械 e, f に対してが与えられたとき以下を満たす $g(e, f)$ が計算可能である。

1. $W_{g(e,f)} = W_e \cup W_f$.
2. $\mathrm{Ran}(\varphi_{g(e,f)}) = \{0, 1\}$.
3. $x \in W_e \wedge x \notin W_f$ ならば $\varphi_{g(e,f)}(x) \downarrow= 0$.
4. $x \in W_f \wedge x \notin W_e$ ならば $\varphi_{g(e,f)}(x) \downarrow= 1$.

証明)

$g'(e, f, x)$ を以下で定める。

$$g'(e, f, x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists s.[T(e, x, s) \wedge \forall t \leq s.[\neg T(f, x, t)]]) \\ 1 & (\text{if } \exists s.[T(f, x, s) \wedge \forall t < s.[\neg T(f, x, t)]]) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

g' のコードを a として、$g(e, f) = s^2_1(a, e, f)$ によって所望の g を得る。 □

定理．2.6.42. ある計算可能関数 ϵ, δ であって、二つの r.e. 集合 $A = W_e, B = W_f$ に対して $A' = W_{\epsilon(e,f)}, B' = W_{\delta(e,f)}$ が以下を満たすものが存在する。

1. $A' \cup B' = A \cup B$
2. $A' \subset A$
3. $B' \subset B$
4. $A' \cap B' = \emptyset$

証明)

e, f に対して**定理．2.6.41.** の g を計算し、Turing 機械 a を得る。

ここで $W_{\epsilon(e,f)} = \varphi_a^{-1}[\{0\}], W_{\delta(e,f)} = \varphi_a^{-1}[\{1\}]$ とすると、**定理.2.6.32.** よりこれは r.e. かつ a から計算でき、さらに**定理．2.6.41.** の条件から所望を満たす。 □

定理．2.6.43 (補集合定理、またはオラクル無し Post の定理)**.**

$$[A \text{ は計算可能集合。}] \iff [A \text{ と } A^c \text{ は共に r.e. 集合。}]$$

なおこの定理は直観主義論理上では同様には成り立たない。

証明)

(⇒)

明らかである。

(⇐)

$A = W_e, A^c = W_f$ として**定理．2.6.41.** の g を計算すれば得られる Turing 機械が A の特性関数のインデックスである。

系．2.6.44. K^c は r.e. でない。

定義．2.6.45. 以下のように定める。

1. 集合 A の Σ_1-添字、または r.e.-添字とは $W_e = A$ たる e である。
2. 集合 A の Δ_1-添字とは、$W_e = A$ たる e と $W_i = A^c$ たる i のタプル $\langle e, i \rangle$ である。
3. 集合 A の Δ_0-添字、または特性添字とは φ_e が A の特性関数となるような e である。

古典論理上では補集合定理の証明から Δ_1 添字と Δ_0 添字は計算可能な方法で相互に変換できる。しかしながら実際に A が計算可能集合であっても Σ_1 添字から $\Delta_i (i = 0, 1)$ 添字を計算可能な方法で復元することは次に見るように不可能である。

定理．2.6.46. 以下を満たす計算可能部分関数 ψ は存在しない。

“計算可能集合の Σ_1 添字 x を引数に取った時 $\psi(x)$ は必ず停止して、その返り値が A の Δ_1 添字になる。”

証明)
そのような ψ があったと仮定する。

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x \in K) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

とする（s-m-n 定理を用いた。)。
まず

$$x \in K^c \Rightarrow W_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} = W^c_{f(x)} = \omega \Rightarrow 0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1}$$

が成立することがわかる。
さらに

$$\begin{aligned} x \in K \wedge 0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} &\Rightarrow W_{f(x)} = \omega \wedge 0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} \\ &\Rightarrow W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} = W^c_{f(x)} = \emptyset \wedge 0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} \\ &\Rightarrow \bot \end{aligned}$$

故に $0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} \to x \in K^c$ だから、合わせて $x \in K^c \iff 0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1}$ であることがわかる。

しかし $0 \in W_{[\![\psi \circ f(x)]\!]_1} \iff \exists s.T([\![\psi \circ f(x)]\!]_1, 0, s)$ だから先の同値は K^c が r.e. であることを導き、これは矛盾。

したがってそのような ψ は存在しない。

系. 2.6.47. 以下を満たす計算可能部分関数 ψ' は存在しない。

"計算可能集合の Σ_1 添字 x を引数に取った時 $\psi'(x)$ は必ず停止して、その返り値が A の Δ_0 添字になる。"

証明)

もしそのような ψ' が存在すれば、

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \varphi_{\psi'(x)}(y) = 0) \\ \uparrow_H & (\text{if } \varphi_{\psi'(x)}(y) \neq 0) \end{cases}$$
$$\varphi_{g(x)}(y) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \varphi_{\psi'(x)}(y) = 1) \\ \uparrow_H & (\text{if } \varphi_{\psi'(x)}(y) \neq 1) \end{cases}$$
$$\psi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

とすることで、**定理. 2.6.46** の ψ が計算可能に定義できてしまう。これは矛盾。よってそのような ψ' は存在しない。 □

以下では、生産的集合と呼ばれる集合について定義と性質を見る。

定義. 2.6.48 (生産的集合、創造的集合)**.** $P \subset \omega$ が生産的 (productive) であるとは、ある生産的関数 (productive function) と呼ばれる計算可能部分関数 ψ が存在して

$$\forall x.[(W_x \subset P \to \psi(x) \downarrow) \wedge \psi(x) \in P \setminus W_x]$$

とできるような集合である。また補集合が生産的集合になるような r.e. 集合は創造的 (creative) であると言われる。

補題. 2.6.49. 生産的集合は r.e. ではない。

証明)

明らかである。 □

定義. 2.6.50 (全域的に生産的)**.** $P \subset \omega$ が全域的に生産的 (totally pruductive) であ

るとは、それが生産的でしかもその生産的関数を全域的に取れることを言い、そのような生産的関数を全域生産的関数 (totally pruductive function) という。また補集合が全域的に生産的な集合になるような r.e. 集合は全域的に創造的 (totally creative) であると言われる。

定義. 2.6.51 (単射的に生産的)**.** $P \subset \omega$ が単射的に生産的 (monomophicly productive) であるとは、それが全域的に生産的でしかもその全域生産的関数を単射的に取れることを言い、そのような全域生産的関数を単射的生産的関数 (monomophicly productive function) という。また補集合が単射的に生産的な集合になるような r.e. 集合は単射的に創造的 (monomorphicly creative) であると言われる。

定理. 2.6.52. K^c は単射的に生産的。従って K は単射的に創造的。

証明)

単射生産関数として恒等関数 id を取る。

$W_x \subset K^c$ とする。

今 $x \in W_x(\iff x \in K)$ とすると、$W_x \subset K^c$ より $x \in K^c$ となり、K の定義より $x \notin W_x$ となって矛盾。

よって $x \notin W_x \wedge x \in K^c \iff x \in K^c \setminus W_x$。 □

定理. 2.6.53. $P \subset \omega$ 以下は同値。なおこの定理は直観主義論理上では同様には成り立たないが、2. と 3. の同値は直観主義論理上でも同様に示される。

1. P は生産的。
2. P は全域的に生産的。
3. P は単射的に生産的。

証明)

(3⇒1) は明らか。

(1⇒2) の証明は 4 章に譲る。

ここでは (2⇒3) のみを見る。

(2⇒3)

仮定から全域な生産的関数 q がとれる。

補助関数 h を定義する。

$$\varphi_{h(x)}(z) = \begin{cases} 0 & (\text{if } z = q(x)) \\ \varphi_x(z) & (\text{if } z \neq q(x)) \end{cases}$$

とする。

$W_x \subset P$ ならば $q(x) \in P \setminus W_x$ だったから、$W_x \subsetneq W_{h(x)} = W_x \cup \{q(x)\} \subset P$ である。

これを繰り返し用いることで $W_x \subset P$ のとき

$$\begin{aligned} W_x &\subsetneq W_{h(x)} = W_x \cup \{q(x)\} \\ &\subsetneq W_{h^2(x)} = W_x \cup \{q(x), qh(x)\} \\ &\quad \cdots \\ &\subsetneq W_{h^n(x)} = W_x \cup \{q(x), qh(x), \cdots qh^{n-1}(x)\} \\ &\quad \cdots \\ &\subsetneq P \end{aligned} \tag{2.5}$$

たる真の増加列を得ることがわかる[*11]。

さて以降で p を拡張原始再帰によって定義する。すなわち、$p = \bigcup_s p'(s)$ たる $p'(s)$ を定義する。$p'(s)$ が実際には自然数にコードされていなくてはならないことに関する注意（$\mathrm{Ran}(p'(s)).\mathrm{Dom}(p'(s))$ が Gödel のリストに関する関数で定義できることなど）は Myhill の同型定理の時に述べたので今回以降は省略する。また今回は $p'(s)$ と同時に自然数列 ℓ_s を構成する。同時に構成するというのは実際には $\langle p'(s), \ell_s$ を原始再帰で構成することを言う。

1. $p'(s)$ は s に対して集合の包含関係の意味で単調増加。
2. $p'(s)$ は $s+1$ 元集合。
3. s が自然数の時、$(p'(s))(s)\downarrow$.
4. $p'(s)$ は 0 に対しても 1 に対しても関数状。
5. $\max p'(s) = \ell_s$
6. $\forall s, n, k.[0 \leq n \leq s \wedge W_n \subset P \to (p'(s))(n) \in P \setminus W_n]$

さて、原始再帰の Base Case を $p'(s) = \emptyset$ で定める。

原始再帰の Inductive Steps は以下のようになる。

まず $A_i = \{qh^j(n+1) | j \leq i\}$ とする。便宜上 $A_{-1} = \emptyset$ とする。この A_i を計算するアルゴリズムは明らかである。

[*11] なお、ここで特に $W_a = \emptyset$ とすると $W_a \subset P$ だから、全ての生産的集合は少なくとも一つの無限 r.e. 集合を覆うことがわかる。

i を 0 から以下のどちらかが始めて起きる i を探索する。

1. $A_i \setminus \mathrm{Ran}(p'(s-1))$ が元を持つ。
2. $A_i = A_{i-1}$

上の二条件のどちらも判定するアルゴリズムは明らかである。

また s までの反復で第二のケースが起きないとき A_i の濃度は 1 ずつ増えるから n 元集合である $\mathrm{Ran}(p'(s-1))$ の濃度を上回ることにより第一のケースが起きることがわかるから、探索は実際には s までで済むことがわかる。

第一のケースが起きたならば、そのような i に対して $p'(s) = p'(s-1) \cup \{\langle n, qh^i(n+1)\rangle\}, \ell_{n+1} = \max(\ell_n, qh^i(n+1))$ と定める。

第二のケースでは $p'(s) = p'(s-1) \cup \{\langle n, \ell_n + 1\rangle\}, \ell_{n+1} = \ell_n + 1$ とする。

さて、冒頭で挙げた六条件を $p'(s)$ が満たすことを確認する。

1. から 5. の条件は構成から明らかである。

6. の条件は Base Case では空虚に満たされている。

Inductive Steps では他の条件から $n = s$ の時を考えればいいことがわかる。

$W_s \subset P$ だったとき、(2.5) より、A_i が単調増加になることがわかるから、定義の場合分けの内、第一のケースしか起こらないことがわかる。そして $W_s \subset W_{h^n(s)}$ だったから $qh^i(s) \in P \setminus W_{h^i(s)} \subset P \setminus W_s$ であるから条件が成り立つ。

ここで $p(n) = (p'(n))(n)$ とすれば、これは六条件から全域的で単射的な生産的関数であることがわかる。 □

定理. 2.6.54. P が生産的で $P \leq_m A$ なら A も生産的。

証明)

4 章に譲る。 □

定理. 2.6.55 ((Myhill))**.** P が生産的ならば $K^c \leq_1 P$。

証明)

A は単射的に生産的としてよい。

p を A の単射全域生産的関数とする。

$$\varphi_{f(x,y)}(z) = \begin{cases} 0 & (\text{if } y \in K \wedge p(x) = z) \\ \uparrow_H & (\text{if } y \in K \wedge p(x) \neq z) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

とし、**定理. 2.5.39** から $\varphi_{n(y)} = \varphi_{f(n(y),y)}$ たる $n(y)$ をとる。

今

$$y \in K \Rightarrow W_{n(y)} = \{p \circ n(y)\} \Rightarrow W_{n(y)} \not\subset A \Rightarrow p \circ n(y) \in A^c$$

故に $p \circ n(y) \in A \to y \in K^c$。そして

$$y \in K^c \Rightarrow W_{n(y)} = \emptyset \Rightarrow W_{n(y)} \subset A \Rightarrow p \circ n(y) \in A \Rightarrow p \circ n(y)$$

p, n の単射性より、$p \circ n$ は単射で $y \in K^c \iff p \circ n(y) \in A$ だから $K^c \leq_1 A$。 □

系. 2.6.56. $A \subset \omega$ に対して以下がわかる。なおこの定理は直観主義論理上では 1. のみが、「生産的」を「全域的に生産的」に置き換えて成立する。

1.
$$K^c \leq_m A \Rightarrow [A \text{ は生産的。}] \Rightarrow K^c \leq_1 A \Rightarrow K^c \leq_m A.$$

   従って
$$K^c \leq_m A \iff [A \text{ は生産的。}] \iff K^c \leq_1 A.$$

2.
$$K \equiv_m A \Rightarrow [A \text{ は創造的。}] \Rightarrow K \equiv_1 A \Rightarrow K \equiv_m A.$$

   従って
$$K \equiv_m A \iff [A \text{ は創造的。}] \iff K \equiv_1 A.$$

以降ではシリンダーと呼ばれる集合についてみる。

定義. 2.6.57. $A \subset \omega$ がシリンダーであるとは、

$$\forall B \subset \omega.[B \leq_m A \to B \leq_1 A]$$

を満たすことである。

補題. 2.6.58. 任意の集合 A に対して $A \times \omega$ はシリンダー。
証明)
4 章に譲る。 □

補題. 2.6.59. 集合 A がシリンダーで $A \equiv_1 B$ なら B もシリンダー。
証明)
$C \leq_m B$ とする。
$A \equiv_1 B$ から特に $B \leq_m A$ だから $C \leq_m A$。
A はシリンダーだから $C \leq_1 A$ で、$A \leq_1 B$ だから $C \leq_1 B$。

定理. 2.6.60. 以下の三条件は同値。

1. A はシリンダーである。
2. $A \equiv_1 A \times \omega$.
3. $\exists B \subset \omega.[A \equiv_1 B \times \omega]$.

証明)

(1.⇒2.)

