JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	離散時間論理LinDiscの完全性の証明をめぐって
Author(s)	米森，裕典
Citation	
Issue Date	2006-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1961
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

JAPAN ADVANCED INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

離散時間論理 LinDisc の完全性の証明をめぐって

米森　裕典 (410130)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2006 年 2 月 9 日

キーワード: 離散時間論理、完全性、p-モルフィズム、クラスタ-assingment.

様相論理とはアリストテレスにより体系的な研究が始めらた。日常的な思考の中に現れる推論には多くの場合、その推論が行われる状況や時間の前後関係などの様々な因子を含んでいる。このような推論は命題論理では十分に説明することができない。よって日常的な推論を扱うために「必然」「可能」といった様相概念を表す演算子を導入した。これにより命題論理の表現力を増し、この表現力を増した論理が様相論理と呼ばれる。

様相論理には様相演算子に様々な解釈を与えることで様相論理に類似した論理体系を得ることができる。例えば手続き型プログラム言語の仕様や記述、プログラムの正当性の検証などに用いられる動的論理、「必然」を「知っている」と解釈した知識と信念の論理、法律に関連した文の論理的分析に使われる義務論理などがある。時間論理は「必然」を「いつも」、「可能」を「ある時点」と解釈し、言語学やプログラムの正当性の検証や人工知能学などについても広く応用されている。

時間論理には時間の流れが数直線であると考える線形時間論理、時間の流れが分岐する点が存在すると考える分岐時間論理がある。さらにそれぞれの論理に離散時間論理、有理数時間論理、実数時間論理などがある。本研究では Goldblatt によって与えられた線形時間論理に対する離散時間論理 LinDisc の完全性について取り扱う。

離散時間論理とは線形時間論理に過去、未来に連続的である D_F、D_P と過去、未来に離散的である Z_F、Z_P の 4 つの公理を付け加えた論理のことである。この論理は整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ によって決定されるのは知られている。

Goldblatt がアウトラインを述べた完全性の証明の手法は最初と最後のクラスタ (到達可能関係により定まる同値類) が非退化クラスタ、それ以外のクラスタが退化クラスタであるようなクラスタの特別な列からなるフレームである「ダンベル」を考える。そして次の結果を示す。

定理 1
フレーム D がダンベルならば D は $(\mathbf{Z}, <)$ の p-モルフィズムである。

Copyright © 2006 by Hironori Yonemori

定理1とp-モルフィズムの性質より $(\mathbf{Z},<) \models A$ ならば A はすべてのダンベルで恒真となる。よって論理 L が $(\mathbf{Z},<)$ に関して完全であることを示すには、ダンベルのクラスに関して完全であることを示せば十分である。

以上がGoldblattによる離散時間論理に対する完全性の証明の概略であるが、本研究で定理1が成り立たないこと、さらにダンベル D では公理 Z_F、Z_P が成り立たないことを指摘した。さらに、この2つのギャップを修正するためにF.Wolterが導入したクラスタ付値 $t = \langle t_1, t_2 \rangle$ を用いることにより、離散時間論理の完全性を示すことができることを明らかにした。

t はフレーム F におけるクラスタの集合から $\{m, j\} \times \{m, j\}$ への写像で、m はmaximal、j はjokerを意味する。もしクラスタ C が退化クラスタであるならば $tC = (m, m)$ と表す。

以下で用いるフレームはクラスタ-assingmentを持つ $F = (S, R, t)$ とする。ここですべての論理式 B、任意の x、$y \in S$ に対し

$$max_R(V(B)) = \{x \in F | \forall y \in F(y \in V(B) \Rightarrow yRx)\}$$
$$min_R(V(B)) = \{x \in F | \forall y \in F(y \in V(B) \Rightarrow xRy)\}$$

とする。付値 V がモデル $M = (S, R, V, t)$ に対し、すべてのクラスタ C に対して次の条件が成り立つとき V を A-goodと呼ぶ。

1. $\exists B'$ に対して $B = \langle F \rangle B'$ のような $\forall B \in Sub(A)$ に対して

   $t_1 C = j$ ならば $C \cap max_R(V(B)) \neq \emptyset$

2. $\exists B'$ に対して $B = \langle P \rangle B'$ のような $\forall B \in Sub(A)$ に対して

   $t_1 C = j$ ならば $C \cap min_R(V(B)) \neq \emptyset$

次にクラスタ-assingmentをもつフレーム「good-ダンベル D'」を考える。

1. 最初のクラスタ C_1 と最後のクラスタ C_n は非退化クラスタとし、クラスタ-assignment $t_1 C_1 = m$、$t_2 C_n = m$ をもつ。
2. その他すべてのクラスタは退化クラスタであるする。つまりクラスタ-assignment $tC_2 = \cdots = C_{n-1} = (m, m)$ をもつ。
3. $n \neq 1$ すなわち $C_1 \neq C_n$ ならばクラスタ-assignment $t_1 C_1 = j$ かつ $t_2 C_n = j$ をもつ。

付値 V が A-goodであることを用いれば $(\mathbf{Z},<)$ とgood-ダンベル D' との間には次の関係がある。

補助定理 1

論理式 A が $(\mathbf{Z},<)$ において成り立つならば A は付値 V が A-goodの下ですべてのgood-ダンベル $D' = (S, R, V, t)$ で成り立つ。

離散時間論理の完全性を示すには補助定理1より good-ダンベルのクラスに関して完全であることを示せばよい。つまり論理 L で証明できない任意の論理式 A に対し、ある good-ダンベル D' が存在し、そのダンベルで A が偽であることを示す。この結果、ある $s \in S$ に対し

$$D' \not\models_s A$$

が成り立つ。補助定理1よりある $s \in \mathbf{Z}$

$$(\mathbf{Z}, <) \not\models_z A$$

となり離散時間論理の完全性が示される。さらに有限なフレーム「good-ダンベル」で偽になるモデルを見つけたので有限モデル性も示される。すなわち次の結果が得られる。

定理 2
L は $(\mathbf{Z}, <)$ によって特徴付けられ、有限モデル性より決定可能となる。