| | |
|---|---|
| Title | 依存対手法の簡約順序への再定式化 |
| Author(s) | Guo, Ziyu |
| Citation | |
| Issue Date | 2023-03 |
| Type | Thesis or Dissertation |
| Text version | author |
| URL | http://hdl.handle.net/10119/18301 |
| Rights | |
| Description | Supervisor: 廣川 直, 先端科学技術研究科, 修士(情報科学) |

依存対手法の簡約順序への再定式化

2110044　GUO, Ziyu

主指導教員　廣川　直
審査委員主査　廣川　直
審査委員　石原 哉
緒方 和博
石井 大輔

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
(情報科学)

令和 5 年 2 月 1 日

Abstract

Term rewriting is a computational model based on equational theory. This is a model that we regard equations as transformation rules from the left side to the right side, and computation is done by rewriting. We call it rewrite rule and we call the set of rewrite rules term rewriting system (TRS). It is a basis of computer languages and theorem provers. For example, the following is the TRS for addition on Peano numbers.

$$\mathsf{add}(\mathsf{0}, y) \to y \qquad\qquad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{add}(x, y))$$

The term $\mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{s}(\mathsf{0}))$ express 2+1. It is rewritten as follows:

$$\mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{s}(\mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{0}), \mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{add}(\mathsf{0}, \mathsf{s}(\mathsf{0})))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$$

Then we obtain the result: 3, which is expressed by term $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$. The above sequence is called a rewrite sequence.

One of the most important property of term rewriting is termination. The definition is that there is no infinite rewrite sequence, so in terminating TRSs one can eventually obtain the result of rewriting. The most basic method for proving termination is using reduction orders. For instance, if there exists a reduction order such that

$$\mathsf{add}(\mathsf{0}, y) > y \qquad\qquad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) > \mathsf{s}(\mathsf{add}(x, y))$$

in the previous example, we can conclude that the TRS is terminating. In particular, the Knuth-Bendix order (KBO) and the lexicographic path order (LPO) are common and famous reduction orders. Reduction orders are also used in theorem provers based on term rewriting like E and Vampire. In such tools, reduction orders decide the direction of inference, so the success of proof depends on the power (orientability) of the reduction orders. Therefore, if we can define a new strong reduction order, then we can improve the power of these tools.

In this thesis, we introduce a reduction order that simulates the dependency pair method with dependency graphs. The dependency pair method is a powerful method

to prove termination. Consider the following TRS, termination of which cannot be shown by KBO and LPO:

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x,\mathsf{0}) &\to x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x,y) \\ \mathsf{quot}(0,\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

We obtain the following set of dependency pairs.

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) \end{aligned}$$

The basic dependency pair method is splits the role of reduction into the pair of two relations with weaker constraints to prove termination. Such a pair is called a reduction pair. In the example, if there exists a reduction pairs $(\gtrsim,>)$ such that

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x,\mathsf{0}) &\gtrsim x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{minus}(x,y) \\ \mathsf{quot}(0,\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

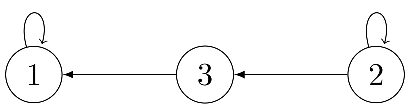
and

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{minus}^\sharp(x,y) \end{aligned}$$

then we can conclude that the TRS is terminating. The power of this method can be improved by using a dependency graph. First, we label the dependency pair such

$$\begin{aligned} 1: &\quad \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) \\ 2: &\quad \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\ 3: &\quad \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) \end{aligned}$$

We obtain the following graph by computing reachability between the rules and the rules.




In this graph, there are two cycle. These cycles tell us it may occur infinite rewrite sequence. So if we have reduction pairs to orient each cycle with the original TRS, then we can conclude termination. Recall the previous example. If there exists a reduction pairs $(\gtrsim_1, >_1)$ and $(\gtrsim_2, >_2)$ such that

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\gtrsim_1 x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$1: \ \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_1 \mathsf{minus}^\sharp(x, y)$$

and

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\gtrsim_2 x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$2: \ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_2 \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

then we succeed to prove termination.

Dershowitz (2013) shows that the basic one can be simulated by reduction orders called monotonic semantic path orders (MSPOs). However, simulating the dependency pair method with the dependency graph technique is an open problem. In this thesis, we extend his approach by taking multiple reduction pairs to solve this problem.

# 目次

# 図目次

# 表目次

# 第 1 章

# はじめに

項書換えとは、等式論理に基づく計算モデルである。これは等式を左辺から右辺への書換え規則とみなし、規則の適用によって式変形を行うものであり、計算機言語や自動演繹の理論基盤となっている。例として、以下のような項書換え系（書換え規則の集合）について考える。この項書換系は、ペアノ数の加算を表すものである。

$$\mathsf{add}(0, y) \to y \qquad\qquad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{add}(x, y))$$

これを用いると、$2 + 1$ を表す項である $\mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(0))$ は

$$\mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{add}(0, \mathsf{s}(0)))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

のように書換えることができ、結果として $3$ を表す項である $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ という計算結果を得ることができる。この書換えの流れを書換え列と呼ぶ。

## 1.1 研究目的

項書換えにおいて重要な性質の一つに停止性と呼ばれるものが存在する。これは無限の書換え列が存在せず、常に答えが得られることを意味する。停止性を証明する最も基本的な方法は、簡約順序を用いることである。つまり、前述の例を用いると、ある簡約順序 $>$ が存在して

$$\mathsf{add}(0, y) > y \qquad\qquad \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) > \mathsf{s}(\mathsf{add}(x, y))$$

と向き付けることができればこの項書換え系の停止性を証明することができる。特に Knuth-Bendix 順序 [8] や辞書式経路順序 [7] は代表的な簡約順序としてよく用いられて

きた。簡約順序は項書換えを基盤とする定理証明系（E[11],Vampire[9]）でも知られている。そうした定理証明系において、証明は式の単純化演繹の方向を簡約順序によって決定する。そのため、証明の成功と失敗および効率は用いる順序に強く依存する。つまり、強力な簡約順序を作成することができれば、それらの証明能力を大きく向上させることができる。本研究では、依存対手法 [2] と呼ばれる停止性証明の手法を簡約順序の枠組みに取り入れ、より広いクラスの問題を証明できる簡約順序を作成することを目的とする。

## 1.2 既存手法

依存対手法 [2] とは、関数同士の呼び出しの関係を抜き出して停止性を証明しようとするものである。以下の項書換え系を例とする。これは、Knuth-Bendix 順序と辞書式経路順序では停止性を証明できない例である。

$$
\begin{array}{rlrl}
\mathsf{minus}(x,\mathsf{0}) &\to x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x,y) \\
\mathsf{quot}(0,\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

これからは、以下のような依存対の集合が生成される。

$$
\begin{array}{rlrl}
\mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\
\mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & &
\end{array}
$$

基本的な依存対手法として、簡約順序をより条件の緩い 2 つの順序からなる簡約対に分割して、元の項書換え系と依存対の集合を向き付ける。つまり、ある簡約対 $(\gtrsim,>)$ が存在し、項書換え系が

$$
\begin{array}{rlrl}
\mathsf{minus}(x,\mathsf{0}) &\gtrsim x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{minus}(x,y) \\
\mathsf{quot}(0,\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\gtrsim \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

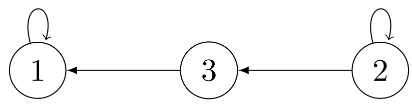
依存対の集合が

$$
\begin{array}{rlrl}
\mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\
\mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &> \mathsf{minus}^\sharp(x,y) & &
\end{array}
$$

となれば停止性を証明できたことになる。また、発展的なものとして、依存グラフ [6] と呼ばれるものを用いた依存対手法も存在する。まず、前述の依存対を次のように番号付する。

$$
\begin{array}{ll}
1: & \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x,y) \\
2: & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)) \\
3: & \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x,y)
\end{array}
$$

それぞれの規則同士の到達可能性を計算すると、次のようなグラフが生成される。



1 から 1、2 から 2 と循環している箇所が存在するのがわかる。依存グラフを用いた手法では循環ごとに簡約対を用いて向き付けることで停止性を証明する。この例では、ある簡約対 $(\gtrsim_1, >_1)$ と $(\gtrsim_2, >_2)$ が存在し、

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\gtrsim_1 x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_1 \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$1: \ \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_1 \mathsf{minus}^\sharp(x, y)$$

かつ

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\gtrsim_2 x & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{0} & \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\gtrsim_2 \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$2: \ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_2 \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

となれば停止性を証明できたことになる。

Dershowitz は基本的な依存対手法は意味経路順序の亜種で模倣できること [5] を示した。しかし、依存グラフの模倣については未解決問題として残っている。

## 1.3 提案手法

本論文では未解決問題であった、依存グラフを用いる依存対手法を簡約順序の枠組みに取り入れた新たな簡約順序を提案する。提案手法は、依存グラフの循環ごとに向き付ける動作を模倣するために、複数の簡約対をパラメータに取る単調意味経路順序を定義することである。これの前段階として、複数の優先順序をパラメータに取る辞書式経路順序を定義する。

最後に、本論文は以下のような構成になっている。2 章では項書換えに関わる基本的な定義や定理について述べる。3 章では前段階として辞書式経路順序の拡張について定義、証明と実験について述べる。4 章では依存対と単調意味経路順序の関係について再確認し、続く 5 章で依存グラフを単調意味経路順序にどのように取り込むかについて定義と証明を行う。最後に 6 章で本研究の結論について述べる。

# 第 2 章

# 準備

本章では前提となる定義と定理について述べる。これらは [3, 10, 12] を参照して記したものである。

## 2.1 抽象書換え系

**定義 1.** **抽象書換え系**（abstract rewrite system, ARS）とは、集合 $A$ と $A$ 上の二項関係 $\to$ からなる組 $\langle A, \to \rangle$ のことである。以降では $(a, b) \in \to$ の代わりに $a \to b$ と表記する。

**定義 2.** $\to_1$ と $\to_2$ を二項関係とする。$\to_1$ と $\to_2$ の合成を $\to_1 \cdot \to_2$ と表し、以下のように定義する。

$$\to_1 \cdot \to_2 = \{(a, c) \in A \times A \mid a \to_1 b \text{ かつ } b \to_2 c \text{ を満たす } b \in A \text{ が存在する}\}$$

**定義 3.** $\to$ を二項関係とする。

$$\to^n = \begin{cases} \{(a, a) \mid a \in A\} & n = 0 \text{ のとき} \\ \to \cdot \to^{n-1} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 4.** 二項関係 $\to$ に対して、以下の関係を定義する。

- $\leftarrow = \{(b, a) \mid (a, b) \in \to\}$ を**逆関係**（inverse relation）と呼ぶ。
- $\to^= = \to \cup \to^0$ を**反射閉包**（reflexive closure）と呼ぶ。
- $\to^+ = \bigcup_{n>0} \to^n$ を**推移閉包**（transitive closure）と呼ぶ。
- $\to^* = \to^+ \cup \to^0$ を**反射推移閉包**（reflexive transitive closure）と呼ぶ。
- $\leftrightarrow = \to \cup \leftarrow$ を**対称閉包**（symmetric closure）と呼ぶ。

**定義 5.** $\mathcal{A} = \langle A, \to \rangle$ を抽象書換え系とする。ある $a \in A$ に対して $a \to b$ となる $b \in A$ が存在するとき、その $a$ を**簡約可能**（reducible）という。ある要素が簡約可能でない場合、その要素を**正規形**（normal form）と呼ぶ。

**定義 6.** $\mathcal{A} = \langle A, \to \rangle$ を抽象書換え系とする。ある $a \in \mathcal{A}$ から始まる無限列が存在しないとき、その要素 $a$ は**停止性**（terminating）を持つという。すべての要素 $a \in \mathcal{A}$ が停止性を持つとき、$\mathcal{A}$ は停止性を持つという。

