Title	ディザ行列構成に関するディスクレパンシー理論による正方行列内における整数配置問題の研究
Author(s)	橋間, 信也
Citation	
Issue Date	2005-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1932
Rights	
Description	Supervisor:浅野 哲夫, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

ディザ行列構成に関する
ディスクレパンシー理論による
正方行列内における整数配置問題の研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

橋間 信也

2005 年 3 月

修 士 論 文

ディザ行列構成に関する ディスクレパンシー理論による 正方行列内における整数配置問題の研究

指導教官　浅野 哲夫 教授

審査委員主査　浅野 哲夫 教授
審査委員　平石 邦彦 教授
審査委員　宮地 充子 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

210069 橋間 信也

提出年月: 2005 年 2 月

概 要

本論文では，$n \times n$ の正方行列内に 0 から $n^2 - 1$ までの整数をすべてできるだけ一様に配置する問題を考える．この一様性の評価法として，本研究では，ディスクレパンシー（食い違い度，$discrepancy$）基準を定義する．具体的には，$n \times n$ の正方行列内で隣接する要素からなる任意の 2×2 の小行列をとったとき，その要素の和の最大値と最小値の差をできるだけ小さくなるようにする基準である．

本研究に関して，n が偶数のときは最適な要素配列，すなわち，ディスクレパンシーを 0 にする要素配列法が提案されている．しかし，n が奇数のときはそのような性質の行列は存在しないことが示されている．そこで本研究では，n が奇数のときディスクレパンシーをできるだけ低くする要素配列を考察する．本論文では 2 つの手法を提案することにより，ディスクレパンシー $2n+4, 2n+2$ を示し，さらに，ディスクレパンシー $2n$ への改善を示す．

また，本研究の応用として挙げられるディジタル・ハーフトーニングとの関連を述べる．

目 次

第1章　はじめに

1.1　本研究の目的

正方行列内における整数配置問題とは，$n \times n$ の正方行列内に 0 から $n^2 - 1$ までの整数をすべてできるだけ一様に配置する問題である．この一様性の基準を本研究では次のように定める．

- 正方行列内で隣接する要素からなる任意の 2×2 の小行列をとったとき，その要素の和が等しくなるように，または，和の最大値と最小値の差ができるだけ小さくなるように要素を配置する．

本研究では，この基準をディスクレパンシー（食い違い度，$discrepancy$）基準と定義し，また，和の最大値と最小値の差をディスクレパンシーと呼ぶ．

ディスクレパンシーの値が低いほど一様性は高い．それゆえ，本研究では，和の最大値と最小値の差をできるだけ小さくすることが目的となる．

正方行列内における整数配置問題に関して，$n \times n$ の正方行列に対して n が偶数のときは最適な要素配列，すなわち，ディスクレパンシーを 0 にする要素配列法が提案されている．しかし，n が奇数のときはこのような行列は存在しないことが示されている．そこで本研究では，n が奇数のときディスクレパンシーをできるだけ低くする要素配列を考察する．

本論文では，２つの手法を提案し，ディスクレパンシー $2n+4, 2n+2$ を示し, さらに, $2n$ への改善を示す.

1.2　本研究の背景

本研究は，ディジタル・ハーフトーニング (Digital Halftoning) への応用が背景としてある．

カラープリンタの性能の向上に際して，元画像の画質を損なうことなく高画質の出力画像を得ることは最重要課題である．インクジェットプリンタなどでは，限られた色数のインクで，各画素に対してインクを置くか置かないかの２通りの選択で元画像を再現しなければならない．さらに，白黒の２値画像で元画像を近似する場合，それが濃淡画像と認識されるためには，白と黒の２階調のみで様々な濃さの灰色を表現する必要がある．この２値画像で近似する技術をとくにディジタル・ハーフトーニングと呼ぶ.

本論文では，ディジタル・ハーフトーニングの概要を述べ，その既存手法の１つであるオーダードディザ法と本研究との関連と応用について述べる．

1.3　本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．第２章で本研究における問題と，関連する定義を述べる．第３章では提案した構成手法を述べ，これに基づき，第４章で新たなディスクレパンシーを示す．第５章では，前章の結果を検証することにより，新たな低ディスクレパンシー導出の方法を考察する．第６章では，本研究の背景にあるディジタル・ハーフトーニングへの関連性と応用について述べる．第７章は，本研究の結論と今後の課題とする．

第2章　正方行列内における整数配置問題

本章では，本研究における問題とこの問題に関する定義を述べる．

2.1　問題の定義

本研究での正方行列内における整数配置問題を次のように定義する．

正方行列内における整数配置問題

- $n \times n$ の正方行列内に 0 から $n^2 - 1$ までの整数をすべてできるだけ一様に配置する．
- 一様性は，ディスクレパンシー基準により評価する．
- ディスクレパンシー基準とは，正方行列内で隣接する要素からなる任意の 2×2 の小行列をとったとき，その要素の和が等しくなるように，または，和の最大値と最小値の差ができるだけ小さくなるような基準とする．

