Title	線形論理の拡張体系に対する代数的研究
Author(s)	坪井，直人
Citation	
Issue Date	2004-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1789
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

線形論理の拡張体系に対する代数的研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

坪井 直人

2004 年 3 月

修 士 論 文

線形論理の拡張体系に対する代数的研究

指導教官　小野寛晰 教授

審査委員主査　小野寛晰 教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　大堀淳 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

210059 坪井 直人

提出年月: 2004 年 2 月

概 要

本稿では、部分構造論理のひとつ、直観主義的線形論理の拡張体系である $\mathbf{FL_e}$ 上の論理について、そのいくつかの性質を調査する。$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ における $\vee$ を持たない formula に限った finite model property と、$\mathbf{CFL_e}$ より強いすべての論理に関する Glivenko の定理を代数的手法を用いて示す。

目 次

Abstract **i**

Acknowledgments **ii**

1 Introduction **1**

2 Preliminaries **2**

3 Structure of Codes **4**

3.1 Inner Encoders 4

3.2 Construction of Concatenated Codes 4

3.3 Decoding Scheme 5

3.4 Preliminaries from Coding Theory 5

4 Conclusion **7**

References **8**

Publications **9**

第1章　はじめに

1.1　背景

部分構造論理とは、古典論理や直観主義論理の sequent system からいくつかの構造規則 (exchange、weakening、contraction) を取り除くことにより得られる論理の総称である。Lambek による **FL** や、適切論理、線形論理、BCK-論理などの体系はいずれも部分構造論理の一種である。もともと、sequent 計算で形式化された論理において、構造に関する推論規則は、補助的な規則だとみなされていた。しかし、これまでにそれぞれ独自の動機で研究されてきた様々な非古典論理のうち、 多くの論理が部分構造論理とみなせることが近年わかってきた。
部分構造論理の初期の研究では、主に証明論的手法が用いられ、cut 除去可能な sequent system から、様々な重要な結果を導くことができた。しかし、最近になり、部分構造論理の意味論としての代数的モデルが盛んに研究されている。その理由をいくつか挙げる。cut 除去定理が成り立たない論理については証明論的手法の有用性はそこまで発揮されない。そこで意味論的な手法を試みるにしても、クリプキ流の意味論は、様相論理のときほどにはうまくは働かない。代数的な、とくに Universal Algebra からのアプローチは、部分構造論理を全体的な視点で捉えることに優れている。そういったことから近年は代数的手法が多く用いられるようになった。
部分構造論理のもっとも基本となる論理は、 **LJ** からすべての構造に関する規則を取り除いた体系 **FL** である。そこに exchange rule を付け加えたものが $\mathbf{FL_e}$ とよばれる体系で、直観主義的線形論理、適切論理などが属する。さらに weakening rule を付け加えた体系 $\mathbf{FL_{ew}}$ にはウカシェヴィチの多値論理、BCK-論理、ファジー論理、basic logic などが属している。weakening rule をもつ論理に対応する代数モデルでは、使い勝手の良い代数的性質が多く成り立つことなどから、これまでにもずいぶん研究がなされてきた。本研究では、直観主義線形論理の拡張体系に相当する $\mathbf{FL_e}$ 上の論理を対象としている。

1.2　目的

本研究は、代数的手法を用いて部分構造論理の性質の究明を進めることを目的とする。対象とするのは部分構造論理のうち、exchange rule が成り立つ論理である。直観主義線形論理の拡張体系における諸性質を調べることに相当する。本論文では、大きく 2 つの事柄について考察されている。一つは、あるいくつかの論理体系における finite model property

である。finite model property とは、provable な formula に対し、必ずそれを偽にするような有限モデルが存在するという性質である。二つ目は、 $\mathbf{CFL_e}$ 上の論理に関する Glivenko の定理について closure operator を用いた方法で証明を試みる。Glivenko の定理が成り立つとは、強い論理から弱い論理への埋め込みができるとも考えられる。

1.3　本論文の概要

本論文では、exchange rule を持つ論理を対象としている。そこで" 論理" というものを $\mathbf{FL_e}$ 上の論理として定義した。その定義とは、三段論法、連言、代入に閉じており、$\mathbf{FL_e}$ で provable な formula をすべて含むような formula の集合というものである。sequent system で定義された $\mathbf{FL_e}$ で provable であるというのが本論文での論理の必要条件となっている。
次に、意味を論じるための代数的モデルとして、その基本となる commutative residuated lattice を定義する。そして、 commutative residuated lattice に定数 0 を加えることで $\mathbf{FL_e}$-algebra という algebra をつくると、それは $\mathbf{FL_e}$ に対応する algebra となり、健全性と完全性が成り立つ。
2 章までで 3 章以降の話をするための準備を終える。
3 章においては、$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ の finite model property について論じる。$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ において finite model property が成立するかどうかというのは、いまだ未解決の問題であるが、downward-closed な集合を考えることで、一部の formula に限っては finite model property が成立するということを示した。
4 章は、二重否定を写像とみれば、closure operator になることから、それを用いて Glivenko の定理を示すことができた。これは、すでにある Galatos-Ono の結果に対し別証明を与えたことになる。

第2章　準備

2.1　代数の記法および順序集合、束、可換モノイドについて

　対象となる集合上に有限子の関数（演算）、定数を導入した代数構造を

$$\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle$$

という形の記法で表す。ここで A は対象となる集合、f_i は関数を表している。とくに、定数は引数が 0 の関数として考える。これらのセットとしての代数構造を、その対象集合のアルファベットの太字によって主に表すことにする。以下に、この記法を用いて順序集合、束、可換モノイドを定義する。

定義 2.1 (順序集合)

$\mathbf{A} = \langle A, \leq \rangle$ が順序集合であるとは、任意の $x, y, z \in A$ に対し以下を満たすことである。

1. $x \leq x$
2. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$
3. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

定義 2.2 (束)

$\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup \rangle$ が束（*lattice*）であるとは、任意の $x, y, z \in L$ に対し以下を満たすことである。

1. $x \cap x = x$, $x \cup x = x$
2. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$, $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$
3. $x \cap x = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$
4. $x \cap (x \cup y) = x$, $x \cup (x \cap y) = x$

とくに最大元 $\top$ と最小元 $\bot$ をもった束 $\langle L, \cap, \cup, \bot, \top \rangle$ を有界束（bounded lattice）とよぶ。

順序集合と束の関係は、基本的な事柄なのでここで少し述べておく。いま、束 $\langle L, \cap, \cup \rangle$ があったとき、$\mathbf{L}$ 上の二項関係 $\leq$ を、

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \cap y = x \text{（あるいは} x \cup y = y\text{）}$$

として定めると、$\langle L, \leq \rangle$ は順序集合になる。
このことは、いちいち断ることなく頻繁に使われる。束が定義されていたとき、その上には順序が、混乱しない限り、上述の方法によって暗黙のうちに定義されているものとする。

定義 2.3 (可換モノイド)

$\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1 \rangle$ が可換モノイド（*commutative monoid*）であるとは、任意の $x, y \in M$ に対し以下を満たすことである。

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot y = y \cdot x$
3. $x \cdot 1 = x$

本論文で対象とする論理は、exchange の推論規則が成り立つものに限っている。それを意味的に表現する手段としての代数は、commutative なもので十分である。そのため非可換モノイドはここでは用いない。

2.2 $\mathbf{FL_e}$ 上の論理

定義 2.4 (（$\mathbf{FL_e}$ 上の）formula)

以下で帰納的に定まるものを（$\mathbf{FL_e}$ 上の）*formula*（論理式）とする。

1. 命題変数は formula である。
2. 命題定数 t, f は formula である。
3. α , β がともに formula ならば、$(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha * \beta)$, $(\alpha \supset \beta)$, $(\neg \alpha)$ は formula である。

formula 全体の集まりを $\mathbf{\Phi}$ で表す。

定義 2.5 ($\mathbf{FL_e}$ 上の論理（logic）)

$\mathbf{L}$ を formula の集合とする（すなわち $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{\Phi}$ ）。以下を満たすとき、$\mathbf{L}$ を $\mathbf{FL_e}$ 上の論理（*logic*）であるという。

1. α が $\mathbf{FL_e}$ で provable ならば、$\alpha \in \mathbf{L}$
2. $\alpha, \alpha \supset \beta \in \mathbf{L}$ ならば、$\beta \in \mathbf{L}$
3. $\alpha, \beta \in \mathbf{L}$ ならば、$\alpha \wedge \beta \in \mathbf{L}$
4. $\mathbf{L}$ は代入に閉じている

論理を形式化するにはいくつものやり方があるが、本論文では sequent system（sequent 計算の体系）として捉える方法を用いる。古典論理、直観主義論理はそれぞれ、Gentzen によって **LK**, **LJ** という sequent system に形式化された。部分構造論理のもっとも基本的な体系は、**LJ** から構造に関する推論規則をすべて取り除いた **FL** であるといえよう。すべての部分構造論理は **FL** 上の論理である。しかしこの論文では、部分構造論理のひとつである $\mathbf{FL_e}$ より強い論理に対象を絞っている。そこでまず始めに、基本となる体系として $\mathbf{FL_e}$ の sequent system を導入する。

sequent system **LK** における式（sequent）とは、

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \quad (\alpha_i, \beta_j \text{は formula})$$

という形をしたものである。($\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ は空列でもよい。）しかし次で定義される $\mathbf{FL_e}$ では、**LJ** の sequent と同様に、右辺には高々一つの formula しか現れないものに限っておく。

定義 2.6 (sequent system $\mathbf{FL_e}$)

- $\mathbf{FL_e}$ の始式（*initial sequent*）とは、

$$\alpha \to \alpha$$

$$\to t$$

$$f \to$$

の *3* 種類の式である。ただし α は任意の formula である。

- $\mathbf{FL_e}$ の推論規則（*inference rule*）は、以下のとおりである。

  · 構造に関する推論規則

  exchange:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Pi \to \delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Pi \to \delta}\ (e\,\text{左})$$

  cut:

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Pi \to \beta}{\Gamma, \Pi \to \beta}\ (cut)$$

  · 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \delta}\ (\wedge\text{左}\ 1) \qquad \frac{\beta, \Gamma \to \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \delta}\ (\wedge\text{左}\ 2)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\text{右}) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \delta \quad \beta, \Gamma \to \delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \delta}\ (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\vee\text{右}\ 1) \qquad \frac{\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\vee\text{右}\ 2)$$

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \to \delta}{\alpha * \beta, \Gamma \to \delta}\ (*\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \Pi \to \beta}{\Gamma, \Pi \to \alpha * \beta}\ (*\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Pi \to \delta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Pi \to \delta}\ (\supset\ \text{左}) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\supset\ \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg\alpha}\ (\neg\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, \Pi \to \delta}{\Gamma, t, \Pi \to \delta}\ (tw) \qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to f}\ (fw)$$

ここで、$\alpha,\ \beta$ は formula、δ は formula または空、$\Gamma,\ \Pi$ は 0 個以上の formula の列である。

sequent system $\mathbf{L}$ に対して、始式から出発し、それに推論規則を順次適用していく過程をすべて記述したものを $\mathbf{L}$ の証明図という。証明図の一番下にある式をその証明図の終式という。式 S を終式とするような $\mathbf{L}$ の証明図が存在するとき、S は $\mathbf{L}$ で *provable*（証明可能）であるといい、その証明図を S の証明図とよぶ。逆に証明図がなければ *not provable* である。左辺も右辺も空であるような式は not provable である。
式 $\rightarrow \alpha$ が $\mathbf{L}$ で provable であるとき formula α は $\mathbf{L}$ で provable であるという。これからは不都合が生じない限り、$\mathbf{L}$ で provable な formula 全体の集合も、$\mathbf{L}$ と表すことにする。
また、formula $\alpha \supset \beta$ と $\beta \supset \alpha$ がともに $\mathbf{L}$ で provable であるとき、α と β は $\mathbf{L}$ において論理的に同値であるという。