## 2.2 項書換え系

**定義 7.** 関数記号の集合 $\mathcal{F}$ を**シグネチャ**（signature）と呼ぶ。各関数記号 $f \in \mathcal{F}$ には引数の数を表す自然数 $n$ が紐付けられており、これを**アリティ**（arity）と呼ぶ。アリティを明示したい場合 $f^{(n)}$ で表記する。アリティがゼロの関数記号は**定数**（constant）と呼ばれる。

**定義 8.** $\mathcal{F}$ をシグネチャ、$\mathcal{V}$ を $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ であるような可算無限集合とする。$\mathcal{V}$ の要素を**変数**（variable）と呼ぶ。$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる**項**（term）の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を以下のように帰納的に定義する。

- $x \in \mathcal{V}$ のとき、$x \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$
- $f \in \mathcal{F}$ かつ $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ のとき、$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

定数記号 $f^{(0)}$ からなる項 $f(\,)$ に対しては、括弧を省略し $f$ で表す。また、別の記法として $f(t_1, \ldots, t_n)$ を $f(\bar{t})$ や $f(\bar{t}_m)$ と表すこともある。

**定義 9.** 項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ における変数記号の集合 $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t)$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \begin{cases} \{t\} & t \text{ が変数のとき} \\ \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}\mathsf{ar}(t_i) & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

$\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \varnothing$ であるような項 $t$ を**基底項**と呼ぶ。

**定義 10.** $t$ を項とする。**ルート記号**（root symbol）を以下のように定義する。

$$\mathsf{root}(t) = \begin{cases} t & t \text{ が変数のとき} \\ f & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 11.** 項 $t$ に現れる変数と関数の記号の数を**大きさ**（size）と呼び、以下のように再帰

的に定義する。

$$|t| = \begin{cases} 1 & t \text{ が変数のとき} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i| & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

また、関数記号の現れた数のみを表す場合、以下のように定義する。

$$||t|| = \begin{cases} 0 & t \text{ が変数のとき} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} ||t_i|| & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 12. 位置**（position）とは正の整数列である。空列を**ルート位置**（root position）と呼び $\epsilon$ で表す。位置 $p$ と位置 $q$ の連接を $pq$ で表す。項 $t$ に現れる位置の集合 $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{P}\mathsf{os}(t) = \begin{cases} \{\epsilon\} & t \text{ が変数のとき} \\ \{\epsilon\} \cup \{ip \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ かつ } p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)\} & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 13.** 項 $t$ における位置 $p$ の**部分項**（subterm）$t|_p$ は次の式で与えられる。

$$t|_p = \begin{cases} t & p = \epsilon \text{ のとき} \\ t_i|_q & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ かつ } p = iq \text{ のとき} \end{cases}$$

また、部分項であることを $t|_p \trianglelefteq t$ のように表す。$p$ が $\epsilon$ でない場合、$\trianglelefteq$ の代わりに $\triangleleft$ を用いる。

**定義 14.** 項 $t$ における位置 $p$ の部分項を項 $u$ に置き換えて得られる項を $t[u]_p$ で表す。正確な定義は以下の通りである。

$$t[u]_p = \begin{cases} u & p = \epsilon \text{ のとき} \\ f(t_1, \ldots, t_i[u]_q, \ldots, t_n) & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ かつ } p = iq \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 15.** $\square \notin \mathcal{F}$ となる特別な定数記号を定め、これを**ホール**（hole）と呼ぶ。このとき、$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に属し、かつホールがただ一つ出現するものを**文脈**（context）と呼ぶ。文脈 $C$ と項 $t$ に対し、$C|_p = \square$ となる位置 $p$ を用いて $C[t] = C[t]_p$ と定める。

**定義 16.** 写像 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ の定義域 $\mathcal{D}\mathsf{om}(\sigma)$ が有限であるとき、$\sigma$ を**代入**（substitution）と呼ぶ。但し、$\mathcal{D}\mathsf{om}(\sigma)$ は $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ で定義される。項 $t$ への代入 $\sigma$ の適用 $t\sigma$ は次のように再帰的に定義される。

$$t\sigma = \begin{cases} \sigma(t) & t \text{ が変数のとき} \\ f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ のとき} \end{cases}$$

簡便のため $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ で次の代入 $\sigma$ を表すものとする：

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i & x = x_i \text{ のとき} \\ x & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

**定義 17.** $l$ が変数ではない項であり、$r$ に含まれる変数が $l$ に含まれる等式 $(l, r)$ を**書換え規則**（rewrite rule）と呼び、$l \to r$ と表す。書換え規則の集合を**項書換え系**（term rewriting system, TRS）と呼ぶ。

**定義 18.** $\mathcal{R}$ を項書換え系、$s$, $t$ を項とする。書換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ と位置 $p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$、代入 $\sigma$ が存在して $s|_p = l\sigma$ かつ $t = s[r\sigma]_p$ を満たすとき $s \to_{\mathcal{R}} t$ と記す。この関係 $\to_{\mathcal{R}}$ を $\mathcal{R}$ の**書換え関係**（rewrite relation）と言う。

**定義 19.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。$t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_2 \to \cdots$ のような連続する書換えの並びを**書換え列**（rewrite sequence）と呼ぶ。

**定義 20.** $\to$ を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の二項関係とする。

- 任意の文脈 $C$ に対して、$s \to t$ ならば $C[s] \to C[t]$ が成立することを**文脈に閉じている**（closed under contexts）という。
- 任意の代入 $\sigma$ に対して、$s \to t$ ならば $s\sigma \to t\sigma$ が成立することを**代入に閉じている**（closed under substitutions）という。

二項関係が文脈と代入の両方について閉じているとき、これを**書換え関係**（rewrite relation）と呼ぶ。

## 2.3 簡約順序

**定義 21.** 書換え関係であるような狭義順序を**書換え順序**（rewrite order）と呼ぶ。

**定義 22.** 整礎な書換え順序を**簡約順序**（reduction order）と呼ぶ。

**定義 23.** $R$ を二項順序とする。ホールでない文脈 $C$ と項任意の項 $t$ に対して $C[t] \mathrel{R} t$ が常に成り立つとき、$R$ は**部分項性**（subterm property）を持つと呼ぶ。

**定理 24.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。ある簡約順序 $>$ が存在して $\mathcal{R} \subseteq >$ となることと、$\mathcal{R}$ が停止性を持つことは同値である。

**定義 25.** $>$ を順序とする。$>$ の**辞書式拡張**（lexicographic extension）$>_{\mathsf{lex}}$ を次のように定める。$(s_i, \ldots, s_n) >_{\mathsf{lex}} (t_i, \ldots, t_m)$ が成り立つのは以下のいずれかが成り立つときである。

- $n > m$ かつ $s_1 = t_1, \ldots, s_m = t_m$、または
- ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して、$s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}, s_i > t_i$

**定義 26.** $\mathcal{F}$ 上の擬順序 $\succsim$ を取る項 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の順序である辞書式経路順序（lexicographic path order）$>_{\mathsf{lpo}}$ を以下のように定義する。$s >_{\mathsf{lpo}} t$ が成り立つのは $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ とおけて、以下のいずれかが成り立つときである。

1. ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $s_i >_{\mathsf{lpo}}^{=}$。
2. $t = g(t_1, \ldots, t_m)$、$f \succ g$ かつ任意の $j$ $(1 \leq i \leq m)$ について $s >_{\mathsf{lpo}} t$。
3. $t = g(t_1, \ldots, t_m)$、$f \sim g$、任意の $j$ $(1 \leq i \leq m)$ について $s >_{\mathsf{lpo}} t$ かつ $(s_i, \ldots, s_n) >_{\mathsf{lpo}}^{\mathsf{lex}} (t_i, \ldots, t_m)$。

## 2.4 依存対手法

**定義 27.** 関数記号の集合 $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{F}$ は以下のように定義される。$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ の要素を**定義記号**（defined symbol）と呼ぶ。

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{\mathsf{root}(l) \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$$

**定義 28.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。書換え規則の集合 $\mathsf{DP}(\mathcal{R})$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{DP}(\mathcal{R}) = \{l^\sharp \to t^\sharp \mid l \to r \in \mathcal{R}、t \trianglelefteq r \text{ かつ } \mathrm{root}(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}\}$$

$\mathsf{DP}(\mathcal{R})$ の要素を**依存対**（dependency pair）と呼ぶ。ただし、$l^\sharp$ は $l = f(t_1, \ldots, t_n)$ に対して $l = f^\sharp(t_1, \ldots, t_n)$ を表すものである。ここで、$f^\sharp$ は $f$ と同じアリティを持つ新しい関数記号を意味する。

**定義 29.** $>$ を項上の狭義順序、$\gtrsim$ を項上の擬順序とする。以下の条件をすべて満たすとき、対 $(\gtrsim, >)$ を**簡約対**（reduction pair）と呼ぶ。

- $>$ が整礎かつ代入に閉じている。
- $\gtrsim$ が書換え関係である。
- $\gtrsim \cdot > \subseteq >$ または $> \cdot \gtrsim \subseteq >$ が成立する。

**定理 30.** 項書換え系 $\mathcal{R}$ が停止性を持つことと無限の書換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}}^{*} t_1 \to_{\mathsf{DP}(\mathcal{R})} t_2 \to_{\mathcal{R}}^{*} \to_{\mathsf{DP}(\mathcal{R})} \cdots$ が存在しないことは同値である。

**定理 31.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。$\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >$ を満たす簡約対 $(\gtrsim, >)$ が存在するとき、$\mathcal{R}$ は停止性を持つ。

**定義 32. 引数フィルタリング**（argument filter, AF）はすべての $f^n \in \mathcal{F}$ を $i \in \{1, \ldots, n\}$ に移す写像である。引数フィルタリング $\pi$ から導出される項から項への写像は以下のように定められる。

$$\pi(t) = \begin{cases} t & t \text{ が変数のとき} \\ \pi(t_i) & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ かつ } \pi(f) = i \text{ のとき} \\ f(\pi(t_{i_1}), \ldots, \pi(t_{i_m})) & t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ かつ } \pi(f) = [i_1, \ldots, i_m] \text{ のとき} \end{cases}$$

**定義 33.** $>$ を簡約順序、$\pi$ を引数フィルタリングとする。関係 $>^{\pi}$ を次のように定義する：$s >^{\pi} t$ となるのは $\pi(s) > \pi(t)$ が成り立つときである。

**補題 34.** $(\gtrsim, >)$ を簡約対、$\pi$ を引数フィルタリングとするとき、$(\gtrsim^{\pi}, >^{\pi})$ も簡約対となる。

**定義 35.** 頂点集合 $V = \mathsf{DP}(\mathcal{R})$ と辺集合 $E = \{(s \to t, u \to v) \in V^2 \mid$ ある $\sigma, \sigma'$ が存在して $t\sigma \to_{\mathcal{R}}^{*} u\sigma'\}$ からなる有向グラフ $(V, E)$ のことを**依存グラフ**（dependency graph）と呼ぶ。

一般的に依存グラフのどの頂点間に辺が存在するかについては決定不能である。そのため以下のような近似依存グラフを用いる。

**定義 36.** 頂点集合 $V = \mathsf{DP}(\mathcal{R})$ と辺集合 $E = \{(s \to t, u \to v) \in V^2 \mid \mathsf{root}(t) = \mathsf{root}(u)\}$ からなる有向グラフ $(V, E)$ のことを**ルート近似依存グラフ**（root approximate dependency graph）と呼ぶ。

**定義 37.** $(V, E)$ を有向グラフとする。$\mathcal{C} \subseteq V$ が**サイクル**（cycle）であるというのは、すべての $u, v \in \mathcal{C}$ について $u \to^{+} v$ かつ $C \neq \varnothing$ を満たすときである。もし有向グラフ $(V, E)$ において $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ となるサイクル $\mathcal{C}'$ が存在しないとき、$\mathcal{C}$ を**強連結成分**（strongly connected component, SCC）と呼ぶ。