2.2　ディスクレパンシーの定義

本問題における，一様性を評価するディスクレパンシー基準を以下のように定式化する．

定義 2.1 (ディスクレパンシー基準)．P を，要素に 0 から $n^2 - 1$ までの整数がすべて現れる $n \times n$ の正方行列とする．P 内の隣接する要素からなる任意の 2×2 の小行列 R に対し，R の要素の和を $P(R)$ と記す．このとき，P のディスクレパンシーを $\mathcal{D}_{2,n}(P)$ と記し，$\max_R P(R)$ と $\min_R P(R)$ の差，すなわち，

$$\mathcal{D}_{2,n}(P) \stackrel{\text{def.}}{=} \max_R P(R) - \min_R P(R).$$

と定義する．

注意 2.1 (**$n \times n$ の正方行列 P に対する小行列 R の取り方**)．ここで，小行列 R の取り方について，定義より，小行列 R は行列 P 内の隣接する要素からなる 2×2 の正方行列でなければならない．これは，１つの要素に対してとり得る小行列は４つであることを意味する．すなわち，一般に，$n \times n$ の正方行列 $P = (p_{ij})$ 内において，要素 p_{ij} に関する小行列 R は次の４つである．

$$R_1 = \begin{bmatrix} p_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} \\ p_{i,j-1} & p_{ij} \end{bmatrix},\ R_2 = \begin{bmatrix} p_{i-1,j} & p_{i-1,j+1} \\ p_{ij} & p_{i,j+1} \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} p_{i,j-1} & p_{ij} \\ p_{i+1,j-1} & p_{i+1,j} \end{bmatrix},\ R_4 = \begin{bmatrix} p_{ij} & p_{i,j+1} \\ p_{i+1,j} & p_{i+1,j+1} \end{bmatrix}.$$

したがって，例 2.1 のような隣接していない要素からとった取り方は正しくない取り方である．

例 2.1 (**不適切な小行列 R の例**)．

$$R = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{1n} \\ p_{n1} & p_{nn} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

例 2.2 (**適切な小行列 R の例**)．

$$R = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} p_{n1} & p_{n2} \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} p_{1n} & p_{11} \\ p_{2n} & p_{21} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} p_{nn} & p_{n1} \\ p_{1n} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

第3章　構成手法

$n \times n$ の正方行列において，n が偶数のときはディスクレパンシーを0にする最適な要素配置の行列を構成することができる．

本章では提案手法について述べたあと，偶数 $\times$ 偶数行列のときの最適な要素配置の構成法を示す．

3.1　n 進数表現

要素に0から n^2-1 まですべて現れる $n \times n$ の正方行列を C とする．正方行列 C において要素を左上から下方へラスタ順に配置する．

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & n+2 & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \vdots & & & & & \\ n^2-n & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} & & n^2-2 & n^2-1 \end{pmatrix}.$$

このとき，行列 C を次のように n 進数の表現で表す．

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & n & n & \dots & n \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n^2-n & n^2-n & n^2-n & \dots & n^2-n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$= n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

とそれぞれおけば,行列 C の各要素 c_{ij} は行列 A, B の各要素 a_{ij}, b_{ij} により,次のように表すことができる.

$$c_{ij} = na_{ij} + b_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

ただし,行列 C がこのように表されるのは,行列 A, B が互いに直交しているときに限る.つまり,行列 A, B の各要素の対 (a_{ij}, b_{ij}) を比較したとき,異なる順序対 (a_{ij}, b_{ij}) が1回ずつ n^2 個現れるときに限る.

3.2 対角線配列

本節では,前節で述べた,n 進数表現と互いに直交する2つの行列の性質を考慮することにより,$n \times n$ の正方行列内に0から n^2-1 までの整数をすべて規則的に配置する方法と,さらに,互いに直交する2つの行列を構成するもう1つの方法について述べる.

3.2.1 交互対角線配列 (Alternating Diagonal Sequencing)

互いに直交し,要素が0から $n-1$ までの整数からなる $n \times n$ の正方行列 A, B の各要素 a_{ij}, b_{ij} をそれぞれ次のようにおく.

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & i+j : \text{even}, \\ n-1-i, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} j, & i+j : \text{even}, \\ n-1-j, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

このとき,要素に0から n^2-1 まですべて現れる $n \times n$ の正方行列 C の各要素 c_{ij} は以下のように表すことができる.

$$c_{ij} = na_{ij} + b_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

実際,$n = 4$ のときの行列 C について,その例を以下に示す.