$A \leq_1 A \times \omega$ かつ $A \times \omega \leq_m A$ であることは容易にわかる。

A はシリンダーなのだから $A \times \omega \leq_m A$ は $A \times \omega \leq_1 A$ を含意する。

従って $A \equiv_1^i A \times \omega$。

(2.⇒3.)

明らかである。

(3.⇒1.)

上述の定理たちから従う。 □

この定理から集合に ω を掛ける操作は高々一回しか集合の一対一次数を上げないことがわかる。

第 3 章

直観主義論理と EL

直観主義論理は L. E. J. Brouwer により提唱され、A. Heyting らによって形式化された論理である。

本章ではその論理的公理とその上の算術の形式体系である EL について見ていく。

3.1 直観主義論理

定義. 3.1.1 (言語)**.** 言語 (language) とは集合の二つ組 (F, R) で F を関数記号集合 (function symbol set)、R を関係記号集合 (relation symbol set) という。また F, R それぞれの要素を関数記号 (function symbol) という。

また関数 $asgn : F \cup R \to \omega$ をアリティ割り付け関数 (arity-assigning function) と呼ぶ。アリティ割り付け関数まで含めた三つ組 $(F, R, asgn)$ をアリティ付き言語 (language with arity) という。以降ではアリティ付き言語を単に言語という事もある。

またアリティ付き言語において $x \in F \cup R$ に対して $asgn(x) = n$ であることを「x は n 引数である。」という。

特に $c \in F$ で $asgn(c) = 0$ の時、c は定数記号 (constant symbol) であるという。

注. 3.1.2. 以降では言語またはアリティ付き言語は $\mathfrak{L}$ で表記する。

定義. 3.1.3 (項)**.** $\mathfrak{L}$ 上の項 (term) とは以下のように定義される。但しここで、あらかじめ対象変数記号（object variable set. もしくは単に変数記号集合 (variable set) とも言う。）と呼ばれる可算無限集合 Var を一つ固定しておく。Var の元は対象変数記号（object variable. もしくは単に変数記号 (variable) とも言う。）とも言う。

1. 対象変数記号は項である。
2. f が関数記号で n 引数であり、$t_0, \cdots, t_{n-1}$ が項であるとき、順序付きの $n+1$ 個組 $(f, t_0, \cdots, t_{n-1})$ は項である。

以降では項 $(f, t_0, \cdots, t_{n-1})$ を $f(t_0, \cdots, t_{n-1})$ と書く。n が明らかであるか重要でない場合にはさらなる略記として $f(\vec{t})$ とも書く。

ただし c が定数記号の時は項 (c) は単に c と書く。

定義. 3.1.4 (論理式)**.** $\mathfrak{L}$ 上の直観主義述語論理式（intuitionistic predicate formula. 以下では単に論理式 (formula) と呼ぶ。）は以下のように定義される。但しここで、あらかじめ二つの集合を固定しておく。一つ目は上で述べた Var であり、二つ目は命題変数記号集合 (propositinal variable set) と呼ばれるやはり可算集合 $PVar$ である。$PVar$ の元は命題変数記号 (propositional variable) と呼ばれる。

1. 記号 $\perp$ は論理式である。これを矛盾とよぶ。
2. 命題変数記号は論理式である。
3. R が関係記号で n 引数であり、$t_0, \cdots, t_{n-1}$ が項であるとき、順序付きの $n+1$ 個組 $(R, t_0, \cdots, t_{n-1})$ は項である。以降では項の時と同様に $(f, t_0, \cdots, t_{n-1})$ を $R(t_0, \cdots, t_{n-1})$ と書く。n が明らかであるか重要でない場合にはさらなる略記として $R(\vec{t})$ とも書く。1. と 2. と 3. を合わせて原子論理式 (atomic formula) と言う。
4. ϕ, ψ が論理式の時、$\phi \diamond \psi$ $(\diamond \in \{\wedge, \vee, \to\})$ は論理式である。
5. ϕ が論理式の時、$Qx.\phi$ $(Q \in \{\forall, \exists\}, x \in Var)$ は論理式である。

$\mathfrak{L}$ 上の項直観主義述語論理式全体の集合を $\mathbf{Fml}(\mathfrak{L})$ と書く。また、上記の定義から 3. と 5. を除いたものとして定義される $\mathbf{Fml}(\mathfrak{L})$ の部分集合を $\mathbf{Fml.}^{prop}$ と書き、その元を直観主義命題論理式 (intuitionistic propositinal formula) と言う。

注. 3.1.5. 以降では論理式の略記として、以下を用いる。

1. $\neg\phi$ は $\phi \to \perp$ の略記である。
2. $\phi \leftrightarrow \psi$ は $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ の略記である。

また論理式が、括弧をつけずにネストした場合 $\wedge, \vee$ は $\to$ より強く結合し、$\to$ は右結合に読む。$\forall x.$ や $\exists x.$ の直後に原子論理式以外が入る場合はそれを [] で囲む。

定義. 3.1.6 (束縛変数、自由変数)**.** $\mathfrak{L}$ 上の論理式の内、固定された一つ ϕ に対して、ϕ 上の束縛変数集合 (bound variable set)、自由変数集合 (free variable set) と呼ばれる

Var の部分集合 $BV(\phi), FV(\phi)$ が以下のように定義される。それらの元をそれぞれ ϕ の束縛変数 (bound variable)、自由変数 (free variable) とよぶ。また変数記号が、ϕ で束縛されている、自由であると言うこともある。

1. ϕ が原始論理式の時、$BV(\phi) = \emptyset$ で $FV(\phi)$ はその論理式に出現する変数記号全体の集合である。
2. $\phi = \psi \diamond \sigma$ $(\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\})$ の時、$BV(\phi), FV(\phi)$ はそれぞれ $BV(\psi) \cup BV(\sigma), FV(\psi) \cup FV(\sigma)$ である。
3. $\phi = Qx.\psi$ $(Q \in \{\forall, \exists\}, x \in Var)$ の時、$BV(\phi) = BV(\psi) \cup \{x\}$ であり、$FV(\phi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$ である。

$FV(\phi) = \emptyset$ の時、ϕ は文 (sentece) であるという。

またある変数記号 x が自由変数でも束縛変数でもあるという場面は存在する。例えば

$$A(x) \wedge \forall x.B(x)$$

における x はそうである。この時、A に与えられている x が自由変数としての性質を持っており、B に与えられている x は束縛変数としての性質を持っていると言える。

そこで個々の変数の出現ごとに自由な出現 (free occurence)、束縛された出現 (bound occurence) という言い方をすることがある。上の例では A に与えられた x は自由に出現しており、B に与えられた x は束縛されて出現している。

定義. 3.1.7 (x から束縛されている、x から自由、)**.** $\mathfrak{L}$ 上の論理式の内、固定された一つ ϕ と $x \in Var$ に対して、ϕ 上の x-束縛変数集合 (x-bound variable set)、x-自由変数集合 (x-free variable set) と呼ばれる $FV(\phi)$ の部分集合 $BV_x(\phi), FV_x(\phi)$ が以下のように定義される。それらの元をそれぞれ x から束縛された (bound for x) 変数、x から自由な (free for x) 変数とよぶ。また変数記号が、ϕ で x から束縛されている、自由であると言うこともある。

1. ϕ が原始論理式の時、$BV_x(\phi) = \emptyset$ で $FV_x(\phi)$ はその論理式に出現する変数記号全体の集合である。
2. $\phi = \psi \diamond \sigma$ $(\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\})$ の時、$BV_x(\phi), FV_x(\phi)$ はそれぞれ $BV_x(\psi) \cup BV_x(\sigma), FV_x(\psi) \cup FV_x(\sigma)$ である。
3. $\phi = Qx.\psi$ $(Q \in \{\forall, \exists\})$ の時、$BV_x(\phi) = FV(\psi)$ であり、$FV_x(\phi) = \emptyset$ である。
4. $\phi = Qy.\psi$ $(Q \in \{\forall, \exists\}, y \in Var \wedge y \neq x)$ の時、$BV_x(\phi), FV_x(\phi)$ はそれぞれ $BV_x(\phi) \setminus \{y\}, FV_x(\phi) \setminus \{y\}$ である。

自由変数、束縛変数の時と同じく、ある y が x で束縛されていて、かつ x から自由であるという事もあり得る。例えば

$$A(y) \land \forall x.B(y)$$

における y はそうである。この時、A に与えられている y は x から自由な性質を持っており、B に与えられている y は x から束縛された性質を持っていると言える。

そこで個々の変数の出現ごとに x から自由な出現 (occurence free for x)、x から束縛された出現 (occurence bound for x) という言い方をすることがある。上の例では A に与えられた y は x から自由に出現しており、B に与えられた y は x から束縛されて出現している。

定義. 3.1.8 (項の中の変数記号に対する項の代入)**.** $\mathfrak{L}$ 上の項 t, s と $x \in Var$ に対して、以下のように代入 (substitution)$t[x := s]$ が定義される。

$$\begin{aligned}
x[x := s] &= s \\
y[x := s] &= y \text{ (if } y \in Var \land y \neq x) \\
f(t_0, \cdots, t_{n-1})[x := s] &= f(t_0[x := s], \cdots, t_{n-1}[x := s])
\end{aligned}$$

定義. 3.1.9 (論理式中の変数記号に対する項の代入)**.** $\mathfrak{L}$ 上の項 t と論理式 ϕ と $x \in Var$ に対して、代入 $\phi[x := t]$ は、ϕ に出現する項 s の内、x が自由かつ t に出現する全ての変数記号 y から自由に出現するもの全てを $s[x := t]$ で置き換えたものとして定義される。

以降では直観主義論理の証明論を導入する。直観主義論理の証明論として使えるものはいくつもあるが、本稿では以下の自然演繹 (natural duduction) によるもののみ導入する。また本稿は直観主義論理の意味論については全く扱わない。その他の証明論や意味論については [15] 他、参考文献を参照されたい。

定義. 3.1.10 (証明)**.** 直観主義論理の自然演繹による証明とは、三つ組 $(\mathfrak{D}, \Gamma, \phi)$ である。ここで ϕ は論理式で結論 (conclusion) と呼ばれ、Γ は論理式の有限集合で仮定 (assumption) と呼ばれ、$\mathfrak{D}$ は証明図と呼ばれる論理式を頂点に持つ木で以下に定義を述べる。なお以下に述べるとおり Γ と A は実際には $\mathfrak{D}$ から定義されるため、「結論が ϕ であるような $\mathfrak{D}$」、「仮定が Γ であるような $\mathfrak{D}$」等のように言う事がある。

証明図及び証明の定義は以下の通りである。

まずいかなる論理式 ϕ に対しても

$$\phi$$

は証明図である。これは仮定が $\{\phi\}$ で結論が ϕ である。即ち $(\phi, \{\phi\}, \phi)$ は証明である。

以降は再帰的な定義となるのだが、少し記号法について先に解説しておく。

以下に出現する横線は横線の直下の論理式から直上のいくつかの論理式全てに辺がつながっていることを意味する。

また

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi}}{\psi}$$

のような表記は、$\mathfrak{D}$ が、Γ を仮定とし、ϕ を結論とする証明図であれば、新たな頂点 ψ と、ψ から ϕ への辺を追加したものは、Γ を仮定とし、ψ を結論とする証明図になるという事を意味する。即ち $\left(\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi}}{\psi}, \Gamma, \psi\right)$ は証明である。証明である旨の注意は以下では省略する。

同様に

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_0}{\mathfrak{D}_0}}{\phi} \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma_1}{\mathfrak{D}_1}}{\psi}}{\sigma}$$

は、$\mathfrak{D}_0$ が、Γ_0 を仮定とし、ϕ を結論とする証明図であり、$\mathfrak{D}_1$ が、Γ_1 を仮定とし、ψ を結論とする証明図であれば、その両者の直和をとり、さらに新たな頂点 σ と、σ から ϕ および ψ への辺を追加したものは、$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ を仮定とし、σ を結論とする証明図になることを意味する。

さらに

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma[\sigma]}{\mathfrak{D}}}{\phi}}{\psi}$$

は、$\mathfrak{D}$ が、Γ を仮定とし、ϕ を結論とする証明図であれば、新たな頂点 ψ と、ψ から ϕ への辺を追加したものは、$\Gamma \setminus \{\sigma\}$ を仮定とし、ψ を結論とする証明図になるという事を意味する。このような時、仮定 σ が discharge されたという。

これらの記号法を組み合わせた、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0[\tau]}{\mathfrak{D}_0}}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1}{\mathfrak{D}_1}}{\psi}}{\sigma}$$

のような表記もする。これは $\mathfrak{D}_0$ が、Γ_0 を仮定とし、ϕ を結論とする証明図であり、$\mathfrak{D}_1$ が、Γ_1 を仮定とし、ψ を結論とする証明図であれば、その両者の直和をとり、さらに新たな頂点 σ と、σ から ϕ および ψ への辺を追加したものは、$\Gamma_0 \setminus \{\tau\} \cup \Gamma_1$ を仮定とし、σ を結論とする証明図になることを意味する。仮定は $(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) \setminus \{\tau\}$ ではないことに注意せよ。