# 第 3 章

# 辞書式経路順序の拡張

辞書式経路順序は Kamin と Lévy[7] によって導入された簡約順序であり、停止性証明や完備化に用いられている。この順序は優先順序を 1 つパラメータとしてとる。本章では、優先順序を複数とるように拡張を行う。このアイデアは本論文の目標である意味経路順序による依存グラフの模倣においても用いられる。

## 3.1 多重拡張

**定義 38.** $\sqsupset$ を項 $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の狭義順序、$\mathcal{M} = (\succsim_1,\ldots,\succsim_m)$ を $m$ 個の優先順序からなる組とする。ただし、$m = \max\{n \mid f^{(n)} \in \mathcal{F}\} + 1$ である。**多重拡張**（multiple extension）$\sqsupset^{\mathcal{M}}$ を次のように定義する。$s \sqsupset^{\mathcal{M}} t$ が成立するのは以下のいずれかが成り立つときである。

1. ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ が存在して $f \sim_1 g, s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}, f \succ_i g$、または
2. ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ が存在して $f \sim_1 g, s_1 = t_1, \ldots, f \sim_i g, s_i \sqsupset t_i$。

**定義 39.** 項上の関係である**多重優先順序付き辞書式経路順序**（LPO with multiple precedences, LPOM）$>_{\mathsf{lpom}}$ を次のように再帰的に定義する。$s = f(s_1,\ldots,s_n) >_{\mathsf{lpom}} t$ が成立するのは以下のいずれかが成り立つときである。

1. $t \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$ かつ $s \neq t$、または
2. $t = g(t_1,\ldots,t_m)$ かつある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ が存在して $s_i >^{=}_{\mathsf{lpom}} t$、または
3. $t = g(t_1,\ldots,t_m)$ かつ $s >^{\mathcal{M}}_{\mathsf{lpom}} t$、任意の $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ に対して $s >_{\mathsf{lpom}} t_j$。

これより多重優先順序付き辞書式経路順序が簡約順序となる証明を行う。まずはじめに

狭義順序であるという証明を行う。

**補題 40.** $\sqsupset$ を狭義順序、$\mathcal{M} = (\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$ を多重拡張とする。$\sqsupset^{\mathcal{M}}$ は非反射性を持つ。

**証明.** 矛盾によって $s \sqsupset^{\mathcal{M}} s$ が成立しないことを示す。$s \sqsupset^{\mathcal{M}} s$ と仮定する。このとき2つの場合について考える。

- $s \sqsupset^{\mathcal{M}} s$ が多重拡張の1つ目の条件によって成立しているとき、ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ について $f \succ_i f$ が成り立つ。$\succ$ は反反射的であるので矛盾。
- $s \sqsupset^{\mathcal{M}} s$ が多重拡張の2つ目の条件によって成立しているとき、ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ が存在して $s_i \sqsupset s_i$ が成り立つ。$\sqsupset$ は反反射的であるので矛盾。

□

**補題 41.** $\sqsupset$ を狭義順序、$\mathcal{M} = (\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$ を多重拡張とする。$\sqsupset^{\mathcal{M}}$ は推移性を持つ。

**証明.** 項 $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ かつ $t = g(t_1, \ldots, t_m)$、$u = h(u_1, \ldots, u_l)$ とする。$k = ||s|| + ||t|| + ||u||$ についての構造帰納法によって示す。$k = 0$ のとき、$s, t, u$ はすべて変数である。よって仮定に矛盾する。したがって $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$。$k > 0$ のとき、$s' \sqsupset^{\mathcal{M}} u'$ が任意の $||s'|| + ||t'|| + ||u'|| < k$ かつ $s' \sqsupset^{\mathcal{M}} t'$、$t' \sqsupset^{\mathcal{M}} u'$ であるような項 $s', t', u'$ に対して成り立つと仮定し、場合分けを行う。

- 両方が多重拡張の1つ目の条件によって $s \sqsupset^{\mathcal{M}} t$ かつ $t \sqsupset^{\mathcal{M}} u$ が成り立つとき、ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ について $(f \sim_1 g, s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1},) f \succ_i g$ かつ、ある $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ について $(g \sim_1 h, t_1 = u_1, \ldots, t_{j-1} = u_{j-1},) g \succ_j h$ である。
  - $i = j$ のとき、$f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1} = u_{i-1}, f \succ_i g \succ_i h$ である。よって多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$ が成り立つ。
  - $i < j$ のとき、$f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1} = u_{i-1}, f \succ_i g \sim_i h$ である。よって多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$。
  - $i > j$ のとき、$f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, s_{j-1} = t_{j-1} = u_{j-1}, f \sim_j g \succ_j h$ である。よって多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$ が成り立つ。
- 多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} t$ かつ2つ目の条件より $t \sqsupset^{\mathcal{M}} u$ であるとき、ある $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ について $f \sim_1 g, s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}, f \succ_i g$ かつある $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$ について $g \sim_1 h, t_1 = u_1, \ldots, g \sim_j h, t_j \sqsupset u_j$ である。
  - $i = j$ のとき、$f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1} = u_{i-1}, f \succ_i g \sim_i h$ である。よって多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$。

– $i < j$ のとき、$f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1} = u_{i-1}, f \succ_i g \sim_i h$ である。よって多重拡張の1つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$ である。
– $i > j$ のとき $f \sim_1 g \sim_1 h, s_1 = t_1 = u_1, \ldots, f \sim_j g \sim_j h, s_j = t_j \sqsupset u_j$ である。よって多重拡張の2つ目の条件より $s \sqsupset^{\mathcal{M}} u$。

□

**補題 42.** $\sqsupset$ を狭義順序、$\mathcal{M} = (\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$ を多重拡張とする。$\sqsupset^{\mathcal{M}}$ は狭義順序である。

**証明.** 補題 41 と 42 より示される。 □

次に、書換え順序であることを証明する。

**補題 43.** $>_{\mathsf{lpom}}$ は文脈に閉じている。

**証明.** $s >_{\mathsf{lpom}} t$ と仮定する。文脈 $C$ についての構造帰納法によって $C[s] >_{\mathsf{lpom}} C[t]$ を示す。

- $C = \square$ のとき、$s >_{\mathsf{lpom}} t$ となり、成り立つ。
- $C = f(s_1, \ldots, C', \ldots, s_n)$ のとき、$C[s] = f(s_1, \ldots, C'[s], \ldots, s_n)$ かつ $C[t] = f(s_1, \ldots, C'[t], \ldots, s_n)$。帰納法の仮定より、$C'[s] >_{\mathsf{lpom}} C'[t]$ が成り立つ。多重拡張の2つ目の条件より、$s >^{\mathcal{M}}_{\mathsf{lpom}} t$ が成り立つ。したがって、$>_{\mathsf{lpom}}$ の3つ目の条件より $C[s] >_{\mathsf{lpom}} C[t]$。

□

**補題 44.** $>_{\mathsf{lpom}}$ は代入に閉じている。

**証明.** $s >_{\mathsf{lpom}} t$ と仮定する。$k = ||s|| + ||t||$ についての帰納法によって $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$ を示す。

- $k = 0$ のとき、$s, t$ ともに変数である。よって $s \not>_{\mathsf{lpom}} t$ となり、矛盾。したがって $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。
- $k > 0$ のとき、$s'\sigma >_{\mathsf{lpom}} t'\sigma$ が任意の $||s'|| + ||t'|| < k$ であるような項 $s', t'$ に対して成り立つと仮定し、3つの条件について場合分けを行う。
  – 1つ目の条件で $s >_{\mathsf{lpom}} t$ が成り立つとき、$t \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$ かつ $s \neq t$ である。よって $t\sigma \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(s\sigma)$ も成り立つ。したがって1つ目の条件より $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。
  – 2つ目の条件で $s >_{\mathsf{lpom}} t$ が成り立つとき、ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在し

て $s_i = t$ または $s_i >_{\mathsf{lpom}} t$ である。$s_i = t$ のとき $s_i\sigma = t\sigma$ は自明である。よって 2 つ目の条件より $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。$s_i >_{\mathsf{lpom}} t$ のとき、帰納法の仮定より $s_i\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$ が成立する。よって 2 つ目の条件より $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。両方の場合についてともに成立するので、したがって $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。

– 3 つ目の条件で $s >_{\mathsf{lpom}} t$ が成り立つとき、$t = g(t_1, \ldots, t_m)$ かつ $s >^{\mathcal{M}}_{\mathsf{lpom}} t$、任意の $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ に対して $s >_{\mathsf{lpom}} t_j$ である。帰納法の仮定より、任意の $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ に対して $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t_j\sigma$ である。$s >^{\mathcal{M}}_{\mathsf{lpom}} t$ の定義より、ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}$ または $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}, s_i >_{\mathsf{lpom}} t_i$ である。明らかに $s_1\sigma = t_1\sigma$ は成り立つ。また、帰納法の仮定より $s_1\sigma >_{\mathsf{lpom}} t_1\sigma$ も成り立つ。よってどちらの場合でも $s\sigma >^{\mathcal{M}}_{\mathsf{lpom}} t\sigma$ は成り立つ。したがって $s\sigma >_{\mathsf{lpom}} t\sigma$。

□

**補題 45.** $>_{\mathsf{lpom}}$ は書換え関係である。

**証明.** 補題 44 と 45 により示される。 □

最後に、単純化順序であるという証明を行う。

**補題 46.** $>_{\mathsf{lpom}}$ は部分項性を持つ。

**証明.** $C \neq \square$ と仮定し、$C$ についての構造帰納法によって示す。

- $C = \square$ のとき、これは仮定に反すため矛盾。よって部分項を持つ。
- $C = f(u_1, \ldots, C', \ldots, u_n)$ のとき、任意の項 $t$ に対して $C[t] = f(u_1, \ldots, C'[t], \ldots, u_n)$ である。帰納法の仮定より $C'[t] >_{\mathsf{lpom}} t$ である。よって 1 つ目の条件より $C[t] >_{\mathsf{lpom}} t$ であり、部分項性を持つ。

□

今までの補題より簡約順序であるという証明を完遂できた。

**定理 47.** $>_{\mathsf{lpom}}$ は簡約順序である。

**証明.** 補題 43 と 46、47 より示される。 □

**注 48.** 可読性のため以下のように多重優先順序付き辞書式経路順序の導出規則を定める。

$\succsim$ を優先順序とする。

$$\frac{\exists i.\, s_i >^{=}_{\mathsf{lpom}} t}{f(\bar{s}) >_{\mathsf{lpom}} t} \qquad\qquad \frac{s >^{\mathsf{P1}}_{\mathsf{lpom}} t \quad \forall j.\, s >_{\mathsf{lpom}} t_j}{s = f(\bar{s}) >_{\mathsf{lpom}} g(\bar{t}) = t}$$

$$\frac{f >_i g}{f(\bar{s}) >^{\mathsf{P}i}_{\mathsf{lpom}} g(\bar{t})} \qquad\qquad \frac{f \sim_j g \quad s >^{\mathsf{A}j}_{\mathsf{lpom}} t}{s = f(\bar{s}) >^{\mathsf{P}j}_{\mathsf{lpom}} g(\bar{t}) = t}$$

$$\frac{s_j >_{\mathsf{lpom}} t_j}{f(\bar{s}) >^{\mathsf{A}j}_{\mathsf{lpom}} g(\bar{t})} \qquad\qquad \frac{s_j = t_j \quad s >^{\mathsf{P}\ j+1}_{\mathsf{lpom}} t}{s = f(\bar{s}) >^{\mathsf{A}j}_{\mathsf{lpom}} g(\bar{t}) = t}$$

**例 49.** 次のような項書換え系について考える。

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{g}(x, y) \qquad\qquad \mathsf{g}(x, y) \to \mathsf{s}(\mathsf{f}(x, y))$$

この項書換え系は以下のように 2 つの優先順序を用いて各規則を向き付けることができるため、停止性を証明できる。

$$\begin{aligned} &\gtrsim_1\!: \mathsf{f} \sim \mathsf{g} \succ \mathsf{s} \\ &\gtrsim_2\!: \mathsf{g} \succ \mathsf{f} \end{aligned}$$