例 3.1 ($n=4$ **のとき**).

$$A=\begin{pmatrix}0&3&0&3\\2&1&2&1\\2&1&2&1\\0&3&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&2&0\\3&1&1&3\\0&2&2&0\\3&1&1&3\end{pmatrix}.$$

より,

$$C=4\times\begin{pmatrix}0&3&0&3\\2&1&2&1\\2&1&2&1\\0&3&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&2&0\\3&1&1&3\\0&2&2&0\\3&1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&2&12\\11&5&9&7\\8&6&10&4\\3&13&1&15\end{pmatrix}.$$

行列 A,B は対角線状に 0 から $n-1$ までの数が昇順，あるいは降順に交互に現れている．このような行列 A,B の要素配列を，本論文では，交互対角線配列 (Alternating Diagonal Sequencing) と定める．すなわち，行列 C は交互対角線配列の行列により構成された行列である．

3.2.2 反復対角線配列 (Diagonal Repeating)

互いに直交する 2 つの行列を構成するもう 1 つの方法を述べる．

まず，要素が 0 から $n-1$ までの整数からなる $n\times n$ の正方行列 $A=(a_{ij})$ を次のように定める．1 行目を,

$$a_{0j}=\begin{cases}j & j:\text{even},\\ n-j-1, & j:\text{odd}.\end{cases}$$

とする．このとき，a_{ij} を,

$$a_{ij}=a_{i-1,j+1}\quad i=1,\cdots,n-1,\ j=0,\cdots n-1.$$

と定義する．ただし，添字は n での剰余である．さらに，$n\times n$ の正方行列 $B=(b_{ij})$ を次のように定める．

$$b_{ij}=a_{i,n-j-1},\quad i,j=0,1,\cdots,n-1.$$

このように定義される 5×5 の行列 A と B を以下に示す.

例 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

これは，直交ラテン方陣のひとつを表している．

一般に方陣とは，1 から n までの自然数をそれぞれ n 回ずつ用い，計 n^2 個の数字を $n \times n$ の正方形に配置したものである．とくに，どの行にも，どの列にも同じ数字が 2 度以上現れないような配置の方陣をラテン方陣という．さらに，互いに直交しているラテン方陣は，両方を合わせて直交ラテン方陣という．

行列 A と行列 B は，それぞれ，右上がりに同じ数字，右下がりに同じ数字が現れる直交ラテン方陣である．このような直交ラテン方陣を構成する配列を，本論文では，反復対角線配列 (Diagonal Repeating) と定める．

3.3 偶数 × 偶数行列の最適性

命題 3.1. 交互対角線配列による 2 つの行列により構成された $n \times n$ の正方行列は，n が偶数のときディスクレパンシー 0 である．

証明. いま，交互対角線配列による $n \times n$ の正方行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} i, & i + j : \text{even}, \\ n - 1 - i, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

に対して，任意の対 $(a_{ij}, a_{i+1,j})$ をとる．この対の和 $a_{ij} + a_{i+1,j}$ は $i + (n - 1 - i) = n - 1$，または，$(n - 1 - i) + i = n - 1$ で与えられる．すなわち，行列 A 内で任意の 2×2 の小行列をとったとき，その要素の和は $2(n - 1)$ である．また，交互対角線配列による $n \times n$ の正方行列

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} j, & i + j : \text{even}, \\ n - 1 - j, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

もまた同様である．これらの行列 A, B により構成された行列 $C = (c_{ij}) = na_{ij} + b_{ij}$ 内での任意の 2×2 の小行列の要素の和は，$n \times 2(n - 1) + 2(n - 1) = 2n^2 - 2$ である．

ゆえに，行列 C のディスクレパンシーは $\mathcal{D}_{2,n}(C) = 2n^2 - 2 - (2n^2 - 2) = 0$ である． □

3.3.1 奇数パリティ成分180度回転による方法

$n \times n$ の正方行列 P において，n が偶数のとき，0 から n^2-1 までの要素を左上からラスタ順に配置する．

次に，行列 P 内の奇数パリティ成分を180度回転させた行列を P' とする．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} & \cdots & n-1 \\ \mathbf{n} & n+1 & \mathbf{n+2} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \vdots & & & & & \\ n^2-n & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} & \mathbf{n^2-2} & n^2-1 \end{pmatrix},$$

$$\Downarrow$$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n^2-2} & 2 & \mathbf{n^2-4} & \cdots & n-1 \\ \mathbf{n^2-n-1} & n+1 & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \vdots & & & & & \\ n^2-n & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \mathbf{1} & n^2-1 \end{pmatrix}.$$

このとき，行列 P' 内の隣接する要素からなる任意の 2×2 の小行列 R の和 $P'(R)$ は常に $2n^2-2$ となる．すなわち，行列 P のディスクレパンシーは0である．

