Title	離散時間論理LinDiscの完全性の証明をめぐって
Author(s)	米森，裕典
Citation	
Issue Date	2006-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1961
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

修　士　論　文

離散時間論理LinDiscの完全性の証明をめぐって

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

米森　裕典

2006年3月

修 士 論 文

離散時間論理LinDiscの完全性の証明をめぐって

指導教官　小野寛晰 教授

審査委員主査　小野寛晰 教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　東条敏 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

410130 米森　裕典

提出年月: 2006 年 2 月

目 次

1 はじめに **2**
1.1 背景 2
1.2 本研究の目的 2

2 様相論理 **3**
2.1 シンタクス 3
2.2 様相論理に対するセマンティクス 3
2.3 論理と様相論理 4
2.4 健全性と完全性 5

3 離散時間論理の完全性に対する準備 **6**
3.1 時間論理 6
3.2 線形時間論理 7
3.3 離散時間論理 8
3.4 カノニカル・モデル 10
3.5 部分モデル 12
3.6 時間論理に対する p-モルフィズム 14
3.7 時間論理に対する Filtration 16
3.8 クラスタ 19
3.9 Z-補助定理 20

4 Goldblatt による離散時間論理の完全性の証明とそのギャップ **23**
4.1 Goldblatt による時間論理 L の完全性の証明 23
4.2 p-モルフィズムについての問題点 27
4.3 Z_P と Z_F に関する問題点 29

5 離散時間論理の完全性の証明に向かって **31**
5.1 体系 L のすべての公理を満たすフレーム 31
5.2 サークルへの p-モルフィズム 31
5.3 サークル、整数フレームに対しての反射律 32
5.4 体系 L と整数フレームの関係 33
5.5 離散時間論理の完全性の修正 33

6 まとめと今後の課題 **42**

1 はじめに

1.1 背景

様相論理とはアリストテレスにより体系的な研究が始めらた。日常的な思考の中に現れる推論には多くの場合、その推論が行われる状況や時間の前後関係などの様々な因子を含んでいる。このような推論は命題論理では十分に説明することができない。よって日常的な推論を扱うために「必然」「可能」といった様相概念を表す演算子を導入した。これにより、命題論理の表現力を増し、この表現力を増した論理のことを様相論理と呼ぶ。

様相論理には様相演算子に様々な解釈を与えることで様相論理に類似した論理体系を得ることができる。例えば手続き型プログラム言語の仕様や記述、プログラムの正当性の検証などに用いられる動的論理、「必然」を「知っている」と解釈した知識と信念の論理、法律に関連した文の論理的分析に使われる義務論理などがある。時間論理は「必然」を「いつも」、「可能」を「ある時点」と解釈し、言語学やプログラムの正当性の検証や人工知能学などについても広く応用されている。

時間論理には時間の流れが数直線であると考える線形時間論理、時間の流れが分岐する点が存在すると考える分岐時間論理がある。さらにそれぞれの論理に離散時間論理、有理数時間論理、実数時間論理などがある。本研究では Goldblatt[4] によって与えられた線形時間論理に対する離散時間論理 LinDisc の完全性について取り扱う。

1.2 本研究の目的

時間論理は様相論理の一種で、様相演算子を時間的な意味で解釈することに限定したものと考えることができる。人工知能やソフトウェア科学におけるプログラミングの正当性の検証、並列プログラムの動作の記述にも応用されている。

離散時間論理とは線形時間論理に過去、未来に連続的である D_F、D_P と過去、未来に離散的である Z_F、Z_P の 4 つの公理を付け加えた論理のことである。この論理は整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ によって決定されるのは知られている。

Goldblatt による離散時間論理の完全性の証明の手法 [4] は同値類の集まりであるクラスタの概念を導入し完全性を示したが、その証明には問題点が 2 つ存在した。1 つ目は $(\mathbf{Z}, <)$ からダンベル D への p-モルフィズムが存在しないこと。2 つ目はダンベル D で公理 Z_F、Z_P が恒真でないこと。よって本研究では F.Wolter[6] によって用いられたクラスタ付値を用いて、その問題点を解決し、離散時間論理の完全性を示すことが目的である。

2 様相論理

2.1 シンタクス

様相論理のシンタクスについて定義するためにBNF(Bakus-Naur form)を用いる。Φ を原始論理式の可算集合とする。Φ から生成された論理式全体の集合を $Fma(\Phi)$ と表し、そのメンバーは A、A_1、B などで表される。さらに様相演算を記号 $\Box$ を用いて表す。シンタクスは

$$\begin{array}{rcl} \text{原始論理式} & : & p \in \Phi \\ \text{論理式} & : & A \in Fma(\Phi) \\ A & ::= & p|\bot|A_1 \to A_2|\Box A \end{array}$$

となる。ただし $\neg A$ は $A \to \bot$、$\Diamond A$ は $\neg\Box\neg A$ の省略形とする。

2.2 様相論理に対するセマンティクス

様相論理のセマンティクスについて述べる。本研究ではクリプキフレームにより定める。

定義 2.1 クリプキフレーム
空でない集合を S と S 上の二項関係 R の対 (S, R) を様相論理に対するクリプキフレームとする。ここで S は空でない集合、R は S の二項関係とする。ここで S および R をそれぞれクリプキモデルの可能世界と到達可能関係という。

定義 2.2 クリプキモデル
(S, R) をフレームとする。また V を命題変数 p に対して $V(p) \subseteq S$ となるような写像とする。このとき V をフレーム (S, R) の付値という。そして、この三つ組 (S, R, V) をクリプキモデルという。与えられたクリプキモデルに対し、S の要素と論理式の二項関係を次のように帰納的に定義する。

1. $M \models_s p \quad \Leftrightarrow \quad a \in V(p)$
2. $M \models_s A \supset B \quad \Leftrightarrow \quad M \models_s A$ ならば $M \models_s B$
3. $M \models_s \Box A \quad \Leftrightarrow \quad sRt$ となるすべての t に対し $M \models_t A$
4. $M \models_s \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad sRt$ となるある t に対し $M \models_t A$

$\Box A$ と $\Diamond A$ の例をそれぞれ図 1、2 に示す。

$M \models_s A$ であるとき「可能世界 s で A は真である」という。また $M \models_s A$ でないことを「$M \not\models_s A$」と表す場合もある。関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるため、V と $\models$ を同一視し、$\models$ を付値と呼ぶこともある。また、$(S, R, \models)$ をクリプキモデルと呼ぶ場合もある。

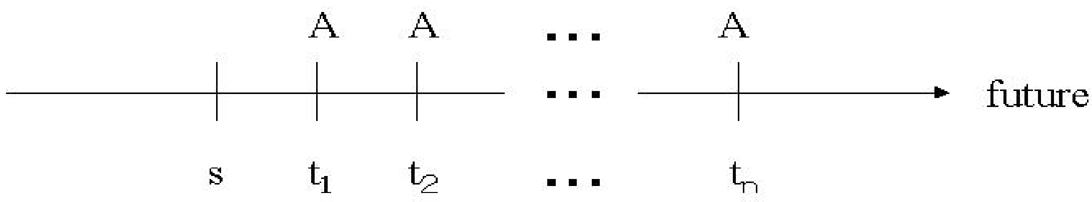

図 1: $\models_s \Box A$ の例

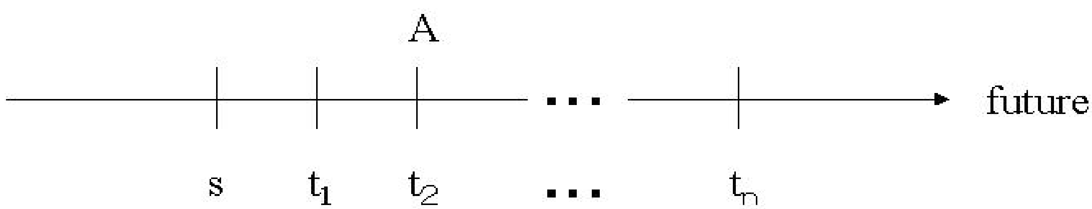

図 2: $\models_s \Diamond A$ の例

定義 2.3 恒真な論理式
フレーム (S, R) 上の任意の付値 $\models$ と S の任意の要素 a に対して

$$M \models_s A$$

となるとき、論理式 A はフレーム (S, R) で恒真であるという。また、クリプキモデル $(S, R, \models)$ において、ある $t \in S$ に対して

$$M \not\models_t A$$

となるとき $(S, R, \models)$ で論理式 A は偽であるという。また、ある付値 $\models$ に対し論理式 A が $(S, R, \models)$ で偽であるとき、論理式 A はフレーム $(S, R, \models)$ で偽であるという。

2.3 論理と様相論理

原始論理式の集合 Φ に基づいた言語が与えられれば、論理は

- Λ はすべてのトートロジーを含む
- Λ はモーダスポネンス

$$A, A \to B \in \Lambda \text{ ならば } B \in \Lambda$$

の下に閉じている。

の二つの条件を満たす任意の集合 $\Lambda \subseteq Fma(\Phi)$ として定義される。与えられた論理 Λ に属する論理式は Λ の定理と呼ばれ、$\vdash_\Lambda A$ は A が Λ の定理であることを意味する。すなわち

$$\vdash_\Lambda A \quad \Leftrightarrow \quad A \in \Lambda$$

ということになる。
次に、もし論理 Λ が公理

$$K : \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

を含み、必然化の規則

$$\vdash_\Lambda A \text{ ならば } \vdash_\Lambda \Box A$$

を満たすならば論理 Λ は正規であるという。正規論理において

$$\vdash_\Lambda (A_1 \wedge \cdots \wedge \ A_n) \to B$$

ならば

$$\vdash_\Lambda (\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box B$$

となることが導かれる。

2.4 健全性と完全性

定義 2.4 健全性
C をフレームまたはモデルのクラスとする。Λ が C に関して健全であるとは、すべての論理式 A に対して

$$\vdash_\Lambda A \text{ ならば } C \models A$$

が成り立つことである。

定義 2.5 完全性
Λ が C に関して完全であるとは、すべての論理式 A に対して

$$C \models A \text{ ならば } \vdash_\Lambda A$$

が成り立つことである。

Λ が C に関して健全かつ完全であるならば、Λ は C によって決定されるという。

3 離散時間論理の完全性に対する準備

3.1 時間論理

時間論理は様相論理の体系に加えて二つの様相演算子 $[F]$、$[P]$ をもつ。フレームを (S, R) において、$[F]$、$[P]$ は

$M \models_s [F]A \quad \text{iff} \quad sRt$ ならばすべての t で $M \models_t A$

$M \models_s [P]A \quad \text{iff} \quad tRs$ ならばすべての t で $M \models_t A$

と解釈される。ここで R は $R \subseteq M \times M$ とし、$\Box$ を

$$[P]A \wedge A \wedge [F]A$$

の省略形とすると、$\Box$ は「いつも」を意味することになる。$[F]A$ は図 3 に示すように now の未来でいつも A、$[P]$ は図 4 に示すように now の過去でいつも A である。ここで now は現在を表す。