- $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{g}(x, y)$

$$\frac{\dfrac{\mathsf{f} \sim_1 \mathsf{g} \quad \dfrac{\dfrac{x >^{=}_{\mathsf{lpom}} x}{\mathsf{s}(x) >_{\mathsf{lpom}} x}}{\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) >^{\mathsf{A1}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{g}(x, y)}}{\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) >^{\mathsf{P1}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{g}(x, y)} \quad \dfrac{\vdots}{\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) >_{\mathsf{lpom}} x} \quad \dfrac{\vdots}{\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) >_{\mathsf{lpom}} y}}{\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y) >_{\mathsf{lpom}} \mathsf{g}(x, y)}$$

- $\mathsf{g}(x, y) \to \mathsf{s}(\mathsf{f}(x, y))$

$$\frac{\dfrac{\mathsf{g} >_1 \mathsf{s}}{\mathsf{g}(x, y) >^{\mathsf{P1}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{s}(\mathsf{f}(x, y))} \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{g} \sim_1 \mathsf{f} \quad \dfrac{x >^{=}_{\mathsf{lpom}} x \quad \dfrac{\mathsf{g} >_2 \mathsf{f}}{\mathsf{g}(x, y) >^{\mathsf{P2}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{f}(x, y)}}{\mathsf{g}(x, y) >^{\mathsf{A1}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{f}(x, y)}}{\mathsf{g}(x, y) >^{\mathsf{P1}}_{\mathsf{lpom}} \mathsf{f}(x, y)} \quad \vdots}{\mathsf{g}(x, y) >_{\mathsf{lpom}} \mathsf{f}(x, y)}}{\mathsf{g}(x, y) >_{\mathsf{lpom}} \mathsf{s}(\mathsf{f}(x, y))}$$

**例 50.** 次のような項書換え系について考える。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{gt}(0, y) &\to \mathsf{false}\\
\mathsf{gt}(\mathsf{s}(x), 0) &\to \mathsf{true}\\
\mathsf{gt}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{gt}(x, y)\\
\mathsf{odds}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil}\\
\mathsf{odds}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})) &\to \mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})\\
\mathsf{odds}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, zs))) &\to \mathsf{cons}(x, \mathsf{odds}(zs))\\
\mathsf{merge}(\mathsf{nil}, ys) &\to ys\\
\mathsf{merge}(xs, \mathsf{nil}) &\to xs\\
\mathsf{merge}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) &\to \mathsf{if}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys), \mathsf{gt}(x, y))\\
\mathsf{ms}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil}\\
\mathsf{ms}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})) &\to \mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})\\
\mathsf{ms}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, zs))) &\to \mathsf{merge}(\mathsf{ms}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{odds}(zs))), \mathsf{ms}(\mathsf{odds}(\mathsf{cons}(y, zs))))
\end{aligned}
$$

これはマージソートの項書換え系である。これを LPO で停止性を証明しようとする場合、$\mathsf{merge}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to \mathsf{if}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys), \mathsf{gt}(x, y))$ が異なる優先順序を要求するため停止性を証明することができない。しかし LPOM はこの制約を突破することができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\mathsf{merge} \sim_1 \mathsf{if} \qquad \dfrac{\mathsf{cons}(x, xs) = \mathsf{cons}(x, xs) \qquad \dfrac{\mathsf{merge} \sim_2 \mathsf{if} \qquad \dfrac{\mathsf{cons}(y, ys) = \mathsf{cons}(y, ys) \qquad \dfrac{\mathsf{merge} >_3 \mathsf{if}}{s >^{\mathsf{P3}}_{\mathsf{lpom}} t}}{s >^{\mathsf{A2}}_{\mathsf{lpom}} t}}{s >^{\mathsf{P2}}_{\mathsf{lpom}} t}}{s >^{\mathsf{A1}}_{\mathsf{lpom}} t}}{s >^{\mathsf{P1}}_{\mathsf{lpom}} t} \qquad \vdots}{s = \mathsf{merge}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) >_{\mathsf{lpom}} \mathsf{if}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys), \mathsf{lt}(x, y)) = t}
$$

## 3.2 実験

この節では LPOM を用いる停止性ツールを用いた実験結果について述べる。問題集は TPDB 11.0 [1] を用い、実験環境として CPU は 11th Gen Intel Core i7-1185G7 @ 3.00GHz、メモリ 16GB の上で、制限時間 60 秒で実験を行った。

まず、用いたツールについて述べる。今実験では問題を 4 つの簡約順序を用いて、それぞれの順序で停止性の証明を試みるという実験を行った。用いた順序はそれぞれ LPO, LPOM, LPO with s.t., LPOM with s.t. である。ここで、LPO with s.t. と LPOM with s.t. は LPO と LPOM にそれぞれ辞書式比較の代わりに、ステータス関数 (status function) を用いて引数比較の順序を入れ替えることを許す拡張である。

次に、表の読み方について述べる。ツールの出力形式は停止性ツールの競技会 termCOMP の様式を採用しており、それぞれのステータスの意味は以下の通りである。

YES 停止性を持つことの証明に成功。

NO 停止性を持たないことの証明に成功。

MAYBE 証明を完遂することができなかった場合。証明ができない場合もこれに含まれる。

TIMEOUT 制限時間である 60 秒を超えた場合。

ERROR ツール自体からエラーが出力された場合。

それぞれのマスにおいて、上方の数字はそれぞれのステータスに出力された問題数の合計で、下方の数字はそれらの問題に費やした時間の合計である。

完全な実験結果は以下に置かれている。

`https://www.jaist.ac.jp/~s2110044/experiments/tpdb/result.html`

表 3.1　Termination analysis on TPDB 11.0.

| status | lpo | lpom | lpo with s.t. | lpom with s.t. |
|---|---|---|---|---|
| YES | **149** | **162** | **180** | **195** |
| *total time* (sec) | *3.00* | *3.05* | *7.02* | *7.53* |
| NO | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *total time* (sec) | *0.00* | *0.00* | *0.00* | *0.00* |
| MAYBE | 1355 | 1342 | 1309 | 1294 |
| *total time* (sec) | *52.99* | *51.25* | *200.48* | *200.65* |
| TIMEOUT | 5 | 3 | 19 | 20 |
| *total time* (sec) | *300.00* | *180.00* | *1140.00* | *1200.00* |
| ERROR | 2 | 4 | 3 | 2 |
| *total time* (sec) | *77.27* | *159.24* | *145.62* | *74.47* |

理論的な包含関係通り、実験結果においても lpo $\subseteq$ lpom、lpo with s.t. $\subseteq$ lpom with s.t. という関係が成立した。新たな順序 LPOM は LPO より証明できるクラスの広い簡約順序であることがわかる。

# 第 4 章

# 依存対手法と意味経路順序

この章では、Borralleras らの単調意味経路順序 [4] と依存対の関係を明らかにする。Dershowitz[5] は単純意味経路順序と呼ばれる意味経路順序の亜種が依存対の基本定理を模倣できることを示した。ただし、単純意味経路順序は一般に簡約順序にならない。本節では、その成果を単調意味経路順序に持ち上げる。Dershowitz[5] はそれが可能であることをすでに主張しているが、ここでは完全な証明を与える。

## 4.1 意味経路順序

まず、意味経路順序に関わる定義について述べる。

**定義 51.** $R$ を二項関係とする。$s\ R^\sharp\ t$ が成り立つのは $s^\sharp\ R\ t^\sharp$ が成り立つときである。

**定義 52.** $\succsim$ が**整礎擬順序**（well-founded quasi-order）であるというのは、$\succsim \setminus \precsim$ が整礎である順序のことである。$\succsim \setminus \precsim$ を $\succ$ で表すこともある。

**定義 53.** $(\succsim, \succsim^\sharp)$ が以下の性質を満たすとき、これを**調和簡約対**（harmonious reduction pair）と呼ぶ。

- $\succsim$ が書換え順序でありかつ半順序である。
- $\succsim^\sharp$ が非変数項上の整礎擬順序でありかつ代入に閉じている。
- $\succ^\sharp$ が代入に閉じている。
- **調和**（harmonious）であること。つまり、$s \succsim t$ ならば $f(\ldots, s, \ldots) \succsim^\sharp f(\ldots, t, \ldots)$ が成り立つ。

**定義 54.** $(\succsim, \succsim^\sharp)$ を調和簡約対とする。項上の関係である**意味経路順序**（semantic path order）$s >_{\mathsf{spo}} t$ が成り立つのは $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ とかけて以下のいずれかが成り立つときである。

1. ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $s_i >^{=}_{\mathsf{spo}} t$。
2. $t = g(t_1, \ldots, t_m)$、$s \succ^\sharp t$ かつ任意の $j$ $(1 \leq i \leq m)$ について $s >_{\mathsf{spo}} t_j$。
3. $t = g(t_1, \ldots, t_m)$、$s \succsim^\sharp t$、$(s_1, \ldots, s_n) >^{\mathsf{lex}}_{\mathsf{spo}} (t_1, \ldots, t_m)$ かつ任意の $j$ $(1 \leq i \leq m)$ について $s >_{\mathsf{spo}} t_j$

また、項上の関係である**単調意味経路順序**（monotonic semantic path order）$>_{\mathsf{mspo}}$ を次のように定義する。$s >_{\mathsf{mspo}} t$ が成り立つのは $s \succsim t$ かつ $s >_{\mathsf{spo}} t$ が成立するときである。

**定理 55** ([4])**.** 単調意味経路順序 $>_{\mathsf{mspo}}$ は簡約順序である。ここで $>_{\mathsf{mspo}}$ は調和簡約対 $(\succsim, \succsim^\sharp)$ から導出された単調意味経路順序であるとする。

## 4.2 簡約対から調和簡約対への翻訳

以下これが単調意味経路順序で模倣可能なことを示す。まずは簡約対から単調意味経路順序のパラメータである調和簡約対を構成する方法を示す。

**定義 56.** 簡約対 $(\gtrsim, >)$ が強い互換性の定義を持つとは $>$ が $\gtrsim$ の strict part であることをいう。

簡約順序 $>$ と引数フィルタリングからなる簡約対 $(\gtrsim^\pi, >^\pi)$ も代数 $\mathcal{A}$ から構成される簡約対 $(\gtrsim_{\mathcal{A}}, >_{\mathcal{A}})$ も強い互換性を持ち、自動化に用いられる主要な簡約対はこの性質を持つ。

**定義 57.** $\gtrsim$ を擬順序、$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ をシグネチャとする。拡張 $\gtrsim_{\mathcal{D}}$ を次のように定義する。$f(s_1, \ldots, s_n) \gtrsim_{\mathcal{D}} g(t_1, \ldots, t_m)$ が成り立つのは以下のいずれかが成り立つときである：

1. $f \in \mathcal{D}$ かつ $g \notin \mathcal{D}$、または
2. $f, g \in \mathcal{D}$ かつ $f^\sharp(s_1, \ldots, s_n) \gtrsim g^\sharp(t_1, \ldots, t_m)$。

以下 $(\gtrsim, >)$ を強い互換性を持つ簡約対とし、この簡約対から調和簡約対へ翻訳できることを示す。1 番目の順序は自明であるので、2 番めの順序が調和簡約対の性質を満たすことを証明する。