この奇数パリティ成分180度回転による方法は，命題3.1における行列を構成する別の手法である．

第 4 章　奇数 × 奇数行列内における整数配置問題

$n \times n$ の正方行列に関して，n が偶数のときは最適な要素配置，すなわち，ディスクレパンシーを 0 にする行列を構成することができた．しかし，同様の手法を奇数 × 奇数行列に適用した場合，ディスクレパンシーを 0 にすることはできない．実際，n が奇数のときはそのような性質の行列は存在しないことが示されている．

本章では，奇数 × 奇数行列内における整数配置に関して，前章で述べた手法を用い，ディスクレパンシーをできるだけ低くする要素配置を考察する．

4.1　奇数 × 奇数行列における奇数パリティ成分 180 度回転

3.3.1 奇数パリティ成分 180 度回転による方法において述べた手法を奇数 × 奇数行列に適用した場合，ディスクレパンシーは 0 にはならず，$4n$ となる（例 4.1）．しかし，その手法を改良することにより，予想値，ディスクレパンシー $2n+4$ を導き出すことができる．

${P_n}'(R)$ は，行列 P'_n 内で隣接する要素からなる 2×2 の小行列 R の要素の和のすべての取り方を表すものとし，以下に例を示す．

例 4.1 (5×5 **行列の奇数パリティ成分** 180 **度回転によるディスクレパンシー**).

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad P'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 2 & 21 & 4 \\ 19 & 6 & 17 & 8 & 15 \\ 10 & 13 & 12 & 11 & 14 \\ 9 & 16 & 7 & 18 & 5 \\ 20 & 3 & 22 & 1 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$P_5{}'(R) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathbf{38} \\ \hline \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathbf{58} \\ \hline \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathbf{38} \\ \hline \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathit{48} & \mathbf{58} \\ \hline \mathit{46} & \mathit{50} & \mathit{46} & \mathit{50} & \mathit{48} \\ \hline \end{array}.$$

$\mathcal{D}_{2,5}(P'_5) = 58 - 38 = 20.$

図 4.1: 180 度回転による 5×5 行列のディスクレパンシー

4.1.1 改良案：対角線状配列

3.3.1 における奇数パリティ成分 180 度回転による手法では，$n \times n$ の正方行列に関して 0 から $n^2 - 1$ までの要素を左上から下方へラスタ順で配置していた．ここでは，このラスタ順配置を次のように改良する．

要素に 0 から $n^2 - 1$ まですべて現れる $n \times n$ の正方行列 P_n において，要素を以下のように左上に 0 を配置し，以降，対角線状に昇順に配置する．

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots & \\ 5 & 8 & \swarrow & \cdots & & \\ 9 & \swarrow & \cdots & & & \\ \vdots & \cdots & & & & \end{pmatrix}.$$

この配列を適用し，奇数パリティ成分 180 度回転を行った行列 P'_n の例を以下に示す.

例 4.2 (改良案による 3×3 行列のディスクレパンシー).

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \overset{rot.}{\Rightarrow} \quad P_3' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$P_3{}'(R) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathit{17} & \mathit{16} & \mathbf{11} \\ \hline \mathit{16} & \mathit{16} & \mathbf{21} \\ \hline \mathit{13} & \mathit{19} & \mathit{16} \\ \hline \end{array}.$$

$\mathcal{D}_{2,3}(P_3') = 21 - 11 = 10.$

図 4.2: 改良 180 度回転による 3×3 行列のディスクレパンシー

例 4.3 (改良案による 5×5 行列のディスクレパンシー).

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 15 \\ 5 & 8 & 12 & 16 & 19 \\ 9 & 13 & 17 & 20 & 22 \\ 14 & 18 & 21 & 23 & 24 \end{pmatrix} \quad \overset{rot.}{\Rightarrow} \quad P_5{}' = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 3 & 18 & 10 \\ 22 & 4 & 17 & 11 & 9 \\ 5 & 16 & 12 & 8 & 19 \\ 15 & 13 & 7 & 20 & 2 \\ 14 & 6 & 21 & 1 & 24 \end{pmatrix},$$

$$P_5{}'(R) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathit{49} & \mathit{47} & \mathit{49} & \mathit{48} & \mathbf{41} \\ \hline \mathit{47} & \mathit{49} & \mathit{48} & \mathit{47} & \mathbf{55} \\ \hline \mathit{49} & \mathit{48} & \mathit{47} & \mathit{49} & \mathbf{41} \\ \hline \mathit{48} & \mathit{47} & \mathit{49} & \mathit{47} & \mathbf{55} \\ \hline \mathit{43} & \mathit{53} & \mathit{43} & \mathit{53} & \mathit{48} \\ \hline \end{array}.$$