ここで、以下の 2 種類の構造に関する推論規則は $\mathbf{LK}$ や $\mathbf{LJ}$ にはあるが、$\mathbf{FL_e}$ にはないことを注意しておく。

weakening:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \delta}\ (w\,\text{左}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \alpha}\ (w\,\text{右})$$

contraction:

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \delta}\ (c\,\text{左})$$

$\mathbf{FL_e}$ に weakening を付け加えた体系を $\mathbf{FL_{ew}}$ という。また、contraction を付け加えた体系を $\mathbf{FL_{ec}}$ という。そして weakening と、contraction を両方付け加えた体系を $\mathbf{FL_{ecw}}$ ともよぶが、これは $\mathbf{LJ}$ のことである。これらは $\mathbf{FL_e}$ 上の論理である。また（ $*$ や命題定数に関する規則を除けば）、

$\mathbf{FL_e}$ ： $\mathbf{LJ}$ から weakening と contraction を取り除いた体系
$\mathbf{FL_{ew}}$ ： $\mathbf{LJ}$ から contraction を取り除いた体系
$\mathbf{FL_{ec}}$ ： $\mathbf{LJ}$ から weakening を取り除いた体系

であると考えることができる。そしてこれらの sequent system と、そこで証明可能な formula 全体の集合を同一視すれば、$\mathbf{FL_e}, \mathbf{FL_{ew}}, \mathbf{FL_{ec}}$ は部分構造論理であるとみなされる。

ところで、$\mathbf{FL_e}$ にいくつかの始式を付け加えて表現される形式体系は $\mathbf{FL_e}$ 上の論理である。とくに distributive law（分配律)、すなわち任意の formula α , β , γ に対し、

$$\rightarrow (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \supset ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

を始式として、$\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ に付け加えて得られる論理をそれぞれ、$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ と表すことにする。これらの論理の性質は 4 章で議論される。また、

5 章に登場する $\mathbf{CFL_e}$ とは、任意の formula α に対し、

$$\neg\neg\alpha \to \alpha$$

を始式として $\mathbf{FL_e}$ に付け加えた論理である。

定義 2.5 によって、論理とは、三段論法、連言、代入に閉じていて、$\mathbf{FL_e}$ で provable なものを含む formula の集合として定義した。このように抽象的な形で定義された論理全体の集まりは集合の包含関係 $\subseteq$ に関して順序をなす。formula 全体の集合 $\mathbf{\Phi}$ は明らかに最大の論理である。つまり $\mathbf{FL_e}$ 上の論理とは、 $\mathbf{FL_e}$ から $\mathbf{\Phi}$ の間にある論理のことである。$\mathcal{L} = \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L}$ は $\mathbf{FL_e}$上の論理 $\}$ とする。すると、 $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2} \in \mathcal{L}$ に対し、$\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2} \in \mathcal{L}$ となる。和集合 $\mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}$ は必ずしも論理になるとは限らない。そこで、 $\mathbf{L_1} \vee \mathbf{L_2}$ を $\mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}$ を含む最小の論理とする。これにより、$\langle \mathcal{L}, \cap, \vee, \mathbf{FL_e}, \mathbf{\Phi} \rangle$ は、最小元を $\mathbf{FL_e}$、最大元を $\mathbf{\Phi}$ とする有界束になる。

2.3 Commutative Residuated Lattice

論理には、それに対応する代数構造が存在する。本論文では、$\mathbf{FL_e}$ 上の論理について注目しているため、$\mathbf{FL_e}$ に対応する代数構造の基本となる commutative residuated lattice という代数構造をまず説明する。

2.3.1 Commutative Residuated Lattice

定義 2.7 (Commutative Residuated Lattice)

$\mathbf{A}= \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 1 \rangle$ が *commutative residuated lattice* であるとは、以下を満たすことである。

(R1) $\langle A, \cap, \cup \rangle$ は lattice（束）である。

(R2) $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ は 1 を単位元とする commutative monoid である。すなわち任意の x, y, z に対し、

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

(R3) 任意の $x, y, z \in A$ に対して、$x \cdot y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z$

$(R3)$ の規則は $residuation$ とよばれる。
今後、commutative residuated lattice を CRL と略して表すことにする。

さらに、integral CRL、increasing idempotent CRL とはそれぞれ次の条件を満たすような CRL のことである。

$x \cdot y \leq x$ （integrality）

$x \leq x \cdot x$ （increasing idempotency）

integral CRL ではどんな y に対しても $y = 1 \cdot y \leq 1$ が成り立つわけで、したがって 1 が最大元になる。increasing idempotency は、weakly idempotency, square increase などともよばれることがある。

また、CRL を定義している lattice が distributive であるとき、その CRL は distributive であるという。

ところで、先にも述べたように論理にはそれに対応する代数が存在する。$\mathbf{FL_e}$ 上の論理と CRL の関係は 2.2.3 で議論される。$\mathbf{L}$ を $\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ のどれかとしたとき、論理 $\mathbf{L}$ に対応する代数である $\mathbf{L}$-algebra を以下のように定義する。

定義 2.8

代数 $\langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 1 \rangle$ が CRL であるとき、定数 0 を加えた代数 $\mathbf{A}= \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1 \rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-*algebra* という。ここで 0 は A の任意の元でよい。

また、単項演算子 $\sim$ を、

$$\sim \alpha = \alpha \to 0$$

によって定める。 $\cap, \cup, \cdot, \to, \sim, 0, 1$ は、2.3.3 で述べるように論理結合子 $\wedge, \vee, *, \supset, \neg$ と、命題定数 f , t にそれぞれ対応する代数的演算及び定数である。さらに、$\mathbf{FL_e}$-algebra が integrality を満たし、かつ 0 が最小元であるときは $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra という。また $\mathbf{FL_e}$-algebra が increasing idempotency を満たすとき、$\mathbf{FL_{ec}}$-algebra という。

$\mathbf{FL_e}$-algebra の不等式は、sequent に相当する。$\leq$ が sequent の $\to$ に対応すると考えることができる。

命題 2.9

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ において、任意の $x, y \in A$ に対し、

1. $x \leq y \Longleftrightarrow 1 \leq x \to y$
2. $1 \leq x \to x$
3. $x \cdot (x \to y) \leq y$

命題 2.10

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ において、任意の $x, y, z \in A$ に対し、

1. $x = 1 \to x$
2. $x \leq y$ ならば $x \cdot z \leq y \cdot z$
3. $x \leq y$ ならば $z \to x \leq z \to y$
4. $x \leq y$ ならば $y \to z \leq x \to z$
5. $(x \to y) \cdot (y \to z) \leq x \to z$

命題 2.11

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ において、任意の $x, y, z \in A$ に対し、

1. $x \leq \sim\sim x$
2. $\sim x = \sim\sim\sim x$
3. $x \leq y$ ならば $\sim y \leq \sim x$
4. $x \cdot y \cdot z \leq 0$ ならば $x \cdot \sim\sim y \cdot z \leq 0$

2.3.2 CRL に関するいくつかの概念

定義 2.12 (Homomorphism)

2 つの CRL $\mathbf{A} = \langle A, \cap_A, \cup_A, \cdot_A, \to_A, 1_A\rangle$, $\mathbf{B} = \langle B, \cap_B, \cup_B, \cdot_B, \to_B, 1_B\rangle$ に対し、写像 $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ が *homomorphism*（準同型写像）であるとは次の *(1)*,*(2)* を満たすことである。

(1) $f(1_A) = 1_B$

(2) 任意の x, y に対して、$f(x \oplus_A y) = f(x) \oplus_B f(y)$

ただし、$\oplus$ は $\cap, \cup, \cdot, \rightarrow$ を動くものとする。つまり、それらすべての *2* 項演算について *(2)* を満たすということを意味している。今後も記号 $\oplus$ はそのような意味で用いる。

いま写像 f が homomorphism であるとする。

- f が単射のとき、f は embedding（埋め込み）または monomorphism であるという。
- f が全射のとき、f は epimorphism であるという。
- f が全単射のとき、f は isomorphism（同型写像）であるという。

とくに、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間に isomorphism が存在するとき、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は同型（isomorphic）であるという。

命題 2.13

f を CRL $\mathbf{A} = \langle \cap_A, \cup_A, \cdot_A, \rightarrow_A, 1_A \rangle$ から $\mathbf{B} = \langle B, \cap_B, \cup_B, \cdot_B, \rightarrow_B, 1_B \rangle$ への *homomorphism* とする。このとき、

$$x \leq_A y \text{ ならば } f(x) \leq_B f(y)$$

が成り立つ。つまり、f は順序を保つ写像である。

証明）仮定より、$x \cap_A y = x$。よって $f(x \cap_A y) = f(x)$。f は homomorphism だから、$f(x) \cap_B f(y) = f(x)$。すなわち、$f(x) \leq_B f(y)$ となる。

定義 2.14 (Congruence relation)

CRL $\mathbf{A} = \langle, A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 1 \rangle$ 上の *2* 項関係 θ が以下を満たすとき、θ は $\mathbf{A}$ 上の *congruence relation*（合同関係）であるという。

1. θ は A 上の同値関係である。

2. $x_1\theta y_1$ かつ $x_2\theta y_2$ ならば、$(x_1 \oplus x_2)\theta(y_1 \oplus y_2)$。

θ を CRL $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 1\rangle$ 上の congruence relation とする。θ は同値関係でもあるから、$a \in A$ の属する同値類 a/θ を次のように定めることができる。

$$a/\theta = \{x \in A; x\theta a\}$$

また、A の θ による商集合 A/θ を次のように定めることができる。

$$A/\theta = \{a/\theta; a \in A\}$$

定義 2.15 (商代数)

代数 $\mathbf{A}/\theta = \langle A/\theta, \cap', \cup', \cdot', \rightarrow', 1/\theta\rangle$ が CRL $\mathbf{A}= \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 1\rangle$ の *congruence relation* θ による商代数（*quotient algebra*）であるとは、次を満たすことである。
各二項演算 $\oplus, \oplus'$ および、任意の $a/\theta, b/\theta \in A/\theta$ に対して、

$$a/\theta \oplus' b/\theta = (a \oplus b)/\theta。$$

命題 2.16

θ を CRL $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 1\rangle$ 上の *congruence relation* とする。このとき、写像 $f_\theta : A \longrightarrow A/\theta$ を $f_\theta(a) = a/\theta$ で定義すると、f_θ は *epimorphism* となる。

2.3.3 $\mathbf{FL_e}$ 上の論理と Commutative Residuated Lattice の関係

$\mathbf{FL_e}$ 上の論理と CRL との関係について具体的に説明する。

定義 2.17 (付値)

$\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 0, 1\rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-algebra、v を命題変数全体から A への任意の関数とする。この v を、A 上の付値（または *assignment, valuation*）とよぶ。v は次のように帰納的に Φ から A への関数に拡張される。

1. $v(t) = 1, v(f) = 0$

2. $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \cap v(\beta)$
3. $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \cup v(\beta)$
4. $v(\alpha * \beta) = v(\alpha) \cdot v(\beta)$
5. $v(\alpha \supset \beta) = v(\alpha) \rightarrow v(\beta)$
6. $v(\neg\alpha) = v(\alpha) \rightarrow 0 \quad (= \sim v(\alpha)\ )$

命題 2.18 (健全性)

formula α が $\mathbf{FL_e}$ で provable であるならば、任意の $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ 上の任意の付値 v に対して $1 \leq v(\alpha)$。