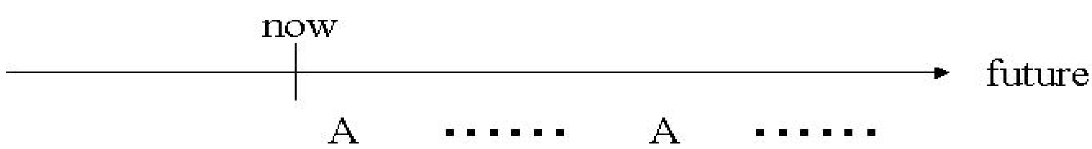

図 3: $[F]A$ の例

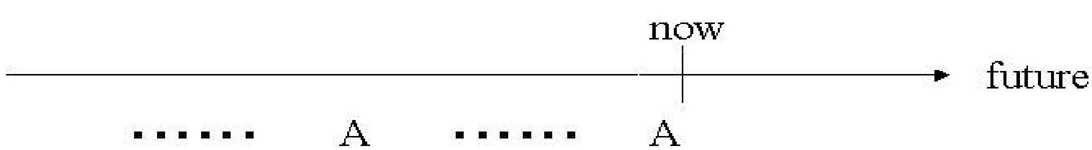

図 4: $[P]A$ の例

さらに時間論理 K_t は 4 つの公理

$$\begin{aligned} C_P &: A \to [P]\langle F\rangle A \\ C_F &: A \to [F]\langle P\rangle A \\ 4_P &: [P]A \to [P][P]A \\ 4_F &: [F]A \to [F][F]A \end{aligned}$$

を含む $[F]$ と $[P]$ の言語における標準論理であると定義される。C_F、C_P はそれぞれ未来、過去に対称的であることを意味し、また 4_F、4_P はそれぞれ未来、過去に推移的であることを意味する。また $[F]$、$[P]$ の双対的な演算子 $\langle F\rangle$、$\langle P\rangle$ を $\neg[F]\neg$、$\neg[P]\neg$ として導入すればそのとき

$M \models_s \langle F\rangle A \quad \Leftrightarrow \quad sRt$ となるある t で $M \models_t A$

$M \models_s \langle P\rangle A \quad \Leftrightarrow \quad tRs$ となるある t で $M \models_t A$

と解釈される。$\langle F\rangle A$ は図 5 に示すように now の未来のある時点で A、$\langle P\rangle A$ は図 6 に示すように now の過去のある時点で A である。

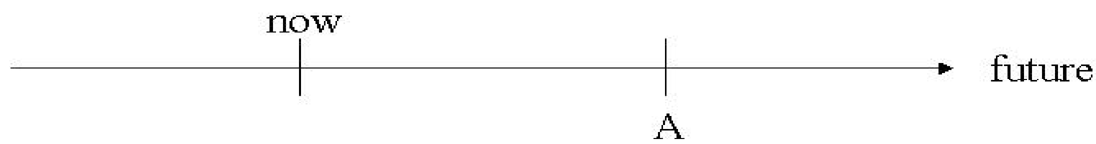

図 5: $\langle F\rangle A$ の例

図 6: $\langle P\rangle A$ の例

$\Diamond A$ を $\neg\Diamond\neg A$ の省略形とすると、$\Diamond A$ は

$\langle P\rangle A \vee A \vee \langle F\rangle A$

と同値になる。

3.2 線形時間論理

時間論理には時間の流れが一直線であると考える線形時間論理と時間の流れには分岐する点が存在すると考える分岐時間論理がある。時間構造が線形のものについては線形時間論理を用いる。

線形時間論理とは最小時間論理 K_t と二つの公理

$\Box A \to [F][P]A$

$\Box A \to [P][F]A$

を含む任意の様相論理であり、線形であることを示す。時間の流れが分岐している図 7 を考える。

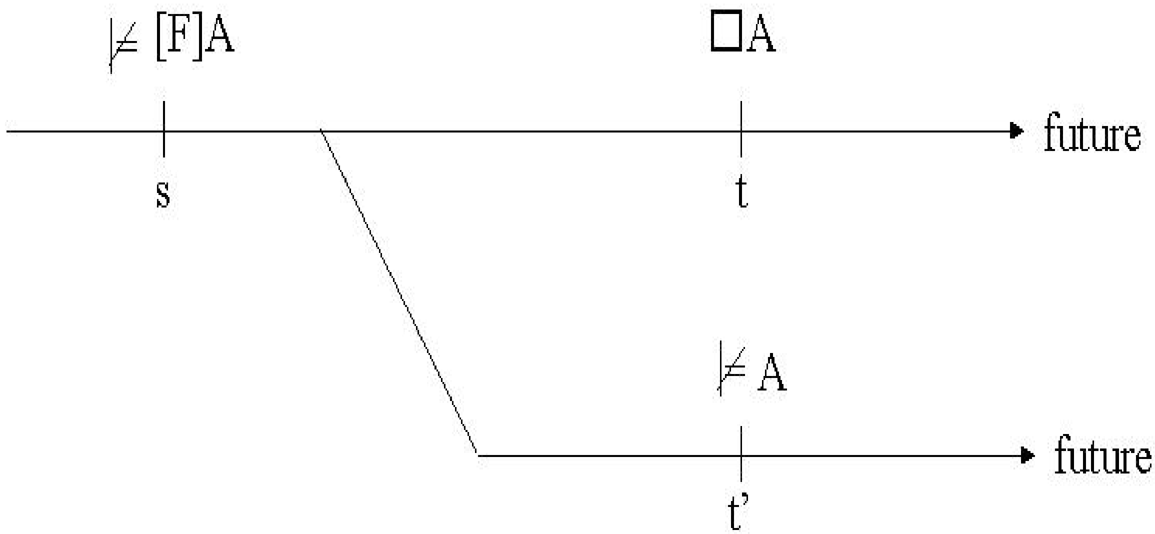

図 7: 分岐時間論理のモデル

$\models_t \Box A$ と公理より

$$\models_t [P][F]A$$

となる。しかし分岐時間モデルなので $\not\models_{t'} A$ より

$$\not\models_s [F]A$$

となり、よって

$$\not\models_t [P][F]A$$

となり矛盾が生じる。よってこれらの二つの公理は線形をもつ。

3.3 離散時間論理

Goldblatt により完全性を与えられた線形時間論理には離散時間論理 LinDisc、有理数時間論理 LinRat、実数時間論理 LinRe などがある。本研究では離散時間論理 LinDisc（以

下では体系 L とする）の完全性を扱う。
次の 4 つの公理を線形時間論理に加えた体系 L を

$$
\begin{aligned}
D_F &: \langle F\rangle\top \\
D_P &: \langle P\rangle\top \\
Z_F &: [F]([F]A \to A) \to (\langle F\rangle[F]A \to [F]A) \\
Z_P &: [P]([P]A \to A) \to (\langle P\rangle[P]A \to [P]A)
\end{aligned}
$$

離散的時間論理と定義する。ここで自然数フレーム $(\mathbf{N}, <)$ とし $s \in \mathbf{N}$ に対し

$$\models_s D_P$$

と仮定すれば

$$\Leftrightarrow \models_s \langle P\rangle A \Leftrightarrow \exists t(t < s \ \& \ \models_t \top)$$

となる。しかし $s = 0$ と取れば

$$t < 0$$

となる t が存在しない。よって矛盾し、D_P は過去に始まりをもたないことを示す。同様の議論で D_F は未来に終わりをもたないことを示す。

命題 3.1
Z_F、Z_P はそれぞれ未来、過去に離散的であることを示す。

証明
整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ とし $s \in S$ に対し

$$M \models_s \not\models Z_F$$

とする。

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \not\models [F]([F]A \to A) \to (\langle F\rangle[F]A \to [F]A) \\
&\Leftrightarrow M \models [F]([F]A \to A) \text{ かつ } M \not\models_s (\langle F\rangle[F]A \to [F]A) \\
&\qquad\qquad \cdots(1) \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots(2)
\end{aligned}
$$

(1) より

$$M \models_t [F]A \text{ ならば } M \models_t A \ \cdots(a)$$

(2) より

$$M \models_{t'} [F]A \text{ かつ } M \not\models_s [F]A \ \cdots(b)$$

$s < t'$ なので (b) より $s < t_0 \leq t'$ となるある t_0 で

$$M \not\models_{t_0} A$$

となる。よって (a) より

$$M \not\models_{t_0} [F]A$$

となる。同様に $t_0 < t_1 \leq t'$ となるある t_1 で

$$M \not\models_{t_1} [F]A$$

これを繰り返すとある t_0、t_1、t_2、$\cdots t_n \cdots$ に対し

$$s < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t'$$

となり、s と t' の間に無限に点が存在することになり矛盾する。

3.4 カノニカル・モデル

$M = (S, R, V)$ を論理 Λ のモデルとする。集合

$$\Gamma_s = \{A \in Fma(\Phi) : M \models_s A\}$$

を各 $s \in S$ に関連付ける。そのとき Λ_s は Λ-consistent である。
さらに集合 $\Gamma \subset (\Phi)$ は

- Γ が Λ-consistent である。
- 任意の $A \in Fma(\Phi)$ に対して $A \in \Gamma$ か $\neg A \in \Gamma$ のどちらかである。

ならば Λ-maximal であるよう定義される。
ここで正規論理 Λ のカノニカルモデルを

$$M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$$

とし、ここで

$$S^\Lambda = \{s \subseteq Fma(\Phi) : s \text{ は} \Lambda\text{-maximal}\}$$
$$sR^\Lambda t \Leftrightarrow \{A \in Fma(\Phi) : \Box A \in s\} \subseteq t$$
$$V^\Lambda(p) = \{s \in S^\Lambda : p \in s\}$$

とする。

定理 3.1 Lindenbaum の定理
論理式 Γ のすべての Λ-consistent な集合は Λ-maximal に含まれる。

証明
Φ が可算なものと仮定れば、$Fma(\Phi)$

$$A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$$

は数えられる。

$$\Delta_0 = \Gamma$$
$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\}, & \Lambda\text{-consistent} \\ \Delta_n \cup \{\neg A_n\}, & \text{その他} \end{cases}$$

と置く。そのとき

$$\Delta = \bigcup\{\Delta_n : n > 0\}$$

となる。

命題 3.1
$\vdash_\Lambda \;\Leftrightarrow\;$ すべての $s \in S^\Lambda$ に対して $A \in s$

証明
$\nvdash_\Lambda$ と仮定すれば、$\neg A$ が Λ-consistent となる。定理 3.1 より $\neg A \subseteq s$ となる $s \in S^\Lambda$ が存在する。よって $A \notin S$ となる。

定理 3.2
任意の $s \in S^\Lambda$、任意の $B \in Fma(\Phi)$ に対して

$$\Box B \in s \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } t \in S^\Lambda \text{に対して } sR^\Lambda t \text{ ならば } B \in t$$