$\mathcal{D}_{2,5}(P_5') = 55 - 41 = 14.$

図 4.3: 改良 180 度回転よる 5×5 行列のディスクレパンシー

例 4.4 (改良案による 7×7 行列のディスクレパンシー).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 & 28 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & 29 & 34 \\ 9 & 13 & 18 & 24 & 30 & 35 & 39 \\ 14 & 19 & 25 & 31 & 36 & 40 & 43 \\ 20 & 26 & 32 & 37 & 41 & 44 & 46 \\ 27 & 33 & 38 & 42 & 45 & 47 & 48 \end{pmatrix} \overset{rot.}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 47 & 3 & 42 & 10 & 33 & 21 \\ 46 & 4 & 41 & 11 & 32 & 22 & 20 \\ 5 & 40 & 12 & 31 & 23 & 19 & 34 \\ 39 & 13 & 30 & 24 & 18 & 35 & 9 \\ 14 & 29 & 25 & 17 & 36 & 8 & 43 \\ 28 & 26 & 16 & 37 & 7 & 44 & 2 \\ 27 & 15 & 38 & 6 & 45 & 1 & 48 \end{pmatrix},$$

$P_7{}'(R) =$

97	*95*	*97*	*95*	*97*	*96*	**87**
95	*97*	*95*	*97*	*96*	*95*	**105**
97	*95*	*97*	*96*	*95*	*97*	**87**
95	*97*	*96*	*95*	*97*	*95*	**105**
97	*96*	*95*	*97*	*95*	*97*	**87**
96	*95*	*97*	*95*	*97*	*95*	**105**
97	*103*	*89*	*103*	*97*	*103*	*96*

$\mathcal{D}_{2,7}(P'_7) = 105 - 87 = 18.$

図 4.4: 改良 180 度回転による 7×7 行列のディスクレパンシー

この結果から，一般に帰納的に $\mathcal{D}_{2,n}(P'_n) = 2n + 4$ が予想される．

4.2 ディスクレパンシー $2n+2$

3.3.1 の手法を改良することで，$n \times n$ の正方行列においてディスクレパンシー $2n+4$ を帰納的に予想することはできたが，これは一般的な証明には到っていない．しかし，提案手法，3.2.2 反復対角線配列を適用するとにより，ディスクレパンシーを $2n+2$ まで下げることが可能となる．

命題 4.1. 反復対角線配列による 2 つの行列により構成された $n \times n$ の正方行列のディスクレパンシーは $2n+2$ である．

証明. 反復対角線配列の行列 $A = (a_i j)$ において，定義より以下の式が得られる．

$$a_{0,2j} + a_{0,2j+1} = 2j + (n - 1 - (2j+1)) = n - 2, \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1,$$

$$a_{0,2j+1} + a_{0,2j+2} = n - 1 - (2j+1) + (2j+2) = n, \quad j = 1, 2, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor - 1,$$

$$a_{0,0} + a_{0,n-1} = 0 + n - 1 = n - 1.$$

これにより，行列 A における 1 行目の隣接する要素の和は，$n-2, n, n-1$ のみであることが得られる．2 行目以降は，行列 A の性質から 1 行目の和が左下に循環的に移動する．また，列に関しても同様のことがいえる．

さらに，行列 A の性質から，各行または各列における隣接する要素の和に関して，同じ和の値は決して隣り合うことはない．つまり，隣接する要素の和をとったとき，$2n, 2n-2, 2n-4$ なることはない．

すなわち，行列 A 内で隣接する要素からなる 2×2 の小行列をとったとき，その和の最大値は $n + n - 1 = 2n - 1$，最小値は $n - 2 + n - 1 = 2n - 3$ であることがわかる．

これにより，行列 A のディスクレパンシーは $\mathcal{D}_{2,n}(A) = 2n - 1 - (2n - 3) = 2$ である．また，反復対角線配列による $n \times n$ の正方行列

$$B = (b_{ij}) = a_{i,n-j-1}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

に関しても同様のことがいえる．

3.2.2 より，これらの行列 A, B によって構成された行列

$$C = (c_{ij}) = na_{ij} + b_{ij}.$$

は 0 から $n^2 - 1$ までのすべての数が現れる $n \times n$ の正方行列である．

行列 A, B はディスクレパンシー 2 であるから，したがって，行列 C のディスクレパンシーは $n \times 2 + 2 = 2n + 2$ で与えられる． $\square$

以下に 7×7 の行列の例を示す.

例 4.5 (反復対角線配列による 7×7 行列のディスクレパンシー).

$$P_7 = 7 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 36 & 18 & 24 & 30 & 12 & 42 \\ 35 & 20 & 22 & 32 & 10 & 44 & 5 \\ 19 & 21 & 34 & 8 & 46 & 3 & 37 \\ 23 & 33 & 7 & 48 & 1 & 39 & 17 \\ 31 & 9 & 47 & 0 & 41 & 15 & 25 \\ 11 & 45 & 2 & 40 & 14 & 27 & 29 \\ 43 & 4 & 38 & 16 & 26 & 28 & 13 \end{pmatrix}.$$

97	*96*	*96*	*96*	*96*	*103*	**88**
95	*97*	*96*	*96*	*103*	*89*	*96*
96	*95*	*97*	*103*	*89*	*96*	*96*
96	*96*	*92*	*90*	*96*	*96*	*96*
96	*103*	*89*	*95*	*97*	*96*	*96*
103	*89*	*96*	*96*	*95*	*97*	*96*
92	*99*	*96*	*96*	*96*	*95*	**104**

.