**補題 58.** $\gtrsim_{\mathcal{D}}$ は擬順序である。

**証明.** 反射性と推移性を持つことをそれぞれ示す。

- 反射性
  $\mathsf{root}(s) \in \mathcal{D}$ であるときに $s^\sharp \gtrsim s^\sharp$ が成り立つことを示せば十分。$\gtrsim$ は擬順序であるため、$s^\sharp \gtrsim s^\sharp$ は成り立つ。よって定義より $s \gtrsim_{\mathcal{D}} s$。
- 推移性
  $s \gtrsim_{\mathcal{D}} t$ かつ $t \gtrsim_{\mathcal{D}} u$ と仮定する。2 つの場合について考える
  - $\mathsf{root}(t) \notin \mathcal{D}$ である場合、$t \gtrsim_{\mathcal{D}} u$ が成立せず、矛盾。
  - $\mathsf{root}(t) \in \mathcal{D}$ である場合、$s^\sharp \gtrsim t^\sharp$ かつ $t^\sharp \gtrsim u^\sharp$ である。$\gtrsim$ は推移性を持つため、$s^\sharp \gtrsim u^\sharp$。したがって $s \gtrsim_{\mathcal{D}} u$。

□

**補題 59.** $\gtrsim_{\mathcal{D}}$ は代入に閉じている。

**証明.** $s = f(s_1, \ldots, s_n) \gtrsim_{\mathcal{D}} g(t_1, \ldots, t_n) = t$ と仮定する。2 つの場合について考える。

- $g \notin \mathcal{D}$ である場合、$s\sigma = f(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \gtrsim_{\mathcal{D}} g(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) = t\sigma$ は成り立つ。
- $g \in \mathcal{D}$ である場合、よって $s^\sharp = f^\sharp(s_1, \ldots, s_n) \gtrsim g^\sharp(t_1, \ldots, t_n) = t^\sharp$。$\gtrsim$ は代入に閉じているので、$s^\sharp\sigma = f^\sharp(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \gtrsim g^\sharp(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) = t^\sharp\sigma$。したがって $s\sigma \gtrsim_{\mathcal{D}} t\sigma$。

どちらの場合も成り立つので、$\gtrsim_{\mathcal{D}}$ は代入に閉じている。 □

**補題 60.** $>_{\mathcal{D}}$ は整礎である。

**証明.** 無限の下降列

$$u_1 >_{\mathcal{D}} u_2 >_{\mathcal{D}} \cdots >_{\mathcal{D}} u_i >_{\mathcal{D}} u_{i+1} >_{\mathcal{D}} \cdots$$

が存在すると仮定する。よって $u_i >_{\mathcal{D}} u_{i+1}$ が成立する $i$ が無限に存在する。$\mathsf{root}(u_i) \in \mathcal{D}$、$\mathsf{root}(u_{i+1}) \notin \mathcal{D}$ である場合、$u_{i+1} >_{\mathcal{D}} u_{i+2}$ が成立せず、矛盾。よって $\mathsf{root}(u_i), \mathsf{root}(u_{i+1}) \in \mathcal{D}$ が成立する $i$ が無限に存在する。しかしこの場合 $u_i > u_{i+1}$ は無限に存在し、$>$ の整礎性に反する。したがってこのような無限の下降列は存在しない。 □

次に調和であることを証明する。

**補題 61.** $s \gtrsim t$ ならば $s \gtrsim_{\mathcal{D}} t$ である。

**証明.** $s \gtrsim t$ と仮定し、場合分けをする。

- $\mathsf{root}(t) \notin \mathcal{D}$ の場合、定義より $s \gtrsim_{\mathcal{D}} t$ が成立。
- $\mathsf{root}(t) \in \mathcal{D}$ の場合、$s^\sharp \gtrsim t^\sharp$ が成立するため、よって定義より $s \gtrsim_{\mathcal{D}} t$ が成立。

$\square$

**補題 62.** $s > t$ ならば $s >_{\mathcal{D}} t$ である。

**証明.** $s > t$ と仮定する。よって $s \gtrsim t$ かつ $t \not\gtrsim s$ である。補題 61 より、$s \gtrsim_{\mathcal{D}} t$。したがって、$t \not\gtrsim_{\mathcal{D}} s$ を示せば十分である。背理法を用いる。$t \gtrsim_{\mathcal{D}} s$ と仮定し、場合分けをする。

- $\mathsf{root}(t) \notin \mathcal{D}$ である場合、$t \gtrsim_{\mathcal{D}} s$ は成立せず、矛盾。
- $\mathsf{root}(t) \in \mathcal{D}$ である場合、$t \gtrsim s$ が成立。これは仮定に反するため、矛盾。

したがって $s >_{\mathcal{D}} t$ である。 $\square$

よって、定理を示すことができる。

**定理 63.** $(\gtrsim, >)$ が強い互換性を持つ簡約対であるとすると、$(\gtrsim, \gtrsim_{\mathcal{D}})$ は調和簡約対になり、かつ $> \subseteq >_{\mathcal{D}}$ と $\gtrsim \subseteq \gtrsim_{\mathcal{D}}$ が成立する。

**証明.** 補題 58 から 62 による。 $\square$

## 4.3 依存対の模倣

まず、依存対の基本定理を述べる。

**定理 64** ([2])**.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。$\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >$ を満たす簡約対 $(\gtrsim, >)$ が存在するとき、$\mathcal{R}$ は停止性を持つ。

これが前節の調和簡約対の構成法によって、単調意味経路順序で項書換え系の停止性を証明できることを示す。$\mathcal{R}$ を項書換え系、$\mathcal{D}$ を定義記号の集合とする。更に $\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >$ を満たし、強い互換性を持つ簡約対 $(\gtrsim, >)$ が与えられたとする。また、$(\gtrsim, \gtrsim_{\mathcal{D}})$ から導出される意味経路順序を $>_{\mathsf{spo}}$ で表す。

**補題 65.** $l \to r \in \mathcal{R}$ かつ $u \trianglelefteq r$ のとき、$l >_{\mathsf{spo}} u$ が成立する。

**証明.** $l = f(\bar{s})$ とする。$||u||$ についての帰納法によって証明する。

- $||u|| = 0$ のとき、$u$ は変数である。書換え規則の定義より、$\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$ であるため、定義 54 の 1 つ目の規則により $l >_{\mathsf{spo}} u$ が成り立つ。
- $||u|| > 0$ のとき、$u = g(\bar{t}_m)$ とする。これについて 2 つの場合が考えられる。
  - $g \in \mathcal{D}$ である場合、$f^\sharp(\bar{s}) > g^\sharp(\bar{t})$ より $l >_{\mathcal{D}} u$ が成り立つ。また、帰納法の仮定よりすべての $1 \leq j \leq m$ に対して $l >_{\mathsf{spo}} u_j$。定義 54 の 2 つ目の規則により $l >_{\mathsf{spo}} u$ が成り立つ。
  - $g \notin \mathcal{D}$ である場合、$f \in \mathcal{D}$ かつ $g \notin \mathcal{D}$。よって $l >_{\mathcal{D}} u$ が成り立つ。また、帰納法の仮定よりすべての $1 \leq j \leq m$ に対して $l >_{\mathsf{spo}} u_j$。定義 54 の 2 つ目の規則により $l >_{\mathsf{spo}} u$ が成り立つ。

□

**補題 66.** $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{spo}}$ が成立する。

**証明.** 補題 65 により直ちに導かれる。 □

**定理 67.** $\mathcal{D}$ を定義記号の集合とする。$\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >$ となる簡約対 $(\gtrsim, >)$ が与えられるとき、翻訳によって構成された $(\gtrsim, \gtrsim_{\mathcal{D}})$ から導出された $>_{\mathsf{mspo}}$ は $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{mspo}}$ を満たす。

**証明.** 定理 63 より、翻訳により調和簡約対 $(\gtrsim, \gtrsim_{\mathcal{D}})$ が構成できる。また、仮定と補題 66 より、$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{spo}}$ かつ $\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ であるため、定義 54 の $>_{\mathsf{mspo}}$ の条件を満たし、$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{mspo}}$ となる。 □

定理 67 により単調意味経路順序で依存対手法を模倣できることが示された。次に、模倣の具体例を以下に示す。ただし、可読性のためそれぞれの順序の定義について以下の導出規則による表現を導入して例示する。

**注 68.** 以下のように導出規則を定める。

- 辞書式経路順序
  $\gtrsim$ を優先順序とする。

$$\frac{\exists i.\, s_i >_{\mathsf{lpo}}^{=} t}{f(\bar{s}) >_{\mathsf{lpo}} t} \qquad \frac{f \succ g \quad \forall j.\, s >_{\mathsf{lpo}} t_j}{s = f(\bar{s}) >_{\mathsf{lpo}} g(\bar{t})} \qquad \frac{f \sim g \quad \bar{s} >_{\mathsf{lpo}}^{\mathsf{lex}} \bar{t} \quad \forall j.\, s >_{\mathsf{lpo}} t_j}{f(\bar{s}) >_{\mathsf{lpo}} f(\bar{t})}$$

- 引数フィルタリング

$\pi$ を引数フィルタリングとする。

$$\frac{\pi(f(\bar{s})) > \pi(g(\bar{t}))}{f(\bar{s}) >^{\pi} g(\bar{t})}$$

- $>_{\mathcal{D}}$
  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ を項書換え系 $\mathcal{R}$ における定義記号の集合とする。

$$\frac{f, g \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \quad f^{\sharp}(\bar{s}) > g^{\sharp}(\bar{t})}{f(\bar{s}) >_{\mathcal{D}} g(\bar{t})} \qquad \frac{f \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \quad g \notin \mathcal{D}_{\mathcal{R}}}{f(\bar{s}) >_{\mathcal{D}} g(\bar{t})}$$

- 意味経路順序
  $(\succsim, \succsim^{\sharp})$ を調和簡約対とする。

$$\frac{s_i >^{=}_{\mathsf{spo}} t}{f(\bar{s}) >_{\mathsf{spo}} t} \qquad \frac{s \succ^{\sharp} t \quad \forall j.\ s >_{\mathsf{spo}} t_j}{s = f(\bar{s}) >_{\mathsf{spo}} g(\bar{t}) = t} \qquad \frac{s \succsim^{\sharp} t \quad \bar{s} >^{\mathsf{lex}}_{\mathsf{spo}} \bar{t} \quad \forall j.\ s >_{\mathsf{spo}} t_j}{s = f(\bar{s}) >_{\mathsf{spo}} g(\bar{t}) = t}$$

- 単調意味経路順序
  $(\succsim, \succsim^{\sharp})$ を調和簡約対とする。

$$\frac{s \succsim t \quad s >_{\mathsf{spo}} t}{s = f(\bar{s}) >_{\mathsf{mspo}} t}$$

**例 69.** $\mathcal{R} = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))\}$ をまず依存対手法を用いて証明する。$\mathsf{DP}(\mathcal{R}) = \{\mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}^{\sharp}(x)\}$ となる。優先順序を $f^{\sharp} \succ f \succ g$、引数フィルタリングを $\pi(g) = [\ ]$ とする簡約対 $(\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}, >^{\pi}_{\mathsf{lpo}})$ を取ることにより、$\mathcal{R} \subseteq \geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{lpo}}$ が成り立ち、停止性を証明できる。ただし、$\geq_{\mathsf{lpo}}$ は辞書式順序の反射閉包を意味する。

$\mathcal{R}$ :

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{f} \sim \mathsf{f} \quad \cfrac{\mathsf{f} \succ \mathsf{g}}{\mathsf{f}(x) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{g}} \quad \cfrac{\mathsf{f} \succ \mathsf{g}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{g}}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}(\mathsf{g})}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))}$$

$\mathsf{DP}(\mathcal{R})$ :

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{f}^{\sharp} \sim \mathsf{f}^{\sharp} \quad \cfrac{\mathsf{f} \succ \mathsf{g}}{\mathsf{f}(x) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{g}} \quad \cfrac{\mathsf{f}^{\sharp} \succ \mathsf{g}}{\mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{g}}}{\mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{g})}}{\mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{f}(x)) >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}^{\sharp}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))}$$

$$
\dfrac{\mathsf{f}^\sharp \sim \mathsf{f}^\sharp \quad \dfrac{x \geq_{\mathsf{lpo}} x}{\mathsf{f}(x) >_{\mathsf{lpo}} x} \quad \dfrac{\dfrac{x \geq_{\mathsf{lpo}} x}{\mathsf{f}(x) >_{\mathsf{lpo}} x}}{\mathsf{f}^\sharp(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} x}}{\dfrac{\mathsf{f}^\sharp(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}^\sharp(x)}{\mathsf{f}^\sharp(\mathsf{f}(x)) >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}^\sharp(x)}}
$$

