Title	An algebraic approach to the disjunction property of substructural logics
Author(s)	相馬, 大輔
Citation	
Issue Date	2005-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1907
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰, 情報科学研究科, 修士

An algebraic approach to the disjunction property of substructural logics

相馬 大輔 (310058)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2005 年 2 月 10 日

キーワード: 部分構造論理, residuated lattice, disjunction property, well-connectedness.

部分構造論理とは古典論理 **LK** や直観主義論理 **LJ** から構造に関する推論規則の一部あるいは全部を取り除いた論理の総称である。この研究は Lambek による **FL** の研究に始まり、適切論理、線形論理、BCK-論理など様々な種類の論理がある。これらの論理に対し、cut elimination の成り立つシーケント計算を導入することにより、様々なシンタクティカルな結果を示すことができる。しかし、このようなシンタクティカルな方法は特別な論理についての議論は可能であるが、論理一般についての議論ができない。このためセマンティカルな方法が必要とされる。様相論理ではクリプキモデルがセマンティカルな方法として有効だが、部分構造論理の場合には殆んど役に立たない。そこで、部分構造論理でセマンティカルな方法を用いる時には代数的モデルとくに universal algebra からのアプローチを行う。さらに近年、順序代数構造に興味を持つ代数学研究者研究との交流が増えているが、シンタクティカルな方法は代数学研究者たちに理解しやすいものとは言えない。そこでシンタクティカルな結果を導くのに代数モデルにより示すことができれば、これは代数学研究者にとっても理解しやすいものになると思われる。本論文では、 $\mathbf{FL_e}$、$\mathbf{FL_{ew}}$ および、それらを拡張したいくつかの論理の disjunction property についての代数的な証明を与える。

部分構造論理 $\mathbf{FL_{ew}}$ とは直観主義論理 **Int** から contraction rule を取り除いたものである。$\mathbf{FL_e}$ はさらに $\mathbf{FL_{ew}}$ から weakening rule を取り除いたものである。そして $\mathbf{FL_e}[\mathrm{E_k}]$ は $\mathbf{FL_e}$ に公理として $\mathrm{E_k}$: $p^k \leftrightarrow p^{k+1}$ (*weak k-potency*) を付け加えて得られる論理で、$\mathbf{FL_e}[\mathrm{DN}]$ は公理として DN: $\neg\neg p \to p$ (*double negation*) を付け加えた論理である。同様にして $\mathbf{FL_{ew}}[\mathrm{E_k}]$ と $\mathbf{FL_{ew}}[\mathrm{DN}]$ も定義できる。ここで weak k-potency は contraction rule $p \to p^2$ を一般化した $p^k \to p^{k+1}$ と mingle axiom $p^2 \to p$ を一般化した $p^{k+1} \to p^k$ を合わせたものである。

$\mathbf{FL_e}$ 上の論理に対する代数構造は commutative residuated lattice (CRL) という代数である。$\mathbf{A} = \langle \mathrm{A}, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1 \rangle$ が CRL とは以下の３つの条件を満たすことである。

(R1) $\langle \mathrm{A}, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ は lattice である。

(R2) $\langle \mathrm{A}, \cdot, 1\rangle$ は commutative monoid である。

(R3) 任意の $x, y, z \in \mathrm{A}$ に対し $x \cdot y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \to z$.

ここで $\langle \mathrm{A}, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ が最大元 1 、最小元 0 となる有界束であるとき $\mathbf{A} = \langle \mathrm{A}, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ を commutative *integral* residuated lattice と言う。さらに monoid の演算 $\cdot$ が $\wedge$ と一致するとき commutative integral residuated lattice は直観主義論理 **Int** に対応する代数である Heyting algebra になる。

論理 L が disjunction property (D.P.) をもつとは任意の formula ϕ と ψ に対して $\phi \vee \psi$ が証明可能ならば ϕ または ψ のどちらかが証明可能であることを言う。disjunction property の代数的な特徴付けの際、重要な性質である well-connectedness は次のように定義される。すなわち CRL $\mathbf{A}$ が well-connected であるとは、任意の $x, y \in \mathrm{A}$ に対してもし $x \vee y \geq 1$ であるとき $x \geq 1$ または $y \geq 1$ であることを言う。

次の proposition は L. Maksimova により 1984 年に与えられた結果で **Int** 上の論理についての D.P. の代数的特徴付けである。

Proposition 1 (Maksimova) Int 上の論理 L が *Heyting algebra* のクラス K に関して完全であるとき次の二つの条件は同値である。

1. L が *disjunction property* をもつ。
2. 任意の *Heyting algebra* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{K}$ に対し *well-connected* な *Heyting algebra* $\mathbf{C}$ が存在して $\mathbf{C}$ で L が恒真であり、さらに $\mathbf{C}$ から $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ への *onto homomorphism* が存在する。

この結果は次のように $\mathbf{FL_e}$ 上の論理に対する特徴付けまで拡張できる。

Theorem 2 $\mathbf{FL_e}$ 上の論理 L が *commutative residuated lattice* のクラス K に関して完全であるとき次の二つの条件は同値である。

1. L が *disjunction property* をもつ。
2. 任意の *CRL* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{K}$ に対し *well-connected* な *CRL* $\mathbf{C}$ が存在して $\mathbf{C}$ で L が恒真であり、さらに $\mathbf{C}$ から $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ への *onto homomorphism* が存在する。

次の定理は本論文の主定理である。この定理は Theorem 2 の条件を満たす CRL $\mathbf{C}$ を具体的に構成することにより証明される。

Theorem 3 $\mathbf{FL_e}$, $\mathbf{FL_e}[\mathrm{E_k}]$ と $\mathbf{FL_e}[\mathrm{DN}]$ は *disjunction property* を持つ。

次の定理は Theorem 3 の証明で 1 と 0 がそれぞれ最大元と最小元であると仮定することにより得られる。

Theorem 4 $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{FL_{ew}}[\mathrm{E_k}]$ と $\mathbf{FL_{ew}}[\mathrm{DN}]$ は *disjunction property* を持つ。