$\mathcal{D}_{2,7} = 104 - 88 = 16.$

図 4.5: 反復対角線配列による 7×7 行列のディスクレパンシー

第5章　改良案によるディスクレパンシー $2n$

前章では，ディスクレパンシー2である2つの反復対角線配列の行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ によって $n\times n$ の正方行列 $C=(c_{ij})=na_{ij}+b_{ij}$ を構成することにより，ディスクレパンシー $2n+2$ を得た．

このディスクレパンシー $2n+2$ が導き出される局面は，以下のように考察される．

まず，行列 A 内における任意の 2×2 の小行列の要素の和の平均を S_{ave} とおき，$R_{\max}(A)$ を次のように定める．

- 行列 A 内において，要素 $a_{ij}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}$ からなる 2×2 の小行列をとる．
- 小行列の要素の和を A_{ij} とおく．
- A_{ij} は最大値をとる．i.e. $S_{\mathrm{ave}}+1$

この条件を満たすような添字 (i,j) の集合を $R_{\max}(A)$ とおく．また，$R_{\min}(A)$ を次のように定める．

- 行列 A 内において，要素 $a_{i'j'}, a_{i',j'+1}, a_{i'+1,j'}, a_{i'+1,j'+1}$ からなる 2×2 の小行列をとる．
- 小行列の要素の和を $A_{i'j'}$ とおく．
- $A_{i'j'}$ は最小値をとる．i.e. $S_{\mathrm{ave}}-1$

この条件を満たすような添字 (i',j') の集合を $R_{\min}(A)$ とおく．同様に行列 B に関しても $R_{\max}(B)$，$R_{\min}(B)$ を定める．

このとき，$R_{\max}(A)$ と $R_{\max}(B)$，$R_{\min}(A)$ と $R_{\min}(B)$ が同じ位置にあるならば，行列 C 内における任意の 2×2 の小行列の要素の和の最大値・最小値は，それぞれ $n\times(S_{\mathrm{ave}}+1)+S_{\mathrm{ave}}+1$，$n\times(S_{\mathrm{ave}}-1)+S_{\mathrm{ave}}-1$ で与えられる．

それゆえに，行列 C のディスクレパンシーは $2n+2$ である．これは，まさに本研究で得られた結果である．

これは次のように

$$R_{\max}(A)\cap R_{\max}(B),\ R_{\min}(A)\cap R_{\min}(B) \text{ の両方とも空になることはない．}$$

と言い換えることもできる．

しかし，一方で，もし $R_{\max}(A) = R_{\min}(B)$ かつ $R_{\min}(A) = R_{\max}(B)$ が得られれば，$n \times (S_{\text{ave}}+1) + S_{\text{ave}} - 1$，$n \times (S_{\text{ave}}-1) + S_{\text{ave}} + 1$ より，ディスクレパンシー $2n-2$ が期待できる．

今回，本研究では，このような配置を与える行列が存在するかどうかは解明できなかった．しかし，ここで，ディスクレパンシー $2n$ を得る方法を試みる．そのため，いくつか制約条件を設け，以下のように構成する．

まず，反復対角線配列による行列 A を定める．定義より $R_{\max}(A)$，$R_{\min}(A)$ はそれぞれ以下のように示せる．

$$
\begin{aligned}
R_{\max}(A) &= \{(i,j) | i+j = n-2 \text{ または } (i,j) = (n-1, n-1)\}, \\
R_{\min}(A) &= \{(i,j) | i+j = n-1\}.
\end{aligned}
$$

交互対角線配列法を変形することにより，行列 B を次のように構成する．

$(n{-}1)/2$ が偶数のとき，左から $\lfloor n/2 \rfloor$ 番目の配列 $(b_{n-1,\lfloor n/2 \rfloor}, b_{n-1,\lfloor n/2 \rfloor+1}, b_{n-3,\lfloor n/2 \rfloor+2}, \ldots)$ は，$(0, 1, \ldots, n-1)$ と増加し，次の 45 度方向ラインの要素の並びが一致する．一方，n が奇数のとき，左から $\lfloor n/2 \rfloor$ 番目の配列は，$(n-1, n-2, \ldots, 0)$ と減少する．

このような行列の構成法により，行列 B において 45 度方向に異なる整数を配列する一方で，行列 A においては 45 度方向に同じ整数を配列した．したがって，行列 B は行列 A と直交する．