証明の概略）formula の列 Γ を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ としたとき、すべての formula を $*$ で結んだ formula $\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_m$ を Γ^* で表すことにする。
$\mathbf{FL_e}$ の sequent $\Gamma \rightarrow \beta$ に対して付値 v を、

$$v(\Gamma \rightarrow \beta) = v(\Gamma^* \supset \beta)$$

と定める。ただし、とくに sequent の左辺が空の場合は $v(t \supset \beta)$ とし、右辺が空の場合は $v(\Gamma^* \supset f)$ とする。
まず $\mathbf{FL_e}$ の始式について、

$$1 \leq v(\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$1 \leq v(\rightarrow t)$$

$$1 \leq v(f \rightarrow)$$

が成り立つことは容易にたしかめられる。
そしてあとは $\mathbf{FL_e}$ のすべての推論規則について、任意の $\mathbf{FL_e}$-algebra 上の任意の付値 v に対して、上式が 1 以上になると仮定すると、下の式も 1 以上となることを示せばよい。
たとえば、($\supset$ 左) の場合を以下に示す。
任意の $\mathbf{FL_e}$-algebra 上の任意の付値 v に対して、

$$1 \leq v(\Gamma \rightarrow \alpha) \qquad \text{かつ} \qquad 1 \leq v(\beta, \Pi \rightarrow \delta)$$

を仮定する。すると、

$$v(\Gamma^*) \leq v(\alpha) \qquad \text{かつ} \qquad v(\beta) \cdot v(\Pi) \leq v(\delta)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} v((\alpha \supset \beta) * \Gamma^* * \Pi^*) &= (v(\alpha) \to v(\beta)) \cdot v(\Gamma^*) \cdot v(\Pi^*) \\ \text{$v(\Gamma^*) \leq v(\alpha)$ より、$v(\alpha) \to v(\beta) \leq v(\Gamma^*) \to v(\beta)$ であるから、} & \\ &\leq (v(\Gamma^*) \to v(\beta)) \cdot v(\Gamma^*) \cdot v(\Pi^*) \\ \text{$v(\Gamma^*) \cdot (v(\Gamma^*) \to v(\beta)) \leq v(\beta)$ なので、} & \\ &\leq v(\beta) \cdot v(Pi^*) \end{aligned}$$

よって、

$$v((\alpha \supset \beta) * \Gamma^* * \Pi^*) \leq v(\delta)$$

したがって、

$$1 \leq v((\alpha \supset \beta) * \Gamma^* * \Pi^*) \to v(\delta) = v(((\alpha \supset \beta) * \Gamma^* * \Pi^*) \supset \delta) = v(\alpha \supset \beta, \Gamma, \Pi \to \delta)$$

がいえた。

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ 上のすべての付値 v に対して、$1 \leq v(\alpha)$ となるような formula α 全体の集合を $L(\mathbf{A})$ で表す。

命題 2.19

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ により定まる集合 $L(\mathbf{A})$ は $\mathbf{FL_e}$ 上の論理である。

証明）formula の集合 $L(\mathbf{A})$ が $\mathbf{FL_e}$ 上の論理となる条件（定義 2.5）をすべて満たしていることをチェックする。

1. $\alpha \in \mathbf{FL_e}$ ならば、$\mathbf{FL_e}$ の健全性（命題 2.18）により、$\alpha \in L(\mathbf{A})$ であるから、$\mathbf{FL_e} \subseteq L(\mathbf{A})$。
2. $\alpha, \alpha \supset \beta \in L(\mathbf{A})$ とすると、$\mathbf{A}$ 上の任意の付値 v に対して、$1 \leq v(\alpha)$ かつ $1 \leq v(\alpha \supset \beta)$。後の式から、$v(\alpha) \leq v(\beta)$。前の式とあわせて、$1 \leq v(\beta)$ となる。
3. $\alpha \in L(\mathbf{A})$ とすると、$\mathbf{A}$ 上のどんな付値に対しても、$1 \leq v(\alpha)$。したがって、$v(\beta) \leq v(\alpha) \cap v(\beta)$。さらにここで $\beta \in L(\mathbf{A})$ だとすれば、$1 \leq v(\beta)$ となっているから、$1 \leq v(\alpha) \cap v(\beta)$ になる。つまり、$\alpha, \beta \in L(\mathbf{A})$ ならば、$\alpha \wedge \beta \in L(\mathbf{A})$ がいえる。
4. 最後に $L(\mathbf{A})$ が代入に関して閉じていることを示す。いま、命題変数 p を含むような、$L(\mathbf{A})$ に属す formula を $\alpha(p)$ とする。また ϕ を任意の formula とし、 α の中の p をすべて ϕ で置き換えて得られる formula を $\alpha(\phi)$ と表す。 $\mathbf{A}$ 上の任意の付値 v に対

し、 $\mathbf{A}$ 上の付値 w を

$$w(q) = \begin{cases} v(q) & (q \text{ が } p \text{ と異なる命題変数のとき}) \\ v(\phi) & (q \text{ が } p \text{ に等しいとき}) \end{cases}$$

により定める。すると帰納法より、

$$w(\alpha(p)) = v(\alpha(\phi))$$

が成り立つ。 $\alpha(p)$ は $L(\mathbf{A})$ に属すから $1 \leq w(\alpha(p)) = v(\alpha(\phi))$ が任意の付値 v に対して成り立つ。したがって $\alpha(\phi) \in L(\mathbf{A})$ であり、L($\mathbf{A}$) は代入に関して閉じている。

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ に対して、論理 $L(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ で特徴付けられる論理という。命題 2.19 によりどんな $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ もある $\mathbf{FL_e}$ 上の論理を特徴づけるが、逆に、どんな $\mathbf{FL_e}$ 上の論理もある $\mathbf{FL_e}$-algebra で特徴づけられることが次の命題により示される。

命題 2.20

任意の $\mathbf{FL_e}$ 上の論理 $\mathbf{L}$ に対して、

$$\mathbf{L} = L(\mathbf{A})$$

となるような $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ が存在する。

証明）$\mathbf{L}$ に対するリンデンバウム代数とよばれる $\mathbf{FL_e}$-algebra を以下のように構成することにより証明する。
まず、formula α, β に対して二項関係 $\equiv$ を

$$\alpha \equiv \beta \iff \alpha \supset \beta \in \mathbf{L} \text{ かつ} \beta \supset \alpha \in \mathbf{L}$$

と定める。つまり $\alpha \equiv \beta$ は α と β が論理 $\mathbf{L}$ 上で論理的に同値であることを意味する。すると、

(1) この $\equiv$ は$\mathbf{\Phi}$上の論理結合子に関する合同関係になっている。

次にこの合同関係 $\equiv$ をつかって、$\mathbf{\Phi}$ の $\equiv$ に関する商集合 $\mathbf{\Phi}/\equiv$ をつくり、formula ϕ の属する同値類を $[\phi]$ で表す。
この $\mathbf{\Phi}/\equiv$ の 2 元 $[\alpha], [\beta]$ に対する演算 $\cap, \cup, \cdot, \to$ を、

$$[\alpha] \cap [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

$$[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$$

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

$$[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \supset \beta]$$

と定めると、

$$(2)\mathbf{A} = \langle \mathbf{\Phi}/\equiv, \cap, \cup, \cdot, \to, [f], [t] \rangle \text{ は } \mathbf{FL_e}-\text{algebra となっている。}$$

すると、 $\mathbf{L} = L(\mathbf{A})$ である。すなわち、

$$(3)\alpha \in \mathbf{L} \Longleftrightarrow \mathbf{A} \text{ 上の任意の付値 } v \text{ に対し、} [t] \leq v(\alpha)$$

となる。
(1), (2), (3) を以下に示す。

(1) $\alpha \equiv \beta, \alpha' \equiv \beta'$ ならば、任意の論理結合子に対して $\alpha \oplus \alpha' \equiv \beta \oplus \beta'$ となることを示す。$\supset$ の場合を例にとると、まず、

$$(\beta \supset \alpha) * (\alpha' \supset \beta') \in \mathbf{L}$$

である。また、

$$((\beta \supset \alpha) * (\alpha' \supset \beta')) \supset ((\alpha \supset \alpha') \supset (\beta \supset \beta'))$$

は $\mathbf{FL_e}$ で provable である。したがって、

$$((\alpha \supset \alpha') \supset (\beta \supset \beta')) \in \mathbf{L}$$

となる。
α を β で、 α' を β' で置き換えれば、$(\beta \supset \beta') \supset (\alpha \supset \alpha') \in \mathbf{L}$ もいえる。

(2) ここでは residuation だけを示す。その前にまず、

$$\begin{aligned}
[\phi] \leq [\psi] &\Longleftrightarrow [\phi] \cap [\psi] = [\phi] \\
&\Longleftrightarrow [\phi \wedge \psi] = [\phi] \\
&\Longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \phi \in \mathbf{L} \text{ かつ} \phi \supset (\phi \wedge \psi) \in \mathbf{L} \\
&\Longleftrightarrow \phi \supset \psi \in \mathbf{L}
\end{aligned}$$

このことを使うと、

$$\begin{aligned}
[\alpha] \cdot [\beta] \leq [\gamma] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\alpha * \beta] \leq [\gamma] \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha * \beta \to \gamma \in \mathbf{L}
\end{aligned}$$

一方、

$$[\alpha] \le [\beta] \to [\gamma] = [\beta \supset \gamma] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \to \beta \supset \gamma \in \mathbf{L}$$

したがって、

$$[\alpha] \cdot [\beta] \le [\gamma] \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\alpha] \le [\beta] \to [\gamma]$$

がいえた。

(3) まず次のことを示す。
$\mathbf{A}$ 上の付値 v_0 を、各命題変数 p に対し、$v_0(p) = [p]$ と定める。すると帰納法により、任意の formula ϕ に対して、$v_0(\phi) = [\phi]$ となる。ところで (2) に示したように、

$$[\phi] \le [\psi] \Longleftrightarrow \phi \supset \psi \in \mathbf{L}$$

とくに ϕ として t をとれば、

$$\begin{aligned} [t] \le [\psi] \quad &\Longleftrightarrow \quad t \supset \psi \in \mathbf{L} \\ &\Longleftrightarrow \quad \psi \in \mathbf{L} \end{aligned} \qquad (\dagger 1)$$

したがって、

$$[t] \le v_0(\psi) \Longleftrightarrow \psi \in \mathbf{L} \qquad (\dagger 2)$$

が得られる。

(3) の必要性）対偶をとり、 $\alpha \notin \mathbf{L}$ とすると、 $(\dagger 2)$ より、

$$[t] \not\le v_0(\alpha)。$$

ゆえにある付値 v に対し $[t] \not\le v(\alpha)$。

(3) の十分性）$\alpha \in \mathbf{L}$ とし、また v を $\mathbf{A}$ 上の任意の付値とする。いま α に現れる命題変数を $p_1, \cdots, p_k$ とし、さらに $v(p_i) = [\rho_i]$ $(i = 1, \cdots, k)$ と仮定する。すると帰納法により、

$$v(\alpha) = [\alpha^\star]$$

となる。ただし、 $\alpha^\star$ は α の中に現れる $p_1, \cdots, p_k$ をそれぞれ $\rho_1, \cdots, \rho_k$ で置き換えて得られる formula とする。すると、$\mathbf{L}$ は代入に関して閉じているから、

$$\alpha^\star \in \mathbf{L}$$

したがって $(\dagger 1)$ より、$[t] \le [\alpha^\star] = v(\alpha)$ となる。

命題 2.21 (完全性)

formula α が、任意の $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ 上の任意の付値 v に対して $1 \leq v(\alpha)$ であるならば、α は $\mathbf{FL_e}$ で provable である。

証明）対偶を示す。いま、formula α が not provable であるとする。このとき、命題 2.20 より論理 $\mathbf{FL_e}$ に対するリンデンバウム代数 $\mathbf{A}$ を考えると、命題 2.20 の証明で用いた $\mathbf{A}$ 上の付値 v_0 で、$1 \not\leq v_0(\alpha)$ が成り立つ。

こうして $\mathbf{FL_e}$ と $\mathbf{FL_e}$-algebra の間に健全性と完全性が成り立つことが示された。$\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ についても同様の議論ができる。