次に、単調意味経路順序によって証明する。そのために、まず上と同じ簡約対 $(\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}, >^{\pi}_{\mathsf{lpo}})$ から調和簡約対 $(\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}, (\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}})_{\mathcal{D}})$ を構成する。この調和簡約対から導出される $>_{\mathsf{mspo}}$ を用いると以下のような停止性の証明ができる。

$\mathcal{R}$ :

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))} \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \quad \dfrac{\vdots}{\mathsf{f}^\sharp(\mathsf{f}(x)) >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} \mathsf{f}^\sharp(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\ (>^{\pi}_{\mathsf{lpo}})_{\mathcal{D}}\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))} \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{f} \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \quad \mathsf{g} \notin \mathcal{D}_{\mathcal{R}}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\ (>^{\pi}_{\mathsf{lpo}})_{\mathcal{D}}\ \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))} \quad \dfrac{\mathsf{f}(x) >^{=}_{\mathsf{spo}} \mathsf{f}(x)}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{spo}} \mathsf{f}(x)}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{spo}} \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{spo}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))}}{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) >_{\mathsf{mspo}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))}
$$

# 第 5 章

# 依存グラフの模倣

## 5.1 ルート近似依存グラフ

この節では、模倣される依存グラフによる停止性の十分条件を振り返る。

**定義 70.** 頂点集合 $V = \mathsf{DP}(\mathcal{R})$ と辺集合 $E = \{(s \to t, u \to v) \in V^2 \mid$ ある $\sigma, \sigma'$ が存在して $t\sigma \to_{\mathcal{R}}^* u\sigma'\}$ からなる有向グラフ $(V, E)$ のことを**依存グラフ**（dependency graph）と呼ぶ。

一般的に依存グラフのどの頂点間に辺が存在するかについては決定不能である。そのため以下のような近似依存グラフを用いる。

**定義 71.** 頂点集合 $V = \mathsf{DP}(\mathcal{R})$ と辺集合 $E = \{(s \to t, u \to v) \in V^2 \mid \mathsf{root}(t) = \mathsf{root}(u)\}$ からなる有向グラフ $(V, E)$ のことを**ルート近似依存グラフ**（root approximate dependency graph; RDG）と呼ぶ。また、項書換え系 $\mathcal{R}$ についてのルート近似依存グラフを $\mathsf{RDG}(\mathcal{R})$ と表す。

**定義 72.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。非変数項上の関係 $\gtrsim_r$ を次のように定義する。$s \gtrsim_r t$ が成り立つのは $\mathsf{root}(s) \to_r^* \mathsf{root}(t)$ が成り立つときである。また、$>_r = \gtrsim_r \setminus \lesssim_r$ 、$\approx_r = \gtrsim_r \cap \lesssim_r$ とする。ただし、

$$\to_r = \{(\mathsf{root}(s), \mathsf{root}(t)) \mid s^\sharp \to t^\sharp \in \mathsf{DP}(\mathcal{R})\}$$

である。

**例 73.** 以下の項書換え系 $\mathcal{R}$ における $\gtrsim_r$ の例を示す。

$$\begin{aligned}\mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{0} \\ \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))\end{aligned}$$

項書換え系 $\mathcal{R}$ から以下の依存対の集合 $\mathsf{DP}(\mathcal{R})$ が生成される。

$$\begin{aligned}\mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x, y) \\ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}^\sharp(x, y)\end{aligned}$$

この例において $\to_r = \{(\mathsf{minus}, \mathsf{minus}), (\mathsf{quot}, \mathsf{quot}), (\mathsf{quot}, \mathsf{minus})\}$ となる。

**定理 74.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。ルート近似依存グラフ $\mathsf{RDG}(\mathcal{R})$ に属するすべての強連結成分 $\mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{R} \subseteq \gtrsim_{\mathcal{C}}$ かつ $\mathsf{DP}(\mathcal{R}) \subseteq >_{\mathcal{C}}$ を満たす簡約対 $(\gtrsim_{\mathcal{C}}, >_{\mathcal{C}})$ が存在するとき、$\mathcal{R}$ は停止性を持つ。

## 5.2 ルート近似依存グラフから調和簡約対への翻訳

ルート近似依存グラフを単調意味経路順序で模倣可能なことを示す。まずはじめに、調和簡約対へ翻訳する方法を示す。

**定義 75.** 項上の関係 $\gtrsim_{\mathcal{T}}$ を次のように定義する。$s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ が成り立つのは $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ のときである。

**定義 76.** 優先順序 $\succsim$ が与えられたとする。非変数項上の関係 $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ を次のように定義する。$s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ が成り立つのは $\mathsf{root}(s) \succsim \mathsf{root}(t)$ が成立するときである。また、$>_{\mathcal{G}} = \gtrsim_{\mathcal{G}} \setminus \lesssim_{\mathcal{G}}$ 、$\approx_{\mathcal{G}} = \gtrsim_{\mathcal{G}} \cap \lesssim_{\mathcal{G}}$ とする。

これより $(\gtrsim_{\mathcal{T}}, \gtrsim_{\mathcal{G}})$ が調和簡約対であることを示す。はじめに $\gtrsim_{\mathcal{T}}$ が満たすべき性質について証明する。

**補題 77.** $\gtrsim_{\mathcal{T}}$ は擬順序である。

**証明.** 反射性と推移性を持つことをそれぞれ示す。

- 反射性
  $\gtrsim_{\mathcal{T}}$ は項上の関係であるため、任意の項 $t$ に対して $t \gtrsim t$ が成り立つ。
- 推移性
  任意の項 $s, t, u$ に対し $s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ と $t \gtrsim_{\mathcal{T}} u$ が成り立つと仮定する。$s$ と $u$ は共に項であるため、したがって $s \gtrsim_{\mathcal{T}} u$。

□

**補題 78.** $\gtrsim_{\mathcal{T}}$ は書換え順序である。

**証明.** 文脈と代入に閉じていることをそれぞれ示す。

- 文脈に閉じている
  任意の項 $s, t$ に対して $s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ と仮定する。任意の文脈 $C$ に対して $C[s], C[t] \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ となるのは自明である。よって $C[s] \gtrsim_{\mathcal{T}} C[t]$。
- 代入について閉じている
  任意の項 $s, t$ に対して $s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ と仮定する。任意の代入 $\sigma$ に対して $s\sigma, t\sigma \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ となるのは自明である。よって $s\sigma \gtrsim_{\mathcal{T}} t\sigma$。

□

次に $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ が満たすべき性質について証明する。

**補題 79.** $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ は擬順序である。

**証明.** 反射性と推移性を持つことをそれぞれ示す。

- 反射性
  任意の項 $t$ と任意の優先順序 $\succsim$ に対して、$\mathsf{root}(t) \succsim \mathsf{root}(t)$ が成り立つのは自明である。よって $t \gtrsim_{\mathcal{G}} t$。
- 推移性
  任意の項 $s, t, u$ に対し $s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ と $t \gtrsim_{\mathcal{G}} u$ が成り立つと仮定する。よって $\mathsf{root}(s) \succsim \mathsf{root}(t)$ かつ $\mathsf{root}(t) \succsim \mathsf{root}(u)$ である。$\succsim$ は推移性を持つため $\mathsf{root}(s) \succsim \mathsf{root}(u)$。したがって $s \gtrsim_{\mathcal{G}} u$。

□

**補題 80.** $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ は代入に閉じている。

**証明.** $s,t$ を非変数の項とし、$s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ と仮定する。仮定より与えられた優先順序 $\succsim$ に対して $\mathsf{root}(s) \succsim \mathsf{root}(t)$ である。代入の定義より $s\sigma, t\sigma$ は非変数項であり、また明らかに $\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(s\sigma)$ かつ $\mathsf{root}(t) = \mathsf{root}(t\sigma)$ である。よって $\mathsf{root}(s\sigma) \succsim \mathsf{root}(t\sigma)$。したがって $s\sigma \gtrsim_{\mathcal{G}} t\sigma$ は成り立つ。 □

**補題 81.** 優先順序 $\succsim$ を有限の関数記号の上の集合とする。$>_{\mathcal{G}}$ は整礎である。

**証明.** 無限の下降列

$$s_1 >_{\mathcal{G}} s_2 >_{\mathcal{G}} s_3 >_{\mathcal{G}} \cdots$$

が存在すると仮定する。$>_{\mathcal{G}}$ の定義より、反射性を持たないので常に異なる関数記号からなる

$$\mathsf{root}(s_1) \succ \mathsf{root}(s_2) \succ \mathsf{root}(s_3) \succ \cdots$$

のような無限の下降列が存在する。しかし、関数記号の集合が有限という仮定に反するので矛盾。ゆえに $>_{\mathcal{G}}$ は整礎である。 □

$\gtrsim_{\mathcal{G}}$ の整礎性には有限性が不可欠である。例として $\succ = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ のように優先順位 $\succ$ を定める。このとき

$$\mathsf{0} \succ \mathsf{1} \succ \mathsf{2} \succ \cdots$$

のような無限の下降列が存在することになり、整礎性の証明ができない。

最後に調和について証明する。

**補題 82.** 任意の項 $s,t$ と関数記号 $f$ に対して、$s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ ならば $f(\ldots,s,\ldots) \gtrsim_{\mathcal{G}} f(\ldots,t,\ldots)$ が成り立つ。

**証明.** $s \gtrsim_{\mathcal{T}} t$ とする。$\gtrsim_{\mathcal{G}}$ は反射性を持つので、ルート記号が $f$ となる任意の文脈 $C[\,] = f(\ldots,\Box,\ldots)$ について、$C[s] = f(\ldots,s,\ldots) \gtrsim_{\mathcal{G}} f(\ldots,t,\ldots) = C[t]$ となるのは自明である。 □

**定理 83.** $(\gtrsim_{\mathcal{T}}, \gtrsim_{\mathcal{G}})$ は調和簡約対である。

**証明.** 補題 61 から 66 より、調和簡約対の条件を満たすことより示される。 □

**定義 84.** $(\gtrsim_1, \gtrsim_1^\sharp), (\gtrsim_2, \gtrsim_2^\sharp)$ を調和簡約対とする。**多重化調和簡約対** $(\gtrsim_1, \gtrsim_1^\sharp) \otimes (\gtrsim_2, \gtrsim_2^\sharp)$ は次のように定義される対 $(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ である。

- $\gtrsim \,=\, \gtrsim_1 \cap \gtrsim_2$。

- $\gtrsim^\sharp$ は次のように定義される関係である。$s \gtrsim^\sharp t$ が成り立つのは以下の条件のいずれかが満たされるときである。
  1. $s >^\sharp_1 t$。
  2. $s \sim^\sharp_1 t$ かつ $s \gtrsim^\sharp_2 t$。

以降の証明において、定義 80 において $s \gtrsim^\sharp t$ が 1 つ目の条件で成り立つことを $s >^\sharp t \langle 1 \rangle$、2 つ目の条件で成り立つことを $s \gtrsim^\sharp t \langle 2 \rangle$ と表現する。以降の証明で用いる補題として、まず以下を証明する。