が成り立つ。

証明
$\Box B \notin s$ と仮定し、$B \notin t$ となる $t \in S^\Lambda$ を導く。まず

$$\Gamma = \{A \in Fma(\Phi) : \Box A \in s\}$$

とする。もし $\Gamma \cup \neg B$ が Λ-consistent でないならば

$$\vdash_\Lambda A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B \to \bot$$

となる論理式 $A_1, \cdots, A_n \in \Gamma$ が存在する。よって

$$\vdash_\Lambda A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$$

となる。Λ が正規論理なので

$$\vdash_\Lambda \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \to \Box B$$

となる。しかし $\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \in s$ より $\Box B \in s$ となる。これは仮定に反している。定理 3.1 より $\Gamma \cup \neg B \subseteq t$ となる $t \in S^\Lambda$ が存在する。$\Gamma \subseteq t$ より $sR^\Lambda t$、そして $\neg B \in t$y より $B \notin t$ となる。

補助定理 3.1 任意の $A \in Fma(\Phi)$、任意の $s \in S^\Lambda$ に対して

$$M^\Lambda \models_s A \quad \Leftrightarrow \quad A \in s$$

が成り立つ

命題 3.2 すべての論理式 A に対して

$$M^\Lambda \models_s A \quad \Leftrightarrow \vdash_\Lambda A$$

が成り立つ。

3.5 部分モデル

$M = (S, R, V)$ と $t \in S$ とすれば t によって生成される M の部分モデルは

$$M^t = (S^t, R^t, V^t)$$

である。ここで S^t、R^t、V^t はそれぞれ

$$\begin{aligned} S^t &= \{u \in S : tR^*u\}(\text{ただし } R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n) \\ R^t &= R \cap (S^t \times S^t) \\ V^t(p) &= V(p) \cap S^t \end{aligned}$$

とする。このとき構造 $F^t = (S^t, R^t)$ は t によって生成された $F = (S, R)$ の部分フレームである。

補助定理 3.2 部分モデルの補助定理
任意の $A \in Fma(\Phi)$ および任意の $u \in S^t$ に対して

$$M^t \models_u A \quad \Leftrightarrow \quad M \models_u A$$

が成り立つ。

証明
式の構成に関する帰納法を用いる。
(Base Case)
V^t の定義より

$$M^t \models_u p \Leftrightarrow M \models_u p$$

となる。
(Induction Step)

A の一番外側の論理記号が $\rightarrow$ の時は容易なので略す。論理式 A を $[F]B$ とする。
$(\Rightarrow)$
$M^t \models_u [F]B$ と仮定する。

$$\Leftrightarrow \ \forall v(uR^t v \text{ ならば } M^t \models_v B$$

今、uRw とする。(S^t, R^t) は (S, R) の部分フレームであるから

$$w \in M^t$$

となり

$$uR^t w$$

が成り立つ。故に

$$M^t \models^t_w B$$

帰納法の仮定より

$$M \models_v B$$

となる。よって

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \forall w(uRw \text{ ならば } M \models_w B \\ &\Leftrightarrow \ M \models_u [F]B \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$
$M \models_s [F]B$ と仮定し、$uR^t v$ とすれば R^t の定義より

$$uRv$$

となる。したがって

$$M \models_v B$$

が成り立ち、帰納法の仮定より

$$M^t \models^t_u B$$

となり、よって

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \forall v(uR^t v \text{ ならば } M^t \models^t_v B \\ &\Leftrightarrow \ M^t \models^t_u [F]B \end{aligned}$$

$[P]B$ も同様に示すことができる。

3.6 時間論理に対する p-モルフィズム

時間論理に対する p-モルフィズムを定義する。

定義 3.1
$M_1 = (S_1, R_1, V_1)$、$M_2 = (S_2, M_2, V_2)$ を時間論理のモデルとする。写像 $f : S_1 \to S_2$ が以下の上 4 つ条件を満たすことである。

1. sR_1t ならば $f(s)R_2f(t)$
2. $f(s)R_2u$ ならば $\exists t(sR_1t \ \&\ f(t) = u)$
3. $uR_2f(s)$ ならば $\exists t(tR_1s \ \&\ f(t) = u)$
4. $s \in V_1(p) \quad \Leftrightarrow \quad f(s) \in V_2(p)$

補助定理 3.3
p-モルフィズム $f : S_1 \to S_2$ が存在するとき時間論理におけるすべての論理式 A およびすべての $s \in S_1$ に対し

$$M_1 \models_s A \quad \Leftrightarrow \quad M_2 \models_{f(s)} A$$

が成り立つ。

証明
式の構成に関する帰納法を用いる。
(Base Case)
V_1、V_2 の定義より

$$M_1 \models_s p \Leftrightarrow M_2 \models_{f(s)} p$$

となる。
(Induction Step)
論理式 A を $[F]B$ とする。
$(\Rightarrow)$
$M_1 \models_s [F]B$ と仮定し、$f(s)R_2v$ とする。f が p-モルフィズムより、ある $t \in M_1$ が存在し、sR_1t かつ $f(t) = v$ となる。仮定より

$$M_1 \models_t B$$

となり、帰納法の仮定より

$$M_2 \models_{f(t)} B$$

すなわち

$$M_2 \models_v B$$

となる。$f(s)R_2v$ となるすべての v に対し

$$M_2 \models_v B$$

となるから

$$M_2 \models_{f(s)} [F]B$$

となる。
$(\Leftarrow)$
$M_2 \models_{f(s)} [F]B$ と仮定する。sR_1t となる t を任意にとれば $f(s)R_2f(t)$ となる。仮定より

$$M_2 \models_{f(t)} B$$

となり、帰納法の仮定より

$$M_1 \models_t B$$

sR_1t となる任意の点 t で

$$M_1 \models_t B$$

となるから

$$M_1 \models_t [F]B$$

となる。
$[P]B$ についても同様に示すことができる。

補助定理 3.4 p-モルフィズムの補助定理
$F_1 = (S_1, R_1)$ から $F_2 = (S_2, R_2)$ への p-モルフィズムであり、さらに上への写像であるものがあれば

$$F_1 \models A \quad \text{ならば} \quad F_2 \models A$$

が成り立つ。

証明
$F_1 = (S_1, R_1)$ から $F_2 = (S_2, R_2)$ への上への p モルフィズムを f とする。今、論理式 C がモデル $M_2 = (S_2, R_2, V_2)$ で偽であるとし、さらにある $d \in S_2$ に対して

$$d \notin V_2(C)$$

と仮定する。ここで F_2 の付値 V_1 を

$$s \in V_1(p) \quad \Leftrightarrow \quad f(s) \in V_2(p)$$

により定める。

補助定理 3.3 より任意の $s \in S_1$ と任意の論理式 A に対して

$$s \in V_1(A) \quad \Leftrightarrow \quad f(s) \in V_2(A) \ \cdots \ (+)$$

が得られる。ここで上への写像であるから $f(e) = d$ となる $e \in S_1$ が存在する。(+) において s を e、A を C とすれば

$$e \notin V_1(C)$$

が得られる。したがって F_1 は行進ではない。よって対偶が示された。

3.7 時間論理に対する Filtration

モデル $M = (S, R, V)$ および部分論論理式に閉じた論理式のある集合 $\Gamma(\subseteq Fma(\Phi))$ が与えられたとする。すなわち

$$B \in \Gamma \text{ ならば } Sf(B) \subseteq \Gamma$$

である。ただし $Sf(B)$ は論理式 B の部分論理式全体の集合とする。
$s \in S$ に対して

$$\Gamma_s = \{B \in \Gamma : M \models_s B\}$$

と定義し、

$$s \sim_\Gamma t \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_s = \Gamma_t$$

と置く。よって

$$s \sim_\Gamma t \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } B \in \Gamma \text{に対して } M \models_s B \ \Leftrightarrow \ M \models_t B$$

となる。このとき $\sim_\Gamma$ は S に関する同値関係になる。任意の $s \in S$ に対し

$$|s| = \{t \in S : s \sim_\Gamma t\}$$

を s の $\sim_\Gamma$-同値類とする。そのような同値類全体の集合を

$$S_\Gamma = \{|s| : s \in S\}$$

と表す。

補助定理 3.5
Γ が有限ならば S_Γ は有限でかつ、高々2^n 個の要素を持つ。ここで n は Γ の要素の数とする。

証明
今

$$|s| = |t| \quad \Leftrightarrow \quad s \sim_\Gamma t \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_s = \Gamma_t$$

なので

$$f(|s|) = \Gamma_s$$

となる。今、$f(|s|) = \Gamma_s$ により S_Γ から Γ のべき集合への写像を定める。すると $|s| = |t|$ なので f は矛盾なく定義され、Γ の部分集合の集合への S_Γ の写像を与える。よって S_Γ の要素の数は Γ の部分集合の数でおさえられる。もし Γ が n 個の要素を持つならば、それは Γ のべき集合は 2^n 個の要素をもつから、S_Γ は高々2^n 個の要素を持つ。

V_Γ を定義するために、$\Phi_\Gamma = \Phi \cap \Gamma$ を Γ に所属する原始論理式の集合とする。そして $p \in \Phi_\Gamma$ ならばいつでも

$$|s| \in V_\Gamma(p) \quad \Leftrightarrow \quad s \in V(p)$$

と置くことによって

$$V_\Gamma : \Phi_\Gamma \to 2^{S_\Gamma}$$

を定義する。時間フレーム $M = (S, R, V)$ の Γ-Fltration は R の推移性および R が R_F であり R^{-1} が R_P であることを保つように定義したい。これを満たすための関係は $R^\tau (\subseteq S_\Gamma \times S_\Gamma)$ を条件

$$\begin{array}{lll} (F1) & sRt \text{ ならば } |s|R^\tau|t| & \\ (F2) & |s|R^\tau|t| \ \Leftrightarrow & [F]B \in \Gamma \text{かつ } M \models_s [F]B \text{ ならば } M \models_t [F]B \wedge B \\ & & [P]B \in \Gamma \text{かつ } M \models_s [P]B \text{ ならば } M \models_t [P]B \wedge B \end{array}$$

を満たすように定める。

補助定理 3.6 Filtration の補助定理
フレーム $M^\tau = (S_\Gamma, R^\tau, V_\Gamma)$ において R^τ 推移性を持ち、さらに

$$M \models_s B \quad \Leftrightarrow \quad M^\tau \models_{|s|} B$$

が成り立つ。

証明
推移性は明らかなので、後半の論理式 B の構成に関する帰納法を用いて示す。
(Base Case)

$$M \models_s p \Leftrightarrow s \in V(p) \Leftrightarrow |s| \in V_\Gamma(p) \Leftrightarrow M^t au \models_{|s|} p$$

(Induction Step)
論理式 A を $[F]B$ とする。
($\Rightarrow$)
$M_\Gamma \not\models_{|s|} [F]A$ と仮定する。

$$\Leftrightarrow \exists |t|(|s|R^\tau |t| \text{ かつ } M_\Gamma \not\models_{|t|} B)$$

帰納法の仮定より

$$\Leftrightarrow \exists |t|(|s|R^\tau |t| \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