命題 2.22

任意の formula α に対し、

1. α が $\mathbf{FL_{ew}}$ で provable
$\iff$ 任意の $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra とその上の任意の付値 v に対して、 $1 \leq v(\alpha)$
2. α が $\mathbf{FL_{ec}}$ で provable
$\iff$ 任意の $\mathbf{FL_{ec}}$-algebra とその上の任意の付値 v に対して、 $1 \leq v(\alpha)$

いま、$\mathbf{FL_e}$ 上の論理 $\mathbf{L}$ を $\mathbf{FL_e}$ に、ある始式を付け加えてできたものとする。スキーマであるところのその式（sequent）は、そこに現れている変数が m 個以下で、n 個以下の formula から成っているとしよう。ここで、各 formula を記号列とみて、メタな記号 F_i $(i \in \{1, \cdots, m\})$ を用い、

$$F_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$

と表すことにする。すると式は、

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset), \cdots, F_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$
$$\to F_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$

と書ける。ここに現れる α_i を formula に置き換えたものはすべて $\mathbf{L}$ の始式である。この始式のスキーマを (S1) とよんだとき、$\mathbf{L}$ のことを

$$\mathbf{L} = \mathbf{FL_e} + (\mathrm{S1})$$

と表すことにする。
しかし、これからの議論においては、始式に現れる formula は一つだけであると仮定しても十分であることを注意しておく。というのは、$\mathbf{FL_e}$ 上の論理において、(S1) を始式とすることは、左辺の formula を $*$ ですべてつなぎ、さらにそれを右辺の formula と $\supset$ で結んだ formula がひとつ右辺にある式、

$$\to F_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset) * \cdots * F_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$

$$\supset F_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$

を始式にもつことと同じだということに依る。すなわち、この始式を (S2) とよべば、

$$\mathbf{FL_e} + (\mathrm{S1}) = \mathbf{FL_e} + (\mathrm{S2})$$

である。また、式 (S2) の右辺を、記号列とみてメタな記号 F を用い、

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, f, t, \wedge, \vee, *, \supset)$$

と、まとめて表すことにする。

さて、ここで $\mathbf{L}$ に対して、健全性と完全性が成り立つような代数（のクラス）はどのようなものか考えてみたい。$\mathbf{FL_e}$+(S2) の形式体系で考えることにする。結論からいうと、$\mathbf{FL_e}$ に次の不等式を公理として付け加えた代数（のクラス）がそれに相当する。

$$1 \leq F(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to)$$

一方、こんどは $\mathbf{FL_e}$-algebra に対して、ある不等式を考える。不等式に現れる変数は高々 m 個とする。左辺と右辺の項（term）を記号列とみてメタな記号 G_l , G_r を用い、不等式を、

$$G_l(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to) \leq G_r(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to)$$

で表すことにする。しかし、これからの議論では左辺を 1 の場合に限ってもよい。$\mathbf{FL_e}$-algebra の residuation の規則から、

$$1 \leq G_l(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to) \to G_r(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to)$$

とできるからである。そこで右辺をまとめて、

$$1 \leq G(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 1, \cap, \cup, \cdot, \to)$$

とする。
ここで、この不等式を (E) したとき、これを公理にもつような $\mathbf{FL_e}$-algebra を、

$$\mathbf{FL_e}\text{−algebra}[(E)]$$

とよぶことにする。

このように $\mathbf{FL_e}$-algebra に何かの不等式を公理に付け加えた代数のクラスには、じつはそれと健全性、完全性が成り立つような $\mathbf{FL_e}$ 上の論理が存在する。それは次の式を始式に付け加えて得られる $\mathbf{FL_e}$ 上の論理である。

$$\to G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, t, f, \wedge, \vee, *, \supset)$$

証明は省略するが、$\mathbf{FL_e}$ の健全性と完全性を示したのと同様の方法でこれらの結果を得ることができる。

また、以上の議論は $\mathbf{FL_e}$ の代わりに $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ に置き換えても成立する。

例 2.23

- $\mathbf{DFL_e}$ と $\mathbf{FL_e}$-algebra $[x \cap (y \cup z) \leq (x \cap y) \cup (x \cap z)]$
- $\mathbf{DFL_{ew}}$ と $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra $[x \cap (y \cup z) \leq (x \cap y) \cup (x \cap z)]$
- $\mathbf{DFL_{ec}}$ と $\mathbf{FL_{ec}}$-algebra $[x \cap (y \cup z) \leq (x \cap y) \cup (x \cap z)]$
- $\mathbf{CFL_e}$ と $\mathbf{FL_e}$-algebra $[x \leq \sim\sim x]$

の間にはそれぞれ健全性と完全性が成り立っている。

第3章　$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ の finite model propertyについて

この章では、$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ の finite model property（有限モデル性）について考える。$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ とは、$\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ にそれぞれ

$$\to (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \supset ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

を始式に加えたものである。これに相当する代数での性質は、分配律

$$x \cap (y \cup z) \leq (x \cap y) \cup (x \cap z) \qquad (\ddagger)$$

であり、これを満たすとき、$\cap$, $\cup$ は distributive lattice の演算となる。$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ に対応する代数、 $\mathbf{FL_e}$-algebra[($\ddagger$)] , $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra[($\ddagger$)] , $\mathbf{FL_{ec}}$-algebra[($\ddagger$)] をそれぞれ、$\mathbf{DFL_e}$-algebra , $\mathbf{DFL_{ew}}$-algebra , $\mathbf{DFL_{ec}}$-algebra とよぶ。

ある論理で finite model property が成り立つとは、その論理で not provable であるような formula に対し、それを偽にするような有限モデルが必ず存在するということである。例えば、$\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ では finite model property が成り立っている。すなわち、任意の formula ϕ に対し、

- $\mathbf{FL_e}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{FL_e}$-algebra が存在する。
- $\mathbf{FL_{ew}}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra が存在する。
- $\mathbf{FL_{ec}}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{FL_{ec}}$-algebra が存在する。

ということがすでに知られている。
$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ で finite model property が成立するかどうかは現時点で未解決の問題である。ここでは downward-closed な集合というものを考えることで、$\vee$ を含まない formula に関してだけは、finite model property が成り立つということを示した。すなわち、$\vee$ のない formula が not provable であれば、それを偽にするような有限個の要素から成る代数モデルとその上の付値が必ず存在するという結果が得られた。

3.1 downward-closed な集合

$\mathbf{A} = \langle A, \cap_A, \cup_A, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-algebra とする。また、 $\cap_A$, $\cup_A$ によって定まる A 上の順序を $\leq_A$ とする。

$X \subseteq A$ が *downword-closed* であるとは、

$$(\forall x, y \in A)[x \in X \text{ かつ } y \leq_A x \text{ ならば } y \in X]$$

を満たすことである。また、 A の downword-closed な集合をすべて集めた集合を $O(A)$ で表す。ここで、$X \subseteq A$ に対して、

$$\overline{X} = \{a \mid (\exists x \in X)[a \leq_A x]\} \quad (\in O(A))$$

と定める。

命題 3.1

$X \subseteq A$ に対して、 $\overline{X}$ は 、 X を含む最小の downward-closed な集合になる。

証明)

- $X \subseteq \overline{X}$ は明らか。
- つぎに $\overline{X}$ が downward-closed になることを示す。$a \in \overline{X}$, $b \leq_A a$ とすると、

$$\begin{aligned} a \in \overline{X} &\iff (\exists x \in X)[a \leq_A x] \\ &\implies (\exists x \in X)[b \leq_A x] \\ &\iff b \in \overline{X} \end{aligned}$$

  したがって、$\overline{X} \in O(A)$。

- $Y \in O(A)$ かつ $X \subseteq Y$ なる Y を考えると、必ず $\overline{X} \subseteq Y$ となることを示す。いま $\overline{X}$ の元 a を任意にとる。すると、ある X の元 a_x が存在して $a \leq_A a_x$ となっている。すると $X \subseteq Y$ なので $a_x \in Y$。ここで Y は downward-closed であるから、$a \in Y$。

以上のことから $\overline{X}$ が X を含む downward-closed な集合のうち最小のものであることがわかる。

3.2 downward-closed な集合による distributive CRL の生成

定義 3.2

X と Y を $\mathbf{A}$ の部分集合とするとき、演算 $\star$, $\Rightarrow$ を次のように定義する。

$$X \star Y = \overline{X \bullet Y}$$

$$X \Rightarrow Y = \{a \mid X \bullet \{a\} \subseteq Y\}$$

ただし、 $X \bullet Y = \{a \cdot b \mid a \in X$ かつ $b \in Y\}$ である。

補題 3.3

X , Y が $O(A)$ に属すならば $X \star Y$, $X \Rightarrow Y$ もまた $O(A)$ に属す。

証明） $*$ に関してはその定義から明らかである。$\Rightarrow$ については次に示すように、$Y \in O(A)$ でありさえすれば $X \Rightarrow Y \in O(A)$ となることがわかる。 $X \Rightarrow Y$ が downward-closed であることを示すには、すべての $x, y \in A$ に対し、 $a \in X \Rightarrow Y, b \leq_A a$ ならば $b \in X \Rightarrow Y$ であることをいえばよい。ここで $a \in X \Rightarrow Y$ とは、 $x \in X$ ならば $x \cdot a \in Y$ であることと同値なので、いま $x \in X$ をかってにとると、 $x \cdot a \in Y$ となる。また、 $b \leq_A a$ より $x \cdot b \leq_A x \cdot a$ であるから、 Y が downward-closed だとしたら、 $x \cdot b \in Y$ である。 つまり、 $x \in X$ ならば $x \cdot b \in Y$ となる。ゆえに、 $b \in X \Rightarrow Y$ がいえたことになる。したがって Y が downward-closed ならば、 $X \Rightarrow Y$ もまた downward-closed である。

以下では $x \in \mathbf{A}$ に対し、downward-closed な集合 $\{a \mid a \leq_A x\}$ を $\downarrow x$ と書くことにする。とくに $\downarrow 1$ を I と表す。

補題 3.4

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap_A, \cup_A, \cdot, \rightarrow, 0, 1\rangle$ に対し、 $O(\mathbf{A})$ を $\langle O(A), \cap, \cup, \star, \Rightarrow, D, I\rangle$ により定める。このとき次のことが成り立つ。

1. $O(\mathbf{A})$ は $\mathbf{DFL_e}$-algebra である。
2. $\mathbf{A}$ が $\mathbf{FL_{ew}}$-algebra のとき、 $D = \phi$ とすれば、$O(\mathbf{A})$ は $\mathbf{DFL_{ew}}$-algebra である。

3. $\mathbf{A}$ が $\mathbf{FL_{ec}}$-algebra のとき、$O(\mathbf{A})$ は $\mathbf{DFL_{ec}}$-algebra である。

ただし、ここで $\cap$, $\cup$ はふつうの集合演算である共通部分、和集合を表す。また D は downward-closed な A の部分集合ならばなんでもよい。したがって $O(A)$ 上の順序は集合の包含関係になっている。

（証明）以下の 5 つのことを示せばよい。

(1) $\langle O(A), \cap, \cup, \emptyset, A\rangle$ は、distributive lattice である。
(2) $\langle O(A), \star, I\rangle$ は、commutative monoid である。
(3) $X \star Z \subseteq Y \Longleftrightarrow Z \subseteq X \Rightarrow Y$ となる。
(4) $\mathbf{A}$ で任意の $x, y \in A$ に対し、 $x \cdot y \leq x$ が成り立っていれば、 $O(A)$ でも任意の $X, Y \in O(A)$ に対し、$X \star Y \subseteq X$ が成り立っている。（integrality の保存）
(5) $\mathbf{A}$ で任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq x \cdot x$ が成り立っていれば、 $O(A)$ でも任意の $X \in O(A)$ に対し、$X \subseteq X \star X$ が成り立っている。（increasing idempotency の保存）