以上の表記法の元、定義の再帰的な部分は以下のようになる。ここで、$(\wedge I)$ 等の記号はいずれの定義によって証明図が定義されたのかを分かりやすくするものであり、実際には省略することもある。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{\mathfrak{D}_0}}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1}{\mathfrak{D}_1}}{\psi}}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge I) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi_0 \wedge \phi_1}}{\phi_i}\,(\wedge E_i)\ (i = 0, 1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi_i}}{\phi_0 \vee \phi_1}\,(\vee I_i)\ (i = 0, 1) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0[\phi]}{\mathfrak{D}_0}}{\sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1[\psi]}{\mathfrak{D}_1}}{\sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2}{\mathfrak{D}_2}}{\phi \vee \psi}}{\sigma}\,(\vee E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\psi]}{\mathfrak{D}}}{\phi}}{\psi \to \phi}\,(\to I) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{\mathfrak{D}_0}}{\psi \to \phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1}{\mathfrak{D}_1}}{\psi}}{\phi}\,(\to E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi}}{\forall y.\phi[x := y]}\,(\forall I) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\forall x.\phi}}{\phi[x := t]}\,(\forall E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\phi[x := t]}}{\exists x.\phi}\,(\exists I) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{\mathfrak{D}_0}}{\exists y.\phi[x := y]} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1[\phi]}{\mathfrak{D}_1}}{\psi}}{\psi}\,(\exists E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\mathfrak{D}}}{\bot}}{\phi}\,(\mathrm{EFQ})$$

$\forall, \exists$ に関する定義には固有変数条件 (eigenvariable condition) と呼ばれる、追加の要請がある。

即ち

1. $(\forall E)$ 及び $(\exists I)$ によって定義される証明図が妥当なのは、t に出現する全ての変数記号が ϕ で x から束縛されていない場合である。
2. $(\forall I)$ によって定義される証明図が妥当なのは、Γ の中の全ての論理式で x が自由でなく、かつ $y = x$ であるか y が ϕ で自由でない場合である。
3. $(\exists E)$ によって定義される証明図が妥当なのは、$\Gamma \setminus \{\phi\}$ の中の全ての論理式と ψ で x が自由でなく、かつ $y = x$ であるか y が ϕ で自由でない場合である。

以上によって証明木および証明が定義された。

なお、証明 $(\mathfrak{D}, \Gamma, \phi)$ を「Γ からの ϕ の証明」等と言うことがある。

注. 3.1.11. 証明で discharge された仮定が複数ある時、どの仮定が証明木中のどの時点で discharge されたのかが視覚的にわかりにくいことがある。そのため、多くの場合 discharge された仮定に (1) 等と記号を付けておき、証明木中で discharge した位置に同じ記号を付けるということが行われる。

例)

以下は $\emptyset$ からの $(\phi \to \psi) \to (\psi \to \sigma) \to \phi \to \sigma$ の証明の証明木である。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\psi \to \sigma](2) \qquad \cfrac{[\phi \to \psi](3) \qquad [\phi](1)}{\psi}\,(\to E)}{\sigma}\,(\to E)}{\phi \to \sigma(1)}\,(\to I)}{(\psi \to \sigma) \to \phi \to \sigma(2)}\,(\to I)}{(\phi \to \psi) \to (\psi \to \sigma) \to \phi \to \sigma(3)}\,(\to I)$$

定義. 3.1.12 (証明可能性)**.** 固定された $\mathfrak{L}$ 上の論理式の有限集合 Γ と論理式 ϕ について、$(\mathfrak{D}, \Gamma, \phi)$ たる証明が存在するとき、$\Gamma \vdash \phi$ と書き、ϕ は Γ から証明可能であるという。また必ずしも有限でない $\mathfrak{L}$ 上の論理式の集合 Γ に対して、ある Γ の有限部分集合が存在して $(\mathfrak{D}, \Delta, \phi)$ たる証明が存在するときにも、$\Gamma \vdash \phi$ と書き、ϕ は Γ から証明可能であるということがある。

補題. 3.1.13. 上の第二の意味での $\Gamma \vdash \phi$ は Γ が有限である限り、第一の意味と同値である。

証明)

第一の意味で $\Gamma \vdash \phi$ ならば、第二の意味でもそうであるのは明らかである。

第二の意味で $\Gamma \vdash \phi$ であるとき、$(\mathfrak{D}, \Delta, \phi)$ たる証明が存在する $\Delta \subset \Gamma$ とその証明木 $\mathfrak{D}$ を固定し、$\Gamma \setminus \Delta$ の元を $\psi_0, \cdots, \psi_{n-1}$ と並べておく。

以下のようにして Γ からの ϕ の証明の証明木を得る。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta}{\mathfrak{D}}}{\phi} \qquad \psi_0}{\phi \wedge \psi_0}\ (\wedge I)}{\phi}\ (\wedge E) \qquad \psi_1 \cdots}{\vdots}}{\phi} \qquad \psi_{n-1}}{\phi \wedge \psi_{n-1}}\ (\wedge I)}{\phi}\ (\wedge E)
$$

□

3.2 EL

定義. 3.2.1 (理論)**.** 言語 $\mathfrak{L}$ 上の理論 (theory)Γ とは、$\mathfrak{L}$ 上の論理式の集合である。ただし以降では言語 $\mathfrak{L}$ と Γ の組 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ を理論と呼ぶことが多い。この場合は「理論 X の言語は $R = A, F = B$ である」などという。またこの文脈で Γ のことを理論の公理 (axiom) と呼ぶこともある。なお理論の事を指して、形式体系 (formal system) と呼ぶこともある。

定義. 3.2.2 (定理)**.** 理論 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ に対して $\Gamma \vdash \phi$ である時、ϕ を理論 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ の定理という。特に $\Gamma = \emptyset$ の時、ϕ は直観主義論理的定理であるといい、$\emptyset \vdash \phi$ の代わりに、$\vdash \phi$ と書く。

定義. 3.2.3 (Heyting 算術)**.** Heyting 算術 (Heyting arithmetic, HA) は、理論であり、直観主義論理上の算術の形式体系の中で、恐らく最も基本的なものである。

HA の言語は $R = \{=, <\}, F = \{\bar{0}, suc\} \cup$ **Prim.Rec.** であり、$\bar{0}$ は零引数、suc は一引数、$<$ は二引数、$f \in$ **Prim.Rec.** たる f についてはその f と同じ数の引数である。

これ以降、関係記号 $=$ と、原始再帰関数として関数記号に含まれる $+, \times$ に対しては、$=(x, y)$ や $+(x, y)$ のようには書かず、一般的な中値記法で $x = y$ のように書く。

HA の公理は以下の論理式から成る。ただし、以下では論理式とは言語 $R = \{=, <\}, F = \{0, suc\} \cup$ **Prim.Rec.** 上の論理式を指し、また全ての自然数 n について $\bar{n}$ を以下のように定義される項の略記とする。

$$
\begin{aligned}
\bar{0} &\equiv \bar{0} \\
\overline{n+1} &\equiv suc(\bar{n})
\end{aligned}
$$

この略記法、もしくは $\bar{n}$ の形の項を数項 (numeral) と呼ぶことがある。

1. $\forall x.[x = x]$.
2. 全ての論理式 ϕ に対して、$\forall x, y.[\phi(x) \wedge x = y \to \phi(y)]$.*1
3. $\neg(\bar{1} = \bar{0})$.
4. $\forall x.[x + \bar{0} = x]$.
5. $\forall x, y.[x + suc(y) = suc(x + y)]$.
6. $\forall x.[x \times \bar{0} = \bar{0}]$.
7. $\forall x, y.[x \times suc(y) = x \times y + y]$.
8. 4. から 7. に類似な形式の全ての原始再帰関数の定義となる公理。
9. $\forall x, y.[x < y \leftrightarrow \exists z.[suc(x + z) = y]$.
10. 全ての論理式 ϕ に対して、

$$(\phi(\bar{0}) \wedge \phi(x) \to \phi(suc(x))) \to \forall x.\phi(x).$$

この公理を特に帰納法と呼ぶ。

定義. 3.2.4 (Elementary Analysis)**.** Elementary Analysis(EL) は二ソートの算術理論である。EL のソートの内、一方を数と呼び、他方を関数と呼ぶ。

EL の言語は HA の言語全てに、全ての数ソート用の変数記号 x に対して $\lambda x.$、r、そして Ap を付け加えたものである。HA の言語から引き継いだ記号の引数は HA と同じ数であり、$\lambda x.$ は一変数、r は三変数、Ap は二変数である。実際には多ソート論理であるため、引数の数だけでなく、取る項の種類を指定しなくてはならないが、それは以下の項の定義で行う。

EL の項の定義は、数ソートの項（これを以降では単に項と呼ぶ。）の定義と関数ソートの項（これを以降では functor と呼ぶ。）の定義を同時再帰的に行う。

1. HA の項は EL の項である。
2. 全ての関数ソート用の変数記号と、HA の関数記号の内一変数のものは functor である。
3. functor f と項 t に対して $Ap(f, t)$ は項である。以降では $Ap(f, t)$ を $f(t)$ と略記する場合がある。
4. t が項ならば、$\lambda x.(t)$ は functor である。以降では $\lambda x.(t)$ の括弧は省略する場合が

*1 このように何らかのメタ的な対象全てについて論理式を定めることを図式 (schema) と言う。公理に図式が用いられると公理図式、定理の場合は定理図式等という。

ある。

5. t と t' が項で、f が functor ならば、$r(t, f, t')$ は項である。

EL の公理は HA の公理全て（ただし論理式に関する公理図式は HA でなく、EL の論理式についてのものに変更される。）に加えて、以下の公理を付け加えたものである。

1. 全ての数ソート用の変数記号 x と項 t, s に対して $Ap(\lambda x.t, s) = t[x/s]$.
2. $r(t, f, \bar{0}) = t$.
3. $r(t, f, suc(t')) = f(\langle r(t, f, t'), t' \rangle)$.
4. 全ての $\forall, \exists$ を含まない論理式 ϕ に対して、

$$\forall x \exists y.\phi(x, y) \to \exists \alpha : \text{function sort} \forall x.\phi(x, \alpha(x))].$$

ただしここで、α は $FV(\phi)$ に含まれないように取るものとする。この公理を特に量化子なし選択公理 (quantifier-free choice) という。

注. 3.2.5. 以降 $\neg(x = y)$ を $x \neq y$ と、$x = y \vee x < y$ を $x \leq y$ と略記する。

補題. 3.2.6. HA 及び EL において

$$\forall x.[suc(x) \neq \bar{0}]$$

証明)

原始再帰関数

$$iszero?(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

を考えると、

$$suc(x) = \bar{0} \Rightarrow iszero?(suc(x)) = iszero?(\bar{0}) \Rightarrow \bar{1} = \bar{0} \Rightarrow \perp$$

□

補題. 3.2.7. HA 及び EL において

$$\forall x, y.[suc(x) = suc(y) \to x = y]$$

従って

$$\forall x, y.[suc(x) = suc(y) \leftrightarrow x = y]$$

証明)

両辺に前者関数を適用すればよい。 □

補題. 3.2.8. HA 及び EL において

$$\forall x, y.[x = y \vee x \neq y]$$

証明)

x に関して帰納法を使う。

$x = \bar{0}$ の時は、

$$y = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} = y \Rightarrow \bar{0} = y \vee \bar{0} \neq y$$

および、

$$y = suc(z) \Rightarrow \bar{0} \neq y \Rightarrow \bar{0} = y \vee \bar{0} \neq y$$

より y に関する帰納法によって成り立つ。

$x = suc(z)$ の時は、

$$y = \bar{0} \Rightarrow x \neq y \Rightarrow x = y \vee x \neq y$$

および、

$$y = suc(z') \Rightarrow x = y \leftrightarrow z = z' \Rightarrow x = y \vee x \neq y$$

（二つ目の含意で帰納法の仮定を用いた）より、y に関する帰納法によって成り立つ。

全体で x に関する帰納法が成立して所望が得られる。 □

補題. 3.2.9. HA 及び EL において

$$\forall x, y.[x < y \vee x = y \vee y < x]$$

証明)

上の補題と同様に二回帰納法を使う事を考えればできる。 □

注. 3.2.10. 以下の議論は EL で形式化されることを意図して行う。そこで以下では **Fml.**($\mathfrak{L}$) の $\mathfrak{L}$ を省略して、$\mathfrak{L}$ として EL の言語を取ったことにする。言語を明示せずに論理式と言った場合も同様である。

また EL には集合ソートや部分関数ソート、多変数関数ソートが存在しないため以下のようにする。

集合とは論理式による図式であるとする。$x \in A$ と書いたとき、実際には論理式と変数記号の組 (A, a) に対して $A[a := x]$ であるという事のエイリアスである。集合を渡る量化は EL の体系内で扱うのではなくメタに全ての論理式をわたる図式やある性質を満たす論理式の存在を主張しているものとする。

例えば $\forall A \subset \omega.[\phi(A)]$ は、「$\phi(A)$（ただし $x \in A$ を $A[a := x]$ と読み替える。以下同じ。）が全ての論理式 A で成り立つ。」という定理図式を、$\forall A \subset \omega.[\forall B \subset \omega.[\phi(A, B)] \to \exists C \subset \omega.[\psi(A, C)]]$ は、「任意の論理式 A について、$\phi(A, B)$ が全ての論理式 B について成り立つ定理図式であるとき、$\psi(C)$ を満たすような論理式 C が存在する。」というメタ定理を意味する。

計算可能部分関数 $f(\vec{x}) = g(\mu z.[h(z, \vec{x}) = 0])$（ここに g, h は原始計算可能関数である。これは Kleene の標準形定理による表示である。）は実際にはそのグラフ

$$A(\vec{x}, y) := \exists z.[h(z, \vec{x}) = 0 \wedge \forall z' < z.\neg h(z, \vec{x}) \wedge g(z) = y]$$

によって扱い $f(\vec{x}) = y$ は $A(\vec{x}, y)$ のエイリアスだとする。ここで A の定義の [] 内は原始計算可能関数によって記述できるから EL の量化子のない論理式であることに注意せよ。

また多変数関数を扱うには Cantor の対関数を用いて $f(\vec{x})$ を $f(\langle \vec{x} \rangle)$ の略記と定める。

このとき Cantor の対関数が全単射であることが EL で証明されなければならないが省略する。

補題. 3.2.11. EL で全域性が証明できる計算可能関数は EL の関数オブジェクトとなる。

証明)

EL で全域性が証明できる計算可能関数を任意に取って $f(\vec{x})$ とする。

Kleene の標準形定理によれば

$$f(\vec{x}) = g(\mu y.[h(y, \vec{x}) = 0])$$

(where g, h are primitive recursive.)