となりる。(F2) より

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists |t|(\forall D \in Sf(B)([F]D \in \Gamma \text{かつ } M \models_s [F]D \text{ ならば } M \models_t D) \text{ かつ } M \not\models_t B) \\ &\Rightarrow \quad \exists |t|(([F]B \in \Gamma \text{かつ } M \models_s [F]B \text{ ならば } M \models_t B) \text{ かつ } M \not\models_t B) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists |t|((M \models_s [F]B \text{ ならば } [F]B \notin \Gamma) \text{ または } M \not\models_t B) \\ &\Rightarrow \quad M \not\models_s [F]B \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)
$M \not\models_s [F]B$ と仮定する。

$$\Leftrightarrow \exists t(sRt \text{ かつ } M \models_t B)$$

帰納法の仮定より

$$\Leftrightarrow \exists t(sRt \text{ かつ } M_\Gamma \models_{|t|} B)$$

となる。

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists t(|s|R|t| \text{ かつ } M_\Gamma \models_{|t|} B) \\ &\Rightarrow \quad \exists |t|(|s|R|t| \text{ かつ } M_\Gamma \models_{|t|} B) \\ &\Leftrightarrow \quad M_\Gamma \not\models_{|s|} [F]A \end{aligned}$$

3.8 クラスタ

離散時間論理の完全性を考えるためにクラスタを定義する。

定義 3.2
与えられたフレーム (S, R) において $s \in S$ に対し

$$C_s = \{t : s \approx t\}$$

で定める。そのとき C_s を s の R-クラスタと呼ぶ。ただし $\approx$ は

$$s \approx t \quad \Leftrightarrow \quad s = t \text{ または } (sRt \text{ かつ } tRs)$$

により定義される。

またクラスタ間の順序は

$$\begin{aligned} C_s \leq C_t &\quad \Leftrightarrow \quad sRt \\ C_s < C_t &\quad \Leftrightarrow \quad C_s \leq C_t \ \& \ C_s \neq C_t \\ &\quad \Leftrightarrow \quad sRt \text{ かつ } \neg tRs \end{aligned}$$

と定める。
次にクラスタの種類について述べる。クラスタの種類として退化クラスタと非退化クラスタがある。

1. 退化クラスタ:
   クラスタ C が $C \not\leq C$ ならばクラスタ C を退化クラスタと呼び、$\bullet$ で表す。このクラスタ C は反射的でない $C = \{s\}$ 一点からなる。

2. 非退化クラスタ:
   クラスタ C が $C \leq C$ ならばクラスタ C を非退化クラスタと呼び、$\bigcirc$ で表す。このクラスタ C は反射的である $C = \{s\}$ 一点からなるか、または二点以上の点からなる。このとき R は普遍的である。

クラスタの列を図 8 に示す。

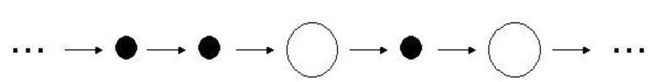

図 8: クラスタの列

ただし、次のような特別なクラスタの列を「ダンベル」と呼ぶ。

定義 3.3
ダンベルは最初と最後のクラスタが非退化クラスタであり、それ以外のクラスタは退化クラスタであるような有限な推移性かつ連結性をもつフレームである。ダンベルの例を図 9 に示す。

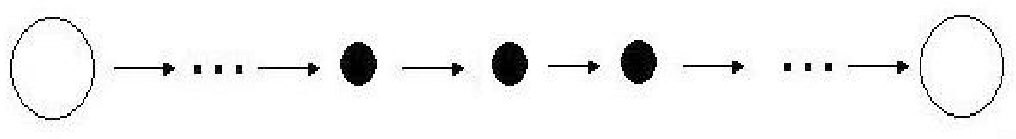

図 9: ダンベルの列

定理 3.3
フレーム F がダンベルであるならば、フレーム F は $(\mathbf{Z},<)$ の p-モルフィズムをである。

3.9 Z-補助定理

両端以外の非退化クラスタを退化クラスタの列に置き換える場合、部分論理式全体の集合の要素の真理値を変えないように置き換える必要がある。このような置き換えの際におこりうる問題はクラスタ C においてある点で偽となる $[F]B$ の形をした論理式が置き換えた後に偽ではなくなることである。しかしながら公理 Z によりこの問題点を避けることができる。

補助定理 3.7 Z_F の補助定理
$C_{|s|}$ を最後でない R^{τ} クラスタとする。もし $[F]B \in \Gamma$ かつ $M \not\models_s [F]B$ ならば、$M \not\models_t B$ かつ $C_{|s|} < C_{|t|}$ となる $t \in S$ が存在する。

補助定理 3.8 Z_P の補助定理
$C_{|s|}$ を最初でない R^{τ} クラスタとする。もし $[P]B \in \Gamma$ かつ $M \not\models_s [P]B$ ならば、$M \not\models_t B$ かつ $C_{|t|} < C_{|s|}$ となる $t \in S$ が存在する。

証明
$[F]B \in \Gamma$ かつ $M \not\models_s [F]B$ とする。
Case1.

$$M \models_s \langle F\rangle[F]B$$

と仮定する。M で Z_F が成り立つから

$$M \models Z_F : [F]([F]B \to B) \to (\langle F\rangle[F]B \to [F]B)$$

より

$$\begin{aligned}&M \not\models_s [F]([F]B \to B)\\ &\Leftrightarrow \exists t \in S(sRt\ M \not\models_t [F]B \to B)\\ &\Leftrightarrow \exists t \in S(sRt\ (M \models_t [F]B \text{ かつ } M \not\models_t B))\end{aligned}$$

sRt かつ R^τ は R の Γ-Filtration だから

$$|s|R^\tau|t|$$

である。

$$M \not\models_s [F]B \text{ かつ } M \models_t [F]B$$

より

$$\begin{aligned}&C_{|s|} \neq C_{|t|}\\ &C_{|s|} \leq C_{|t|}\end{aligned}$$

となる。R^τ の定義は $|t|R^\tau|s|$ を持たないことを意味し、よって $|t|$ のクラスタは必ず $|s|$ の後にくる。

Case2.

$$M \not\models \langle F\rangle[F]B$$

と仮定する。$C_{|s|}$ は最後でないクラスタなので

$$C_{|s|} < C_{|u|}$$

となる $u \in S$ が存在する。そのとき

$$uRs \text{ または } u = s$$

を持つことができない。そうでないときは

$$C_{|u|} \leq C_{|s|}$$

を作り

$$|u|R^\tau|s| \text{ または } |u| = |s|$$

を持つ。よって R は連結性より

$$sRu$$

となる。仮定より

$$
\begin{aligned}
& M && \not\models_s \langle F\rangle[F]B \\
& \Leftrightarrow && sRu \text{ となる } \forall u \text{ で } \not\models_u [F]B \\
& \Leftrightarrow && sRu\ uRt \text{ となる } \exists t \text{ で } \not\models_t B
\end{aligned}
$$

そのとき

$$C_{|s|} < C|u| \leq C_{|t|}$$

を持ち Z_F の補助定理 3.7 が示された。

Z_P の補助定理 3.8 についても同様に証明できる。

4　Goldblattによる離散時間論理の完全性の証明とそのギャップ

Goldblattの本の示唆により、論理Lが整数フレーム $(\mathbf{Z},<)$ で特徴付けられることを以下で試みた。

4.1　Goldblattによる時間論理 L の完全性の証明

p-モルフィズムの補助定理3.4、定理3.3より $(\mathbf{Z},<) \models A$ ならば A はすべてのダンベルで恒真となる。よって論理 L が $(\mathbf{Z},<)$ に関して完全であることを示すためには、ダンベルのクラスに関して完全であることを示せば十分である。

命題 4.1　L で証明できない論理式Aに対し、有限なクラスタの列からなるあるフレームで偽になる。

証明
対偶を用いて証明する。まず最初にある論理式 A を証明でない、すなわち

$$\nvdash A$$

と仮定すれば、A がカノニカルモデル $M^L=(S^L,R^L,V^L)$ においてある点 s_A で

$$M^L \not\models_{s_A} A$$

となる。ただし、離散時間論理の公理より M^L は推移的かつ連続的である。

次に $M=(S,R,V)$ を s_A により生成された M^L の部分モデルとする。そのとき、部分モデルの補助定理3.2より論理式 A は M における s_A で

$$M \not\models_{s_A} A$$

となる。

時間論理に対するFiltrationを用いるために $\Gamma=Sf(A)$(論理式 A の部分論理式の全体)とし、$M^\tau=(S_\Gamma,R^\tau,V_\Gamma)$ を M の推移的 Γ-Filtrationとする。Filtrationの定理3.6より 論理式 A は M^τ における $|s_A|$ で

$$M^\tau \not\models_{|s_A|} A$$

となる。Filtration後のクラスタの列は公理 D_F、D_P より、最初と最後のクラスタは必ず非退化クラスタとなっている。

なぜなら、クラスタ C_x を最初のクラスタとすると D_P より

$$yR^\tau x$$

となるある y が存在する。クラスタの定義より

$$C_y \leq C_x$$

となる。しかし C_x が最初のクラスタなので

$$C_y = C_x$$

となり、最初のクラスタは非退化クラスタとなる。同様な議論で D_F より最後のクラスタも非退化クラスタとなる。

しかし、図 10 のように最初と最後以外のクラスタにも非退化クラスタが含まれている場合がある。このようなクラスタの列に対しては $(Z, <)$ からの p-モルフィズムが必ず存在するわけではない。

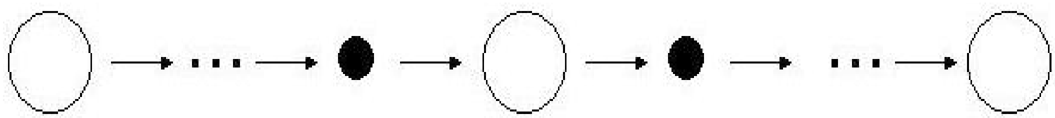

図 10: Filtration 後のクラスタの列

最初と最後以外の非退化クラスタを取り除くために新たに $M' = (S_\Gamma, R', V_\Gamma)$ を定義する。ここで R' は

$$
\begin{array}{lll}
xR'y & \Leftrightarrow & 1.\ \ x <_C y \quad x, y \in C \text{ のとき} \\
 & & \quad\ \text{(ただし、} C \text{ は両端以外の非退化クラスタ)} \\
 & & 2.\ \ xR^\tau y \quad \text{(その他)}
\end{array}
$$

とする。$<_C$ は C 上の 1 つの推移的、連結的、非反射的な順序とする。すなわちこれが意味することは公理 Z_F、Z_P より両端以外のクラスタ C で非退化クラスタであるものは補助定理 3.7、3.8 より真理値を変えることなく退化クラスタと置き換えることができる。そのようなフレームはダンベルとなり、このとき M と M' の間には次の補助定理 4.1 が成り立つ。