(1) $\cap$, $\cup$ は集合の束の演算であるから明らかである。
(2) まず、任意の $X, Y, Z \in O(A)$ に対して、

$$a \in (X \star Y) \star Z \Longleftrightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(\exists z \in Z)(\exists b \in X \star Y)[a \leq_A b \cdot z \text{ かつ } b \leq_A x \cdot y]$$

$$a \in X \star (Y \star Z) \Longleftrightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(\exists z \in Z)(\exists c \in Y \star Z)[a \leq_A x \cdot c \text{ かつ } c \leq_A y \cdot z]$$

である。ここで

$$c \leq_A y \cdot z \text{ ならば } x \cdot c \leq_A x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$b \leq_A x \cdot y \text{ ならば } b \cdot z \leq_A (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

であるから、b として $x \cdot y$、c として $y \cdot z$ とすることで、

$$(X \star Y) \star Z = X \star (Y \star Z)$$

となり、結合律がいえる。また、 $\mathbf{A}$ は $\cdot$ に関して交換律が満たすから、 $X \cdot Y = Y \cdot X$ となり、したがって

$$X \star Y = \overline{X \bullet Y} = \overline{Y \bullet X} = Y \star X$$

より、 $\star$ に関しての交換律も成立する。あとは任意の X について

$$X \star I = X$$

となることをいえばよい。いま $a \in X \star I$ を任意にとると、$a \leq_A x \cdot i$ となるような $x \in X$, $i \in I$ が必ずある。ここで $i \leq_A 1$ なので $x \cdot i \leq_A x$ となり、 $a \leq_A x$。すると X が downward-closed であることから $a \in X$ である。したがって $X \star I \subseteq X$。他方、 $x \in X$ のとき、$x = x \cdot 1 \in X \star I$ なので、 $X \subseteq X \star I$。よって I は単位元である。

(3) 任意の $X, Y, Z \in O(A)$ に対して、
$\Longrightarrow$) どのような $z \in Z$ をとっても、$X \star Z \subseteq Y$ を仮定したとき、$z \in X \Rightarrow Y$ となればよい。ところで、

$$\begin{aligned} z \in (X \Rightarrow Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad X \bullet \{z\} \subseteq Y \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in X \text{ ならば } x \cdot z \in Y \end{aligned}$$

である。いま、$z \in Z$ で $x \in X$ とすると、$x \cdot z \in X \bullet Z \subseteq X \star Z$。したがって仮定の $X \star Z \subseteq Y$ より、$x \cdot z \in Y$。
$\Longleftarrow$) どのような $a \in X \star Z$ をとっても、$Z \subseteq X \Rightarrow Y$ を仮定したとき、$a \in Y$ となればよい。そこで $a \in X \star Z$ とすると、$a \leq_A x \cdot z$ となるような $x \in X,\ z \in Z$ が存在する。$Z \subseteq X \Rightarrow Y$ を仮定しているので、$z \in X \Rightarrow Y$。したがって $x \in X$ とあわせて $x \cdot z \in Y$ である。いま Y は downward-closed だから、$a \leq_A x \cdot z$ より、$a \in Y$ がいえる。
(4) 任意の $a \in X \star Y$ に対し、ある $x \in X, y \in Y$ があって $a \leq_A x \cdot y$ となっている。$x \cdot y \leq x$ であれば、$a \leq x$。X は downward-closed だから、$a \in X$。したがって $X \star Y \subseteq X$。
(5) 任意の $x \in X$ に対して、$x \leq x \cdot x \in X \star X$ なので $x \in X \star X$ である。

3.3 $\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ における $\vee$ のない formula に限った finite model property

補題 3.5

$h_A : A \longrightarrow O(A)$ を $h_A(x) = \downarrow x$ により定めると、h_A はつぎの性質を持つ。

1. $h_A(x \cap_A y) = h_A(x) \cap h_A(y)$
2. $h_A(x \cdot y) = h_A(x) \star h_A(y)$
3. $h_A(x \to y) = h_A(x) \Rightarrow h_A(y)$
4. $h_A(1) = I$
5. $h_A(x \cup_A y) = h_A(x) \cup h_A(y)$ は、一般には成り立たない。

証明）

2. まず、$a \in h_A(x \cdot y) = \downarrow x \cdot y$ をとると $a \leq_A x \cdot y$。また $x \in \downarrow x$ 、$y \in \downarrow y$ なので $x \cdot y \in (\downarrow x) \bullet (\downarrow y)$。$(\downarrow x) \bullet (\downarrow y) \subseteq (\downarrow x) \star (\downarrow y)$ だから $x \cdot y \in (\downarrow x) \star (\downarrow y)$。$(\downarrow x) \star (\downarrow y)$ は downward-closed であるから、$a \in (\downarrow x) \star (\downarrow y) = h_A(x) \star h_A(y)$ とな

る。逆に、 $a \in h_A(x) \star h_A(y)$ とすると、ある x', y' があって、$x' \leq_A x$ かつ $y' \leq_A y$ かつ $a \leq_A x' \cdot y'$。すると $x' \cdot y' \leq_A x \cdot y$ であるので、$a \leq_A x \cdot y$ となり、$a \in h_A(x \cdot y)$ となる。

3. まず、 $a \in h_A(x \to y) = \downarrow (x \to y)$ をとると $a \leq_A x \to y$。よって $x \cdot a \leq_A y$。ところで任意の $x' \in \downarrow x$ に対して、 $x' \cdot a \leq_A x \cdot a$ となるから、 $x \cdot a \leq_A y$ とあわせて $x' \cdot a \leq_A y$ となり、 $x' \cdot a \in \downarrow y$。すなわち、$(\downarrow x) \bullet \{a\} \subseteq (\downarrow y)$。したがって $a \in (\downarrow x) \Rightarrow (\downarrow y) = h_A(x) \Rightarrow h_A(y)$。他方、 $a \in (\downarrow x) \Rightarrow (\downarrow y)$ をとると、$(\downarrow x) \bullet \{a\} \subseteq (\downarrow y)$ であるから、とくに $x \cdot a \in (\downarrow y)$。よって $x \cdot a \leq_A y$。すなわち、$a \leq_A x \to y$ となり、$a \in h_A(x \to y)$ がいえる。
5. $x \not\leq Ay$ かつ $y \not\leq_A x$ の場合を考える。
このとき、 $x \cup_A y \in \downarrow x$ だとすると、

$$\begin{aligned} x \cup_A y \leq_A x &\iff (x \cup_A y) \cup_A x = x \\ &\iff x \cup_A y = x \\ &\iff y \leq_A x \end{aligned}$$

となってしまい、仮定に矛盾する。したがって、$x \cup_A y \notin \downarrow x$ である。同様に、$x \cup_A y \notin \downarrow y$ でもある。ゆえに、$x \cup_A y \notin \downarrow x \cup \downarrow y = h_A(x) \cup h_A(y)$ となる。しかし、$x \cup_A y \leq_A x \cup_A y$ すなわち、$x \cup_A y \in \downarrow (x \cup_A y) = h_A(x \cup_A y)$ であるから、一般に $h_A(x \cup_A y) = h_A \cup h_A(y)$ は成り立たない。

定理 3.6

ϕ が論理結合子 $\vee$ を含まない formula のとき、以下のことが成り立つ。

1. ϕ が $\mathbf{FL_e}$ で provable $\iff$ ϕ が $\mathbf{DFL_e}$ で provable

2. ϕ が $\mathbf{FL_{ew}}$ で provable $\iff$ ϕ が $\mathbf{DFL_{ew}}$ で provable

3. ϕ が $\mathbf{FL_{ec}}$ で provable $\iff$ ϕ が $\mathbf{DFL_{ec}}$ で provable

証明）まず $\mathbf{FL_e}$ について考える。十分性は明らかなので必要性を示す。対偶をとって、$\mathbf{FL_e}$ で ϕ が not provable ならば、 $\mathbf{DFL_e}$ でも not provable になることをいえばよい。ここで、

$\mathbf{FL_e}$ で ϕ が not provable
$\iff$ ある $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ と、$\mathbf{A}$ 上の付値 f があって、 $1_A \not\leq_A f(\phi)$

$\mathbf{DFL_e}$ で ϕ が not provable
$\Longleftrightarrow$ ある $\mathbf{DFL_e}$-algebra $\mathbf{B}$ と、$\mathbf{B}$ 上の付値 g があって、$1_B \not\leq_B g(\phi)$

であるから、 いま $1_A \not\leq_A f(\phi)$ となるような、ある $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ とその上の付値 f が存在すると仮定する。すると、補題 3.4 より、 $O(\mathbf{A}) = \langle O(A), \cap, \cup, \star, \Rightarrow, D, I_A \rangle$ という $\mathbf{DFL_e}$-algebra を考えることができる。ここで h_A を補題 3.5 と同じ写像とすれば、$O(\mathbf{A})$ 上の付値 g を各命題変数に対し、$g(p) = h_A(f(p))$ と定めると、帰納法により、

$$g(\phi) = h_A(f(\phi))$$

となることがわかる。いま $I_A \subseteq g(\phi)$ とすると、$I_A \subseteq h_A(f(\phi))$ である。しかし、$1_A \leq_A I_A$ であるから、$1_A \in h_A(f(\phi)) =\downarrow f(\phi)$。つまり、 $1_A \leq_A f(\phi)$ となり、仮定に矛盾してしまう。したがって、 $I_A \not\subseteq g(\phi)$。つまり、$\phi$ は $O(\mathbf{A})$ で偽となる。
また、補題 3.4 でみたとおり、$\mathbf{A}$ での integrality と increasing idempotency は $O(\mathbf{A})$ でも保存されるため、$\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ の場合についても証明ができる。

定理 3.7

ϕ が $\vee$ のない formula のとき、以下のことが成り立つ。

1. $\mathbf{DFL_e}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{DFL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ が存在する。

2. $\mathbf{DFL_{ew}}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{DFL_{ew}}$-algebra $\mathbf{A}$ が存在する。

3. $\mathbf{DFL_{ec}}$ で ϕ が not provable ならば、ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{DFL_{ec}}$-algebra $\mathbf{A}$ が存在する。

（証明）$\mathbf{DFL_e}$ で ϕ が not provable ならば、定理 3.6 より、$\mathbf{FL_e}$ でも ϕ は not provable。$\mathbf{FL_e}$ は finite model property を持つことがわかっているので、 ϕ を偽にするような有限個の要素からなる $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A}$ が存在する。すると、定理 3.6 を証明したときと同様に、その $\mathbf{A}$ から、$\mathbf{DFL_e}$-algebra $O(\mathbf{A})$ をつくることができる。ここで、 $\mathbf{A}$ が有限ならば、$O(\mathbf{A})$ も有限となる。つまり、ϕ は有限の $\mathbf{DFL_e}$-algebra で偽になる。
$\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ の場合も同様。

こうして $\vee$ のない formula に関しては、$\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ec}}$ の証明可能性はそれぞれ、$\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ と一致するという結果が定理 3.6 で得られた。そして、それを用いることで定理 3.7 を示した。定理 3.7 は、$\vee$ のない formula に限った $\mathbf{DFL_e}$, $\mathbf{DFL_{ew}}$, $\mathbf{DFL_{ec}}$ の finite model property である。

第4章　closure operatorを用いたGlivenkoの定理の証明

この章では、Glivenko の定理に関する Galatos-Ono の結果に対し、closure operator を用いた別証明を与える。

4.1　closure operatorによる$\mathbf{FL_e}$-algebraの生成

補題 4.1

任意の commutative monoid $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$ に対して、$\wp(\mathbf{M}) = \langle \wp(M), \cap, \cup, \bullet, \Rightarrow, O, \{1\}\rangle$ は complete $\mathbf{FL_e}$-algebra となっている。ただし、ここで $\cap$, $\cup$ は集合の共通部分と和集合のふつうの演算であり、 $\bullet$, $\Rightarrow$ は、すべての $X, Y \subseteq M$ に対し、

$$X \bullet Y = \{a \cdot b \mid a \in X \text{ かつ } b \in Y\}$$

$$X \Rightarrow Y = \{a \in M \mid X \bullet \{c\} \subseteq Y\}$$

で定めたものである。また O は、 M の部分集合ならばなんでもよい。

定義 4.2 (closure operator)