と書ける。

ここで

$$A(\vec{x}, y) :\iff h(y, \vec{x}) = 0 \wedge \forall y' < y.\neg h(y', \vec{x})$$

を考える。これは原始再帰的な述語だから EL の関数記号にこれを判定するものがあり、したがってとくに量化子のない論理式で表現できる。また f の全域性の EL での証明可能性から各 x について必ず $A(\vec{x}, y)$ を満たす y の存在が EL 内で証明できる。

したがって量化子なし選択公理から $A(\vec{x}, y)$ の選択関数 f' がとれる。

g も原始再帰関数だから EL 内の関数オブジェクトであり、$f = \lambda x.g(f'(x))$ とすれば所望を得た。 □

3.3 非構成的原理

直観主義論理では古典論理での定理の一部が証明できない。

従って、直観主義論理上で数学を行う場合、古典的な定理の一部が証明できなくなるのだが、その場合、その定理が「どの程度直観主義論理から離れている」か、の指標として古典論理上の定理のうち、何を仮定すればその定理が証明できるか、あるいはその定理から古典論理上の定理のうち何が証明できるかを分析するという事が行われる。このような分析の事を構成主義逆数学的な分析と呼ぶ。

そこで本節では古典論理上で証明できるが、直観主義論理上では証明できない命題の一部を見ていこう。

定義. 3.3.1 (排中律)**.** 全ての論理式 ϕ に関する図式

$$\phi \vee \neg\phi$$

を排中律 (law (principle) of excluding middle, LEM, PEM) と呼ぶ。排中律は古典論理では証明可能な命題であるにもかかわらず、直観主義論理では証明可能でない。

ϕ が特定の論理式 ϕ のとき、

$$\phi \vee \neg\phi$$

（ただし自由変数について全称閉包を取ったものを指すこともある。）が成立するならば、A に関する排中律が成立するという事にし、このように制限された排中律を ϕ-LEM と書く。前述したように我々は集合を論理式だとみなすから、$A \subset \omega$ に対して A-LEM のようにも書く。

また $\mathcal{C}$ を **Fml.** の部分集合とすると、$\mathcal{C}$ 内の任意の論理式 ϕ に対して、

$$\phi \vee \neg\phi$$

が成立するとき、$\mathcal{C}$ に関する排中律が成立するという事にし、こちらを $\mathcal{C}$-LEM と書く。

定義. 3.3.2 (二重否定除去)**.** 全ての論理式 ϕ に関する図式

$$\neg\neg\phi \to \phi$$

を二重否定除去 (double negation elimination, DNE) と呼ぶ。二重否定除去も排中律と同じく古典論理では証明可能な命題であるにもかかわらず、直観主義論理では証明可能で

ない。[*2]

また二重否定除去についても、特定の ϕ や、**Fml.** の特定の部分集合 $\mathcal{C}$ からとった ϕ に関する、制限された二重否定除去 A-DNE、$\mathcal{C}$-DNE を考える。

定義. 3.3.3 (弱排中律)**.** 全ての論理式 ϕ に関する図式

$$\neg\phi \vee \neg\neg\phi$$

を弱排中律 (weak law of wxcluding middle, WLEM) と呼ぶ。弱排中律も排中律と同じく古典論理では証明可能な命題であるにもかかわらず、直観主義論理では証明可能でない。

また弱排中律についても、特定の ϕ や、**Fml.** の特定の部分集合 $\mathcal{C}$ からとった ϕ に関する、制限された弱排中律 ϕ-WLEM、$\mathcal{C}$-WLEM を考える。

定義. 3.3.4 (De Morgan の法則)**.** 全ての論理式 ϕ, ψ に関する図式

$$\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$$

を De Morgan の法則 (De Morgan's law, DML) という。De Morgan の法則も二重否定除去や排中律と同じく古典論理では証明可能な命題であるにもかかわらず、直観主義論理では証明可能でない。

また De Morgan の法則についても、特定の ϕ, ψ や、**Fml.** の特定の部分集合 $\mathcal{C}$ からとった ϕ, ψ に関する、制限された De Morgan の法則 ϕ, ψ-DML、$\mathcal{C}$-DML を考える。

定理. 3.3.5. ある論理式 ϕ(resp.**Fml.** の特定の部分集合 $\mathcal{C}$) に対して排中律が成立するならば、ϕ(resp.$\mathcal{C}$) に対して二重否定除去が成立する。

証明)

ϕ に関する主張は実際に証明図を書けばわかる。

[*2] しかしながら

$$\phi \rightarrow \neg\neg\phi$$

および、

$$\neg\neg\neg\phi \rightarrow \neg\phi$$

は直観主義論理上でも証明可能である。これらの事実はそれぞれ二重否定導入、三重否定除去等と呼ばれ、しばしば利用される。

$$\dfrac{\dfrac{[\phi](1) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\neg\phi](2) \qquad [\neg\phi](1)}{\bot}\,(\to E)}{\phi}\,(EFQ) \qquad \phi\vee\neg\phi}{\phi\ (1)}\,(\vee E)}{\neg\neg\phi\to\phi\ (2)}\,(\to I)$$

$\mathcal{C}$ に関する主張は、論理式 ϕ を任意に $\mathcal{C}$ から取ることで上に帰着する。 □

注. 3.3.6. 本稿では証明を扱わないが、**定理. 3.3.5.** の逆は成り立たないことが知られている。ただし、全ての論理式に対する二重否定除去を認めるならば（即ち $\mathcal{C} = \mathbf{Fml.}$ ならば)、全ての論理式（即ちクラス Fml）に対する排中律は導かれ、それは論理を古典論理に変更することに他ならない。

定理. 3.3.7. ある論理式 ϕ(resp.**Fml.** の特定の部分集合 $\mathcal{C}$) に対して二重否定除去と弱排中律の両方が成立するならば、ϕ(resp.$\mathcal{C}$) に対して排中律が成立する。

証明)

明らかである。 □

定理. 3.3.8. ある論理式 ϕ, ψ(resp. ある論理式の部分集合 $\mathcal{C}$) に対して排中律が成立するならば、$\phi \diamond \psi$(ここで $\diamond \in \{\wedge, \vee, \to\}$)(resp.$\mathcal{C}$ の命題結合子に関する閉包) に対しても排中律が成立する (従って二重否定除去も成立する)。

証明) 体系内で証明図を書くだけなので省略する。

補題. 3.3.9. $\phi, \psi \in \mathbf{Fml.}$ とする。直観主義論理上以下の同値が成り立つ。

$$\neg\neg(\phi\wedge\psi) \iff \neg(\neg\phi\vee\neg\psi)$$

証明)

(⇒)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg(\phi\wedge\psi)](4) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi\vee\neg\psi](3) \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi\wedge\psi](2)}{\phi} \qquad [\neg\phi](1)}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi\wedge\psi](2)}{\psi} \qquad [\neg\psi](1)}{\bot}}{\bot(1)}}{\neg(\phi\wedge\psi)(2)}}{\bot}}{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)(3)}}{\neg\neg(\phi\wedge\psi)\to\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)(4)}$$

(⇐)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)](4) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)](4) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\wedge\psi)](3) \qquad \dfrac{[\phi](1) \qquad [\psi](2)}{\phi\wedge\psi}}{\bot}}{\neg\phi(1)}}{\neg\phi\vee\neg\psi}}{\bot}}{\neg\psi(2)}}{\neg\phi\vee\neg\psi}}{\bot}}{\neg\neg(\phi\wedge\psi)(3)}}{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)\to\neg\neg(\phi\wedge\psi)(4)}$$

□

定理．3.3.10. 論理式 ϕ, ψ（resp. ある論理式の部分集合 $\mathcal{C}$）に排中律が成り立つとき、ϕ, ψ（resp.$\mathcal{C}$）に関する De Morgan の法則とその変種

1. $$\neg(\phi\wedge\psi) \iff \neg\phi\vee\neg\psi$$

2. $$\neg(\neg\phi\wedge\neg\psi) \iff \phi\vee\psi$$

が成り立つ。

証明)

定理．3.3.5. および**定理．3.3.8.** によって、$\{\phi, \psi\}$ の命題論理結合子による閉包において排中律及び二重否定除去が成り立つことに注意せよ。

(1)

$$\neg(\phi\wedge\psi) \iff \neg\neg\neg(\phi\wedge\psi) \iff \neg\neg(\neg\phi\vee\neg\psi) \iff \neg\phi\vee\neg\psi$$

二番目の同値は直前の補題による。

(2)

直ちに従う。 □

系．3.3.11. 量化も命題変数もない論理式に対して、排中律、二重否定除去、De Morgan の法則が成り立つ。

定義. 3.3.12 (制限された全知の原理)**.** 直観主義論理上で、以下の原理を制限された全知の原理 (LPO) と呼ぶ。

$$\forall\vec{x}.[\phi(\vec{x}) \vee \neg\phi(\vec{x})] \to (\exists\vec{x}.\phi(\vec{x}) \vee \neg\exists\vec{x}.\phi(\vec{x}))$$

構成主義算術の体系では一階の対象に関する等号判定（特にゼロ判定）における排中律は、三者択一律より従う定理であったこと及び、逆に ϕ に関する排中律が成り立つような任意の述語 A に対して

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \phi(\vec{x})) \\ 1 & (\text{if } \neg\phi(\vec{x})) \end{cases}$$

のようにして $\alpha(\vec{x}) = 0 \iff \phi(\vec{x})$ であるような関数 α が対応することから、(LPO) は以下のより簡潔な表現と同値であり、こちらも (LPO) と呼ぶ。

$$\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0] \vee \neg\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0] \tag{3.1}$$

また (3.1) で更に定義中の α を関数空間の特定の部分集合 $\mathcal{D}$ からとったものを考えることもある。これは $(\mathrm{LPO})_{\mathcal{D}}$ で表現される。

例えば $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ は**定理. 2.6.36.** から r.e. 集合に対する帰属関係に関する排中律であるとわかる。

定義. 3.3.13 (Markov の原理)**.** 直観主義論理上で、以下の原理を Markov の原理 (MP) と呼ぶ。

$$\forall\vec{x}.[\phi(\vec{x}) \vee \neg\phi(\vec{x})] \to (\neg\neg\exists\vec{x}.\phi(\vec{x}) \to \exists\vec{x}.\phi(\vec{x}))$$

(LPO) と同様に、(MP) も以下のより簡潔な表示を持つ。

$$\neg\neg\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0] \to \exists\vec{x}[\alpha(\vec{x}) = 0]$$

また更に同値な以下の表現も持つ。

$$\neg\forall\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) \neq 0] \to \exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]$$

(LPO) と同様に、第二の定義の中の α を関数空間の特定の部分集合 $\mathcal{D}$ からとったものを考えることもある。これは $(\mathrm{MP})_{\mathcal{D}}$ で表現される。

(LPO) の時と同様にして、$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ は r.e. 集合に対する帰属関係に関する二重否定除去であるとわかる。

第 4 章

直観主義論理上での再帰理論

本章では直観主義論理上で再帰理論を展開することを試みる。

以下に見るように古典論理上での再帰理論において定義された諸概念は直観主義論理上では少なくとも明らかには同値ではない多くの概念に分離するため、決してこれは自明な行為ではない。

4.1　特性関数と計算可能集合

本節では直観主義論理上での再帰理論における計算可能集合、およびそれを定義するのに必要な特性関数について、古典論理では同値だが、直観主義論理上ではそうではないいくつかの定義が可能であることを指摘し、それらについて性質を議論する。

$A \subset \omega$ の特性関数であることと古典的には同値な、部分関数についての条件として以下のようなものが考えられる。

定義. 4.1.1. 部分関数 f が $A \subset \omega$ の特性関数であることの定義として以下のようなものが考えられる。

1. f が $A \subset \omega$ の 1-特性関数であるとは、f は全域関数で、$\mathrm{Ran}(f) \subset \{0, 1\}$ かつ
$$x \in A \iff f(x) = 0$$
を満たすことである。
2. f が $A \subset \omega$ の 2-特性関数であるとは、f は全域関数で $\mathrm{Ran}(f) \subset \{0, 1\}$ かつ
$$(x \in A \to f(x) = 0) \wedge (x \in A^c \to f(x) = 1)$$
を満たすことである。

3. f が $A \subset \omega$ の 3-特性関数であるとは、f は部分関数で、$\mathrm{Dom}(f) \supset A \cup A^c$ を満たし、$\mathrm{Ran}(f) \subset \{0,1\}$ かつ

$$x \in A \iff f(x) \downarrow = 0$$

を満たすことである。

4. f が $A \subset \omega$ の 4-特性関数であるとは、f は部分関数で、$\mathrm{Ran}(f) \subset \{0,1\}$ かつ

$$(x \in A \to f(x) \downarrow = 0) \wedge (x \in A^c \to f(x) \downarrow = 1)$$

を満たすことである。

1-特性関数であるという性質が上記の中で最も強いのは容易にわかる。

逆に 4-特性関数であるという性質はこれらの中で最も弱い。3-特性関数が 4-特性関数であることは少し注意を要する。

f が A の 3-特性関数であるとき、$x \in A^c$ とする。

条件から $f(x)\downarrow$ だから $c = f(x)$ とする。すると $c = 0 \vee c = 1$ である。

$c = 0$ とすると $x \in A$ となり矛盾。

だから $c = 1$ である。

よって f は A の 4-特性関数である。この証明で $f(x) = 0$ でないことから直に $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = 1$ と議論できないことに注意せよ。f は全域ではないからである。

またある部分関数が A の 2-特性関数であり、かつ 3-特性関数であれば 1-特性関数であることにも注意せよ。

一般には 1-特性関数の定義を単に特性関数の定義としている場合が多い。

定理. 4.1.2. $A \subset \omega$ について A-DNE ならば A の 4-特性関数は 3-特性関数。特に 2-特性関数は 1-特性関数。

証明)