補助定理 4.1

$B \in \Gamma$、$s \in S$ に対し

$$M \models_s B \ \text{ iff } \ M' \models_{|s|} B$$

が成り立つ。

証明
式の構成に関する帰納法を用いて示す
$(\Rightarrow)$
$M' \not\models_{|s|} [F]B$ と仮定する。

$$\exists |t|(|s|R'|t| \text{ かつ } M' \not\models_{|t|} B)$$

帰納法の仮定より

$$\Leftrightarrow \exists |t|(|s|R'|t| \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

R' が R^τ を含んでることより

$$\Rightarrow \exists |t|(|s|R^\tau|t| \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

(F2) と $M \not\models_t B$ より

$$M \not\models_s [F]B$$

$(\Leftarrow)$

1. $C_{|s|} \neq C_{last}$ のとき
   $M \not\models_s [F]B$ と仮定する。補助定理 3.7 より

   $$\exists t(M \not\models_t B \text{ かつ } C_{|s|} < C_{|t|})$$

   帰納法の仮定より

   $$M' \not\models_{|t|} B \cdots (1)$$

   $C_{|s|}$ と $C_{|t|}$ は異なるクラスタであるからクラスタの定義より

   $$|s|R^\tau|t|$$

   となる。R' の定義より

   $$|s|R'|t| \cdots (2)$$

   (1)(2) より

   $$M' \not\models_{|s|} [F]B$$

2. $C_{|s|} = C_{last}$ のとき
$M \not\models_s [F]B$ と仮定する。

$$\exists t(sRt \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

(F1) より

$$\Rightarrow \exists t(|s|R^\tau|t| \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

R' の定義より

$$\Leftrightarrow \exists t(|s|R'|t| \text{ かつ } M \not\models_t B)$$

帰納法の仮定より

$$\Leftrightarrow \exists t(|s|R'|t| \text{ かつ } M' \not\models_{|t|} B)$$

よって

$$\Leftrightarrow M' \not\models_s [F]B$$

$[P]B$ についても同様に証明できる。

特に s を s_A と取れば補助定理 4.1 より

$$M' \not\models_{|s_A|} A$$

となる。

次に $(\mathbf{Z}, <)$ から (S_Γ, R') への p-モルフィズムを考える。S_Γ を

$$S_\Gamma = \{s_0, \cdots, s_{n-1}, t_0, \cdots, t_{m-1}, u_0, \cdots, u_{l-1}\}$$

とする。ここで $\{s_0\}, \cdots, \{s_{n-1}\}$ は退化クラスタ、$\{t_0, \cdots, t_{m-1}\}$ は最後の非退化クラスタ、$\{u_0, \cdots, u_{l-1}\}$ は最初の非退化クラスタとする。

$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{S_\Gamma}$ を

$$\begin{array}{rcll} f(i) & = & s_i & (0 \leq i < n) \\ f(n + q \cdot m + j) & = & t_j & (0 \leq j < m, q \in 1, 2, 3 \cdots) \\ f(-q \cdot m + k) & = & t_k & (0 \leq k < l, q \in 1, 2, 3 \cdots) \end{array}$$

と定義し、図 11 に示す。

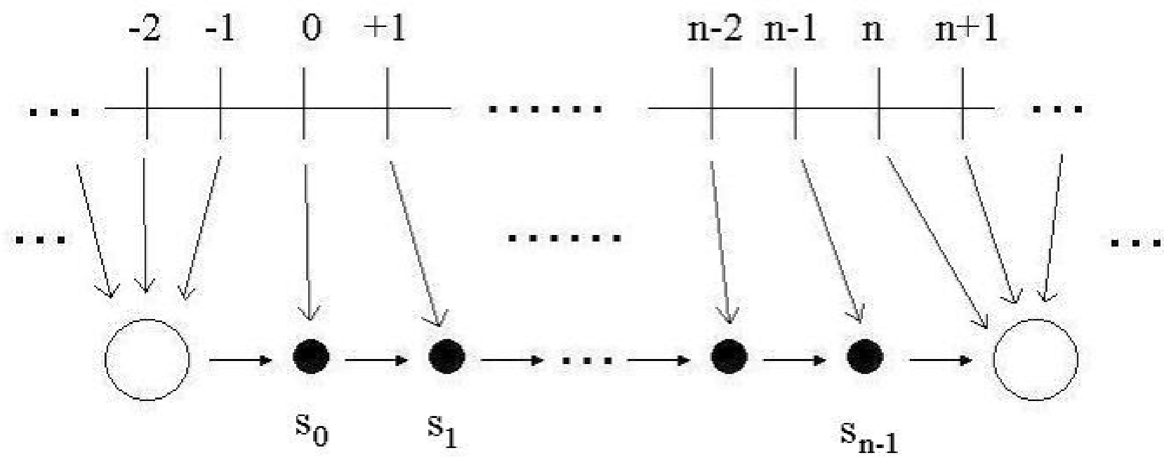

図 11: p-モルフィズムの例

つまり、f は

$$\cdots\cdots, u_{l-1}, \cdots, u_1, u_{l-1}, \cdots, u_1 s_0, \cdots, s_{n-1}, t_q, \cdots, t_{m-1}, t_q, \cdots, t_{m-1}, \cdots\cdots$$

のようになる。f が p-モルフィズムであれば補助定理 3.3 より

$$(\mathbf{Z}, <) \not\models_{s_A} A$$

となり対偶が示され、離散時間論理の完全性が証明される。また同時に有限なフレーム「ダンベル」で偽となるモデルが見つかったので有限モデル性も証明されることになった。以上が Goldblatt[4] による離散時間の完全性の証明である。しかしながら、この証明には 2 つの問題点が存在する。以下ではそのことについて述べる。

4.2 p-モルフィズムについての問題点

1 つ目の問題点は定理 3.3 で述べている整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ からダンベルへの p-モルフィズムが存在するという点である。
フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ からダンベル $D = (S_\Gamma, R')$ への写像は図 11 に示したとおりである。このとき最初の非退化クラスタらから退化クラスタへの部分で p-モルフィズムの条件 2 が、最後の非退化クラスタから退化クラスタへの部分で条件 3 が成り立たない。
このことについて詳しく述べるために $f : \mathbf{Z} \to S_\Gamma$ を

$$\begin{aligned} f(0) &= v \in C_2 \\ f(-1) &= u \in C_1 \\ f(-2) &= u' \in C_1 \\ f(-3) &= u'' \in C_1 \end{aligned}$$

(図 12) のように定める。ただし、$S_\Gamma = \{u, u', u'', v, \cdots\}$ とし、また例として $\{u, u', u''\}$ は最初の非退化クラスタは $\{u, u', u''\}$ の 3 点からなるものとし、v は最初の非退化クラスタの次の退化クラスタとする。

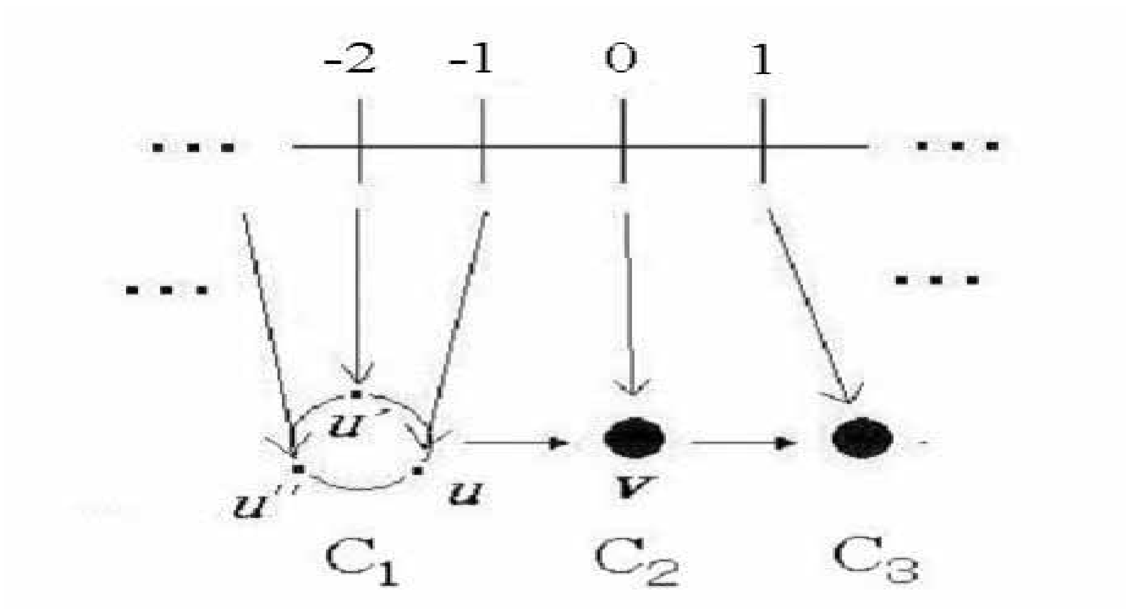

図 12: p-モルフィズムの Gap

ここで最初の非退化クラスタは普遍的なので

$$f(-1)R'u'$$

が成り立つはずである。よって p-モルフィズムの条件 2 より

$$\exists i(-1 < i \ \ \& \ \ f(i) = u')$$

とならなければならない。ここで $i = 0$ を考えれば

$$f(0) = v \in C_2$$

となる。よって

$$f(0) \neq u'$$

となる。同様にして $i > 0$ となるすべての i について

$$f(i) = u' \in C_1$$

は成り立ち得ない。よって f は p-モルフィズムの条件 2 を満たさないことが分かる。また最後の非退化クラスタと退化クラスタの部分でも同様の議論より p-モルフィズムの条件 3 を満たさない。
これらのことから整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ からダンベルへの p-モルフィズムは存在しえない事が分かる。

4.3 Z_P と Z_F に関する問題点

2つ目の問題点は公理 Z_P と Z_F に関するものである。離散時間論理は線形時間論理に4つの公理 D_P、D_F、Z_P、Z_F を付け加えた体系であった。これら4つの公理は整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ においてすべて恒真である。