**補題 85.** 書換え擬順序は共通部分に閉じている。

**証明.** $\gtrsim_1$ 、$\gtrsim_2$ を書換え擬順序と仮定し、$\sqsupseteq = \gtrsim_1 \cap \gtrsim_2$ が書換え擬順序である条件をそれぞれ満たすことを示す。

- 反射性
  $\gtrsim_1$ と $\gtrsim_2$ は共に反射性を持つので、任意の項 $t$ に対して $t \gtrsim_1 t$ かつ $t \gtrsim_2 t$ は成立する。よって $t \sqsupseteq t$。
- 推移性
  任意の項 $s$、$t$、$u$ に対して $s \sqsupseteq t$ かつ $t \sqsupseteq u$ が成立すると仮定。よって $s \gtrsim_1 t$ かつ $s \gtrsim_2 t$、$t \gtrsim_1 u$、$t \gtrsim_2 u$。$\gtrsim_1$ と $\gtrsim_2$ は共に推移性を持つので、よって $s \gtrsim_1 u$ かつ $s \gtrsim_2 u$。したがって $s \sqsupseteq u$。
- 文脈に閉じている
  任意の項 $s$ と $t$ に対して $s \sqsupseteq t$ が成立すると仮定。よって $s \gtrsim_1 t$ かつ $s \gtrsim_2 t$。$\gtrsim_1$、$\gtrsim_2$ は共に文脈に閉じているので $C[s] \gtrsim_1 C[t]$ かつ $C[s] \gtrsim_2 C[t]$。したがって $C[s] \sqsupseteq C[t]$。
- 代入に閉じている
  任意の項 $s$ と $t$ に対して $s \sqsupseteq t$ が成立すると仮定。よって $s \gtrsim_1 t$ かつ $s \gtrsim_2 t$。$\gtrsim_1$、$\gtrsim_2$ は共に文脈に閉じているので $s\sigma \gtrsim_1 t\sigma$ かつ $s\sigma \gtrsim_2 t\sigma$。したがって $s\sigma \sqsupseteq t\sigma$。

□

$(\gtrsim_1, \gtrsim^\sharp_1), (\gtrsim_2, \gtrsim^\sharp_2)$ を調和簡約対とし、$(\gtrsim, \gtrsim^\sharp) = (\gtrsim_1, \gtrsim^\sharp_1) \otimes (\gtrsim_2, \gtrsim^\sharp_2)$ とする。まずはじめに $\gtrsim$ が満たすべき性質について示す。

**補題 86.** $\gtrsim$ は書換え擬順序である。

**証明.** 調和簡約対の定義より、$\gtrsim_1$ と $\gtrsim_2$ は共に書換え擬順序である。補題 81 より、

$\gtrsim_1 \cap \gtrsim_2$ も書換え擬順序である。したがって $\gtrsim$ は書換え擬順序である。 $\square$

次に $\gtrsim^\sharp$ が満たすべき性質について示す。

**補題 87.** $\gtrsim^\sharp$ は擬順序である。

**証明.** 反射性と推移性を持つことをそれぞれ示す。

- 反射性
  $\gtrsim_1^\sharp$ 、$\gtrsim_2^\sharp$ は反射性を持つため、任意の項 $s$ に対して $s \sim_1^\sharp s$ かつ $s \gtrsim_2^\sharp s$ が成り立つ。したがって $s \gtrsim^\sharp s\ \langle 2 \rangle$。
- 推移性
  $s \gtrsim^\sharp t$ かつ $t \gtrsim^\sharp u$ と仮定し、場合分けを行う。
  - $s \gtrsim^\sharp t\ \langle 1 \rangle$ かつ $t \gtrsim^\sharp u\ \langle 1 \rangle$ である場合。定義より $s >_1^\sharp t$ かつ $t >_1^\sharp u$。$>_1^\sharp$ は推移性を持つため、よって $s >_1^\sharp u$。したがって $s \gtrsim^\sharp u\ \langle 1 \rangle$
  - $s >^\sharp t\ \langle 1 \rangle$ かつ $t >^\sharp u\ \langle 2 \rangle$ である場合。定義より $s >_1^\sharp t$ かつ $t \sim_1^\sharp u$、$t >_2^\sharp u$。よって $s \gtrsim_1^\sharp u$。したがって $s \gtrsim^\sharp u\ \langle 1 \rangle$。
  - $s >^\sharp t\ \langle 2 \rangle$ かつ $t >^\sharp u\ \langle 1 \rangle$ である場合。定義より $s \sim_1^\sharp t$ かつ $s \gtrsim_2^\sharp t$、$t >_1^\sharp u$。よって $s \gtrsim_1^\sharp u$。したがって $s \gtrsim^\sharp u\ \langle 1 \rangle$。
  - $s >^\sharp t\ \langle 2 \rangle$ かつ $t >^\sharp u\ \langle 2 \rangle$ である場合。定義より $s \sim_1^\sharp t$ かつ $s \gtrsim_2^\sharp t$、$t \sim_1^\sharp u$、$t \gtrsim_2^\sharp u$。よって $s \sim_1 u$ かつ $s \gtrsim_2 u$。したがって $s \gtrsim^\sharp u\ \langle 2 \rangle$。

$\square$

**補題 88.** $\gtrsim^\sharp$ は代入に閉じている。

**証明.** $s \gtrsim^\sharp t$ と仮定し、場合分けを行う。

- $s >^\sharp t\ \langle 1 \rangle$ である場合、定義より $s >_1^\sharp t$。$>_1^\sharp$ は代入に閉じているので $s\sigma >_1^\sharp t\sigma$。したがって $s >^\sharp t\ \langle 1 \rangle$。
- $s >^\sharp t\ \langle 2 \rangle$ である場合、定義より $s \sim_1^\sharp t$ かつ $s \gtrsim_2^\sharp t$。よって $s\sigma \sim_1^\sharp t\sigma$ かつ $s\sigma \gtrsim_2^\sharp t\sigma$。したがって $s >^\sharp t\ \langle 2 \rangle$

$\square$

**補題 89.** $>^\sharp$ は整礎である。

**証明.** 無限の下降列

$$u_1 >^\sharp u_2 >^\sharp \cdots >^\sharp u_i >^\sharp u_{i+1} >^\sharp \cdots$$

が存在すると仮定する。$u_i >^\sharp u_{i+1}$ $\langle 1 \rangle$ が成立する $i$ が無限に存在する。しかし定義より $u_i >^\sharp_1 u_{i+1}$ であり、$>^\sharp_1$ の整礎性に反する。よって $u_i >^\sharp u_{i+1}$ $\langle 2 \rangle$ が成立する $i$ が無限に存在する。だが、この場合も定義より $u_i >^\sharp_2 u_{i+1}$ となり、$\gtrsim^\sharp_2$ の整礎性に反する。したがってこのような無限の下降列は存在しない。 □

最後に調和について示す。

**補題 90.** 任意の項 $s, t$ と関数記号 $f$ に対して、$s \gtrsim t$ ならば $f(\ldots, s, \ldots) \gtrsim^\sharp f(\ldots, t, \ldots)$ が成り立つ。

**証明.** $s \gtrsim t$ とする。よって $s \gtrsim_1 t$ かつ $s \gtrsim_2 t$ である。調和であるため、$f(\ldots, s, \ldots) \gtrsim^\sharp_1 f(\ldots, t, \ldots)$ である。したがって $f(\ldots, s, \ldots) \gtrsim^\sharp f(\ldots, t, \ldots)$ $\langle 1 \rangle$ □

**定理 91.** $(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ は調和簡約対である。

**証明.** 補題 84 から 88 による。 □

## 5.3 依存グラフに基づく停止性証明の模倣

**定義 92.** $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。ルート近似依存グラフ RDG($\mathcal{R}$) に属する強連結成分 $\mathcal{C}$ に対して、簡約対 $(\gtrsim_\mathcal{C}, >_\mathcal{C})$ が $\mathcal{R} \subseteq \gtrsim_\mathcal{C}$ 及び DP($\mathcal{R}$) $\subseteq >_\mathcal{C}$ を満たすものとする。このとき優先順序 $\succsim$ を $\to^*_r$ で定め、$\gtrsim^\sharp_\mathcal{C}$ を次のように定義する。$s \gtrsim^\sharp_\mathcal{C} t$ となるのは以下のいずれかが成り立つときである。

1. $s >_\mathcal{G} t$ または、
2. $s \gtrsim_\mathcal{G} t$ かつ $s^\sharp \gtrsim_\mathcal{C} t^\sharp$。

次に強連結成分に対する簡約対から調和簡約対への翻訳について示す。$(\gtrsim_\mathcal{C}, >_\mathcal{C})$ を強い互換性を持つ簡約対とする。また、以降の証明において $\gtrsim^\sharp_\mathcal{C}$ が 1 つ目の条件で成り立つのを $\langle 1 \rangle$、2 つ目で成り立つのを $\langle 2 \rangle$ で表す。

はじめに $\gtrsim_\mathcal{C}$ が満たすべき性質について証明する。

**補題 93.** $\gtrsim_\mathcal{C}$ は書換え擬順序である。

**証明.** 簡約対の定義より、自明である。 □

次に $\gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}}$ が満たすべき性質について証明する。

**補題 94.** $\gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}}$ は擬順序である。

**証明.** 反射性と推移性を持つことをそれぞれ示す。

- 反射性
  $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ と $\gtrsim_{\mathcal{C}}$ は両方擬順序であるため、任意の項 $s$ に対して $s \gtrsim_{\mathcal{G}} s$ かつ $s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} s^{\sharp}$ が成り立つ。よって定義より $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} s$。
- 推移性
  任意の項 $s, t, u$ に対して $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t$ かつ $t \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u$ と仮定する。これについて場合分けを行う。
  - $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 1 \rangle$ かつ $t \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 1 \rangle$ の場合、$s >_{\mathcal{G}} t$ かつ $t >_{\mathcal{G}} u$。よって $s >_{\mathcal{G}} u \ \langle 1 \rangle$。したがって $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u$。
  - $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 1 \rangle$ かつ $t \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 2 \rangle$ の場合、$s >_{\mathcal{G}} t$ かつ $t \gtrsim_{\mathcal{G}} u$、$t^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} u^{\sharp}$。よって $s >_{\mathcal{G}} u$。したがって $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 1 \rangle$。
  - $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 2 \rangle$ かつ $t \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 1 \rangle$ の場合、$s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ かつ $s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} t^{\sharp}$、$t >_{\mathcal{G}} u$。よって $s >_{\mathcal{G}} u$。したがって $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 1 \rangle$。
  - $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 2 \rangle$ かつ $t \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 2 \rangle$ の場合、$s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ かつ $s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} t^{\sharp}$、$t \gtrsim_{\mathcal{G}} u$、$s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} t^{\sharp}$。よって $s \gtrsim_{\mathcal{G}} u$ かつ $s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} u^{\sharp}$。したがって $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} u \ \langle 2 \rangle$。

□

**補題 95.** $\gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}}$ は代入に閉じている。

**証明.** $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t$ と仮定する。2 つの場合が存在する。

- $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 1 \rangle$ の場合、定義より $s >_{\mathcal{G}} t$ である。$\gtrsim_G G$ は代入に閉じているため、任意の代入 $\sigma$ について $s\sigma >_{\mathcal{G}} t\sigma$。したがって $s\sigma \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t\sigma \ \langle 1 \rangle$。
- $s \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t \ \langle 2 \rangle$ の場合、定義より $s \gtrsim_{\mathcal{G}} t$ かつ $s^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} t^{\sharp}$。$\gtrsim_{\mathcal{G}}$ と $\gtrsim_{\mathcal{C}}$ は両方代入に閉じているため、任意の代入 $\sigma$ について $s\sigma \gtrsim_{\mathcal{G}} t\sigma$ かつ $s\sigma^{\sharp} \gtrsim_{\mathcal{C}} t\sigma^{\sharp}$ は成り立つ。したがって $s\sigma \gtrsim^{\sharp}_{\mathcal{C}} t\sigma \ \langle 2 \rangle$。

□

**補題 96.** $>^{\sharp}_{\mathcal{C}}$ は整礎である。

**証明.** 無限の下降列

$$u_1 >^\sharp u_2 >^\sharp \cdots >^\sharp u_i >^\sharp u_{i+1} >^\sharp \cdots$$