$x \in A \to f(x) = 0$ は良い。

$$f(x) = 0 \Rightarrow \neg(f(x) = 1) \Rightarrow x \in (A^c)^c \to x \in A$$

最後の含意で A-DNE を用いた。

定義. 4.1.3. $A \subset \omega$ が i-計算可能集合 $(i = 1, 2, 3, 4)$ であるとは、A の i-特性関数であって計算可能なものが存在することである。

定理. 4.1.4. i-計算可能集合 $(i = 1, 2, 3, 4)$ は有限合併に閉じている。

証明)

i-計算可能集合 A, B をとり、それぞれの i-特性関数のインデックスを e, f とする。

今（部分）計算可能関数 g を以下で定める。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists s.[\varphi_{e,s} = 0 \vee \varphi_{f,s} = 0]) \\ 1 & (\text{if } \exists s.[\varphi_{e,s} = \varphi_{f,s} = 1]) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

$x \in A \cup B$ と仮定する。

$x \in A \vee x \in B$ だから、$\varphi_e(x) \downarrow = 0 \vee \varphi_f(x) \downarrow = 0$、よって $g(x) \downarrow = 0$。

$x \in (A \cup B)^c$ と仮定する。

$\neg(x \in A \vee x \in B) \to x \notin A \wedge x \notin B$ だから $\varphi_e(x) \downarrow = \varphi_f(x) \downarrow = 1$、よって $g(x) \downarrow = 1$。

$i = 1, 3$ のとき、$g(x) \downarrow = 0$ と仮定する。

$g(x) \downarrow = 0 \to \varphi_e(x) \downarrow = 0 \vee \varphi_f(x) \downarrow = 0 \to x \in A \vee x \in B \to x \in A \cup B$。

$i = 1, 2$ のとき、φ_e, φ_f は全域だから、g も全域である。

よってこれは $A \cup B$ の i-特性関数である。 $\square$

定理．4.1.5. 1-計算可能集合への帰属関係を表す論理式の集合を **Rec.Fml.** と書くことにする。**Rec.Fml.** の命題論理結合子による閉包 $\overline{\textbf{Rec.Fml.}}$ 上で、排中律、二重否定除去、De Morgan の法則が成り立つ。

証明)

1-計算可能集合 A に対してその 1-特性関数 f をとると、f の全域性により f は関数オブジェクトとして扱え、従って $f(x)$ は項として扱える。$x \in A \iff f(x) = 0$ と、$\overline{Rec}$ の論理式を同値な量化のない算術論理式に置き換えることができる。量化のない算術論理式では上で挙げた規則が成立していたのだった。 $\square$

系．4.1.6. 1-計算可能集合は有限合併、有限交差、補集合に閉じている。

注．4.1.7. 注意すべきことに**定理．4.1.4.** と類似の証明を i-計算可能集合 $(i = 2, 3, 4)$ の有限交差について単純に用いようとすれば失敗する。これは補集合についての議論に際して、$\neg(x \in A \wedge x \in B)$ は $x \notin A \vee x \notin B$ を導かないからである。3-計算可能性については $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ が $\neg(\varphi_f(x) \downarrow = \varphi_g(x) \downarrow = 0)$ とできるが、今 f, g が全域でないため**定理．4.1.5.** の場合と異なり、$\varphi_f(x) = 0 \vee \varphi_f(x) = 1(\text{resp.}\varphi_g(x) = 0 \vee \varphi_g(x) = 1)$ などとはできない。i-計算可能集合 $(i = 2, 3, 4)$ が交差に閉じるかどうか、あるいはそれらが交差に閉じるという命題についての構成的逆数学的分析は今のところ未解決である。

系. 4.1.8. $A \subset \omega$ が 1-計算可能ならば、A の 4-特性関数 (従って 2-特性関数および 3-特性関数) は全て 1-特性関数。

証明)

定理. 4.1.5. から直ちに従う。 □

定理. 4.1.9. $A \subset \omega$ の i-特性関数（$i = 1, 2, 3, 4$）は $f(x) =\downarrow 1 \iff x \in A^c$ を満たす。

証明)

$i = 4$ の時示せば十分である。

$x \in A^c \to f(x) \downarrow= 1$ は定義より従う。

$$f(x) \downarrow= 1 \Rightarrow \neg(f(x) \downarrow= 0) \Rightarrow x \in A^c$$

となるので $f(x) = 1 \to x \in A^c$ も成り立つ。 □

定理. 4.1.10. $A \subset \omega$ の 3-特性関数の定義域は実際 $A \cup A^c$ 丁度である。

証明)

$$f(x) \downarrow \Rightarrow f(x) \downarrow= 0 \vee f(x) \downarrow= 1 \Rightarrow x \in A \vee x \in A^c.$$

□

上のいくつかの定理とこの定理を合わせて以下のような非形式的な説明ができる。

A か A でないかが決められるような集合に対して A であることと 0(“Yes”) を返すことが同値になり、非 A であることと 1(“No”) を返すことが同値になるように定めたのが 1-特性関数である。

必ずしもそれが決められない集合に対して、非 A であることと (“No”) を答えることとは同値だが、A であるときだけでなくどちらともいえないときにも (“Yes”) と答えてしまうのが 2-特性関数である。

A であることと (”Yes”)、A でないことと (“No”) が正確に同値だが、どちらともいえない時に停止しなくなってしまうのが 3-特性関数である。

A でないことが (“No”) と同値であり、少なくとも A ならば (“Yes”) を返すことが保証されているが、どちらともいえないときの挙動は停止しなくとも (“Yes”) を返してもよく、規定されていないのが 4-特性関数である。

定理．4.1.11.

$$[A \subset \omega \text{ が 2-計算可能。}] \iff [A^c \text{ は 1-計算可能。}]$$

証明)

($\Leftarrow$)

A^c の 1-特性関数を f とし $g(x) = 1 - f(x)$ を考える。

$$x \in A \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$x \in A^c \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 1$$

より g は A の 2-特性関数。

($\Rightarrow$)

A の計算可能な 2-特性関数を一つとり f とする。$g(x) = 1 - f(x)$ とすると

$$g(x) = 0 \iff f(x) = 1 \iff x \in A^c$$

。よって g は A^c の 1-特性関数。 □

系．4.1.12. 2-計算可能集合への帰属関係に対して弱排中律が成り立つ。

定理．4.1.13 (Turing の停止性問題)**.** K は 4-計算可能でない。

証明)

K の計算可能な 4-特性関数 f が取れたと仮定する。

$$d(x) = \begin{cases} \uparrow_H & (\text{if } x = 0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

と置き、$d \circ f$ のインデックスを e とおく。

$e \in K$ と仮定すると、

$$f(e) = 0 \to \varphi_e(e) = d \circ f(e) \uparrow \to e \notin K$$

となって矛盾。

故に $e \in K^c$ だが、今度は

$$f(e) = 1 \to \varphi_e(e) = d \circ f(e) \downarrow \to e \in K$$

となって矛盾。

従って、そのような計算可能な 4-特性関数は存在しない。

以下は非構成的原理を仮定して得られる結果やそれに対する逆数学的結果である。

定理. 4.1.14. $A \subset \omega$ が 3-計算可能かつ A-DNE ならば、A^c は 3-計算可能。

証明) A の計算可能な 3-特性関数を一つとり f とする。$g(x) = 1 - f(x)$ とすると

$$g(x) = 0 \iff f(x) = 1 \iff x \in A^c.$$

また

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f) = A \cup A^c = (A^c)^c \cup A^c$$

(最後の等号は A-DNE による。)。よって g は A の 3-特性関数。 □

定理. 4.1.15. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ ならば、$A \subset \omega$ の 4-特性関数になるような φ_e は全域で、従って A の 2-特性関数となる。特に部分計算可能な A の 3-特性関数 f は A の 1-特性関数となる。

証明)

一般に $A \subset \omega$ について

$$\neg\neg(x \in A \cup A^c) \tag{4.1}$$

である。

仮定から

$$\begin{aligned} x \in A \cup A^c &\Rightarrow \varphi_e(x)\downarrow \\ &\Rightarrow \exists s.T(e, x, s) \end{aligned}$$

だから二重対偶を取って $\neg\neg(x \in A \cup A^c) \to \neg\neg\exists s.T(e, x, s)$ を得、(4.1) と合わせて $\neg\neg\exists s.T(e, x, s)$ を得る。$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を適用して $\neg\neg\exists s.T(e, x, s) \iff \exists s.T(e, x, s) \iff \varphi_e(x)\downarrow$ となり、x は任意だったから全域性を得た。 □

定理. 4.1.16. 任意の 4-計算可能な集合 A に対する、4-特性関数 φ_e が全て全域（即ち 2-特性関数）になるならば、$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ が成立する。

証明)

$\neg\neg\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]$ たるような原始計算可能関数 α を任意に取る。今

$$A := \{y : \exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]\}$$

$$\varphi_e(y) := \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

と定める。

ここで仮定から $A^c = \{y : \neg\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]\} = \emptyset$ であること、及びそのことから φ_e が 3-特性関数であり、とくに 4-特性関数であることに注意する。

仮定から φ_e は全域で特に $\varphi_e(0)\downarrow$ だから $\exists\vec{x}.[\alpha(\vec{x}) = 0]$ が従う。 □

注意すべきことに、上の定理及びこの定理は「任意の 4-計算可能集合は 2-計算可能集合である。」という主張が $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ と同値だということではない。

より強い「任意の計算可能な 4-特性関数は、それ自体が実は全域 (2-特性関数) になっている。」という主張が $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ と同値なのである。

すなわち「計算可能な 4-特性関数を持つ集合は計算可能な 2-特性関数も持つ。」のではなく、「計算可能な 4-特性関数は、それ自体が全域になる。」という主張について述べている。

4.2 r.e. 集合

本節では直観主義論理上での再帰理論における r.e. 集合に関する定義、定理について見ていく。

定義. 4.2.1. r.e. 集合の定義は古典論理上の場合と同様に、ある Turing 機械 e によって $A = W_e$ とできること、あるいは同じことだが、ある計算可能部分関数の定義域となる集合とする。

定理. 4.2.2. 以下は同値。

1. $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$
2. 任意の r.e. 集合 A について、

$$[A \text{ は元を持つ。}] \vee A = \emptyset$$

が成り立つ。

証明)

(1.⇒2.)

$\forall e.[x \in W_e \iff \exists s.T(e,x,s)]$ と**定理. 2.6.34.** から (2) は $\exists x.[x \in W_e]$ は $\exists x.[h(x) = 0]$(where h is primitive recurisive.) の形に書けるから良い。

(2.⇒1.)

原始再帰的な α による $\exists x.[\alpha(x) = 0]$ に対して、$\varphi_e(x) = \mu y.[\alpha(y) = 0]$ を考えると $\exists x.[x \in W_e] \iff \exists x.[\alpha(x) = 0]$ なのでわかる。 □

定理．4.2.3. 以下は同値。

1. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$
2. 任意の r.e. 集合 A について、

$$A \neq \emptyset \to [A \text{ は元を持つ。}]$$

が成り立つ。

証明) 上の定理と同様である。 $\square$

古典論理上では**定理．2.6.39.** から

$$[A \subset \omega \text{ が r.e. である。}] :\iff (A = \emptyset \vee \exists f \in \mathbf{Prim}.\mathbf{Rec}..[A = \mathrm{Ran}(f)])$$

という r.e. 集合の同値な別定義も可能である。そこで直観主義論理上でも

$$[A \subset \omega \text{ が r.e.' である。}] :\iff (A = \emptyset \vee \exists f \in \mathbf{Prim}.\mathbf{Rec}..[A = \mathrm{Ran}(f)])$$

と定義することを試してみたいかもしれない。しかしこの r.e.' は古典論理上と異なり**定義．4.2.1.** で定義された r.e. と同値な定義とはならない。

以下ではそれを証明する。

定理．4.2.4. 上で定義された r.e' は r.e. の同値な定義とならない。

実際、

$$[A \text{ が r.e.' である。}] \Rightarrow [A \text{ は r.e. である。}] \tag{4.2}$$

は直観主義論理上で証明できるが、

$$[A \text{ が r.e. である。}] \Rightarrow [A \text{ は r.e.' である。}] \tag{4.3}$$

は証明できない。実は (4.3) 式は $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ と同値である。

証明)

((4.2) の証明)

$A = \emptyset$ は r.e. 集合である。

また $\exists f \in \mathbf{Prim}.\mathbf{Rec}..[A = \mathrm{Ran}(f)]$ のとき、**定理．2.6.39.** の $(\Leftarrow)$ の証明と同様の証明が直観主義論理上でも成り立つので、やはり r.e. 集合になる。

((4.3)$\Rightarrow$ $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ の証明)

$\mathrm{Ran}(f)$ は元を持つ集合だから、(4.3) は

$$[A \text{ が r.e. である。}] \to ([A \text{ が元を持つ。}] \vee A = \emptyset)$$

を意味する。**定理．4.2.2.** によると、これは $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ と同値だった。

($(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}} \Rightarrow (4.3)$ の証明)

定理．4.2.2. によると、$(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を仮定すれば、任意の r.e. 集合 A について

$$[A \text{ が r.e. である。}] \to ([A \text{ が元を持つ。}] \vee A = \emptyset)$$

となる。あとは

$$[A \text{ は r.e. でかつ元を持つ。}] \to f \in \mathbf{Prim.Rec.}.[A = \mathrm{Ran}(f)]$$

を示せばよいが、これは**定理．2.6.39.** の $(\Rightarrow)$ と同様の証明が直観主義論理上でも成立する。 □

定理．4.2.5. 1-計算可能集合及び 3-計算可能集合は r.e.。

証明)

i-計算可能集合 $A(i = 1, 3)$ の計算可能な i-特性関数を f とする。

$$g(x) = \begin{cases} \uparrow_H & (\text{if } x = 1) \\ 0 & (\text{if } x \neq 1) \end{cases}$$

と置き、$\varphi_e = g \circ f$ とすれば $W_e = A$ である。 □

定理．4.2.6. i-計算可能集合 $(i = 1, 2, 3, 4)A$ の補集合 A^c は r.e. である。

証明)

A の計算可能な $i(i = 1, 2, 3, 4)$-特性関数を f とする。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x = 1) \\ \uparrow_H & (\text{if } x \neq 1) \end{cases}$$