また，小行列の要素の和の最大値，最小値はすべて $i+j = \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor + 1, n-1+\lfloor n/2 \rfloor, n-1+\lfloor n/2 \rfloor+1$ 上に沿って現れることになる．言い換えれば，

$$
R_{\min}(B) \cup R_{\max}(B) \subseteq \{(i,j) | i+j = \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor + 1, n-1+\lfloor n/2 \rfloor, n-1+\lfloor n/2 \rfloor + 1\}.
$$

したがって，$n \geq 5$ の場合，

$$
[R_{\min}(A) \cup R_{\max}(A)] \cap [R_{\min}(B) \cup R_{\max}(B)] = \emptyset.
$$

を得る．

これは，行列 A における 2×2 の小行列の要素の和の最大値または最小値が，行列 B における 2×2 の小行列の要素の和の平均値と等しいことを意味する．

以上から，次の命題を導きだせる．

命題 5.1. n が奇数で，かつ $n \geq 5$ のとき，$n \times n$ の正方行列内で 2×2 の小行列をとったとき，ディスクレパンシーをつねに $2n$ でおさえることができる要素配列法が存在する．

この命題の 9×9 行列の場合の例を以下に示す．

例 5.1 (9×9 **行列におけるディスクレパンシー** $2n$ **への配列**).

$$9 \times \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 0 & 7 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 0 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 8 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 7 & 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 71 & 18 & 53 & 44 & 27 & 62 & 9 & 80 \\ 70 & 19 & 52 & 43 & 28 & 61 & 10 & 79 & 1 \\ 20 & 51 & 42 & 29 & 60 & 11 & 78 & 2 & 69 \\ 50 & 41 & 30 & 59 & 12 & 77 & 3 & 68 & 21 \\ 40 & 31 & 58 & 13 & 76 & 4 & 67 & 22 & 49 \\ 32 & 57 & 14 & 75 & 5 & 66 & 23 & 48 & 39 \\ 56 & 15 & 74 & 6 & 65 & 24 & 47 & 38 & 33 \\ 16 & 73 & 7 & 64 & 25 & 46 & 37 & 34 & 55 \\ 72 & 8 & 63 & 26 & 45 & 36 & 35 & 54 & 17 \end{pmatrix}.$$

160	*160*	*166*	*168*	*160*	*160*	*160*	*169*	*151*
160	*164*	*166*	*160*	*160*	*160*	*169*	*151*	*160*
162	*164*	*160*	*160*	*160*	*160*	*157*	*166*	*160*
162	*160*	*160*	*160*	*169*	*151*	*160*	*160*	*160*
160	*160*	*160*	*169*	*151*	*160*	*160*	*158*	*160*
160	*160*	*169*	*151*	*160*	*160*	*156*	*158*	*160*
160	*169*	*151*	*160*	*160*	*154*	*156*	*160*	*160*
169	*151*	*160*	*160*	*152*	*154*	*160*	*160*	*160*
151	*160*	*160*	*168*	*152*	*160*	*160*	*160*	*169*

.

$\mathcal{D}_{2,9} = 169 - 151 = 18.$

図 5.1: 改良案による 9×9 行列のディスクレパンシー

第6章　ディジタル・ハーフトーニングとの関連

カラープリンタの性能の向上に際して，元画像の画質を損なうことなく高画質の出力画像を得ることは最重要課題である．インクジェットプリンタなどでは，限られた色数のインクで，各画素に対してインクを置くか置かないかの２通りの選択で元画像を再現しなければならない．さらに，白黒の２値画像で元画像を近似する場合，それが濃淡画像と認識されるためには，白と黒の２階調のみで様々な濃さの灰色を表現する必要がある．この２値画像で近似する技術をとくにディジタル・ハーフトーニング (Digital Halftoning) と呼ぶ．

本研究の背景には，ディジタル・ハーフトーニングへの応用が挙げられる．本章ではその関連性と応用ついて述べる．

6.1　ディジタル・ハーフトーニング

ディジタル・ハーフトーニング技術とは，連続階調を持つ濃淡画像を白黒の２値画像で近似し，白と黒の２階調のみで様々な濃さの灰色を表現する技術である．入力画像の各画素の明るさは数値に置き換えられ，画像全体は行列で表現される．行列の各要素値は閾値と比較され２値行列に変換される．微視的には白と黒の２値画像にすぎないが，大域的に見ることにより中間調が浮かび上がり，濃淡画像として認識される．この際，画素は独立に処理するのではなく，広範囲に画素間の関連を考慮して処理する必要がある．

この実現方法として，これまで多数の手法が提案されてきたが，代表的な従来法の１つにオーダードディザ (Ordered Dither) 法がある．

6.2　既存手法・オーダードディザ法

オーダードディザ法とは，２値化を行う際，画像全体で固定の閾値を用いるのではなく，場所により異なる閾値を用いる手法である．ディザ (Dither) 行列と呼ばれる小行列を周期的に並べ画像全体を覆い，各要素値を対応する画素の閾値として２値化を行う手法である．ディザ行列は再帰的に構成される行列であり要素が等間隔で周期的に並ぶ行列である．ディザ行列 D_k の構成法は以下のように再帰的に定義される．

$$D_0 = (1), \quad D_k = \begin{pmatrix} 4D_{k-1} - 3U_{k-1} & 4D_{k-1} - U_{k-1} \\ 4D_{k-1} & 4D_{k-1} - 2U_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

U_k は全要素が 1 の $2^k \times 2^k$ の正方行列.