命題 4.2
ダンベル D においては Z_P、Z_F が偽となる。

証明
ここでダンベル D において Z_F が偽となることを示す。まず図13に示すようなダンベル $D = (S, R, V)$ を考える。

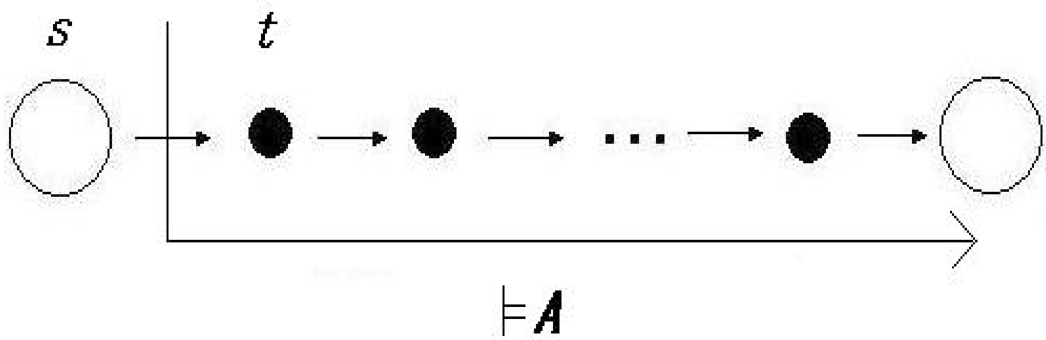

図 13: Z_F が偽になるダンベルのモデル

すなわち

$$sRt \text{ かつ } \neg tRs \quad \Leftrightarrow \quad \models_t A$$

が成り立つように付値 V を定める。ここで

$$D \not\models_s Z_F$$

となるための必要十分条件は

$$\begin{array}{lll} D & \not\models_s & (\neg[F]([F]A \to A) \text{ または } (\langle F\rangle[F]A \to [F]A)) \\ & \models_s & [F]([F]A \to A) \text{ かつ } \not\models_s \langle F\rangle[F]A \to [F]A) \\ & \models_s & [F]([F]A \to A) \text{ かつ } \not\models_s (\neg\langle F\rangle[F]A \text{ または } [F]A)) \\ & \models_s & [F]([F]A \to A) \text{ かつ } \models_s \langle F\rangle[F]A \text{ かつ } \not\models_s [F]A \\ & & \quad\cdots(1) \qquad\qquad \cdots(2) \qquad\qquad \cdots(3) \end{array}$$

である。実際に (1)、(2)、(3) が成り立つことを確かめる。

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \models_s \quad & [F]([F]A \to A) \\
& \Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } \models_t [F]A \to \models_t A \\
& \Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } \models_t [F]A \text{ または } \models_t A \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots(i) \qquad\qquad \cdots(ii)
\end{aligned}
$$

今、sRt となる t を任意に取る。S が属す最初の非退化クラスタ C に t が属すときは tRs だから (i)、sRt だから t が C に属さないときは (ii) が成り立つ。したがって (1) が成立する。

$$
\begin{aligned}
(2) \quad \models_s \quad & \langle F\rangle[F]A \\
& \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } \models_t [F]A
\end{aligned}
$$

sRt かつ $t \notin C$ なら明らかに

$$\models_t [F]A$$

となるから (2) が成立する。

$$
\begin{aligned}
(3) \quad \not\models_s \quad & [F]A \\
& \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } \not\models_t A
\end{aligned}
$$

最初の非退化クラスタ C の任意の要素を t とすると

$$sRt \text{ かつ } \not\models A$$

となる。したがって (3) が成立する。よって

$$D \quad \not\models_s \quad Z_F$$

が示された。同様の議論で

$$D \quad \not\models_s \quad Z_P$$

となることも示すことができる。

ダンベルで Z_F、Z_P は恒真ではない。よって補助定理 3.7、3.8 が成り立たない。

5 離散時間論理の完全性の証明に向かって

この節では２つのギャップの修正について議論する。

5.1 体系 L のすべての公理を満たすフレーム

ダンベルでは Z_F、Z_P が偽になることは 4.3 節で述べた。そこで我々は体系 L の公理をすべて満たすフレームを考えることにする。
Filtration 後には公理 D_P、D_F より必ず最初と最後のクラスタは非退化クラスタとなる。しかし、公理 Z_P は最初以外のクラスタは退化クラスタであることを意味し、Z_F は最後以外のクラスタが退化クラスタであることを意味している。最初と最後のフレームが非退化クラスタでかつ、最初と最後以外のクラスタが退化であるという状況を実現するためには全体が１つの非退化クラスタからなっているようなフレームでなければならないと考えられる。そのフレームをサークル C とする。C で Z_F、Z_P が真であることを示す。まず

$$C \not\models Z_F$$

と仮定すれば

$$\models [F]([F]A \to A) \text{ かつ } \models F > [F]A \text{ かつ } \not\models [F]A$$
$$\cdots(1) \qquad\qquad \cdots(2) \qquad\qquad \cdots(3)$$

非退化クラスタで A が真となるならば (3) で矛盾し、非退化クラスタで A が偽となるならば (2) で矛盾する。よって Z_F はサークル C で真となる。
同様な方法で Z_P についても示すことができる。この結果より体系 L の公理はサークルですべて恒真となる。

5.2 サークルへの p-モルフィズム

次に整数フレーム $(\mathbf{Z}, <)$ からサークル (S, R) への p-モルフィズムを考える。$S = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\}$ とする。ここで、$s_0, \cdots, s_{n-1}$ は 1 つの非退化クラスタとする。
$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{S}$ を

$$\begin{aligned} f(i + q \cdot n) &= t_i \quad (0 \leq i < n \; q \in \{0, 1, 2, \cdots\}) \\ f(i - q \cdot (n-1)) &= t_j \quad (0 < j < n \; q \in \{0, 1, 2, \cdots\}) \end{aligned}$$

と定義し、図 14 に示す。
非退化クラスタが R が普遍的なので、p-モルフィズムの条件は満たされる。

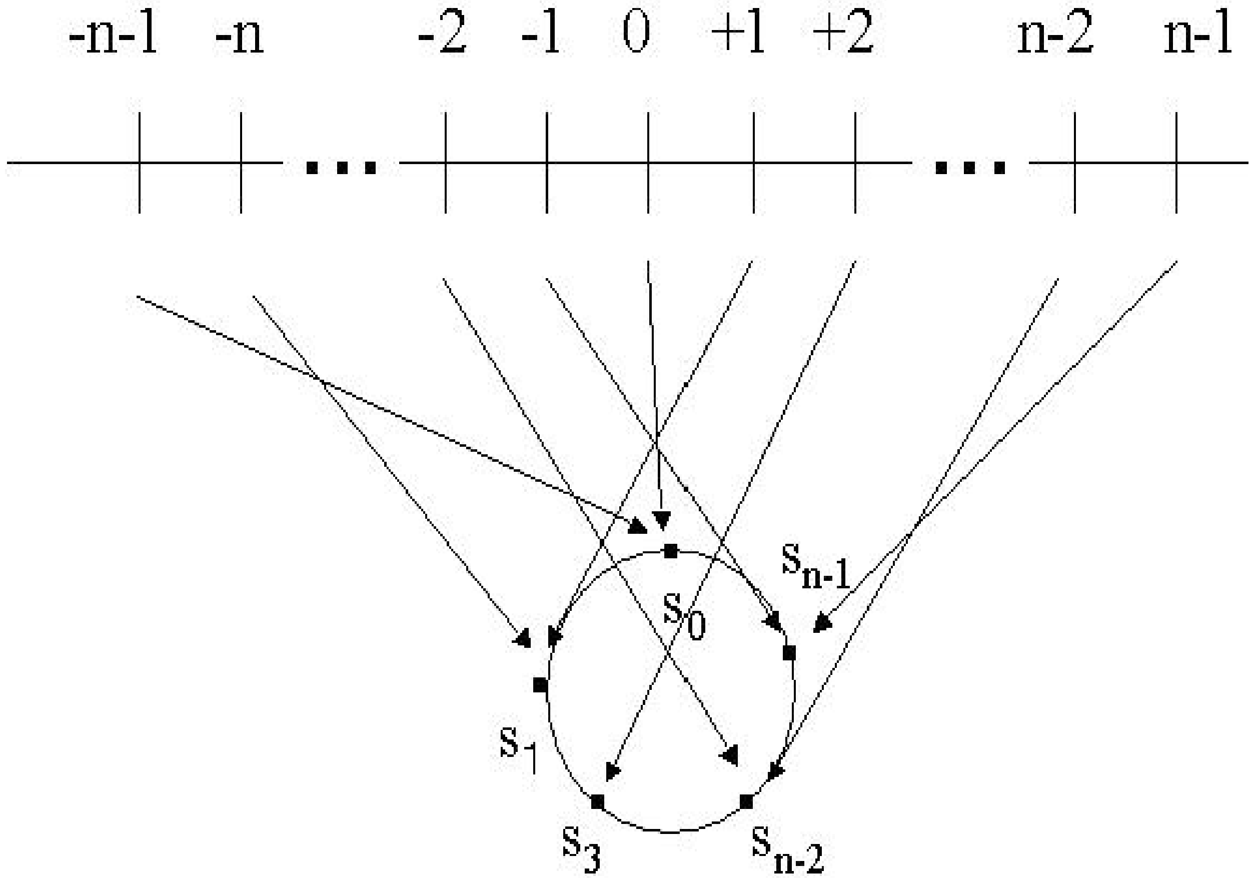

図 14: サークルへの p-モルフィズム

5.3　サークル、整数フレームに対しての反射律

節 5.2 では整数フレーム $(\mathbf{Z},<)$ からサークル C へ p-モルフィズムが存在することは確かめた。しかし、反射性を表す論理式に関しての問題が生じる。つまり、整数フレーム $(\mathbf{Z},<)$ に対して

$$(\mathbf{Z},<) \not\models [F]A \to A$$
$$(\mathbf{Z},<) \not\models [P]A \to A$$

となる。しかしサークル C においては反射的であることから

$$C \models [F]A \to A$$
$$C \models [P]A \to A$$

となる。サークル C に特徴付けられる体系を L_C、整数フレーム $(\mathbf{Z},<)$ によって特徴付けられる体系を $L(\langle\mathbf{Z},<\rangle)$ とすれば

$$L_C \supsetneq L(\langle\mathbf{Z},<\rangle)$$

となる。

5.4 体系 L と整数フレームの関係

以上のことをまとめると、体系 L はダンベル D で矛盾が生じ、さらに整数フレーム $(\mathbf{Z},<)$ からダンベルへの p-モルフィズムが存在しない。ダンベル D で特徴付けられる体系を L_D とすれば

$$L \neq L_D$$

となる。サークル C はダンベルの一種であることから

$$L_D \subseteq L_C$$

となる。これらをまとめると

$$L \subseteq L(\langle \mathbf{Z},<\rangle) \subsetneq L_C$$

という関係になる。

5.5 離散時間論理の完全性の修正

Goldblatt のアイデアを用いて作られるフレーム D や C では体系 L の完全性を与えることができない。しかしながら、ここで F.Wolter が [6] で用いた方法を利用することにより、$L = L(\langle \mathbf{Z},<\rangle)$ を示すことができる。この証明は T.Litak の示唆による。$L \supseteq L(\langle \mathbf{Z},<\rangle)$ を得るためにクラスタ付値 t を用いる。

定義 5.1 クラスタ付値
離散時間フレーム $F = (S,R)$ とする。t が次のような写像のとき、t を F におけるクラスタ付値という。

$$t : F \text{ におけるクラスタの集合} \to \{m,j\} \times \{m,j\}$$

ここで二つの記号 m と j はそれぞれ、maximal と joker を意味する。ただしクラスタ C が退化クラスタであるならば $tC = (m,m)$ とする。$tC = (k,l)$ のとき $t_1C = k_1$、$t_2C = l$ と定める。

以下で用いるフレームはクラスタ付値 t をもつフレーム $F = (S,R,t)$ とする。また、付値 V が以下の条件を満たすとき付値 V はフレーム F に対して A-good と呼ばれる。すべてのクラスタ C に対して