と置き、$\varphi_e = g \circ f$ とすれば

$$x \in W_e \iff \varphi_e(x)\downarrow \iff g \circ f(x)\downarrow \iff f(x)\downarrow = 1 \iff x \in A^c$$

となる（最後の同値は**定理．4.1.9.** による)。 □

定理．4.2.7.

$$[A \text{ と } A^c \text{ が共に r.e. である。}] \iff [A \text{ は 3-計算可能である。}]$$

証明)

$(\Rightarrow)$

$A = W_e, B = W_f$ とする。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\text{if } \exists s.T(e,x,s)) \\ 0 & (\text{if } \exists s.T(f,x,s)) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

とすると、これは定義より A の 3-特性関数である。

（$\Leftarrow$)

既に見た。 □

この定理は**定理．2.6.43.** の直観主義論理上での対応物であると言える。

系．4.2.8. K^c は r.e. ではない。

系．4.2.9. K^c は 4-計算可能ではない。

証明)

K^c-DNE は直観主義論理上でも定理だから、もし K^c が 4-計算可能ならば 3-計算可能で、従って r.e. となるので矛盾。従って K^c は 4-計算可能ではない。 □

系．4.2.10. 2 章で示した**定理．2.6.46.** や**系．2.6.47.** は直観主義論理上でも同様の方法で証明できる。注意すべきは直観主義論理上では集合が Δ_1 添字を持つのは 3-計算可能な時であるが、より強い条件である 1-計算可能な集合にのみ Δ_1 添字を生成する ψ すら、この議論によって存在を許されないという事である。

4.3 分離可能性による計算可能性の分析

本節では分離可能性という概念を導入し、それによって i-計算可能性 $(i = 1, 2, 3, 4)$ に同値な別定義を与える。

定義．4.3.1. 全体集合 A を固定し、$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ とする。

1. 二つの集合 $X, Y \subset A$ が $\mathcal{C}$-第一種分離可能 ($\mathcal{C}$-type-1 separable) とは以下を満たす X', Y' が存在することであり、このような X', Y' を $\mathcal{C}$-第一種分離と呼ぶ。
   (a) $X', Y' \in \mathcal{C}$.
   (b) $X \subset X', Y \subset Y'$.
   (c) $X' \cap Y' = \emptyset$.
2. 二つの集合 $X, Y \subset A$ が $\mathcal{C}$-第二種分離可能 ($\mathcal{C}$-type-2 separable) とは以下を満た

す X', Y' が存在することであり、このような X', Y' を $\mathcal{C}$-第二種分離と呼ぶ。。

(a) $X', Y \in \mathcal{C}$.

(b) $X \subset X', Y \subset Y'$.

(c) $X' \cap Y = Y' \cap X = \emptyset$.

3. 二つの集合 $X, Y \subset A$ が $\mathcal{C}$-第零種分離可能 ($\mathcal{C}$-type-0 separable) とはその二つが交わらず、$X, Y \in \mathcal{C}$ であることである。

容易にわかるように $\mathcal{C}$-第二種分離可能性は $\mathcal{C}$-第一種分離可能性よりも弱く、$\mathcal{C}$-第一種分離可能性は $\mathcal{C}$-第零種分離可能性より弱い。

分離性は位相空間の分離公理などに自然に現れる概念である。

例えば T_1 分離公理は位相空間上の相異なるシングルトンが開集合第二種分離可能であることを主張しており、Hausdorff 分離公理は相異なるシングルトンが開集合第一種分離可能であることを主張している。そして良く知られた事実は Hausdorff 分離公理がシングルトンの閉集合第零種分離可能性と同値であることを主張している。

補題. 4.3.2. $X, Y \subset \omega$ について

$$[X \text{ と } Y \text{ は 1-計算可能第一種分離可能。}] \iff [X \text{ と } Y \text{ は 1-計算可能第二種分離可能。}]$$

証明)

示すべきは ($\Leftarrow$) のみである。

X と Y の 1-計算可能第二種分離 X', Y' をとる。

$X', (X')^c$ は X, Y の 1-計算可能第一種分離になっている。 □

補題. 4.3.3. $X, Y \subset \omega$ について

$$[X \text{ と } Y \text{ は r.e. 第一種分離可能。}] \iff [X \text{ と } Y \text{ は r.e. 計算可能第二種分離可能。}]$$

証明)

示すべきは ($\Leftarrow$) のみである。

X と Y の r.e. 第二種分離 $X' = W_e, Y' = W_f$ をとる。

e, f に**定理. 2.6.42.** の ϵ, δ を適用し、同定理の条件を満たす r.e. な X'', Y'' をとれば、$X \subset X' \setminus Y'$ より $X \subset X''$、同様に $Y \subset Y''$。よって X'', Y'' は X, Y の r.e. 第一種分離である。 □

定理. 4.3.4. $A \subset \omega$ について

1.
$$[A \text{ と } A^c \text{ は 1-計算可能第零種分離可能。}] \iff [A \text{ は 1-計算可能。}]$$

2.
$$[A \text{ と } A^c \text{ は r.e. 第零種分離可能。}] \iff [A \text{ は 3-計算可能。}]$$

証明)
既にみた事から従う。 □

定理. 4.3.5. $A \subset \omega$ について

$$[A \text{ と } A^c \text{ は 1-計算可能第一種分離可能。}] \iff [A \text{ は 2-計算可能。}]$$

証明)
$(\Leftarrow)$
A の 2-特性関数 f をとり、$A' = f^{-1}[0]$ とおく。$A', (A')^c$ が A と A^c の 1-計算可能第一種分離になる事を見る。
A' の 1-特性関数は f だから A' は 1-計算可能であり、$(A')^c$ はその補集合だから 1-計算可能である。
$(x \in A \to f(x) = 0) \wedge (x \in A^c \to f(x) = 1)$ だから $A \subset A' \wedge A^c \subset (A')^c$。
$(\Rightarrow)$
X, Y が A, A^c の 1-計算可能第一種分離だとする。X の 1-特性関数 f は

$$x \in A \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x \in A^c \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \notin X \Rightarrow f(x) = 1$$

となって A の 2-特性関数になる。 □

定理. 4.3.6. 集合 $A \subset \omega$ について

$$[A \text{ と } A^c \text{ は r.e. 第一種分離可能。}] \iff [A \text{ は 4-計算可能。}]$$

証明)
$(\Leftarrow)$
A の 4-特性関数 f をとり、$A' = f^{-1}[0], A'' = f^{-1}[1]$ とおく。A', A'' が A と A^c の r.e. 第一種分離になる事を見る。
まず**定理. 2.6.32.** より A', A'' は r.e.。
$(x \in A \to f(x) = 0) \wedge (x \in A^c \to f(x) = 1)$ より $A \subset A' \wedge A^c \subset A''$ だから、確かに A', A'' は A と A^c の r.e. 第一種分離である。

($\Rightarrow$)

W_e, W_f が A, A^c の r.e. 第一種分離だとする。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists s.T(e,x,s)) \\ 1 & (\text{if } \exists s.T(f,x,s)) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

と定めれば、

$$x \in A \Rightarrow x \in W_e \Rightarrow g(x) \downarrow= 0$$
$$x \in A^c \Rightarrow x \in W_f \Rightarrow x \Rightarrow g(x) \downarrow= 1$$

となって A の 4-特性関数になる。

4.4　多対一還元、一対一還元

本節では i-計算可能性 $(i = 1, 2, 3, 4)$ に対応して、還元の定義にも類似の四種類が考えられることを指摘する。

定義. 4.4.1 (還元)**.** 「計算可能部分関数 f が $A \subset \omega$ を $B \subset \omega$ に還元する」ことの定義として以下のようなものが考えられる。

1. f が A を B に 1-多対一還元するとは
$$[f \text{ は全域}] \wedge \forall x.[x \in A \iff f(x) \in B]$$
を満たすことである。
2. f が A を B に 2-多対一還元するとは
$$[f \text{ は全域}] \wedge \forall x.[(x \in A \to f(x) \in B) \wedge (x \in A^c \to f(x) \in B^c)]$$
を満たすことである。
3. f が A を B に 3-多対一還元するとは
$$\mathrm{Dom}(f) \supset A \cup A^c \wedge \forall x.[x \in A \to f(x) \in B \wedge x \in A^c \to f(x) \in B^c]$$
を満たすことである。
4. f が A を B に 4-多対一還元するとは
$$\forall x.[(x \in A \to f(x) \downarrow\in B) \wedge (x \in A^c \to f(x) \downarrow\in B^c)]$$
を満たすことである。

それぞれの定義を満たす部分関数を、A の B への 1-多対一還元関数のように呼ぶ。またその部分関数が単射であるとき、「多対一」を「一対一」と呼び変える。

これらの定義が計算可能性の定義たちと対応していることは容易に見て取れるであろう。実際計算可能性の定義の $f(x)=0$ を $f(x)\in B$、$f(x)=1$ を $f(x)\in B^c$ で置き換えたものがこの定義になっている。これらのうち、1-多対一還元 (resp. 一対一還元) が最も強く、4-多対一還元 (resp. 一対一還元) が最も弱い性質であるのも計算可能性の時と同じである。

3-多対一還元 (resp. 一対一還元) が 4-多対一還元 (resp. 一対一還元) を含意することを見るのに少し注意を要することも計算可能性の時と同じである。

f が A を B に 3-多対一還元 (resp. 一対一還元) させるとき、$x\in A^c$ とする。

条件から $f(x)\downarrow$ だから $c=f(x)$ とする。

ここで $c\in B$ と仮定すると矛盾するから $c\in B^c$ となる

よって f は A を B に 4-多対一還元 (resp. 一対一還元) させる。この証明で $f(x)\in B$ でないことから直に $f(x)\in B^c$ と議論できないことに注意せよ。f は全域ではないからである。

またある f が A の B への 2-多対一還元関数 (resp. 一対一還元) にも 3-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数にもなっているならば、実際には 1-多対一 (resp. 一対一還元) 還元関数になっている事にも注意せよ。

定義. 4.4.2 (還元可能性)**.** $A\subset\omega$ の $B\subset\omega$ への i-多対一還元関数が存在して計算可能になるとき、A は B に i-多対一還元可能であると言い、$A\leq_m^i B$ と書く。

同様に A の B への i-一対一還元関数が存在して計算可能になるとき、A は B に i-一対一還元可能であると言い、$A\leq_1^i B$ と書く。

定義. 4.4.3 (i-多対一次数、i-一対一次数)**.** $A,B\subset\omega$ が $A\leq_m^i B\wedge B\leq_m^i A(i=1,2,3,4)$ であるとき A と B は i-多対一同値 (many-to-one equivalence) であると言い、$A\equiv_m^i B$ と書く。$\equiv_m$ は $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係であり、その同値類を i-多対一次数 (many-to-one degree) と呼ぶ。

同様に $A\leq_1^i B\wedge B\leq_1^i A$ であるとき A と B は i-一対一同値 (one-to-one equivalence) であると言い、$A\equiv_1^i$ と書き、その同値類を i-一対一次数 (one-to-one degree) と呼ぶ。

補題. 4.4.4. $A\leq_m^1 B(\mathrm{resp.}A^c\leq_1^1 B)$ ならば $A^c\leq_m^1 B^c(\mathrm{resp.}A^c\leq_1^1 B^c)$ である。

証明)

明らかである。 □

定理．4.4.5. $\leq_c^i$ $(i=1,2,3,4, c=1,m)$ は推移的である。

証明)

$c=m$ の時から見る。

A が B に計算可能（部分）関数 f によって、B が C に計算可能（部分）関数 g によって、それぞれ多対一還元したとする。

$g \circ f$ が A を C に多対一還元させることを見る。

$$x \in A \Rightarrow f(x) \downarrow \in B \Rightarrow g \circ f(x) \downarrow \in C$$

$$x \in A^c \Rightarrow f(x) \downarrow \in B^c \Rightarrow g \circ f(x) \downarrow \in C$$

$i=1,3$ のとき

$$g \circ f(x) \downarrow \in C \Rightarrow f(x) \downarrow \in B \Rightarrow x \in A$$

$i=1,2$ のとき f, g は全域だから $g \circ f$ も全域。

$c=1$ のときは上記の議論にくわえ、単射（部分）関数の合成が単射なことを追加で確認すればよい。 □

定理．4.4.6. A-DNE かつ $A \leq_m^4 B$(resp.$A \leq_1^4 B$) ならば、$A \leq_m^3 B$(resp.$A \leq_1^3 B$)。特に A-DNE かつ $A \leq_m^2 B$(resp.$A \leq_1^2 B$) ならば、$A \leq_m^1 B$(resp.$A \leq_1^1 B$)。

証明)

A の B への計算可能 4-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数 f を取る。

$f(x) \downarrow \in B \rightarrow x \in A$ を示す。

$$f(x) \downarrow \in B \Rightarrow \neg(f(x) \downarrow \in B^c) \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow x \in A$$

最後の含意で A-DNE を用いた。 □

定理．4.4.7. 任意の $A \subset \omega$ に対して、$A \leq_1^2 (A^c)^c$。

証明)

恒等関数 id がこの帰着関数になることを示す。

$$x \in A \Rightarrow id(x) = x \in (A^c)^c$$

$$x \in A^c \Rightarrow id(x) = x \in A^c = ((A^c)^c)^c$$

系. 4.4.8. $A^c \leq_m^1 B$(resp.$A^c \leq_1^1 B$)(A^c-DNE は直観主義論理上でも定理だからこの仮定は 2-多 (resp. 一) 対一帰着と同値であることに注意。) ならば $A \leq_m^2 B^c$(resp.$A \leq_1^2 B^c$) を満たす。

証明)

$A^c \leq_{m(1)}^1 B \Rightarrow (A^c)^c \leq_{m(1)}^1 B^c \Rightarrow A \leq_1^2 (A^c)^c \leq_{m(1)}^2 B^c \Rightarrow A \leq_{m(1)}^2 B^c.$ □