$\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{P}= \langle P, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ の上の写像 h がすべての $x, y \in P$ について以下の条件を満たすとき、 h を *closure operator* という。

(c1) $x \leq h(x)$

(c2) $h(h(x)) \leq h(x)$

(c3) $x \leq y$ ならば、$h(x) \leq h(y)$

(c4) $h(x) \cdot h(y) \leq h(x \cdot y)$

h を $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{P}$ の上の closure operator としたとき、 $x = h(x)$ となるような $x \in P$ を h-*closed* であるという。h-closed な P の元すべてからなる集合を $C_h(P)$ で表す。

もし x と y が共に h-closed だったならば、 $x \cap y$ と $x \to y$ もまた h-closed となる。
なぜならば、 $x \cap y \leq x$ および $x \cap y \leq y$ より、($c3$) を使うと、$h(x \cap y) \leq h(x)$ および $h(x \cap y) \leq h(y)$ である。 x と y が、h-closed だから $h(x \cap y) \leq x$ かつ $h(x \cap y) \leq y$。よって、 $h(x \cap y) \leq x \cap y$ となる。逆は ($c1$) より明らか。したがって、 $x \cap y$ は h-closed である。
また、 $x \cdot (x \to y) \leq y$ であるから、(c3) により、$h(x \cdot (x \to y)) \leq h(y)$ となる。そしてここで (c4) を用いると、$h(x) \cdot h(x \to y) \leq h(y)$ 。よって、 $h(x \to y) \leq h(x) \to h(y)$ である。x , y は h-closed なので、$h(x \to y) \leq x \to y$ を得る。そして逆は ($c1$) より明らかだから、$h(x \to y)$ は h-closed である。
しかし、 $x \cup y$ と $x \cdot y$ はつねにそうなるとは限らない。そこでいま演算 $\cup_{c_h}$, $\cdot_{c_h}$ を、

$$x \cup_{c_h} y = h(x \cup y)$$

$$x \cdot_{c_h} y = h(x \cdot y)$$

で定義すると、次のことがいえる。

定理 4.3

$\mathbf{P}= \langle P, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1 \rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-algebra とし、 h を $\mathbf{P}$ の上の closure operator とする。このとき、代数 $C_h(\mathbf{P}) = \langle C_h(P), \cap, \cup_{c_h}, \cdot_{c_h}, \to, d, h(1) \rangle$ は、 $\mathbf{FL_e}$-algebra となる。d は $C_h(P)$ の要素ならばなんでもよい。
また、もし $\mathbf{P}$ が integral だったときは、d として $h(0)(=0)$ をとれば、$C_h(\mathbf{P})$ もまた integral になり、もし $\mathbf{P}$ が increasing idempotent のときは、$C_h(\mathbf{P})$ もまた increasing idempotent となる。そして $\mathbf{P}$ が complete のときは、$C_h(\mathbf{P})$ もまた complete である。

証明）ここでは、 $C_h(\mathbf{P})$ で、

$$x \cdot_{C_h} y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z$$

が成り立つことのみを示しておく。
z が h-closed のとき、

$$x \cdot y \leq z \Longleftrightarrow h(x \cdot y) \leq z$$

がいえる。そして $h(x \cdot y) = x \cdot_{C_h} y$ である。

補題 4.1 と定理 4.3 を併せ用いることで次の系を得る。

系 4.4

commutative monoid $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$ と $\wp(\mathbf{M})$ 上の closure operator h があるとき、$\mathbf{C_{hM}} = \langle C_h(\wp(M)), \cap, \cup_{C_h}, \bullet_{C_h}, \Rightarrow, D, h(\{1\})\rangle$ は、complete $\mathbf{FL_e}$-algebra となる。ただし D は、M の C-closed な部分集合ならばなんでもよい。

4.2 double negation と closure operator

$\mathbf{FL_e}$-algebra の単項演算子 $\sim$ を二回続けて用いたものは $\mathbf{FL_e}$ 上の論理における double negation（二重否定）に相当する。$\sim\sim$ をひとつの写像とみれば、それは closure operator であることがわかる。

命題 4.5

$\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 0, 1\rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-algebra とする。このとき、A 上の写像 $\sim\sim$ は、$\mathbf{A}$ 上の closure operator となっている。

証明）ここでは (c4) の条件を証明する。
まず、
$(x \cdot y) \cdot \sim (x \cdot y) \leq 0$
より、
$y \cdot \sim (x \cdot y) \leq \sim x = \sim\sim\sim x = \sim\sim x \rightarrow 0$
よって、
$\sim\sim x \cdot y \cdot \sim (x \cdot y) \leq 0$
同様に、
$\sim\sim x \cdot \sim\sim y \cdot \sim (x \cdot y) \leq 0$
したがって、
$\sim\sim x \cdot \sim\sim y \leq \sim\sim (x \cdot y)$
がいえた。

補題 4.6

$\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, 0, 1\rangle$ を $\mathbf{FL_e}$-algebra とする。このとき、$h(x) = \sim\sim x$ とすると、$C_h(\mathbf{A}) = \langle C_h(A), \cap, \cup_{C_h}, \cdot_{C_h}, \rightarrow, d, \sim\sim 1\rangle$ は、$= \mathbf{FL_e}$-algebra$[\sim\sim x \leq x]$ となる。

証明）命題 4.5 と定理 4.3 により、$C_h(\mathbf{A})$ が $\mathbf{FL_e}$-algebra となるのは明らかである。また、$C_h(A)$ は h-closed な集合であるから、$x = h(x) = \sim\sim x$ が成り立つ。したがって、$C_h(\mathbf{A})$ は、$\sim\sim x \leq x$ を公理にもつような $\mathbf{FL_e}$-algebra である。（$x \leq \sim\sim x$ は $\mathbf{FL_e}$-algebra で

はつねに成り立っている。）

$\mathbf{FL_e}$-algebra[$\sim\sim x \leq x$] は、$\mathbf{CFL_e}$ に対応している代数構造であるから、$\mathbf{CFL_e}$-algebra ともよぶ。

4.3 Glivenkoの定理

定義 4.7 (Glivenkoの定理) *2* つの $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$（ただし $\mathbf{FL_e} \subseteq \mathbf{K}, \mathbf{L}$）について、どのような formula α に対しても、

$$\neg\neg\alpha \text{が } \mathbf{L} \text{ で provable} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{が } \mathbf{K} \text{ で provable}$$

となっているとき、$\mathbf{L}$ に対し $\mathbf{K}$ に関する *Glivenko* の定理が成り立つという。

このことは、二重否定をとることで、$\mathbf{L}$ が $\mathbf{K}$ に埋め込めることを表している。

例 4.8 (INT に対し CL に関する Glivenko の定理)
V.Glivenko は、1929 年につぎの結果を示した。

$$\mathbf{CL} \text{ で} \alpha \text{が provable} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{INT} \text{ で} \neg\neg\alpha \text{が provable}$$

これは、$\mathbf{CL}$ が $\mathbf{INT}$ に埋め込めるということを意味する。すなわち、$\mathbf{CL}$ の証明可能性は、より弱い論理 $\mathbf{INT}$ で判断可能だということである。なお、*Glivenko* の行った証明は、証明論的な手法によるものである。

4.4 $\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理

いま、 $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow 0, 1\rangle$ を考える。ここで、 $h(x) = \sim\sim x$ とすると、命題 4.5 でみたように、写像 h は $\mathbf{A}$ 上の closure operator であり、したがって補題 4.6 から、$C_h(\mathbf{A}) = \langle C_h(A), \cap_A, \cup_{C_h}, \cdot_{C_h}, \rightarrow_A, d, h(1_A)\rangle$ は $\mathbf{CFL_e}$-algebra （$= \mathbf{FL_e}$-algebra[$\sim\sim x \leq x$] ）である。

ところで、 $C_h(\mathbf{A})$ 上の演算 $\cup_{C_h}$, $\cdot_{C_h}$ とは、

$$x \cup_{C_h} y = h(x \cup_A y)$$

$$x \cdot_{C_h} y = h(x \cdot_A y)$$

で定義したが、 $x, y \in C_h(A)$ なので、$x = h(x)$, $y = h(y)$ である。ゆえに、

$$h(x \cup_A y) = h(x) \cup_{C_h} h(y)$$

$$h(x \cdot_A y) = h(x) \cdot_{C_h} h(y)$$

が成り立つ。しかし、

$$h(x \cap_A y) = h(x) \cap_A h(y) \qquad (A1)$$

$$h(x \rightarrow_A y) = h(x) \rightarrow_A h(y) \qquad (A2)$$

は一般にはいえない。ただし、

$$\sim\sim (x \cap_A y) \leq_A \sim\sim x \cap_A \sim\sim y$$

$$\sim\sim (x \rightarrow_A y) \leq_A \sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y$$

はつねに成立するので、$(A1)$, $(A2)$ は実質的には、

$$\sim\sim x \cap_A \sim\sim y \leq_A \sim\sim (x \cap_A y) \qquad (B1)$$

$$\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y \leq_A \sim\sim (x \rightarrow_A y) \qquad (B2)$$

を意味する。もし **A** が (A1),(A2) をつねに満たすような $\mathbf{FL_e}$-algebra、すなわち、**A** が $\mathbf{FL_e}$-algebra[(B1),(B2)] であれば、h が homomorphism になることがわかる。

$\mathbf{FL_e}$-algebra[(B1),(B2)] に対応する $\mathbf{FL_e}$ 上の論理は、$\mathbf{FL_e}$ に、

$$\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \rightarrow \neg\neg(\alpha \wedge \beta) \qquad (C1)$$

$$\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta \rightarrow \neg\neg(\alpha \supset \beta) \qquad (C2)$$

を始式として付け加えた体系 $\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ である。

このことから次のことが導かれる。

定理 4.9

$\mathbf{FL_e}+(C1)+(C2)$ に対し、$\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理が成り立つ。すなわち、任意の formula α に対し、

$$\alpha \text{が } \mathbf{CFL_e} \text{で provable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg\neg\alpha \text{が } \mathbf{FL_e}+(C1)+(C2) \text{ で provable}$$

である。

必要性の証明）
$(C1),(C2)$ は $\mathbf{CFL_e}$ で provable である。実際に証明図を書いてみると、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha \to \alpha}{\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \to \alpha}\,(\wedge\text{左 }1) \qquad \dfrac{\neg\neg\beta \to \beta}{\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \to \beta}\,(\wedge\text{左 }2)}{\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \to \alpha \wedge \beta}\,(\wedge\text{右})}{\neg(\alpha \wedge \beta), \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \to}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \to \neg\neg(\alpha \wedge \beta)}\,(\neg\text{右})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha}{\neg\alpha, \alpha \to}\,(\neg\text{左})}{\alpha \to \neg\neg\alpha}\,(\neg\text{右}) \qquad \neg\neg\beta \to \beta}{\alpha, \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta \to \beta}\,(\supset\text{ 左})}{\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta \to \alpha \supset \beta}\,(\supset\text{ 右})}{\neg(\alpha \supset \beta), \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta \to}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta \to \neg\neg(\alpha \supset \beta)}\,(\neg\text{右})$$

つまり、 $\mathbf{CFL_e}$ は $\mathbf{FL_e}+(C1)+(C2)$ よりも強い体系である。よって、任意の formula α に対し、

$$\mathbf{FL_e}+(C1)+(C2) \text{ で} \neg\neg\alpha \text{が provable}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{CFL_e}\text{で} \neg\neg\alpha \text{が provable}$$

が、いえる。ところで、$\mathbf{CFL_e}$ で $\neg\neg\alpha \to \alpha$ は provable である。したがって、$\mathbf{CFL_e}$ で α は provable になる。