6.3　ディザ行列の問題点

オーダードディザ法の性能はディザ行列に依存することは明らかである．しかし，ディザ行列の問題点として要素の値が等間隔で規則的に並ぶ手法は必ずしも最適ではなかった．

規則的なディザ行列を用いて変換することにより得られる点では，局所的な小領域ごとの平均的明るさにかなりの変動がみられる．これは，画素が点ではなく面積を持つ小領域であるということによる問題であり，また，画素の模様の密度の差による問題である．この密度の差の問題をディスクレパンシーという．

6.4　画像の最適化基準

これまで，２値画像の画質の優劣を決定するのは人間の目視による判定が主で，画質評価は人間の主観に依存していた．そのため，画質を客観的かつ定量的に評価することはほとんどなかった．これは，画質評価に関する最適化基準の研究があまり進んでいないことが挙げられる．

しかし，本研究による低ディスクレパンシー行列を用いたディザ行列構成は，低ディスクレパンシーを最適性の基準としている条件を用いることにより，客観的な画質の最適性を評価することが可能となる．

これにより，本研究によるディザ行列構成法は，オーダードディザ法の改善・向上が期待できる．

第7章　まとめ

7.1　結論

本研究では，$n \times n$ の正方行列内に 0 から $n^2 - 1$ までの整数をすべてできるだけ一様に配置する問題を考察した．この一様性は，本研究の特徴であるディスクレパンシー基準を定めることにより評価した．

本研究では，n が奇数のときディスクレパンシーをできるだけ低くする手法を考察し，ディスクレパンシーの既存値 $4n$ を $2n + 4, 2n + 2$ へ下げる手法をそれぞれ提案した．さらに，ディスクレパンシー $2n$ への改善案を示した．

この結果を，低ディスクレパンシー行列を計算機による実装で解析することと比較する．例えば，5×5 行列の成分配置は $24!$ 通りあり，これを計算機で全て調べるのは非現実的である．実際，100 万通りの成分配置を調べただけでは手計算による値でさえ改善することはできなかった．

7.2　今後の課題

下界の提示

本研究ではディスクレパンシーの下界を示すまでには到らなかった．

下界を示す要素配置法の提案は重要課題である．

本研究の応用性

本研究の応用は，現段階ではディジタル・ハーフトーニングである．

ディジタル・ハーフトーニング以外の技術応用の可能性も調査，検証したい．

謝辞

本研究を進めるにあたり，浅野哲夫教授には公私にわたり御指導，御厚情を賜り心より感謝致しております．上原隆平助教授には多くの御指導，御意見を頂き深く感謝しております．熱心な御指導をして頂いた元木光雄助手，貴重な御意見を頂いた Arijit BISHNU 助手に深く感謝致します．また，有益な助言を頂いた博士後期課程の方々に感謝致します．

参考文献

[1] Tetsuo ASANO, “Digital Halftoning: Algorithm Engineering Challenges,” IEICE TRANS.INF.& SYST., Vol.E86-D, No.2 pp.159-178, 2003.

[2] Tetsuo Asano, Subhas C. Nandy, Shinji Sasahara, Takeaki Uno, “Disributing Distinct Integers Uniformly over a Square Matrix with Application to Digital Halftoning,” unpublished paper.

[3] Boris Aronov, Tetsuo Asano, Yohsuke Kikuchi, Subhas C.Nandy, Shinji Sasahara, and Takeshi Uno, “An Enhancement of Magic Squares with Application to Digital Halftoning,” unpublished paper.

[4] 中尾俊行，“食い違い度理論に基づいた離散平面上の点配置問題に関する研究，” 北陸先端科学技術大学院大学修士論文，2002.

[5] Bernard Chazelle, “*The Discrepancy Method : Randomness and Complexity*,” Cambridge University Press, 2000.

[6] Jiří Matoušek, “*Geometric Discrepancy : An Illustrated Guide*,” Springer, 1999(Algorithms and Combinatorics;18).

[7] M．ドバーグ，M．ファン．クリベルド，M．オーバマーズ，O．シュワルツコップ 共著 浅野哲夫 訳，“コンピュータ・ジオメトリ 計算幾何学：アルゴリズムと応用，” 近代科学社， 2000.