定理. 4.4.9. 以下は同値。

1. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$
2. 全ての $A, B \subset \omega$ に対して、全ての A の B への部分計算可能な 4-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数 φ_e は全域で、従って 2-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数。
3. 部分計算可能な 3-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数 f は全域で、従って 1-多対一還元 (resp. 一対一還元) 関数。

証明)

定理. 4.1.15 及び**定理. 4.1.16** と同様である。 □

定理. 4.4.10. 集合 A が i-計算可能 ($i = 1, 2, 3, 4$) な集合 B に i-多対一還元するなら A は i-計算可能。

証明)

A の B への i-多対一還元関数 f と B の i-特性関数 g を取る。

$x \in A$ とすると $f(x) \downarrow \in B$ となり、$g \circ f(x) \downarrow = 0$。

$x \in A^c$ とすると $f(x) \downarrow \in B^c$ となり、$g \circ f(x) \downarrow = 1$。

$i = 1, 3$ のとき $g \circ f(x) \downarrow = 0$ とすると、$f(x) \downarrow \in B$ すなわち $x \in A$。

$i = 1, 2$ のとき f, g は全域だから $f \circ g$ も全域。

だから $g \circ f$ は確かに A の i-特性関数である。 □

定理. 4.4.11. B, B^c が元を持つなら i-計算可能集合 A は B に i-多対一還元する。

証明)

B, B^c からそれぞれ元を取り b, c とする。

$$f(x) = \begin{cases} b & (\text{if } x = 0) \\ c & (\text{if } x \neq 0) \end{cases}$$

として、これを A の i-特性関数に合成すれば i-多対一還元関数を得る。 □

定理. 4.4.12. A が B に f によって i-多（一）対一還元するならば $f(x) \downarrow \in B^c \iff$

$x \in A^c$ を満たす。

証明)

$i = 4$ の時示せば足りる。

$x \in A^c \to f(x) \downarrow \in B^c$ は定義より。

$$f(x) \downarrow \in B^c \Rightarrow \neg(f(x) \downarrow \in B) \Rightarrow x \in A^c$$

となるので $f(x) \downarrow = B^c \to x \in A^c$ も成り立つ。 $\square$

注．4.4.13. このことから計算可能性の時のように、A が B に f によって 3-多（一）対一還元するなら f の定義域が丁度 $A \cup A^c$ であるとは言えない。$f(x) \downarrow$ だからと言って $f(x) \downarrow \in B \vee f(x) \downarrow \in B^c$ とは言えないからである。

一般に計算可能性に比べて還元関係の構図は $x \in B$ を"Yes"、$x \in B^c$ を"No' と考えた場合、「B とも B^c とも言えない」という選択肢が 1-4 全ての帰着関係に追加されているため、より複雑である。

定理．4.4.14. A が B に 2-多（一）対一還元するならば A^c は B^c に 1-多（一）対一還元する。

証明)

直前の定理から直ちに従う。 $\square$

この定理の逆が証明できないのも計算可能性の時とは異なった状況である。

定理．4.4.15 (Myhill の同型定理)**.** 古典論理上で証明した**定理．2.6.31.** は直観主義論理上でも $\equiv^1_1$ と $\equiv$（こちらの定義は古典論理のものと同じ）の間に証明される。

4.5 直観主義論理上での再帰理論

本節では直観主義論理上において、再帰理論のいくつかの結果を見直す。

補題．4.5.1. 以下は同値。

1. $(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$
2. $\forall x.[x \in K \vee x \in K^c]$

証明)

(1.⇒2.)

$(\mathrm{LPO})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ が r.e. 集合への帰属関係の排中律だったことからわかる。
(2.⇒1.)
原始計算可能な関数 α を取る。

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \exists\vec{x}.\alpha(\vec{x}) = 0) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

とすると $\exists x.[\alpha(\vec{x}) = 0] \iff e \in W_e \iff e \in K$
よって仮定から $\exists x[\alpha(\vec{x}) = 0] \vee \neg\exists x.[\alpha(\vec{x}) = 0]$ となる。 □

補題. 4.5.2. 以下は同値。

1. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$
2. $K = (K^c)^c$

証明)
直前の補題と同様である。 □

定理. 4.5.3. 以下の 2 つの形の Rice の定理が直観主義論理上成り立つ。

1. A が $\{e : \forall n.[\varphi_e(n)\uparrow]\}(:= B)$ を包むインデックス集合で A^c が元を持つものとする。この時 $K^c \leq_1^1 A$ である。特に A は 4-計算可能でない。
2. A が元を持つインデックス集合で上で定義された B と交わらないとする。このとき $K \leq_1^2 A$ である。特に A は 4-計算可能でない。

(1. の証明)
$e_1 \in A^c$ を一つとる。
s-m-n 定理から $f(x)$ を

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varphi_{e_1}(x) & (\text{if } x \in K) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

と定義する。
この時

$$x \in K \Rightarrow \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_1} \Rightarrow f(x) \in A^c$$

だから $f(x) \in A \Rightarrow x \in K^c$ である。
また

$$x \in K^c \Rightarrow \forall y.[\varphi_{f(x)}(y)\uparrow] \Rightarrow \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_0} \Rightarrow f(x) \in A^c$$

だから先と合わせて $f(x) \in A \iff x \in K^c$ である。f は s-m-n 関数の第零引数を固定したものだから単射であり、従って $K^c \leq_1 A$。

(2. の証明)

$e_1 \in A$ を一つとる。

s-m-n 定理から $f(x)$ を

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varphi_{e_1}(x) & (\text{if } x \in K) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

と定義する。

この時

$$\begin{aligned} x \in K \Rightarrow & \qquad \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_1} & \Rightarrow f(x) \in A \\ x \in K^c \Rightarrow & \forall y.[\varphi_{f(x)}(y) \uparrow] \Rightarrow \varphi_{f(x)} \simeq \varphi_{e_0} & \Rightarrow f(x) \in A^c \end{aligned}$$

となる。f は s-m-n 関数の第零引数を固定したものだから単射であり、従って $K \leq_1^2 A$。 □

古典論理では、A がインデックス集合であることから B は A か A^c のどちらかの部分集合なので、**定理. 2.6.21** の形が従う。従ってこの主張は Rice の定理の構成的類似になっている。

系. 4.5.4. 直観主義論理 $+(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ で上の定理の 2. の主張は 1-一対一帰着に強化される。

定理. 4.5.5. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を仮定すれば、P が生産的集合なら実際には全域的に生産的である。特に古典論理上では P が生産的集合なら実際には全域的に生産的である。

証明)

仮定から生産的関数 φ_e がとれる。

g を以下で定義する。

$$\varphi_{g(x)}(z) = \begin{cases} \varphi_x(z) & (\text{if } \varphi_e(x) \downarrow) \\ \uparrow_I & (otherwise) \end{cases}$$

さらに

$$\varphi_f \simeq \varphi_e \circ g$$

として φ_f を定める。

$\varphi_e(x)\uparrow \Rightarrow W_{g(x)}=\emptyset$ で、$\emptyset\subset P$ と生産的集合の定義から $W_{g(x)}=\emptyset$ のとき $\psi(g(x))\downarrow$。故に

$$\neg(\varphi_e(x)\uparrow \wedge \varphi_f(x)\uparrow) \tag{4.4}$$

である。(4.4) の括弧内の式は $\forall s.[\varphi_{e,s}(x)\ =\uparrow_H\ \wedge\varphi_{f,s}(x)\ =\uparrow_H]$ と変形できるので $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を適用すれば、

$$\begin{aligned}\exists s.\neg[\varphi_{e,s}(x)=\uparrow_H \wedge\varphi_e(x)\uparrow_H] &\iff \exists s.[\varphi_{e,s}(x)\downarrow\vee\varphi_e(x)\downarrow]\\ &\iff \exists s.\varphi_{e,s}(x)\downarrow\vee\exists s.\varphi_{f,s}(x)\downarrow\\ &\iff \varphi_e(x)\downarrow\vee\varphi_f(x)\end{aligned} \tag{4.5}$$

を得る（二つ目の変形は $\varphi_{e,s}$ 及び $\varphi_{f,s}$ が $\uparrow_I$ とならないことによる。)。

ここで

$$q(x)=\begin{cases}\varphi_e(x) & (\text{if } \exists s.[T(e,x,s)\wedge\forall t<s.\neg T(f,x,s)])\\ \varphi_f(x) & (\text{if } \exists s.[T(f,x,s)\wedge\forall t\leq s.\neg T(e,x,s)])\end{cases}$$

とすると、これは (4.5) より関数を定める。

ここで $W_x\subset P$ を仮定する

すると $\varphi_e(x)\downarrow$ だから $\varphi_x\simeq\varphi_{g(x)}$ で特に $P\supset W_x=W_{g(x)}$ だから $q(x)=\varphi_e(x), q(x)=\varphi_f(x)$ のどちらのケースでも $q(x)\in P\setminus W_x=P\setminus W_{g(x)}$ であることがわかる。 □

定理. 4.5.6. P が全域的に生産的集合なら実際には単射的に生産的である。

証明)

定理. 2.6.53. を参照。 □

定理. 4.5.7. P が生産的で $P\leq_m^i A(i=1,3)$ なら A も生産的。また P が全域的に生産的で $P\leq_m^1 A$ なら A も全域的に生産的。

証明）

P の生産的関数を p、P の A への 3-多対一還元関数で計算可能なものを f とする。

g を

$$\varphi_{g(x)}(y)=\varphi_x\circ f(y)$$

で定義する。$W_{g(x)}=f^{-1}(W_x)$ であることに注意する。

今 $h=f\circ p\circ g$ を考える。

$$
\begin{aligned}
W_x \subset A \Rightarrow W_{g(x)} = f^{-1}(W_x) \subset f^{-1}(A) = P \\
&\Rightarrow p \circ g(x) \downarrow\in P \wedge p \circ g(x) \notin f^{-1}(W_x) \\
&\Rightarrow h(x) \downarrow\in A \wedge h(x) \notin W_x \\
&\Rightarrow h(x) \downarrow\in A \setminus W_x
\end{aligned}
$$

より h は A の生産的関数である。

以上から主張の前半がわかる。

ここで p と f が全域ならば h も全域だから、主張の後半もわかる。 □

定理．4.5.8. A が全域的に生産的ならば $K^c \leq_1^1 A$。

証明)

定理．2.6.55. を参照。 □

系．4.5.9.

$$K^c \leq_m^1 A \Rightarrow [A \text{ は全域的に生産的。}] \Rightarrow K^c \leq_1^1 A \Rightarrow K^c \leq_m^1 A.$$

従って

$$K^c \equiv_m^1 A \iff [A \text{ は全域的に生産的。}] \iff K^c \equiv_1^1 A.$$

系．4.5.10. $(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を仮定することで**系．2.6.56** と同様の以下の同値が回復する。

1.
$$K^c \leq_m^1 A \iff [A \text{ は生産的。}] \iff K^c \leq_1^1 A.$$

2.
$$K \equiv_m^1 A \iff [A \text{ は創造的。}] \iff K \equiv_1^1 A.$$

証明)

1. は**定理．4.5.5** から直ちに従う。

2. は 1. に加えて、$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ が r.e. 集合への帰属関係に関する排中律だったことから、K 及び A について $(K^c)^c = K, (A^c)^c = A$ であることを用いればわかる。 □

注．4.5.11. 今回の研究では、$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を仮定しない場合の、（全域的に）創造的な集合の挙動については、興味を引く結果は得られなかった。それでも上の議論から以下の事は直ちにわかる。

1. 全域的に創造的な集合は単射的に創造的である。
2. $K \equiv_1^1 A$ たる A は全域的に創造的である。
3. $A \subset \omega$ が全域的に創造的ならば、$A \leq_1^1 K$ かつ $K \leq_1^2 (A^c)^c$ である。

定義. 4.5.12. 集合 A が i-シリンダー $(i = 1, 2, 3, 4)$ であるとは

$$\forall B \subset \omega.[B \leq_m^i A \to B \leq_1^i A]$$

を満たすことである。

定理. 4.5.13. 任意の集合 A に対して $A \times \omega$ は i-シリンダー $(i = 1, 2, 3, 4)$。

証明)

ある B が f によって $A \times \omega$ に i-多対一帰着するとする。

$i = 1, 2$ の場合が容易なので先に示す。

拡張原始再帰によって B を A に i-一対一帰着させる g を構成する。g_s を g の有限部分関数の列とする[*1]。ここでの拡張原始再帰では同時に補助的な有限部分関数 h_s[*2]を構成する。ただしここで h_s は何らかの関数の拡張原始再帰による定義にはなっていないため注意せよ。

ここで g_s, h_s は（g_s が拡張原始再帰になっていることに加えて）以下を満たす。

1. 全ての s に対して h_s は関数的。
2. 全ての s に対して g_s は単射。
3. 任意の s, x, n について $\langle x, n\rangle \in \mathrm{Ran}(g_s)$ ならば $n \leq h_s(x)\downarrow$。
4. 全ての s, t に対して $i = 1$ のとき

$$\forall x.[g_s(x)\downarrow \to (x \in B \iff g_s(x) \in A \times \omega)],$$

$i = 2$ のとき

$$\forall x.[g_s(x)\downarrow \to (x \in B \to g_s(x) \in A \times \omega) \wedge (x \in B^c \to g_s(x) \in (A \times \omega)^c)].$$

Base Case である -1-ステップでは $g_s = h_s = \emptyset$ で定める。

第 $s+1$-ステップの構成は以下のようになる。

$f(s+1) = \langle x, y\rangle$ とする。

---

*1 これまでの拡張原始再帰による証明ではグラフを関数値とする関数 $g'(s)$ のように書いてそれを構成するという書き方をしてきたが、今回は簡潔の為、記号の濫用だが g_s で g の有限部分関数列とそのグラフの両方を表すことにする。

*2 これもやはりそのグラフと同一視する。

$h_s(x)$ が定義されているなら $g_{s+1} = g_s \cup \{\langle s+1, \langle x, h_s(x)+1\rangle\rangle\}, h_{s+1} = h_s \setminus \{\langle x, h_s(x)\rangle\} \cup \{\langle x, h_s(x)+1\rangle\}$ と定める。