が存在すると仮定する。よって $u_i >^\sharp u_{i+1}$ が成立する $i$ が無限に存在する。定義 92 の 1 つ目の条件によって成立しているとすると、よって $u_i >_\mathcal{G} u_{i+1}$ が成立する $i$ が無限に存在し、これは $>_\mathcal{G}$ の整礎性に反する。したがって 2 つ目の条件によって成立している。しかし、この場合も定義より $u_i^\sharp >_\mathcal{C} u_{i+1}^\sharp$ が成立する $i$ が無限に存在するため、$>_\mathcal{C}$ の整礎性に反する。したがってこのような無限の下降列は存在しない。 □

最後に調和について証明する。

**補題 97.** $s_i \gtrsim_\mathcal{C} t$ ならば $f(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \gtrsim_\mathcal{C}^\sharp f(s_1, \ldots, t, \ldots, s_n)$ が成立。

**証明.** $s_i \gtrsim_\mathcal{C} t$ と仮定する。$f(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \gtrsim_\mathcal{G} f(s_1, \ldots, t, \ldots, s_n)$ はルート記号が同一なので自明であり、$\gtrsim_\mathcal{C}$ は書換え擬順序であるから $f^\sharp(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \gtrsim_\mathcal{G} f^\sharp(s_1, \ldots, t, \ldots, s_n)$ は成立する。したがって $f(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \gtrsim_\mathcal{C}^\sharp f(s_1, \ldots, t, \ldots, s_n)$ $\langle 2 \rangle$。 □

よって以下の定理を証明できる。

**定理 98.** $(\gtrsim_\mathcal{C}, >_\mathcal{C})$ を強い互換性を持つ簡約対とする。このとき $(\gtrsim_\mathcal{C}, \gtrsim_\mathcal{C}^\sharp)$ は調和簡約対である。

**証明.** 補題 93 から 97 により導かれる。 □

優先順序 $\succsim$ が与えられているものとする。また、$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ を強連結成分とし、$(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ を $(\gtrsim_\mathcal{T}, \gtrsim_\mathcal{G}) \otimes (\gtrsim_{\mathcal{C}_1}, \gtrsim_{\mathcal{C}_1}^\sharp) \otimes \cdots \otimes (\gtrsim_{\mathcal{C}_n}, \gtrsim_{\mathcal{C}_n}^\sharp)$ とする。$>_{\mathsf{spo}}$ を $(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ から導出された意味経路順序とする。

本章の締めくくりとして、依存対手法を模倣できる簡約順序であることを証明する。

**補題 99.** 任意の $l \to r \in \mathcal{R}$ と非変数部分項 $u \trianglelefteq r$ に対して、$l >_{\mathsf{spo}} u$ である。

**証明.** $l = f(s_1, \ldots, s_n)$ とする。$||u||$ についての帰納法によって証明する。

- $||u|| = 0$ のとき、$u$ は変数であるため仮定に反する。
- $||u|| > 0$ のとき、$u = g(t_1, \ldots, t_n)$ とする。これについて 2 つの場合が考えられる。
  - $f \succ g$ であるとき、定義より $l >_\mathcal{G} u$ が成立する。よって $l >^\sharp u$。また、帰納法の仮定よりしたがって $l >_{\mathsf{spo}} u$ が成立。

- $f \sim g$ であるとき、定義より $l \gtrsim_{\mathcal{G}} u$ が成立する。また、$f$ と $g$ は両方とも定義記号であるので、$l^\sharp \gtrsim_{\mathcal{C}_1} u^\sharp, \ldots, l^\sharp \gtrsim_{\mathcal{C}_{i-1}} u^\sharp$ かつ $l^\sharp \gtrsim_{\mathcal{C}_i} u^\sharp$ となる。よって $l \gtrsim^\sharp u$。したがって $l >_{\mathsf{spo}} u$

□

**補題 100.** $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{spo}}$ である。

**証明.** 補題 98 より直ちに導かれる。 □

**定理 101.** $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ を強連結成分とし、$(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ を $(\gtrsim_{\mathcal{T}}, \gtrsim_{\mathcal{G}}) \otimes (\gtrsim_{\mathcal{C}_1}, \gtrsim^\sharp_{\mathcal{C}_1}) \otimes \cdots \otimes (\gtrsim_{\mathcal{C}_n}, \gtrsim^\sharp_{\mathcal{C}_n})$ とする。このとき $(\gtrsim, \gtrsim^\sharp)$ から導出された単調意味経路順序 $>_{\mathsf{mspo}}$ は $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{mspo}}$ を満たす。

**証明.** 定義より、$\gtrsim$ は $\gtrsim_{\mathcal{T}} \cap \gtrsim_{\mathcal{C}_1} \cap \ldots \cap \gtrsim_{\mathcal{C}_n}$ であり、よって $\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$。また補題 99 より $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{spo}}$。したがって、$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{mspo}}$ □

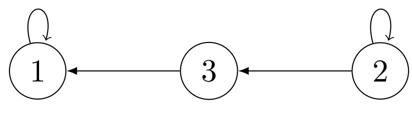
**例 102.** まず、下記の項書換え系 $\mathcal{R}$ をルート近似依存グラフを用いた依存対手法で停止性を証明する。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{0} \\
\mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

項書換え系 $\mathcal{R}$ から以下の依存対の集合 $\mathsf{DP}(\mathcal{R})$ が生成される。

$$
\begin{aligned}
1: &\quad \mathsf{minus}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x, y) \\
2: &\quad \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) \\
3: &\quad \mathsf{quot}^\sharp(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\sharp(x, y)
\end{aligned}
$$

ルート近似依存グラフにおいて、以下のような依存グラフが生成される。




強連結成分は $\{1\}$ と $\{2\}$ である。優先順序を $\varnothing$、引数フィルタリングを $\pi(\mathsf{minus}) = \pi(\mathsf{minus}^\sharp) = \pi(\mathsf{quot}) = \pi(\mathsf{quot}^\sharp) = 1$ とする簡約対 $(\geq^\pi_{\mathsf{lpo}}, >^\pi_{\mathsf{lpo}})$ を取ることで、$\mathcal{C}_1 = \{1\}$ のときも $\mathcal{C}_2 = \{2\}$ のときも $\mathcal{R} \subseteq \geq^\pi_{\mathsf{lpo}}$ かつ $\mathcal{C}_i \subseteq >^\pi_{\mathsf{lpo}}$ となり、停止性を証明できる。

次に単調意味経路順序で依存グラフの模倣を行う。このとき $(\gtrsim_{\mathcal{T}}, \gtrsim_{\mathcal{G}})$ における $\gtrsim_{\mathcal{G}}$ がとる優先順序は quot $\succ$ minus $\succ$ s とし、また $(\gtrsim, \gtrsim^{\sharp})$ を $(\gtrsim_{\mathcal{T}}, \gtrsim_{\mathcal{G}}) \otimes (\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}, (\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}})^{\sharp}) \otimes (\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}}, (\geq^{\pi}_{\mathsf{lpo}})^{\sharp})$ とする。以下のように各規則を向き付けられるため、停止性を証明することができる。

- $\mathsf{minus}(x, 0) \to x$

$$\dfrac{\mathsf{minus}(x,0) \gtrsim x \qquad \dfrac{x >^{=}_{\mathsf{spo}} x}{\mathsf{minus}(x,0) >_{\mathsf{spo}} x}}{\mathsf{minus}(x,0) >_{\mathsf{mspo}} x}$$

- $\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}(x, y)$

$$\dfrac{s \gtrsim t \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{minus} \gtrsim \mathsf{minus}}{s \gtrsim_{\mathcal{G}} t} \quad \dfrac{\vdots}{s^{\sharp} >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} t^{\sharp}}}{s >^{\sharp} t} \quad \dfrac{\dfrac{x >^{=}_{\mathsf{spo}} x}{\mathsf{s}(x) >_{\mathsf{spo}} x}}{s >_{\mathsf{spo}} x} \quad \dfrac{\dfrac{y >^{=}_{\mathsf{spo}}}{\mathsf{s}(y) >_{\mathsf{spo}} y}}{s >_{\mathsf{spo}} y}}{s >_{\mathsf{spo}} t}}{s = \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_{\mathsf{mspo}} \mathsf{minus}(x, y) = t}$$

- $\mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) \to 0$

$$\dfrac{\mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) \gtrsim 0 \qquad \dfrac{0 >^{=}_{\mathsf{spo}} 0}{\mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) >_{\mathsf{spo}} 0}}{\mathsf{quot}(0, \mathsf{s}(y)) >_{\mathsf{mspo}} 0}$$

- $\mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

$$\dfrac{s \gtrsim t_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{quot} \succ \mathsf{s}}{\mathsf{quot} >_{\mathcal{G}} \mathsf{s}}}{s >^{\sharp} t_1} \quad \dfrac{\vdots}{s >_{\mathsf{spo}} \mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) = t_2}}{s >_{\mathsf{spo}} t_1}}{s = \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_{\mathsf{mspo}} \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) = t_1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{quot} \gtrsim \mathsf{quot}}{s \gtrsim_{\mathcal{G}} t_2} \quad \dfrac{\vdots}{s^{\sharp} >^{\pi}_{\mathsf{lpo}} {t_2}^{\sharp}}}{s >^{\sharp} t_2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{quot} \succ \mathsf{minus}}{s \gtrsim_{\mathcal{G}} t_3}}{s >^{\sharp} t_3} \quad \cdots}{s >_{\mathsf{spo}} \mathsf{minus}(x, y) = t_3} \quad \cdots}{s = \mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) >_{\mathsf{spo}} \mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) = t_2}$$

# 第 6 章

# 結論

本論文では、依存グラフを用いた依存対手法の挙動を模倣できる新たな簡約順序を提案した。準備として複数の優先順序をとる辞書式順序の拡張をまず定義し、そして本命である複数の調和簡約対をとる新たな簡約順序を定義した。しかし、実装を行っていないため、完備化や順序付き完備化を用いる定理証明系でこの新たな簡約順序を用いた場合、どれ程証明能力の向上が図れるかについてと、実行規則など、より簡約対の制約を緩めることができる手法をどのようにこの枠組みに取り入れるかについては未だに未知数であり、今後の課題として残っている。

**■謝辞**　本研究において指導を頂いた廣川直准教授に感謝を申し上げます。また、これまでの研究活動を支えてくださった研究室の皆様に御礼を申し上げます。

# 参考文献


[1] Termination problems data base. `https://termination-portal.org/wiki/TPDB`.

[2] T. Arts and J. Giesl. Termination of term rewriting using dependency pairs. *Theoretical Computer Science*, 236(1):133–178, 2000.

[3] F. Baader and T. Nipkow. *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

[4] C. Borralleras, M. Ferreira, and A. Rubio. Complete monotonic semantic path orderings. In *Proceedings of the 17th International Conference on Automated Deduction*, pages 346–364. Springer, 2000.

[5] N. Dershowitz. Dependency pairs are a simple semantic path ordering. In *Proceedings of the 13th Workshop on Termination*, pages 36–39, 2013.

[6] J. Giesl, T. Arts, and E. Ohlebusch. Modular termination proofs for rewriting using dependency pairs. *Journal of Symbolic Computation*, 34(1):21–58, 2002.

[7] S. Kamin and J.-J Lévy. Two generalizations of the recursive path ordering. Unpublished manuscript, University of Illinois, 1980.

[8] D.E. Knuth and P.B. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In J. Leech, editor, *Computational Problems in Abstract Algebra*, pages 263–297. Pergamon, 1970.

[9] L. Kovács and A. Voronkov. First-order theorem proving and Vampire. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 1–35. Springer, 2013.

[10] A. Middeldorp. Term rewriting. Lecture notes (unpublished manuscript), University of Innsbruck, 2021.

[11] S. Schulz. System description: E 1.8. In *International Conference on Logic*

*for Programming Artificial Intelligence and Reasoning*, pages 735–743. Springer, 2013.

[12] 青戸 等人. 項書き換えシステム. In 徳山 豪 and 小林 直樹, editors, **理論計算機科学辞典**, pages 607–625. 朝倉書店, 2022.