十分性の証明）
対偶を示す。いま、formula $\neg\neg\alpha$ が $\mathbf{FL_e}+(C1)+(C2)$ で not provable だとする。すると、代数についての完全性により、ある $\mathbf{FL_e}$-algebra[(B1),(B2)] $\mathbf{A} = \langle A, \cap_A, \cup_A, \cdot_A, \to_A, 0_A, 1_A \rangle$ が存在して、その上のある付値 f に対し、

$$1_A \not\leq_A f(\neg\neg\alpha)$$

となっている。
ここで $h(x) = \sim\sim x$ によって定められた h はclosure operator であるから、$\mathbf{CFL_e}$-algebra $C_h(\mathbf{A}) = \langle C_h(A), \cap_A, \cup_{C_h}, \cdot_{C_h}, \to_A, d, h(1_A)\rangle$ を考えることができる。ここでもし、

$$h(1_A) \not\leq_{C_h} g(\alpha) \qquad\qquad (\dagger)$$

となるような $C_h(\mathbf{A})$ 上の付値 g が存在すれば、代数についての完全性から、formula α は $\mathbf{CFL_e}$ で not provable であるということになり証明が完結する。

いま、$\mathbf{A}$ から $C_h(\mathbf{A})$ への写像 h は homomorphism となっている。そこで、$C_h(\mathbf{A})$ 上の付値 g を、

$$g(p) = h(f(p)) \qquad\qquad (p：命題変数)$$

と定める。これが任意の formula ϕ に対しても、

$$g(\phi) = h(f(\phi))$$

となっていることを帰納的に示す。
いま、ϕ が $\beta\vee\gamma$ の形をしている場合を考えてみる。帰納法の仮定として、$g(\beta) = h(f(\beta))$, $g(\gamma) = h(f(\gamma))$ とする。

$$\begin{aligned} g(\phi) &= g(\beta \vee \gamma) \\ &= g(\beta) \cup_{C_h} g(\gamma) \\ &= h(f(\beta)) \cup_{C_h} h(f(\gamma)) \end{aligned}$$

$h(x \cup_A y) = h(x) \cup_{C_h} h(y)$ なので、

$$\begin{aligned} &= h(f(\beta) \cup_A f(\gamma)) \\ &= h(f(\beta \vee \gamma)) \\ &= h(f(\phi)) \end{aligned}$$

ϕ がその他の形をしている場合も同様である。
さて、ここで $(\dagger)$ を示す。仮に、 $h(1_A) \leq_{C_h} g(\alpha)$ だとすれば、

$$1_A \leq_A \sim\sim 1_A = h(1_A) \leq_{C_h} g(\alpha) = h(f(\alpha)) = \sim\sim f(\alpha) = f(\neg\neg\alpha)$$

しかし、これは $1_A \leq_A f(\neg\neg\alpha)$ に矛盾する。（$C_h(A) \subseteq A$ であり、なおかつ $x \leq_{C_h} y$ ならば、$x \leq_A y$ がいえることに注意）したがって、 $(\dagger)$ を成り立たせるような $\mathbf{CFL_e}$ に対応する algebra（すなわち $\mathbf{FL_e}$-algebra$[(B1),(B2)]$ ）とその上の付値が存在することがいえたので、 α は $\mathbf{CFL_e}$ で not provable となり、対偶が示せた。

このように **CFLe** に関する Glivenko の定理が、$\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ に対して成り立つ。また、このことから $\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ より大きい論理 $\mathbf{L}$ に対しても、$\mathbf{L}$ が $\mathbf{CFL_e}$ に含まれるならば、$\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理は成り立つことがわかる。なぜならば、$(\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)) \subseteq \mathbf{L}$ とすれば、

$$\alpha \in \mathbf{CFL_e} \Longleftrightarrow \neg\neg\alpha \in (\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)) \Longrightarrow \neg\neg\alpha \in \mathbf{L} \Longrightarrow \alpha \in \mathbf{CFL_e}$$

となることから明らかである。
では、 $\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ より小さい $\mathbf{FL_e}$ 上の論理で、 $\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理を成り立たせるようなものはあるのだろうか。じつは、$\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ がそれらのうちで最小である。

命題 4.10

$\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理を成り立たせるような $\mathbf{L}$ のうちで、$\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$ は最小の論理である。

証明） $\mathbf{CFL_e}$ に関して Glivenko の定理を成り立たせるような $\mathbf{L}$ に対しては必ず、$(\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)) \subseteq \mathbf{L}$ となることをいえばよい。つまり、$(C1)$ と $(C2)$ が $\mathbf{L}$ で provable であることを示す。

$$\dfrac{\to \neg\neg((\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta \to \neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta \quad \alpha\wedge\beta \to \alpha\wedge\beta}{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta, (\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta) \to \alpha\wedge\beta}\,(\supset 左)}{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta, (\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta), \neg(\alpha\wedge\beta) \to}\,(\neg 左)}{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta, \neg(\alpha\wedge\beta) \to \neg((\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta))}\,(\neg\ 右)}{\neg\neg((\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta)), \neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta, \neg(\alpha\wedge\beta) \to}\,(\neg 左)}{\dfrac{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta, \neg(\alpha\wedge\beta) \to}{\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta \to \neg\neg(\alpha\wedge\beta)}\,(\neg 右)}\,(cut)$$

あとは、$\neg\neg((\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta))$ が $\mathbf{L}$ で provable ならば、上の証明図は完成する。しかし明らかにこの formula は、$\mathbf{CFL_e}$ で provable。ところで仮定より $\mathbf{L}$ に対し、$\mathbf{CFL_e}$ に関する Glivenko の定理が成り立つから、$\neg\neg((\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)\supset(\alpha\wedge\beta))$ は $\mathbf{L}$ で provable である。したがって、 $(C1)$ が $\mathbf{L}$ で provable となることが示せた。また、 $\wedge$ を $\to$ に置き換えて同じように考えれば $(C2)$ も $\mathbf{L}$ で provable であることが示せる。

この命題により、

$$\{\mathbf{L} \mid (\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)) \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{CFL_e}\}$$

$= \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L}$ に対して $\mathbf{CFL_e}$に関する Glivenko の定理が成り立つ $\}$

となる。

ここで、$(C1)$, $(C2)$ についてもう少し考えてみることにする。

命題 4.11

$\mathbf{FL_e}$-algebra では、$(B1)$, $(B2)$ は、それぞれ次の $(D1)$, $(D2)$ と同値である。

$$\sim (x \cap_A y) \leq_A \sim (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \qquad (D1)$$

$$\sim (x \rightarrow_A y) \leq_A \sim (\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y) \qquad (D2)$$

証明） $(B1) \Longrightarrow (D1)$, $(B2) \Longrightarrow (D2)$ は明らかである。
$(D1) \Longrightarrow (B1)$:
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y \rightarrow_A 0_A) \leq_A 0_A$
$(D1)$ を仮定しているので、
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y \rightarrow_A 0_A) = \sim (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) = \sim (x \cap_A y)$
よって、
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot \sim (x \cap_A y) \leq_A 0_A$
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \leq_A \sim (x \cap_A y) \rightarrow_A 0_A = \sim\sim (x \cap_A y)$

$(D2) \Longrightarrow (B2)$:
$(\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y)((\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y) \rightarrow_A 0_A) \leq_A 0_A$
$(D2)$ を仮定しているので、
$(\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y) \rightarrow_A 0_A = \sim (\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y) = \sim (x \rightarrow_A y)$
よって、
$\sim\sim x \rightarrow_A \sim\sim y \leq_A \sim (x \rightarrow_A y) \rightarrow_A 0_A = \sim\sim (x \rightarrow_A y)$

命題 4.12

$\mathbf{FL_e}$-algebra では、 $(B2)$ は次の $(E2)$ と同値である。

$$1_A \leq_A \sim\sim (\sim\sim x \rightarrow_A x) \qquad (E2)$$

証明）
$(B2) \Longrightarrow (E2)$:
$(B2)$ において、 x を $\sim\sim x$ 、 y を x で置き換えると、

$\sim(\sim\sim x \to_A x) = \sim(\sim\sim\sim\sim x \to_A \sim\sim x)$
ここで $\sim\sim\sim x = \sim x$ より、
$\sim\sim\sim\sim x \to_A \sim\sim x = \sim\sim x \to_A \sim\sim x \geq 1_A$
よって、
$\sim(\sim\sim x \to x) = \sim(\sim\sim\sim\sim x \to_A \sim\sim x) \leq_A \sim 1_A$
$1_A \leq_A \sim\sim 1_A$ なので、
$1_A \leq_A \sim\sim(\sim\sim x \to_A x)$

$(E2) \Longrightarrow (D2)$:
$x \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \leq_A \sim\sim x \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \leq_A \sim\sim y$。
ゆえに、
$\sim\sim x \to_A \sim\sim y \leq_A x \to_A \sim\sim y \qquad (\ddagger 1)$
また、
$x \cdot (x \to_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A y$
ゆえに、
$(x \to_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A x \to_A y \qquad (\ddagger 2)$
したがって、$(\ddagger 1)$ と $(\ddagger 2)$ とから、
$(\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A x \to_A y$
$\sim(x \to_A y) \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \cdot \sim\sim(\sim\sim y \to_A y) \leq_A 0_A$
ここで、$(E2)$ を仮定しているので $1_A \leq_A \sim\sim(\sim\sim y \to_A y)$ だから、
$\sim(x \to_A y) \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y)$
$\qquad \leq_A \sim(x \to_A y) \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \cdot \sim\sim(\sim\sim y \to_A y) \leq_A 0_A$
よって、
$\sim(x \to_A y) \cdot (\sim\sim x \to_A \sim\sim y) \leq_A 0_A$
したがって、
$\sim(x \to_A y) \leq_A \sim(\sim\sim x \to_A \sim\sim y)$

命題 4.13

$\mathbf{FL_{ew}}$-algebra 上では、$(D2)$ ならば $(D1)$ が成り立つ。

証明）$\mathbf{FL_{ew}}$ 上の論理に対応する代数では、weakening に対応する性質である integrality が成り立っている。
$(D2)$ を仮定する。すると、命題 4.11 と命題 4.12 により、 $(E2)$ が成り立つ。
$(\sim\sim x) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \leq_A x$
$\sim\sim x \wedge \sim\sim y \leq_A \sim\sim x$ であるから、
$(\sim\sim x \wedge \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \leq_A x$

integrality から、
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A x$
同様に、
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A y$
よって、
$(\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A x \cap_A y$
すると、
$\sim (x \cap_A y) \cdot (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot (\sim\sim x \to_A x) \cdot (\sim\sim y \to_A y) \leq_A 0_A$
$\sim (x \cap_A y) \cdot (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \cdot \sim\sim (\sim\sim x \to_A x) \cdot \sim\sim (\sim\sim y \to_A y) \leq_A 0_A$
ここで、$(D2)$ を仮定してることにより、
$1_A \leq_A \sim\sim (\sim\sim x \to_A x)$
$1_A \leq_A \sim\sim (\sim\sim y \to_A y)$
がいえているので、
$\sim (x \cap_A y) \cdot (\sim\sim x \cap_A \sim\sim y) \leq_A 0_A$
したがって、
$\sim\sim x \cap_A \sim\sim y \leq_A \sim\sim (x \cap_A y)$

4.5 involutive な論理に関する Glivenko の定理

CFL_e に関しての Glivenko の定理は前節で調べた。つづいて今度は、他の **FL_e** 上の論理に関しての Glivenko の定理について考え、前節の議論をより一般化してみたい。

$\mathbf{K} = \mathbf{K} + (\neg\neg\alpha \supset \alpha)$ となるような **K** を *involutive* であるという。
$\mathbf{CFL_e}$, **CL** は involutive である。また、 **K** が involutive のとき、$\mathbf{CFL_e} \subseteq \mathbf{K}$ となる。