1. $B \in Sub(A)$ が $\langle F\rangle B'$ の形ならば

$$t_1C = j \text{ ならば } C \cap max_R(V(B)) = \emptyset$$

2. $B \in Sub(A)$ が $\langle P \rangle B'$ の形ならば

$$t_2 C = j \text{ ならば } C \cap min_R(V(B)) = \emptyset$$

が成り立つ。ここで $max_R(V(B))$、$min_R(V(B))$ はすべての論理式 B に対して

$$\begin{aligned} max_R(V(B)) &= \{s \in F | \forall t \in F(t \in V(B) \Rightarrow tRs)\} \\ min_R(V(B)) &= \{s \in F | \forall t \in F(t \in V(B) \Rightarrow sRt)\} \end{aligned}$$

とする。ここでクラスタ付値を用いて良いダンベルを考える。(S, R, t) をクラスタ付値をもつ線形時間フレームとし以下の条件を満たすフレームを good-ダンベルいう。good-ダンベル D' の例を図 15 に示す。

1. 最初のクラスタ C_1 と最後のクラスタ C_n は非退化クラスタとしクラスタ付値は

$$\begin{aligned} t_2 C_1 &= m \\ t_1 C_n &= m \end{aligned}$$

である。

2. その他すべてのクラスタは退化クラスタであるする。つまりクラスタ付値は

$$tC_2 = \cdots = tC_{n-1} = (m, m)$$

である。

3. $n \neq 1$ すなわち $C_1 \neq C_n$ のときにはクラスタ付値は

$$t_1 C_1 = j \quad \text{かつ} \quad t_2 C_n = j$$

である。

$(\mathbf{Z}, <)$ と D' の間には p-モルフィズムが存在しないので定理 3.3 に変る次の定理 5.1 を考える。

定理 5.1
A が $(\mathbf{Z}, <)$ において成り立つならば A は A-good な付値 V に対しすべての good-ダンベルで成り立つ。

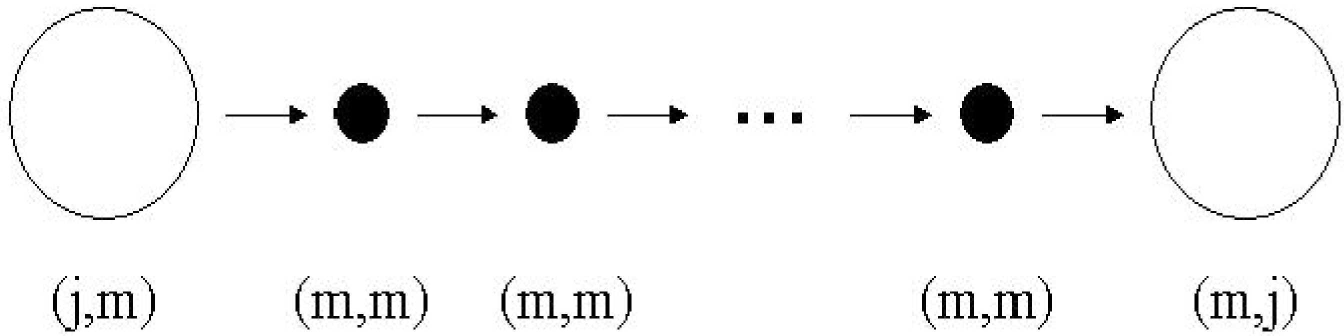

図 15: good-ダンベルの例

証明
対偶を用いて示す。
与えられた good-ダンベル $D' = (S, R)$ の A-good な付値に対し、整数フレーム $F = (\mathbf{Z}, <)$ の付値 W をうまく定めることにより

$$\exists x \in S \text{ に対し } x \notin V(A) \text{ ならば } \exists z \notin \mathbf{Z} \text{ に対し } z \in W(A)$$

を示す。

写像 $h : Z \to S$ を図 16 のように定める。正確には次のように定義する。

- $0 \leq i \leq n-1$ のとき

$$h(i) = x_{i+m+1}$$

- $i < 0$ のとき

$$h(-i - a \cdot m) = x_i$$

- $i > n-1$ のとき

$$h(-i - (m+1) + a \cdot (k+1)) = x_i$$

ここを付値 W を

$$W(p) = h^{-1}(V(p))$$

と定義する。すなわち

$$z \in W(p)(\Leftrightarrow z \in h^{-1}(V(p))) \Leftrightarrow h(z) \in V(p)$$

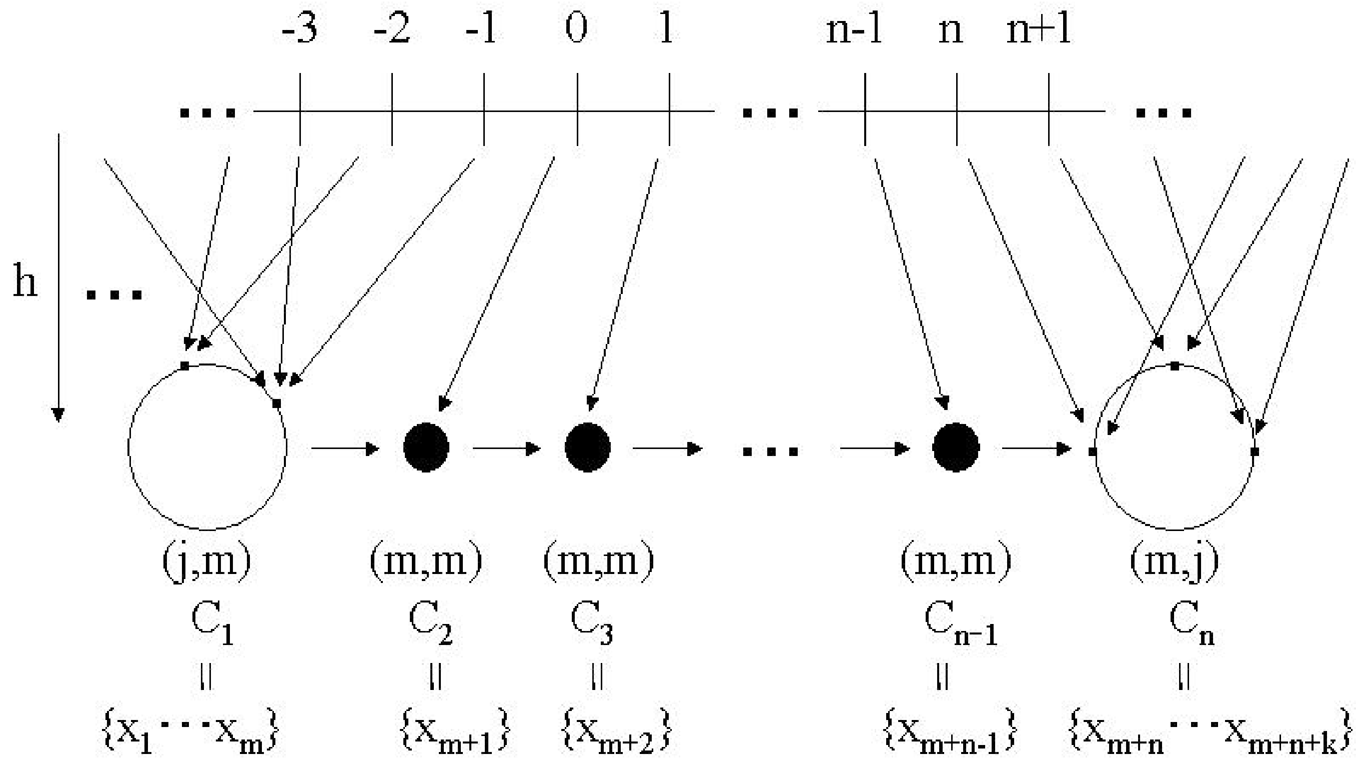

図 16: $(\mathbf{Z},<)$ から good-ダンベルへの写像

となる。A の部分論理式 D に対し、すべての z について

$$z \in W(D) = h(z) \in V(D)$$

を帰納法で示す。$D = B \wedge C$ とする。
$z \in W(B \wedge C)$ と仮定する。

$\Leftrightarrow z \in W(B)$ かつ $z \in W(C)$

$\Leftrightarrow h(z) \in V(B)$ かつ $h(z) \in V(C)$

$\Leftrightarrow h(z) \in W(B \wedge C)$

$D = \langle F \rangle B$ とする。

- $z \in W(\langle F \rangle B)$ と仮定する。

$$\Leftrightarrow \exists u(z < u \;\&\; u \in W(B))$$

帰納法の仮定より

$$\Leftrightarrow \exists u(z < u \ \& \ h(u) \in V(B))$$

$z < u$ ならば $h(z)Rh(u)$ だから、$y = h(u)$ とおくと

$$\Rightarrow \exists y(h(z)Ry \ \& \ y \in V(B))$$

よって

$$\Leftrightarrow h(z) \in V(\langle F \rangle B)$$

- $h(z) \in V(\langle F \rangle B)$ と仮定する。

$$\Leftrightarrow \exists w(h(z) < w \ \& \ w \in V(B))$$

1. $h(z) \notin C_1$ の場合。
   すると
   $$\exists y(w = h(y) \ \& \ z < y)$$
   となる。
   $$\Rightarrow \exists y(z < y \ \& \ h(y) \in V(B))$$
   帰納法の仮定より
   $$\Leftrightarrow \exists z(z < y \ \& \ y \in W(B))$$
   $$\Leftrightarrow h^{-1}(z) \in W(\langle F \rangle B)$$

2. $h(z) \in C_1$ の場合
   * $w \notin C_1$ ならば
     $$h(y) = w$$
     となる y に対し
     $$z < y$$
     が成り立つ。よって 1. と同様に示すことができる。
   * $w \in C_1$ の場合
     例えば
     $$h(-1)Rw \text{ かつ } w \in C_1$$
     のとき $-1 < y$ となる y で $h(y) = w$ となるものをとることができない。
     ただし今、D' は good-ダンベルだから
     $$t_1 C_1 = j$$