$h_s(x)$ が定義されていないなら $g_{s+1} = g_s \cup \{\langle s+1, \langle x, 0\rangle\rangle\}, h_{s+1} = h_s \cup \{\langle x, 0\rangle\}$ と定める。

この構成が g_s について拡張原始再帰になっていることは容易にわかる。次にこれが 1. から 4. の条件を満たすことを見る。

1. と 3. の条件は、第 $s+1$-ステップでは、$h_s(x)$ が定義されていれば、即ち $\langle x, n\rangle \in h_s$ ならば、その元を取り除いて新たに $\langle x, n+1\rangle$ を追加し、$h_s(x)$ が定義されていなければ、新たに $\langle x, 0\rangle \in h_s$ を追加するのだからよい。

2. の条件は、1 ステップ前での 3. の条件の成立からわかる。

4. の条件を見るには $g_s(x)\downarrow$ とすると拡張原始再帰によって関数値が変更される事はないから定義されたステップの関数値のままであることに注意する。

すると $g_s(x)\downarrow$ である限り、$[\![f(x)]\!]^2_1 = [\![g_s(x)]\!]^2_1$ であることが構成法からわかる。

ここで $i=1$ ならば、$g_s(x)\downarrow$ である限り、

$$\begin{aligned} x \in B &\iff f(x) \in A \times \omega \\ &\iff \forall n. \langle [\![f(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff \forall n. \langle [\![g_s(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff g_s(x) \in A \times \omega \end{aligned}$$

となることがわかる。

$i=2$ ならば、やはり $g_s(x)\downarrow$ である限り、

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow f(x) \in A \times \omega \\ &\iff \forall n. \langle [\![f(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff \forall n. \langle [\![g_s(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff g_s(x) \in A \times \omega \end{aligned}$$

より $x \in B \Rightarrow g_s(x) \in A \times \omega$ が、

$$\begin{aligned} x \in B^c \wedge g_s(x) \in A \times \omega &\Rightarrow f(x) \in (A \times \omega)^c \wedge \forall n. \langle [\![g_s(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff f(x) \in (A \times \omega)^c \wedge \forall n. \langle [\![f(x)]\!]^2_1, n\rangle \in A \times \omega \\ &\iff f(x) \in (A \times \omega)^c \wedge f(x) \in A \times \omega \\ &\iff \bot \end{aligned}$$

より $x \in B^c \Rightarrow g_s(x) \in (A \times \omega)^c$ がわかる。

あとは $g(x) = g_x(x)$ と置けば 2. と 4. の条件から所望を得る。

さて続いて $i=3,4$ の場合を示そう。この場合は単純な拡張原始再帰ではうまくいかない。今までの拡張原始再帰と異なるのは、この場合は f が全域でないので、s-ステップ目で $x=s$ に対応する関数値を定める今までの方式では f が未定義であるような s-ステップ目から先に進めなくなってしまう。そこで f ではなく $\varphi_e \simeq f$ であるような e を用いて $\varphi_{e,s}$ を使い、$x=0$ から順にではなく、$\varphi_{e,s}(x)$ が定まった順から関数値を関数値を定める。そのため使用する有限近似の近似の深さ s と、そのステップで $g(t)$ を定義しようとする t とで、原始再帰を二重の入れ子にして行い $g_{s,t}$ を構成し、その各ステップを (s,t) ステップのように書く。

具体的には以下のようにする。

以下の六条件を満たす $\langle g_{s,t}, h_{s,t}\rangle$ を構成する。

1. 全ての s,t に対して $h_{s,t}$ は関数的。
2. 全ての s,t に対して $g_{s,t}$ は関数的かつ単射。
3. 全ての s,t,x,n について $\langle x,n\rangle \in \mathrm{Ran}(g_{s,t})$ ならば $n \leq h_{s,t}(x)\downarrow$。
4. 全ての s,t に対して $i=3$ のとき
$$\forall x.[g_{s,t}(x)\downarrow \to (x\in B \iff g_{s,t}(x)\in A\times\omega)],$$
$i=4$ のとき
$$\forall x.[g_{s,t}(x)\downarrow \to (x\in B \to g_{s,t}(x)\in A\times\omega)\wedge(x\in B^c \to g_{s,t}(x)\in (A\times\omega)^c)].$$
5. 辞書式順序の意味で $\langle s,t\rangle < \langle s',t'\rangle$ ならば $g_{s,t}\subset g_{s',t'}$。
6. $\varphi_{e,s}(x)\downarrow$ を満たす x,s に対して $g_{s+1,-1}(x)\downarrow$。

構成は以下のようにする。

Base Case である $(-1,-1)$-ステップでは $g_{-1,-1}=h_{-1,-1}=\emptyset$ で定める。

(s,t)-ステップでは以下のようにする。

もし $s\geq 0$ で $t=-1$ ならば $g_{s,-1}=g_{s-1,s-1}, h_{s,-1}=h_{s-1,s-1}$ とする。

もし $s,t\geq 0$ で
$$\varphi_{e,s}(t)\downarrow \wedge g_{s,t-1}(t)\uparrow$$
ならば、$\varphi_{e,s}(t)=\langle x,y\rangle$ として、$h_{s,t-1}(x)$ が定義されているなら $g_{s,t}=g_{s,t-1}\cup\{\langle t,\langle x,h_s(x)+1\rangle\rangle\}, h_{s,t}=h_{s,t-1}\setminus\{\langle x,h_{s,t-1}(x)\rangle\}\cup\{\langle x,h_{s,t-1}(x)+1\rangle\}$ と定め、$h_{s,t-1}(x)$ が定義されていないなら $g_{s,t}=g_{s,t-1}\cup\{\langle t,\langle x,0\rangle\rangle\}, h_{s+1}=h_s\cup\{\langle x,0\rangle\}$ と定める。このとき「t が注目を受ける」という事にする。$s,t\geq 0$ で t が注目を受けない場合は $g_{s,t}=g_{s,t-1}, h_{s,t}=h_{s,t-1}$ と定める。

さてこの構成が六条件を満たすことを見る。

1. から 4. の条件の証明は $i = 1, 2$ の場合と同様なので省略する。

5. の条件についてみる。

任意の s について $g_{s,-1} \subset g_{s,0} \subset g_{s,1} \subset \cdots g_{s,n} \cdots \subset gs+1,-1$ を見ればよい。

$g_{s,-1} \subset g_{s,0} \subset g_{s,1} \subset \cdots g_{s,n} \cdots$ は構成から明らか。

また $\varphi_{e,s}$ の定義より $\varphi_{e,s}(t) \downarrow \to t \le s$ だから、t が注目を受けるのは $t \le s$ たるような (s,t)-ステップに限られる。

故に帰納法により $g_{s,s} = g_{s,s+1} = \cdots = g_{s,s+n} = \cdots$ を得る。構成からこれらは $g_{s+1,-1}$ にも等しいから所望を得た。

6. の条件を見る。

x を一つ固定する。

有限近似の性質から $s \ge x$ であり、仮定から $\varphi_{e,s}(x)$ を満たすから (s,x)-ステップで x が注目を受けるか、$g_{s,x-1}(x) \downarrow$ かのどちらかになる。いずれの場合でも $g_{s,x}(x)$ は定義され、5. の条件から $g_{s+1,-1}$ は $g_{s,x}$ のスーパーセットだから、$g_{s+1,-1}(x) \downarrow$ となる。

最後に $g(x) = g_{\mu s.[g_{s,-1}(x)\downarrow],-1}(x)$ とし、g が i-一対一帰着関数になっていることを見る。

5. と 6. の条件から多対一帰着関数である f の定義域であるような x 全てで g は収束するから、定義域の条件は良い。

2. の条件から単射性もよい。

さらに $i = 3$ のとき、4. の条件から $g(x) \downarrow \in A \times \omega$ なら $x \in B$。また定義域の条件から $x \in B$ ならば、ある (s,t) で $g_{s,t}(x)$ が定義され、やはり 4. の条件から $g_{s,t}(x) \downarrow \in A \times \omega$ となるから、$g(x) \downarrow \in A \times \omega$。

$i = 4$ の時は、定義域の条件から $x \in B$ または $x \in B^c$ の時 $g(x)$ が存在してそれぞれ 4. の条件から $g(x) \in A \times \omega$、$g(x) \in (A \times \omega)^c$ となる。

よって g は所望を満たす。 $\square$

補題. 4.5.14. 集合 A が i-シリンダーで $A \equiv_1^i B$ なら B も i-シリンダーとなる。

証明)

$C \le_m^i B$ とする。

$A \equiv_1^i B$ から特に $B \le_m^i A$ だから $C \le_m^i A$。

A は i-シリンダーだから $C \le_1^i A$ で、$A \equiv_1^i B$ だから $C \le_1^i B$。

定理. 4.5.15. $i = 1, 2, 3, 4$ に対してそれぞれ以下の三条件は同値。

1. A は i-シリンダーである。
2. $A \equiv_1^i A \times \omega$
3. $\exists B.A \equiv_1^i B \times \omega$

証明)

(1.⇒3.)

$A \leq_1^1 A \times \omega$ かつ $A \times \omega \leq_m^1 A$ であり、従って $A \leq_1^i A \times \omega$ かつ $A \times \omega \leq_m^i A$ であることは容易にわかる。

A は i-シリンダーなのだから $A \times \omega \leq_m^i A$ は $A \times \omega \leq_1^i A$ を含意する。

従って $A \equiv_1^i A \times \omega$。

(2.⇒3.)

明らかである。

(3.⇒1.)

既にみたことからわかる。 □

この定理から集合に ω を掛ける操作は高々一回しか集合の i-一対一次数を上げないことがわかる。

第 5 章

終わりに

本稿では直観主義論理上での再帰理論の導入を行い、それに伴って再帰理論上での様々な概念をどう定義すべきかという問題が直観主義論理の立場からは明らかではないことを指摘してきた。

特性関数という最も基本的な対象に対してすらも、古典論理上での定義に対応する定義は一意ではなく、本稿で述べたような様々な変種が考えられるだけでなく、古典論理における再帰理論においては、そのような変種との同値性が直接に、あるいは暗黙に計算可能性の証明に用いられていることがわかる。**定理. 2.6.43.** と、**定理. 4.2.7.** の関係などが最たる例であろう。このような例が存在することから、直観主義論理上での再帰理論においては諸概念の定義を様々に動かしながら議論することが有用だと考えれる。

今後に期待される研究として、ここでは非構成的原理との同値性が示せなかった定理の構成的逆数学的分析や、$(\mathrm{MP})_{\mathbf{Prim.Rec.}}$ を仮定しない場合での創造的集合に対する分析などが必要と考えられる。また本稿では全く触れなかった Turing 次数についても本稿のような分析が必要となるであろう。Turing 次数の定義には既に特性関数が用いられているため、素朴な定義ではそもそも特性関数を持つような集合についてしか Turing 次数を考えることが出来ないのである。特性関数の定義を、本稿で導入された i-特性関数に変更することでどのように帰着概念が変化するかという研究も可能であろう。

さらに重大なのは、今回のような構成的数学による再帰理論の位置づけ、応用の可能性の調査であろう。1 章ですでに述べた通り、構成的数学にはアルゴリズムの抽出などの応用が知られている。しかしながら、今回の研究である再帰理論はそれ自体アルゴリズムと結びついたものであるため、直観主義論理を使うことが何を意味するのかが却ってわかりにくいところがある。筆者の個人的な予想となるが、直観主義論理で全域計算可能性が証明できるような関数は、何らかの意味で計算時間について知る術があることを意味する

のではないかという事がある。これは $\forall x.\exists s.T(e,x,s)$ が直観主義論理で証明できることは、BHK 解釈によればそのような s を x から構成できることだからである。これは形式的な主張ではないため、まず何らかの形式化が必要となるが、それについても今後の課題となるであろう。

5.1 謝辞

本稿の完成までに多くの方の力を頂いた。指導教官である石原哉先生は勿論のこと、直接の指導教官ではない横山啓太先生にも代わりが効かないほどの助力、助言を賜った。また入学時より、セミナーを合同で行い、今年度には同研究室所属となった上田拓海氏にも同様に多くの助言を賜った。

また SNS でのグループ「ペリパトス」でも研究について多くの助言を賜り、特に川井新氏、今村拓万氏[*1]、市川航士郎氏には感謝してもしきれない。

家族、特に母親にも、直接内容にかかわるものではないが、多くの協力を頂いた。

これら多くの人に謝辞を述べ、本稿の結びとする。

[*1] `https://researchmap.jp/timam`

参考文献

[1] Douglas Bridges and Fred Richman. *Varieties of constructive mathematics*, volume 97 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[2] L. E. J. Brouwer. *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism.* Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981. Edited and with a preface by D. van Dalen.

[3] Alonzo Church. An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *Amer. J. Math.*, 58(2):345–363, 1936.

[4] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38(1):173–198, 1931.

[5] A. Heyting. *Intuitionism. An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

[6] Hajime Ishihara. Constructive reverse mathematics: compactness properties. In *From sets and types to topology and analysis*, volume 48 of *Oxford Logic Guides*, pages 245–267. Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.

[7] Takayuki Kihara. 計算可能性理論特論・講義ノート. `https://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/pdf/teach/computability2017fall-final.pdf`. Lecture notes of (Graduate) School of Informatics of Nagoya University. January 31st, 2022 last checked.

[8] S. C. Kleene. General recursive functions of natural numbers. *Math. Ann.*, 112(1):727–742, 1936.

[9] S. C. Kleene. Recursive predicates and quantifiers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53:41–73, 1943.

[10] Stephen Cole Kleene. *Introduction to metamathematics.* D. Van Nostrand Co.,

Inc., New York, N. Y., 1952.

[11] A. A. Markov. On the continuity of constructive functions. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 9(3(61)):226–230, 1954.

[12] John Myhill. Creative sets. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 1:97–108, 1955.

[13] H. G. Rice. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74:358–366, 1953.

[14] Robert I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. A study of computable functions and computably generated sets.

[15] A. S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in mathematics. Vol. I*, volume 121 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. An introduction.

[16] A. M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 42(3):230–265, 1936.

[17] Dirk van Dalen. *Logic and structure.* Universitext. Springer, London, fifth edition, 2013.