以下では、2 つの $\mathbf{FL_e}$ 上の論理 **K** , **L** の間で、任意の formula α に対し、

$$\mathbf{K} \text{ で}\alpha\text{が provable} \Longleftrightarrow \mathbf{L} \text{ で}\neg\neg\alpha\text{が provable}$$

すなわち **L** に対し、 **K** に関する Glivenko の定理が成り立っていたとする。

命題 4.14

$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{K}$

証明）**L** で provable ならば、 **K** でも provable となることをいえばよい。formula α が **L** で provable だとする。 **L** は $\mathbf{FL_e}$ 上の論理だから、 $\alpha \supset \neg\neg\alpha$ が成り立つ。したがって、**L** で $\neg\neg\alpha$ は provable。よって Glivenko の定理から、 **K** でも α は provable。

命題 4.15

K が involutive のとき、$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L'} \subseteq \mathbf{K}$ ならば、

$$\mathbf{K}\text{ で}\alpha\text{が provable} \iff \mathbf{L'}\text{で}\neg\neg\alpha\text{が provable}$$

すなわち、**L'** に対して **K** に関する Glivenko の定理が成り立つ。

証明）**K** で α が provable のとき、**L** に対する **K** に関しての Glivenko の定理から、**L** で $\neg\neg\alpha$ は provable。よって $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L'}$ より、**L'** で $\neg\neg\alpha$ は provable。逆に、**L'** で $\neg\neg\alpha$ が provable のとき、$\mathbf{L'} \subseteq \mathbf{K}$ より、**K** で $\neg\neg\alpha$ は provable。**K** は involutive だから、**K** で α は provable。

命題 4.16

K で $\neg\alpha$ が provable $\iff$ **L** で $\neg\alpha$ が provable

証明）
K で $\neg\alpha$ が provable $\iff$ **L** で $\neg\neg\neg\alpha$ が provable $\iff$ **L** で $\neg\alpha$ が provable
であるから、否定に関してその証明可能性はつねに一致する。

命題 4.17

K が involutive のとき、
$\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) \subseteq \mathbf{L}$

証明）**L** で $(C1)$, $(C2)$ が provable だということを示す。
命題 4.11 から、 $(C1)$, $(C2)$ はそれぞれ、

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \qquad (F1)$$

$$\neg(\alpha \supset \beta) \rightarrow \neg(\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta) \qquad (F2)$$

と同値であることがわかる。つまり $(F1)$, $(F2)$ が **L** で provable だといえればよい。
まず、$\neg(\neg(\alpha \wedge \beta) \cdot (\alpha \wedge \beta))$ は $\mathbf{FL_e}$ で provable である。**K** は、involutive であるから、$\neg(\neg(\alpha\wedge\beta)\cdot(\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta))$ は **K** で provable である。すると命題 4.16 から、**L** でも provable である。ゆえに、 **L** で、$\neg(\alpha \wedge \beta) \cdot (\alpha \wedge \beta) \rightarrow$ は provable。したがって $\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)$、すなわち $(F1)$ は、**L** で provable。$\wedge$ を $\rightarrow$ に置き換えれば、$(F2)$ につ

いても示すことができる。

ここでいま、 $\mathbf{K}$ を固定して考える。 $\mathbf{K}$ が $\mathbf{FL_e}$ 上の論理であるときは必ず、Glivenko の定理を成り立たせるような論理が存在するのか。また、あるとしたらそれはどのようなものなのか。そして、そういった論理のうち、最小のものはどのようなものかを以下で考えていくことにする。

$\mathbf{FL_e}$ 上の論理 を $\mathbf{FL_e}$ に公理を付け加えたものとして捉えることにする（公理化）。involutive な論理 $\mathbf{K}$ に対しては、$\mathbf{K} = \mathbf{FL_e} + (\neg\neg\alpha \supset \alpha) + \{\beta_i\}_{i\in I}$ と表せる。ここで、$\mathbf{FL_e}$ 上の論理 $G(\mathbf{K})$ を、$G(\mathbf{K}) = \mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) + \{\neg\neg\beta_i\}_{i\in I}$ というように定める。

例 4.18

$G(\mathbf{CFL_e}) = \mathbf{FL_e} + (C1) + (C2)$

命題 4.19

$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ を $\mathbf{FL_e}$ 上の論理としたとき、

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ ならば } G(\mathbf{X}) \subseteq G(\mathbf{Y})$$

が成り立つ。

証明） $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ ならば、$I \subseteq J$ で、

$$\mathbf{X} = \mathbf{FL_e} + (\neg\neg\alpha \supset \alpha) + \{\beta_i\}_{i\in I}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{FL_e} + (\neg\neg\alpha \supset \alpha) + \{\beta_j\}_{j\in J}$$

とかける。すると、

$$G(\mathbf{X}) = \mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) + \{\neg\neg\beta_i\}_{i\in I}$$

$$G(\mathbf{Y}) = \mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) + \{\neg\neg\beta_j\}_{j\in J}$$

であるから、

$$G(\mathbf{X}) \subseteq G(\mathbf{Y})$$

となる。

命題 4.20

$\mathbf{K}$ が involutive であるとき、$G(\mathbf{K})$ に対し、 $\mathbf{K}$ に関する Glivenko の定理が成り立つ。

証明）
$\mathbf{K} = \mathbf{FL_e} + (\neg\neg\alpha) + \{\beta_i\}_{i\in I} = \mathbf{CFL_e} + \{\beta_i\}_{i\in I}$
$G(\mathbf{K}) = \mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) + \{\neg\neg\beta_i\}_{i\in I} = G(\mathbf{CFL_e}) + \{\neg\neg\beta_i\}_{i\in I}$
$G(\mathbf{K})$ に対し、 $\mathbf{K}$ に関する Glivenko の定理が成り立っているというのは、つまり、任意の formula ϕ に対して、

$$\mathbf{K}\text{ で}\phi\text{が provable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(\mathbf{K})\text{ で}\neg\neg\phi\text{が provable}$$

となることである。

必要性の証明） $G(\mathbf{CFL_e}) \subseteq \mathbf{CFL_e}$, $\beta_i \supset \neg\neg\beta_i$ より、$G(\mathbf{K}) = G(\mathbf{CFL_e}) + \{\neg\neg\beta_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbf{CFL_e} + \{\beta_i\}_{i\in I} = \mathbf{K}$
したがって、$G(\mathbf{K})$ で $\neg\neg\alpha$ が provable ならば、$\mathbf{K}$ でも $\neg\neg\alpha$ が provable になるが、$\mathbf{K}$ では $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ も provable なので、$\mathbf{K}$ で α は provable となる。

十分性の証明） $G(\mathbf{K})$ で $\sim\sim\alpha$ が not provable だと仮定して $\mathbf{K}$ で α は not provable であることを示す。
$G(\mathbf{K})$ で $\sim\sim\alpha$ が not provable だとすると、ある $\mathbf{FL_e}$-algebra $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ と、その上の付値 f が存在して、次の 3 つを満たす。

(1) $(C1)$ と $(C2)$ を満たす。
(2) $1 \leq\sim\sim (t_i)_{i\in I}$ ただし、t_i は β_i に現れる論理記号を対応する $\mathbf{FL_e}$-algebra の演算で置き換えて得られる term。
(3) $1 \not\leq f(\neg\neg\alpha) =\sim\sim f(\alpha)$ 。

ここで $h(x) =\sim\sim x$ なる closure operator h により、
$C_h(\mathbf{A}) = \langle C_h(A), \cap, \cup_{C_h}, \cdot_{C_h}, \to, d, h(1)\rangle$ を考える。
p を α 中の命題変数としたとき、$C_h(\mathbf{A})$ 上の付値 g を

$$g(p) = h(f(p))$$

と定めると、任意の formula ϕ に対し、

$$g(\phi) = h(f(\phi)) =\sim\sim f(\phi)$$

が成り立つ。とくに ϕ として α をとると、$h(1) \leq g(\alpha)$ ならば、$1 \leq\sim\sim 1 \leq\sim\sim f(\alpha)$
これは (3) と矛盾する。よって $h(1) \not\leq g(\alpha)$
$C_h(\mathbf{A})$ で $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ は provable。そして、$C(\mathbf{A})$ で β_i は provable であること、すなわち、

どんな $C_h(\mathbf{A})$ 上の付値 k に対しても、

$$h(1) \leq k(\beta_i)$$

であればよい。いま、$h(b) = k(p)$ となるような b を一つ選ぶ。（たとえば $b = k(p)$ とする。）$\mathbf{A}$ 上の付値 k' を $k'(p) = b$ とする。すなわち、

$$h(k'(p)) = \sim\sim k'(p) = k(p)$$

すると、帰納法により、

$$h(k'(\beta)) = k(\beta)$$

とわかる。よって、$k(\beta_i) = h(k'(\beta_i)) = \sim\sim k'(\beta_i) = k'(\neg\neg\beta_i) \geq 1$ したがって、$h(1) = \sim\sim 1 \leq \sim\sim k(\beta_i) = k(\beta_i)$ 以上から、$G(\mathbf{K})$ で $\neg\neg\alpha$ が not provable ならば、以下を満たすような $C_h(\mathbf{A})$ があることが示せた。$C_h(\mathbf{A})$ で $\mathbf{K}$ の公理はすべて valid だが、α は偽。すなわち、$\mathbf{K}$ で α は not provable である。

命題 4.21

$\mathbf{K}$ が involutive であるとき、$\mathbf{L}$ に対し、 $\mathbf{K}$ に関する Glivenko の定理が成り立つのならば、 $G(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{L}$ となる。

証明）$\mathbf{K} = \mathbf{FL_e}$+$(\neg\neg\alpha \supset \alpha)$+$\{\beta_i\}_{i \in I}$ とする。まず、命題 4.17 より、$\mathbf{FL_e}$+$(C1)$+$(C2) \subseteq \mathbf{L}$ 次に、 $\mathbf{K}$ で β_i は provable。Glivenko の定理より、 $\mathbf{L}$ で $\neg\neg\beta$ は provable。したがって、$\mathbf{FL_e} + (C1) + (C2) + \{\beta_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbf{L}$ となる。

命題 4.20、命題 4.21 により、involutive な $\mathbf{K}$ に関する Glivenko の定理を成り立たせるような $\mathbf{FL_e}$ 上の論理のうちで最小のものは、$G(\mathbf{K})$ であると示されたことになる。

命題 4.22

$$\{\mathbf{L} \mid G(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{K}\} = \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L} \text{ に対し } \mathbf{K} \text{ に関する Glivenko の定理が成り立つ}\}$$

証明）命題 4.15、命題 4.20、命題 4.21 により示される。

第 5 章　今後の課題

今後の課題としては、

$\mathbf{DFL_e}, \mathbf{DFL_{ew}}, \mathbf{DFL_{ec}}$ の finite model property を完全に示せるかどうか。
FL 上の論理について本研究と同様の議論ができるかどうか。

などが挙げられる。

参考文献

[1] W.J.Blok, C.J.van.Alten, The finite embeddability property for residuated lattices, pocrims and BCK-algebras, Algebra Universalis, 48, pp.253-271(2002).

[2] N.Galatos, H.Ono, Glivenko's theorem for substructural logics, in preparation.

[3] P.Jipsen, C.Tsinakis, A Survey of Residuated Lattices, Ordered Algebraic Structures, ed. by J. Martinez, Kluwer Academic Publishers, pp.19-56, 2002.

[4] Y.Lafont, *The finite model property for various fragments of linear logic*, Journal of Symbolic Logic 62, pp.1202-1208, (1997).

[5] M.Okada, K.Terui, *The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic*, Journal of Symbolic Logic 64, pp.790-802, (1999).

[6] H.Ono, Y.Komori, Logics without the contraction rule, The Journal of Symbolic Logic, Vol 50, pp.169-201, (1985).