となる。さらに V は A-good であるから

$$C_1 \cap V(B) = \emptyset$$

となる。$w \in C_1$ だから $w \notin maxV(B)$ となる。すなわち

$$\exists t(t \in V(B) \ \& \ \neg tRw)$$

である。よって

$$t \notin C_1$$

ここで

$$tRh(z)$$

とすると $h(z) \in C_1$ より

$$t \in C_1$$

となり矛盾する。よって

$$h(z)Rt \ \& \ t \in V(B)$$

となる。ある v に対し $t = h(v)$ とすれば

$$z < v$$

となり

$$\exists v(zRv \ \& \ h(v) \in V(B))$$

帰納法の仮定より

$$\exists v(zRv \ \& \ v \in W(B))$$

よって

$$z \in W(\langle F \rangle B)$$

となる。

$\langle P \rangle B$ についても同様に証明できる。
よって

$$h(z) \in V(D) \ \Leftrightarrow \ z \in W(D)$$

となる。
ここで論理式 E が good-ダンベル D' で偽と仮定する。すなわち、ある要素 $a \in S$ に対し

$$a \notin V(E)$$

となる。h は上への写像であるから

$$h(b) = a$$

となる $b \in \mathbf{Z}$ が存在する。よって $z = b$、$D = E$ とすれば

$$\mathbf{Z} \notin W(E)$$

が得られ、対偶が示された。

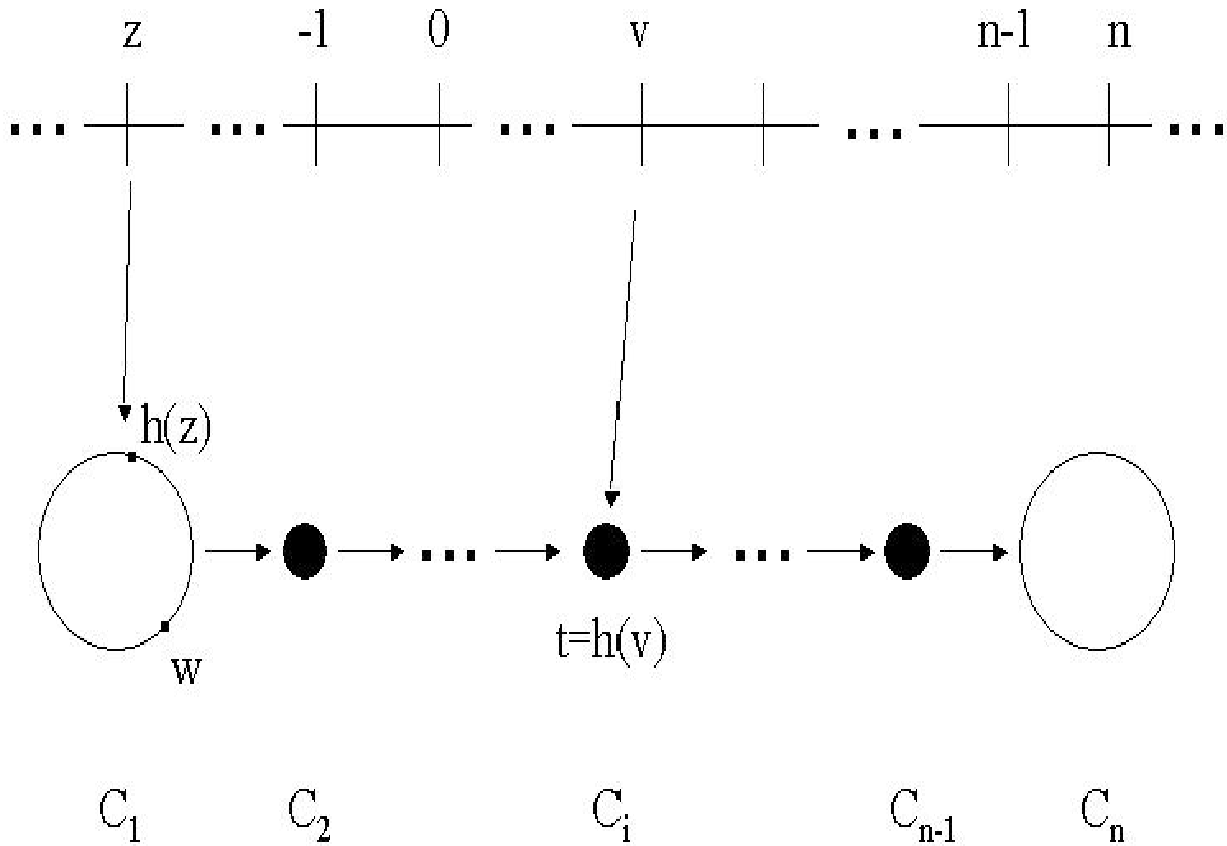

図 17: φ-good より $h^{-1}(z') \in V(B)$ となるある z' が存在

定理 5.1 より論理 L が $(\mathbf{Z}, <)$ に関して完全であることを示すには good-ダンベルのクラスに関して完全であることを示せばよい。

命題 5.1
L で証明できない論理式 A に対し、ある good-ダンベルで偽になる。

証明
まず $\nvdash_L A$ と仮定する。

1. $\nvdash_L A$ よりある s_A で $M^L \not\models_{s_A} A$ となる。ただし、$M^L = (S^L, R^L, V^L)$ はカノニカル・モデルである。

2. 補助定理 3.2 より $M \not\models_{s_A} A$ となる。ここで、$M = (S, R, V)$ は s_A によって生成された M^L のサブモデルとする。

3. 補助定理 3.6 より $M^\tau \not\models_{|s_A|} A$ となる。$\Gamma = Sf(A)$ とし、$M^\tau = (S_\Gamma, R^\tau, V_\Gamma)$ を M の推移的な Γ-Filtration とする。

4. 補助定理 4.1 より $M' \not\models_{s_A} A$ となる。$M' = (S_\Gamma, R', V_\Gamma)$ とする。ここで R' は

$$xR'y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1. & x <_C y \; x, y \in C \text{ のとき} \\ & (\text{ただし、} C \text{ は両端以外の非退化クラスタ}) \\ 2. & xR^\tau y(\text{その他}) \end{array}$$

M' は補助定理 3.7 と 3.8 より最初と最後のクラスタは非退化クラスタとなり、それ以外のクラスタは退化クラスタとなる。

命題 5.2
M' のクラスタ付値を図 15 のように定めれば、V_Γ は A-good であり、M' は good-ダンベルになる。

証明
$t_1 C_1 = j$ のときを考える。
$B = \langle F \rangle B'$ に対して $B \in sub(A) \subseteq \Gamma$ かつ $C_1 \cap max_R(B') \neq \emptyset$ と仮定する。これはすべての $i > 1$ に対して

$$C_i \cap V(B') = \emptyset \cdots (+)$$

を意味する。ここで

$$|t| \in V_\Gamma(B')$$

となるような任意の $|t| \in C_1$ を取ってくる。補助定理 4.1 より

$$t \in V(B')$$

となる。したがって sRt となるすべての s に対して

$$s \in V(\langle F \rangle B')$$

となる。sRt より

$$|s| \in C_1$$

となる。ここで 3.7 を言い換えると、$C_{|s|}$ を最後でない R^τ クラスタとし、もし $\langle F \rangle B' \in \Gamma$ かつ $M \models_s \langle F \rangle B'$ ならば、$M \models_t B'$ かつ $C_{|s|} < C_{|t|}$ となる $t \in S$ が存在することになる。しかしこれは (+) に矛盾する。よって

$$C_1 \cap max_R(B') = \emptyset$$

となり、V_Γ は A-good となる。
$t_2 C_n = j$ についても同様に証明できる。

good-ダンベル D' で

$$D' \not\models_{s_A} A$$

だから定理 5.1 よりある $z \in \mathbf{Z}$ に対し

$$Z \not\models_z A$$

となり対偶が示された。以上のことより

$$L \supseteq L(\langle \mathbf{Z}, < \rangle)$$

となる。

6 まとめと今後の課題

離散時間論理 LinDisc（本研究では L とする）は Goloblatt によって完全性が与えられていた。しかし、その完全性の証明に対して次に 2 つのギャップをが存在した。

1. 整数フレームからダンベルへの p-モルフィズムが存在しない
2. ダンベルにおいて LinDisc の公理 Z_F、Z_P が恒真でない

よって本研究では F.Wolter[6] によって使われたクラスタ付値を導入した。そのクラスタ付値を用い good-ダンベルを考え、Goldblatt の定理 3.3 に変る定理 5.1 を与えた。そして Goldblatt と同様の方法で L で証明できない論理式 A がある good-ダンベルで偽になること示した。5.4、5.5 で述べたこととあわせると

$$L = L(\langle \mathbf{Z}, < \rangle)$$

が成り立つから離散時間論理の完全性、特に L 見つかったのではちょうどフレーム $(\mathbf{Z}, <)$ が定める論理と一致する。
また同時に有限な「good-ダンベル」で偽になるモデルが見つかったので有限モデル性が示された。
今後の課題としてその他の Goldblatt により与えられた完全性の証明への適用、分岐時間論理に対する離散時間論理への適用を考えたい。

参考文献

[1] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[2] D.M.Gabbay, I.Hodkinson, M.Reynolds, *Temporal Logic, MFCA(vol.1)*, Oxford University, 1994.

[3] Robert Goldblatt, *Modal logics of computation*, Victoria University of Wellington, draft.

[4] Robert Goldblatt, *Logic of Time and Computation*, Center for the Study of Language and Information, 1992.

[5] I.Hodkinson, *Monadic framents of first-order temporal logic*, Imperial College London, draft.

[6] Frank Wolter, *Mathematical logic quarterly, vol.42*, (1996), pp.145-171.

[7] M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagrov, *Advanced Modal Logic. In Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, vol.3*, Kluwer Academic Publishers, 2001, pp.83-266..

[8] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[9] 内野 幸治, 時間論理とその表現可能性, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2003.

謝辞

本研究を行うにあたり熱心に御指導下さいました小野寛晰教授に深く御礼申し上げます そして数多くのセミナーや定理、証明のアイデアを与えて下さった Litak Tadeusz Michal さんに深く感謝致します。

また M1 セミナーで御指導、シゴキをくださいました浜野正浩助手、アドバイスを下さいました木原均さん、今井司道さん、ジャンプ、サンデー、マガジンでお世話になった相馬大輔さんには感謝いたします。続いて常々日ごろから勇気付けていただきました、かつ tex でお世話になった東大生、天野俊一君、同じ自宅生の寂しさを分かち合った鶴見卓也君、M1 の厳しく辛いゼミを一緒に乗り越えた元井幸一君、渡辺和寿君、その他小野研究室の皆様、本当にありがとうございます。

また研究を影から支えてくれました

- 北陸フライングディスクチーム「インエスフェルト」の
  - 富山:チチノセさん、ジャパンさん、たっちゃんさん、ひらっち
  - 石川:晩御飯までお世話になった小坂夫妻、ラブリー高野千佳さん
  - 福井:塚歯さん、スマイル一番みつじさん、筋肉一番村瀬さん
  - いつも楽しみに拝見していた ToyamaFlingDiscNews
- 2 年間 1 つ屋根の下で暮らしたロリコン千原陽平、チキン野郎山下耕司
- その他 Jaist の
  - インチキ韓流スタードンウック、ベッカムエディ、フィーゴなまず
  - 平井堅つよし、クッキングパパ
  - ルビーモネロユキコ、朝青龍ノリコ
- 鶴来の家をお貸しくださいました大家さん
- その他石川の皆様、

ありがとうございます。石川の厳しい天気にも負けることなく無事に研究を終えることができました。

石川に来て早 2 年、ボード、ディスク、研究 $\cdots$ 本当に充実した 2 年を送ることができました。これも皆様のおかげです。

最後にこのこの言葉を最愛の人に捧げたいと思います。

明日に輝け*!*夢にときめけ*!!*

I Love Hitoe!!!